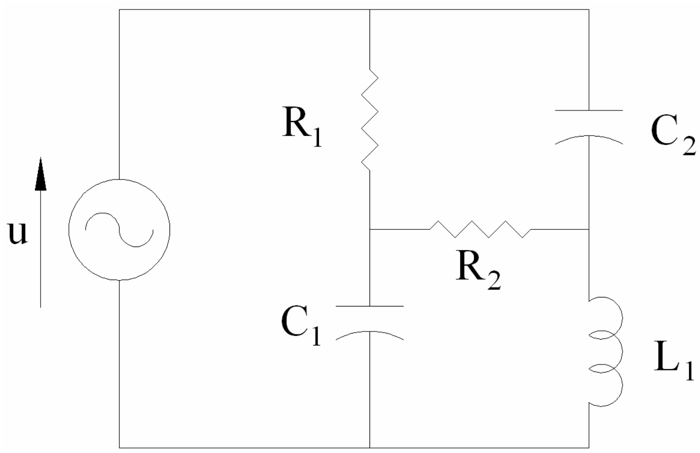
Fondamenti di Automatica 12 Luglio 2007 – C

Studente:____ Matricola:_________________



1) Calcolare una rappresentazione i-s-u e la f.d.t. del circuito elettrico in figura, considerando come ingresso, u, la tensione fornita dal generatore e come uscita, y, la corrente sul resistore R_1.

2) Calcolare l'espressione analitica e tracciare l'andamento qualitativo della risposta indiciale del sistema

$$F(s) = \frac{5(s+6)}{(s+3)(s+10)}$$

3) Tracciare i diagrammi di Bode della f.d.t.

$$G(s) = \frac{-5s(1-5s)}{s^2+2s+9}$$

4) Classificare i seguenti sistemi secondo la proprietà di stabilità, motivando brevemente la scelta effettuata

$$a) \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -3 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} x \qquad\qquad b) \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{14}{3} & -55 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} u$$

$$c) \quad W_1(s) = \frac{(1+0.5s)}{s(s^2+21s+108)} \qquad\qquad d) \quad W_2(s) = \frac{1-3s}{s^2\left(s+\frac{5}{4}\right)(s+1)}$$

Tempo a disposizione: 2,5 ore.

Esercizio 1)

Scegliamo le seguenti variabili di stato

$$x_1 = V_{C1}, \quad x_2 = V_{C2}, \quad x_3 = i_{L1}.$$

Dai bilanci di tensione/corrente alle maglie/ai nodi otteniamo le seguenti equazioni

a) $u = x_1 + R_1 i_{R1}$

b) $x_1 = R_2 i_{R2} + V_{L1}$

c) $R_1 i_{R1} + R_2 i_{R2} = x_2$

d) $x_3 = C_2 \dot{x}_2 + i_{R2}$

e) $V_{L1} = L_1 \dot{x}_3 = -x_2 + u$

f) $C_1 \dot{x}_1 = i_{R1} - i_{R2}$

b),e) $\rightarrow$ $x_1 = R_2 i_{R2} + u - x_2$ $\rightarrow$ g) $i_{R2} = \frac{1}{R_2}(x_1 + x_2 - u)$

a) $\rightarrow$ h) $i_{R1} = -\frac{1}{R_1} x_1 + \frac{1}{R_1} u$

f),g),h) $\rightarrow$ $C_1 \dot{x}_1 = -\frac{1}{R_1} x_1 + \frac{1}{R_1} u - \frac{1}{R_2}(x_1 + x_2 - u) = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) x_1 - \frac{1}{R_2} x_2 + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) u$

$\rightarrow$ $\dot{x}_1 = -\left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1}\right) x_1 - \frac{1}{R_2 C_1} x_2 + \left(\frac{1}{R_1 C_1} - \frac{1}{R_2 C_1}\right) u$ (1ª eq. del sistema)

d),g) $\rightarrow$ $\dot{x}_2 = \frac{1}{C_2} x_3 - \frac{1}{R_2 C_2}(x_1 + x_2 - u) = -\frac{1}{R_2 C_2} x_1 - \frac{1}{R_2 C_2} x_2 + \frac{1}{C_2} x_3 + \frac{1}{R_2 C_2} u$ (2ª eq. del sistema)

e) $\rightarrow$ $\dot{x}_3 = -\frac{1}{L_1} x_2 + \frac{1}{L_1} u$ (3ª eq. del sistema)

L'uscita è data da

$$y = i_{R1} = \frac{1}{R_1}(u - x_1)$$

Riscriviamo il sistema in forma matriciale:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1}\right) & -\frac{1}{R_2 C_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & -\frac{1}{L_1} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{R_1 C_1} - \frac{1}{R_2 C_1}\right) \\ \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L_1} \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1} & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \frac{1}{R_1} u$$

La fdt si trova applicando la formula

$$W(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

…(i calcoli vengono lasciati allo studente)

Esercizio 2)
Moltiplicando F(s) per la trasformata di Laplace di u(t) otteniamo

$$Y(s) = F(s)U(s) = \frac{5(s+6)}{(s+3)(s+10)} \cdot \frac{1}{s}.$$

Dopo aver scomposto in fratti semplici otteniamo

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{5/7}{s+3} - \frac{2/7}{s+10},$$

da cui, antitrasformando i singoli termini (vedi tabella delle trasformate di Laplace), si ottiene la risposta analitica

$$y(t) = \left[1 - \frac{5}{7}e^{-3t} - \frac{2}{7}e^{-10t}\right]1(t) = \left[1 - 0.714e^{-3t} - 0.286e^{-10t}\right]1(t)$$

Andamento qualitativo

Valore iniziale: $y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = 0$

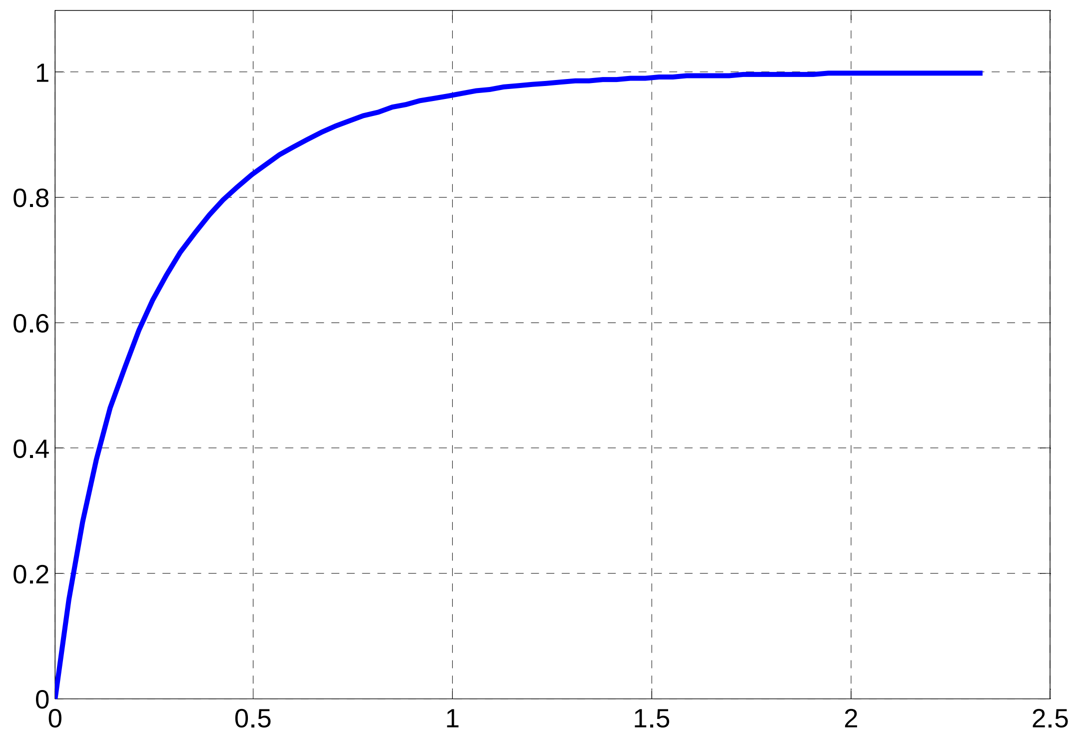
Valore iniziale della derivata: $y'(0) = \lim_{s\to\infty} s^2 Y(s) = +5$

Valore finale: $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = +1$

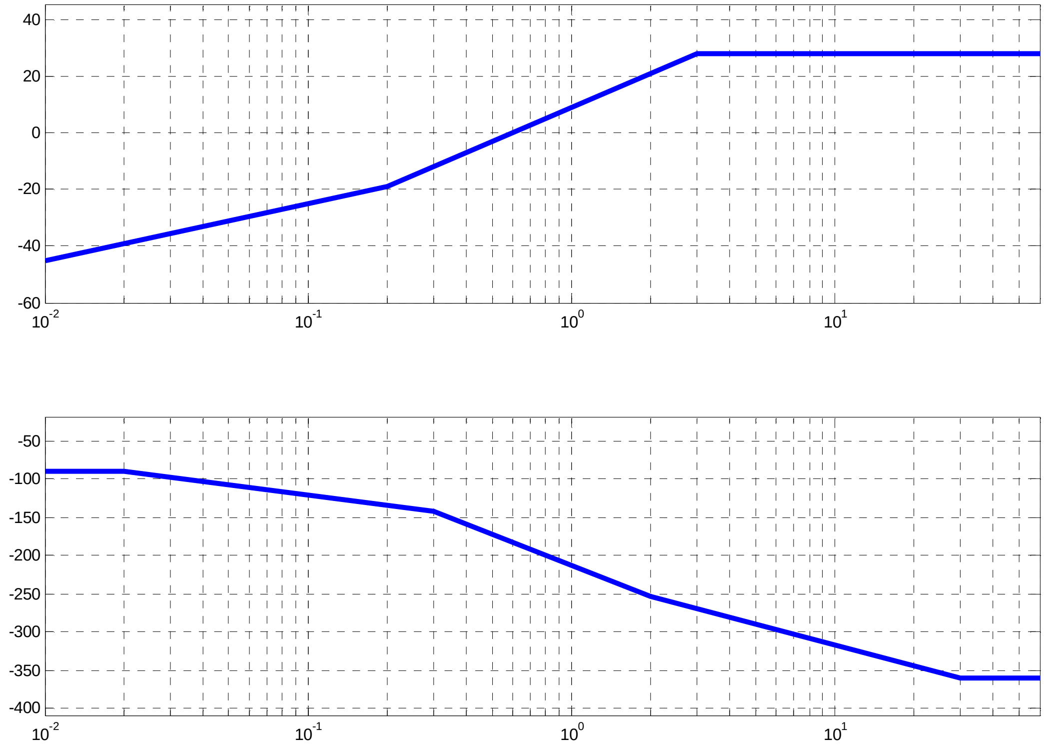
Tempo di assestamento: $T_{a1} = 4.6\tau \cong 1.5\,\mathrm{sec}$

Si noti che la costante di tempo τ è quella del polo dominante (in -3).

L'andamento della risposta indiciale è mostrato in figura



Esercizio 3)
I diagrammi di Bode sono riportati in figura



Esercizio 4)

a) Instabile, la matrice A ha un autovalore a parte reale positiva in 1.25 e uno in zero.
b) Asintoticamente stabile, la matrice A ha due autovalori a parte reale negativa in -1 e -3.
c) Semplicemente stabile, il sistema ha un polo in zero di molteplicità 1 e due poli a parte reale negativa in -9 e -12.
d) Instabile, il sistema ha un polo in zero di molteplicità 2.