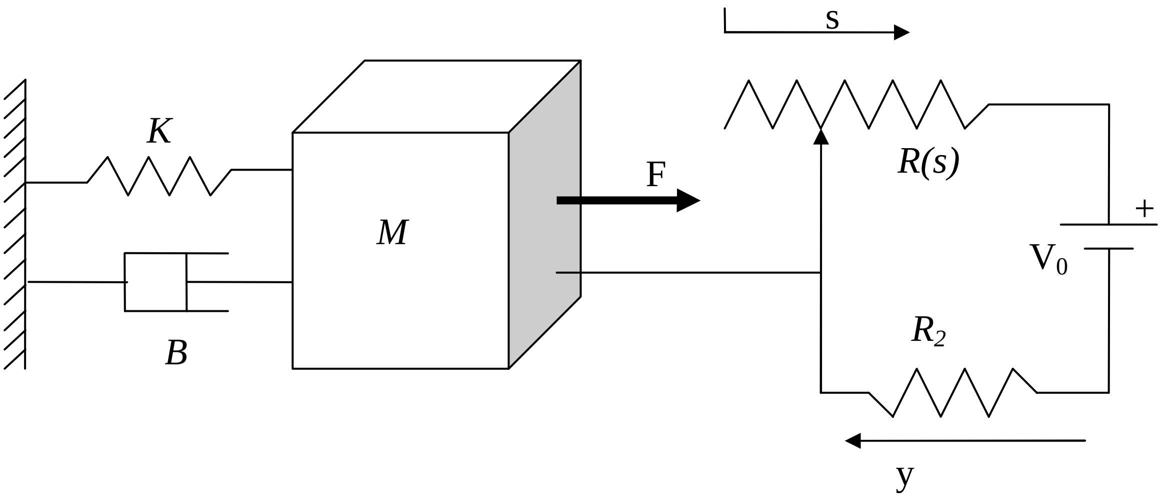
Fondamenti di Automatica - 20 Giugno 2007 – A-C-E

Studente:____ Matricola:_________________



1) Calcolare una rappresentazione i-s-u del sistema in figura, considerando come ingresso la forza, F, e come uscita la tensione sulla resistenza R_2. Si assuma che
   a. la resistenza del potenziometro, R(s), dipenda in maniera lineare dallo spostamento, *s*, secondo la legge (*L* è lo spostamento massimo misurabile)
   $$R(s) = R_1\left(1 - \frac{s}{L}\right)$$
   b. la posizione di equilibrio del sistema massa-molla-smorzatore coincida con $s=L/2$.

2) Dato il sistema
$$F(s) = \frac{(s+1)}{s(s+10)},$$
si calcoli
   a. l'espressione analitica della risposta al segnale u(t)=sin(2t);
   b. la risposta a regime al segnale u(t)=sin(3t).

3) Tracciare l'andamento qualitativo della risposta indiciale del sistema
$$F(s) = \frac{s(s+1)}{(s^2+5s+16)}$$

4) Tracciare i diagrammi di Bode della f.d.t.
$$L(s) = \frac{20(s-5)}{(s^2+31s+30)}$$

Tempo a disposizione: 2.5 ore

Esercizio 1)

Il sistema massa-molla-smorzatore è descritto dal sistema (vedi lucidi delle lezioni)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

Per trovare la tensione su R_2, basta applicare la legge del partitore di tensione, ossia

$$y = \frac{R_2}{R(s) + R_2} V_0 ,$$

quindi dalla relazione di R(s) si trova

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} u$$
$$y = \frac{R_2}{R_2 + R_1\left(1 - \frac{x_1}{L}\right)}$$

che è la rappresentazione i-s-u (nonlineare) del sistema.

Esercizio 2a)

Moltiplicando F(s) per la trasformata di Laplace di u(t) otteniamo

$$Y(s) = F(s)U(s) = \frac{(s+1)}{s(s+10)} \cdot \frac{2}{\left(s^2+4\right)} .$$

Dopo aver scomposto in fratti semplici otteniamo

$$Y(s) = \frac{0.05}{s} + \frac{0.0173}{(s+10)} - \frac{0.0673s - 0.1731}{\left(s^2+4\right)} ,$$

da cui, antitrasformando i singoli termini (vedi tabella delle trasformate di Laplace), si ottiene la risposta analitica

$$y(t) = \left[0.05 + 0.0173e^{-10t} - 0.0673\cos(2t) + 0.0865\sin(2t)\right]1(t)$$

Esercizio 2b)

Si ricordi che la risposta a regime di un sistema LTI, con fdt W(s), ad un ingresso sinusoidale $u(t)=U\sin(\omega_0 t+\varphi)$ è

$$y_r(t) = U\left|W(s)\right|_{s=j\omega_0} \sin\left(\omega_0 t + \varphi + \angle W(s)_{s=j\omega_0}\right),$$

quindi per calcolare la risposta a u(t)=sin(3t) è sufficiente calcolare il modulo e la fase della funzione di trasferimento F(s) per s=jω, con ω=3 rad/s, ossia

$$F(s)\big|_{s=j3} = \frac{j3+1}{j3(j3+10)} = 0.0826 - 0.0581j \Rightarrow \begin{cases} \left|F(s)\right|_{s=3j} = 0.101 \\ \angle F(s)_{s=3j} = -0.613\ rad = -35.1° \end{cases}$$

Esercizio 3)

La fdt

$$F(s) = \frac{s(s+1)}{(s^2+5s+16)}$$

ha una coppia di poli complessi e coniugati

$$\lambda_{1,2} = -2.5 \pm j3.12 \Rightarrow \omega_n = 4\,\text{rad/s}, \quad \zeta = 0.625$$

L'oscillazione ha periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \cong 2\sec,$$

e si estingue subito poiché ζ è molto alto.
Tempo di assestamento

$$T_{a1} = \frac{4.6}{\zeta\omega_n} = 1.8\sec$$

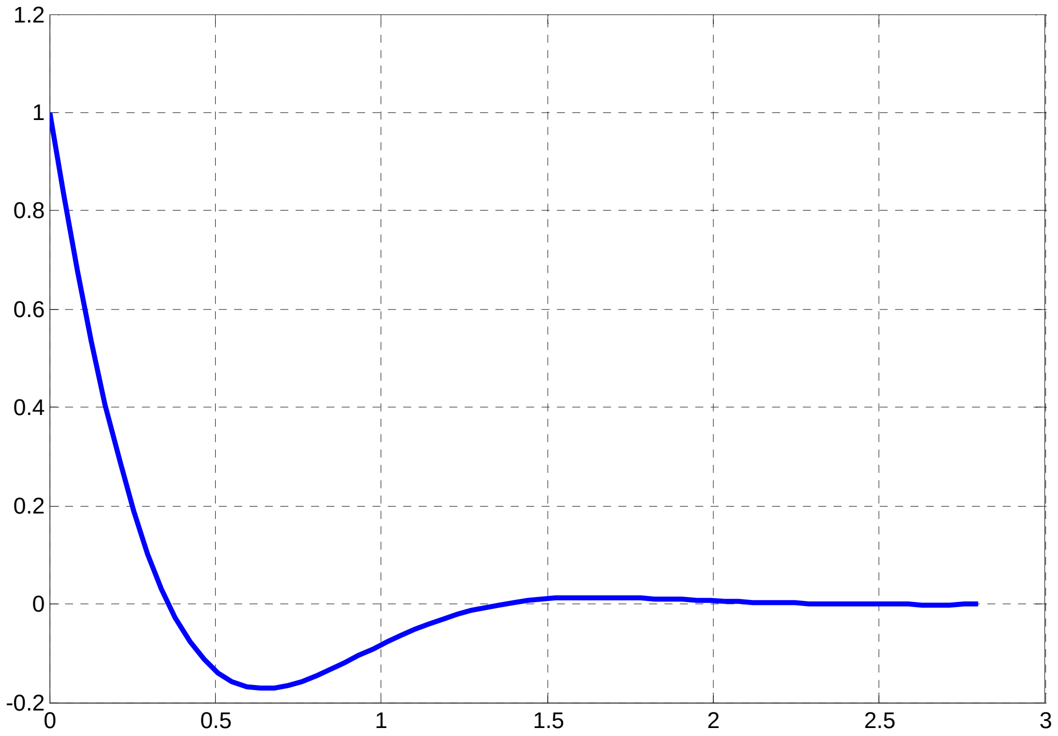
Teorema del valore iniziale

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} F(s) = 1$$

Teorema del valore finale

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} F(s) = 0$$

L'andamento è mostrato in figura.



Esercizio 4)

I diagrammi di Bode sono riportati in figura