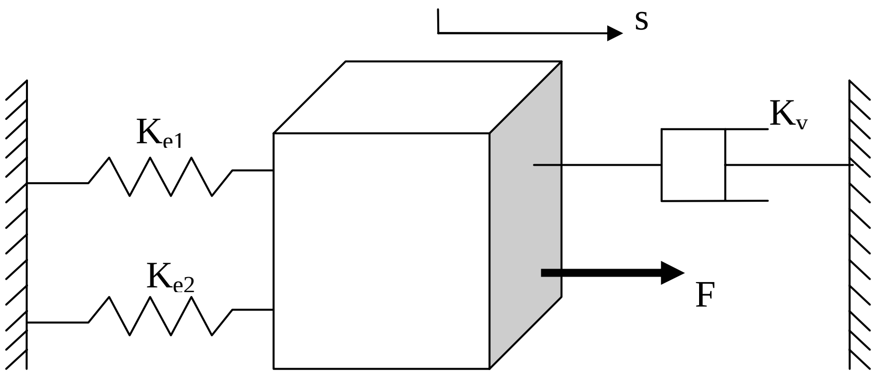
Fondamenti di Automatica - 12 Marzo 2007 - C

Studente:____ Matricola:__________________



1) Calcolare una rappresentazione i-s-u e la f.d.t. del sistema in figura, considerando come ingresso la forza applicata, F, e come uscita lo spostamento della massa, s.

2) Calcolare l'espressione analitica e tracciare l'andamento qualitativo della risposta indiciale del sistema

$$F(s) = \frac{(2s+1)}{(s^2+4.6s+2.4)}.$$

3) Classificare i seguenti sistemi secondo la proprietà di stabilità, motivando brevemente la scelta effettuata.

a) $W_2(s) = \dfrac{(1-0.5s)}{2s^2+3s+1}$ b) $W_1(s) = \dfrac{(2-s)}{(s^2+3s+10)s^2}$

c) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$, $y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x$

d) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$, $y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} x$

e) $W_3(s) = \dfrac{(s-3)}{s^2-2s+10}$

4) Tracciare i diagrammi di Bode della f.d.t.

$$L(s) = -\frac{5(1-5s)}{(s^2-0.7s+1)}$$

Tempo a disposizione: 2.5 ore

Esercizio 1)

Ricaviamo il modello i-s-u del sistema applicando la II legge della dinamica:

$$F - k_{e1}s - k_{e2}s - k_v\dot{s} = m\ddot{s}$$

Ponendo $x_1 = s$, $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{s}$, $F = u$ e $y = x_1$, si ricava il modello i-s-u:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(k_{e1}+k_{e2})/m & -k_v/m \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

La f.d.t si ricava da:

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & -1 \\ (k_{e1}+k_{e2})/m & s + k_v/m \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\begin{pmatrix} s & -1 \\ k_{e1}+k_{e2}/m & s + k_v/m \end{pmatrix}}{s\left(s + k_v/m\right) + (k_{e1}+k_{e2})/m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{s^2 m + s k_v + k_{e1} + k_{e2}}$$

Esercizio 2)

La trasformata della risposta indiciale è

$$Y(s) = \frac{(2s+1)}{(s^2+4.6s+2.4)} \cdot \frac{1}{s},$$

che può essere fattorizzata nella forma

$$Y(s) = \frac{(2s+1)}{s(s^2+4.6s+2.4)} = \frac{0.417}{s} + \frac{0.098}{s+0.6} - \frac{0.515}{s+4}.$$

Anti-trasformando i singoli termini troviamo l'espressione analitica

$$\mathrm{y(t)} = [5/12 + 5/51 * \exp(-3/5 * t) - 35/68 * \exp(-4 * t)] \cdot 1(t).$$

<u>Andamento qualitativo</u>

Siamo nel caso di uno zero e due poli reali, con il polo in -4 molto più lontano dall'asse reale rispetto alla coppia zero-polo, rispettivamente in -0.5 e -0.6.

Lo zero, essendo di poco più vicino all'origine rispetto ai poli, determinerà una moderata sovraelongazione.

Lo zero determina una quasi-cancellazione del polo in bassa frequenza, per cui la dinamica iniziale sarà determinata dal polo più veloce, che presenta un residuo molto più grande. Successivamente la dinamica dell'esponenziale più veloce si estingue e si verifica uno slow-drift, ossia il sistema va a regime più lentamente rispetto al modo di evoluzione determinato dal polo in -4.

Le costanti di tempo associate ai due poli sono τ_1=1/0.6=1.67 s, τ_2=1/4=0.25 s.

Da quanto detto sopra si evince che il tempo di assestamento è

$$1.15 \text{ s} = 4.6\ \tau_2 < T_{a1} < 4.6\ \tau_1 = 7.67 \text{ s}$$

Una stima più precisa può essere data in questi casi dalla media dei due tempi di assestamento, ossia

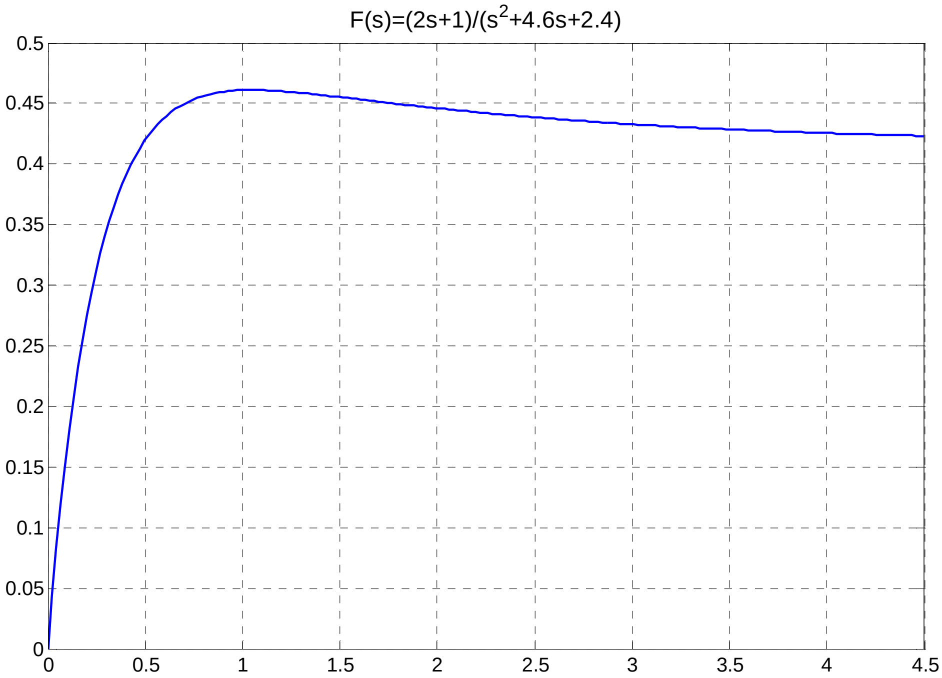
$$T_{a1} = 4.6 * (\tau_1+\tau_2)/2 = 4.41 \text{ s}$$

Valore finale: $\lim_{s \to 0} sY(s) = 0.417$.

Valore iniziale: $\lim_{s \to \infty} sY(s) = 0$.

Pendenza iniziale: $\lim_{s \to \infty} s^2 Y(s) = 2$.

L'andamento qualitativo è riportato in figura.

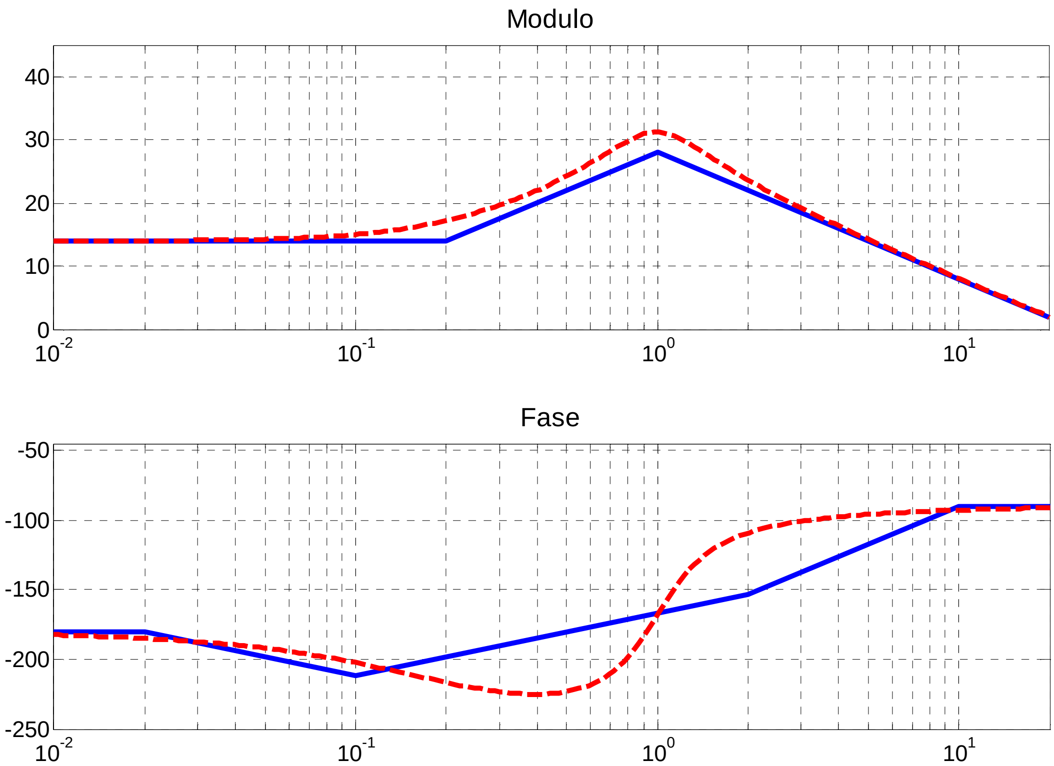


Esercizio 3)

a) I poli del sistema sono -1, -0.5. Il sistema è **asintoticamente stabile** poiché tutti i poli sono a parte reale negativa.
b) I poli del sistema sono -1.5±2.78j, 0, 0. Il sistema è **instabile** poiché c'è un polo in zero con molteplicità maggiore di uno.
c) Gli autovalori della matrice A sono 5.7, -0.7. Il sistema è **instabile** poiché c'è un autovalore a parte reale positiva.
d) Gli autovalori della matrice A sono -11, 0. Il sistema è **semplicemente stabile** poiché c'è un autovalore a parte reale negativa ed uno in zero di molteplicità pari a uno.
e) I poli del sistema sono 1±3j. Il sistema è **instabile** poiché c'è una coppia di poli a parte reale positiva. Ciò si poteva concludere anche applicando la condizione necessaria di stabilità di Routh-Hurwitz.

Esercizio 4)

I diagrammi di Bode asintotici e reali sono riportati in figura



Modulo
40
30
20
10
0
10-2
10-1
100
101
Fase
-50
-100
-150
-200
-250
10-2
10-1
100
101