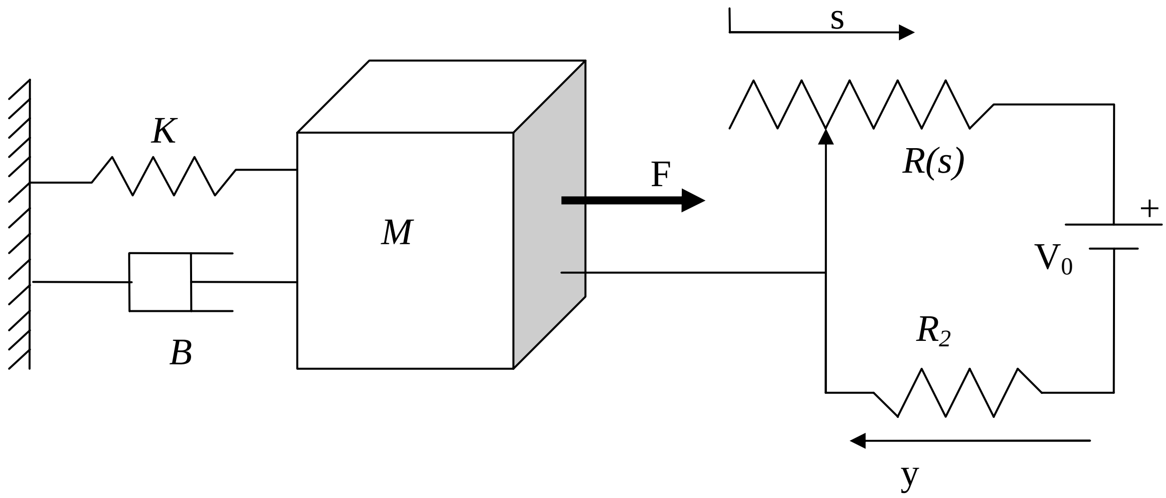
Fondamenti di Automatica - 20 Giugno 2007 – B-D-F

Studente:____ Matricola:_________________



1) Calcolare una rappresentazione i-s-u del sistema in figura, considerando come ingresso la forza, F, e come uscita la tensione sulla resistenza R_2. Si assuma che
    a. la resistenza del potenziometro, R(s), dipenda in maniera lineare dallo spostamento, s, secondo la legge (L è lo spostamento massimo misurabile)
    $$R(s) = R_1\left(1 - \frac{s}{L}\right)$$
    b. la posizione di equilibrio del sistema massa-molla-smorzatore coincida con $s=L/2$.

2) Dato il sistema
$$F(s) = \frac{(s+10)}{s(s+1)},$$
si calcoli
    a. l'espressione analitica della risposta al segnale u(t)=sin(2t);
    b. la risposta a regime al segnale u(t)=sin(3t).

3) Tracciare l'andamento qualitativo della risposta indiciale del sistema
$$F(s) = \frac{5s(s+30)}{(s^2+8s+100)}$$

4) Tracciare i diagrammi di Bode della f.d.t.
$$L(s) = \frac{100(s-20)}{(s^2+105s+500)}$$

Tempo a disposizione: 2.5 ore

Esercizio 1)

Il sistema massa-molla-smorzatore è descritto dal sistema (vedi lucidi delle lezioni)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

Per trovare la tensione su R_2, basta applicare la legge del partitore di tensione, ossia

$$y = \frac{R_2}{R(s) + R_2} V_0,$$

quindi dalla relazione di R(s) si trova

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} u$$
$$y = \frac{R_2}{R_2 + R_1\left(1 - \frac{x_1}{L}\right)}$$

che è la rappresentazione i-s-u (nonlineare) del sistema.

Esercizio 2a)

Moltiplicando F(s) per la trasformata di Laplace di u(t) otteniamo

$$Y(s) = F(s)U(s) = \frac{(s+10)}{s(s+1)} \cdot \frac{2}{\left(s^2+4\right)}.$$

Dopo aver scomposto in fratti semplici otteniamo

$$Y(s) = \frac{5}{s} - \frac{3.6}{(s+1)} - \frac{1.4s + 3.6}{\left(s^2+4\right)},$$

da cui, antitrasformando i singoli termini (vedi tabella delle trasformate di Laplace), si ottiene la risposta analitica

$$y(t) = \left[5 - 3.6e^{-t} - 1.8\sin(2t) - 1.4\cos(2t)\right]1(t)$$

Esercizio 2b)

Si ricordi che la risposta a regime di un sistema LTI, con fdt W(s), ad un ingresso sinusoidale $u(t)=U\sin(\omega_0 t+\varphi)$ è

$$y_r(t) = U\left|W(s)\right|_{s=j\omega_0} \sin\left(\omega_0 t + \varphi + \angle W(s)_{s=j\omega_0}\right),$$

quindi per calcolare la risposta a u(t)=sin(3t) è sufficiente calcolare il modulo e la fase della funzione di trasferimento F(s) per s=jω, con ω=3 rad/s, ossia

$$F(s)\big|_{s=j3} = \frac{j3+10}{j3(j3+1)} = 0.9 - 0.633j \Rightarrow \begin{cases} \left|F(s)\right|_{s=3j} = 1.1 \\ \angle F(s)_{s=3j} = -2.53\ rad = -145° \end{cases}$$

Esercizio 3)

La fdt

$$F(s) = \frac{5s(s+30)}{(s^2+8s+100)}$$

ha una coppia di poli complessi e coniugati

$$\lambda_{1,2} = -4 \pm j9.17 \Rightarrow \omega_n = 1\text{rad/s}, \quad \zeta = 0.4$$

L'oscillazione ha periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \cong 0.686\,\text{sec}\,,$$

e si estingue dopo un numero di oscillazioni ≈1/(2ζ)=1.25.
Tempo di assestamento

$$T_{a1} = \frac{4.6}{\zeta\omega_n} = 1.15\,\text{sec}$$

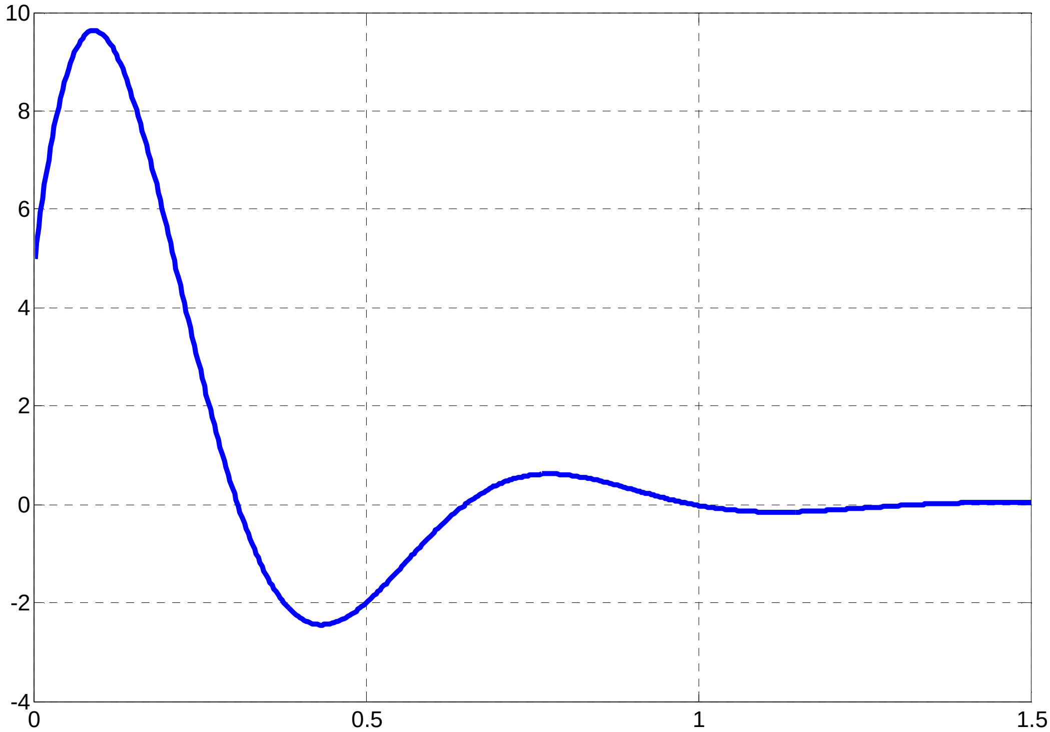
Teorema del valore iniziale

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} F(s) = 5$$

Teorema del valore finale

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} F(s) = 0$$

L'andamento è mostrato in figura.



Esercizio 4)

I diagrammi di Bode sono riportati in figura