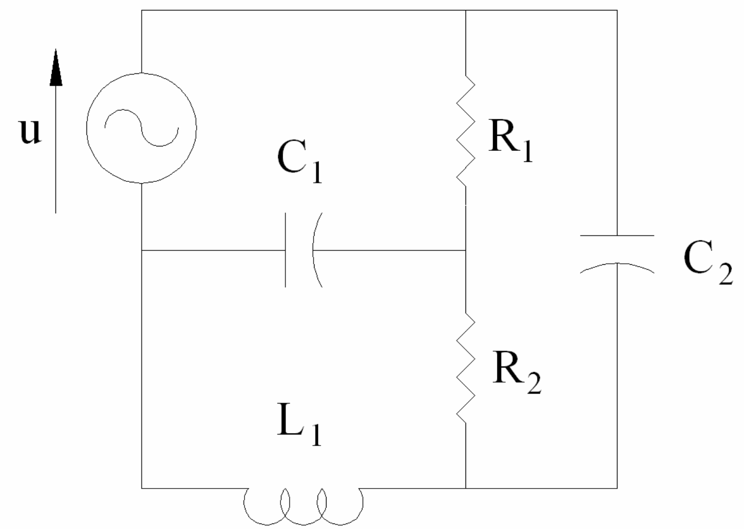
Fondamenti di Automatica 12 Luglio 2007 – B

Studente:____ Matricola:__________________



1) Calcolare una rappresentazione i-s-u e la f.d.t. del circuito elettrico in figura, considerando come ingresso, u, la tensione fornita dal generatore e come uscita, y, la corrente sul resistore R_2.

2) Calcolare l'espressione analitica e tracciare l'andamento qualitativo della risposta indiciale del sistema

$$F(s) = \frac{20(s+2)}{(s+5)(s+8)}$$

3) Tracciare i diagrammi di Bode della f.d.t.

$$G(s) = \frac{s^2(2+s)}{s^2 - 2s + 10}$$

4) Classificare i seguenti sistemi secondo la proprietà di stabilità, motivando brevemente la scelta effettuata

$$a)\quad \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} u \qquad\qquad b)\quad \dot{x} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & -\frac{5}{4} \\ -66 & 15 \end{pmatrix} x$$

$$c)\quad W_1(s) = \frac{1 + \frac{5}{4}s}{s(s^2 + 13s + 30)} \qquad\qquad d)\quad W_2(s) = \frac{2s+1}{s^2(s^2 + s - 6)}$$

Tempo a disposizione: 2,5 ore.

Esercizio 1)

Scegliamo le seguenti variabili di stato

$$x_1 = V_{C1}, \quad x_2 = V_{C2}, \quad x_3 = i_{L1}.$$

Dai bilanci di tensione/corrente alle maglie/ai nodi otteniamo le seguenti equazioni

a) $u = x_1 + R_1 i_{R1}$

b) $x_1 = R_2 i_{R2} + V_{L1}$

c) $R_1 i_{R1} + R_2 i_{R2} = x_2$

d) $x_3 = C_2 \dot{x}_2 + i_{R2}$

e) $V_{L1} = L_1 \dot{x}_3 = -x_2 + u$

f) $C_1 \dot{x}_1 = i_{R1} - i_{R2}$

b),e) $\rightarrow$ $x_1 = R_2 i_{R2} + u - x_2$ $\rightarrow$ g) $i_{R2} = \frac{1}{R_2}(x_1 + x_2 - u)$

a) $\rightarrow$ h) $i_{R1} = -\frac{1}{R_1}x_1 + \frac{1}{R_1}u$

f),g),h) $\rightarrow$ $C_1\dot{x}_1 = -\frac{1}{R_1}x_1 + \frac{1}{R_1}u - \frac{1}{R_2}(x_1 + x_2 - u) = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)x_1 - \frac{1}{R_2}x_2 + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)u$

$\rightarrow$ $\dot{x}_1 = -\left(\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_1}\right)x_1 - \frac{1}{R_2C_1}x_2 + \left(\frac{1}{R_1C_1} - \frac{1}{R_2C_1}\right)u$ (1^a eq. del sistema)

d),g) $\rightarrow$ $\dot{x}_2 = \frac{1}{C_2}x_3 - \frac{1}{R_2C_2}(x_1 + x_2 - u) = -\frac{1}{R_2C_2}x_1 - \frac{1}{R_2C_2}x_2 + \frac{1}{C_2}x_3 + \frac{1}{R_2C_2}u$ (2^a eq. del sistema)

e) $\rightarrow$ $\dot{x}_3 = -\frac{1}{L_1}x_2 + \frac{1}{L_1}u$ (3^a eq. del sistema)

L'uscita è data da

$$y = i_{R2} = \frac{1}{R_2}(x_1 + x_2 - u)$$

Riscriviamo il sistema in forma matriciale:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_1}\right) & -\frac{1}{R_2C_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_2C_2} & -\frac{1}{R_2C_2} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & -\frac{1}{L_1} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{R_1C_1} - \frac{1}{R_2C_1}\right) \\ \frac{1}{R_2C_2} \\ \frac{1}{L_1} \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} & 0 \end{pmatrix} x - \frac{1}{R_2}u$$

La fdt si trova applicando la formula

$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

…(i calcoli vengono lasciati allo studente)

Esercizio 2)
Moltiplicando F(s) per la trasformata di Laplace di u(t) otteniamo

$$Y(s) = F(s)U(s) = \frac{20(s+2)}{(s+5)(s+8)} \cdot \frac{1}{s}.$$

Dopo aver scomposto in fratti semplici otteniamo

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{5}{s+8} + \frac{4}{s+5},$$

da cui, antitrasformando i singoli termini (vedi tabella delle trasformate di Laplace), si ottiene la risposta analitica

$$y(t) = \left[1 - 5e^{-8t} + 4e^{-5t}\right]1(t)$$

Andamento qualitativo

Valore iniziale: $y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = 0$

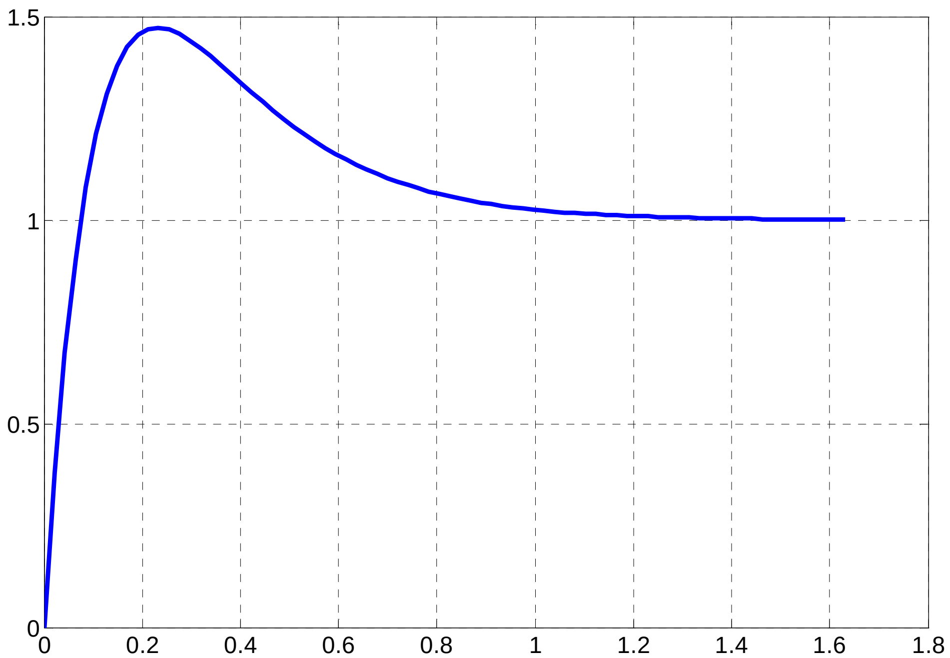
Valore iniziale della derivata: $y'(0) = \lim_{s\to\infty} s^2 Y(s) = +20$

Valore finale: $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = +1$

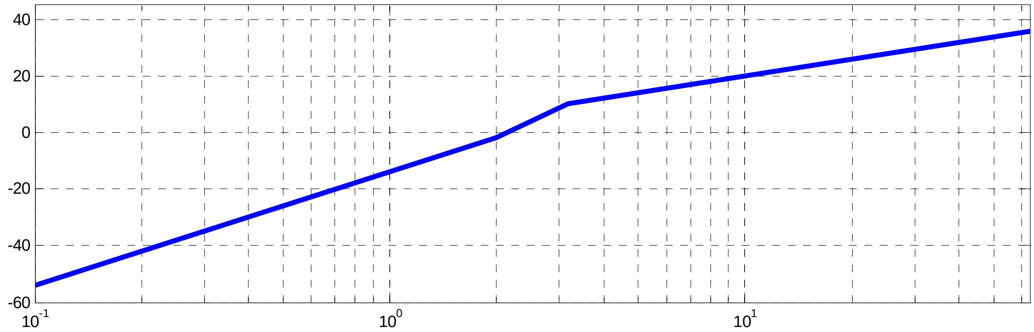
Tempo di assestamento: $T_{a1} = 4.6 \cdot \tau \cong 0.92\,\text{sec}$

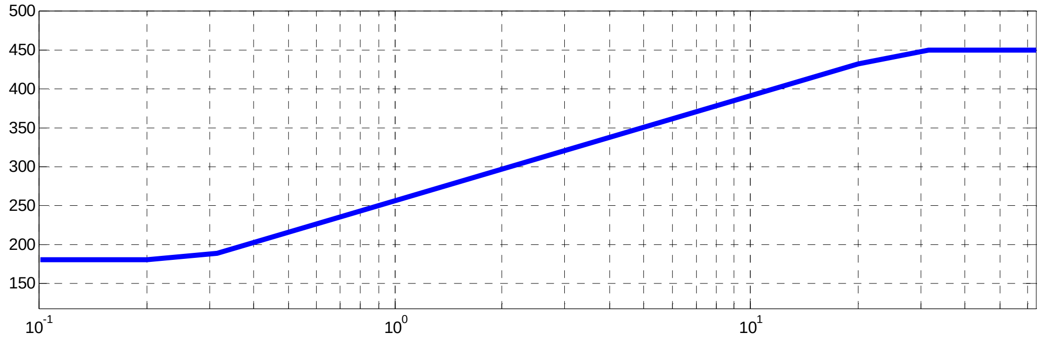
Si noti che la costante di tempo τ è quella del polo dominante (in -5).

L'andamento della risposta indiciale è mostrato in figura



Esercizio 3)
I diagrammi di Bode sono riportati in figura





Esercizio 4)

a) Instabile, la matrice A ha un autovalore a parte reale positiva in 3
b) Instabile, la matrice A ha un autovalore a parte reale positiva in 20.5 e uno in zero.
c) Semplicemente stabile, il sistema ha un polo in zero con molteplicità 1 e due poli a parte reale negativa
d) Instabile, il sistema ha un polo a parte reale positiva in 2.