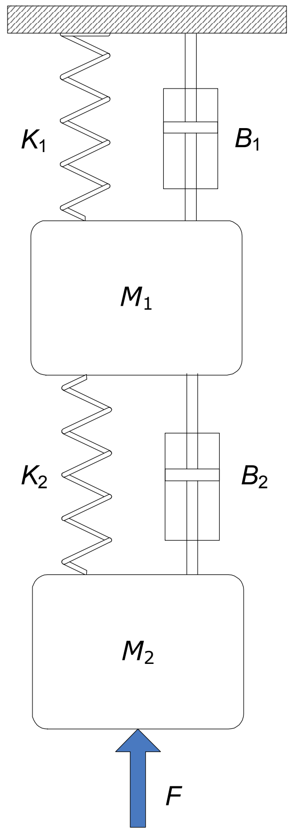
Fondamenti di Automatica – 7 Luglio 2010 – Traccia A

Studente:____ Matricola:_________________



1) Calcolare una rappresentazione i-s-u del sistema in figura, considerando come ingresso la forza F, e come uscita la quota della massa M_1 (si consideri anche la forza peso).

2) Calcolare l'espressione analitica e tracciare l'andamento qualitativo della risposta del sistema
$$F(s) = \frac{(6s-24)}{(5s^2+50s+800)}$$
a fronte di un segnale di ingresso u(t)=1(t).

3) Ricavare le f.d.t. dei seguenti sistemi e classificarli in base alla stabilità.

a) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u$, $\quad y = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} x$

b) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} u$, $\quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x + 2u$

c) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$, $\quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$

Per il sistema al punto c) discutere la stabilità al variare del parametro $a \in [-\infty \quad +\infty]$.

4) Tracciare i diagrammi di Bode della f.d.t.
$$L(s) = \frac{100s(s-5)}{(s^2+0.5s+1)(s-20)}$$

Tempo a disposizione: 2.5 ore

Esercizio 1)

Ponendo $x_1 = s_1$, $x_2 = \dot{s}_1$, $x_3 = s_2$, $x_4 = \dot{s}_2$ (dove gli spostamenti s_1, s_2 sono definiti positivi verso l'alto) otteniamo le equazioni di stato

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{K_1+K_2}{M_1}x_1 - \frac{B_1+B_2}{M_1}x_2 + \frac{K_2}{M_1}x_3 + \frac{B_2}{M_1}x_4 - g \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= \frac{K_2}{M_2}x_1 + \frac{B_2}{M_2}x_2 - \frac{K_2}{M_2}x_3 - \frac{B_2}{M_2}x_4 + \frac{u}{M_2} - g
\end{aligned}$$

dove g è l'accelerazione di gravità.
Per trovare la forma ISU, è necessario effettuare un cambio di variabili, prendendo come riferimento la condizione di equilibrio sotto la forza peso e con ingresso nullo. Per trovare l'equilibrio annulliamo le derivate, quindi avremo $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ e:

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{K_1+K_2}{M_1}x_1 + \frac{K_2}{M_1}x_3 - g \\
0 &= \frac{K_2}{M_2}x_1 - \frac{K_2}{M_2}x_3 - g
\end{aligned}$$

Dal sistema di due equazioni di sopra troviamo i valori di equilibrio

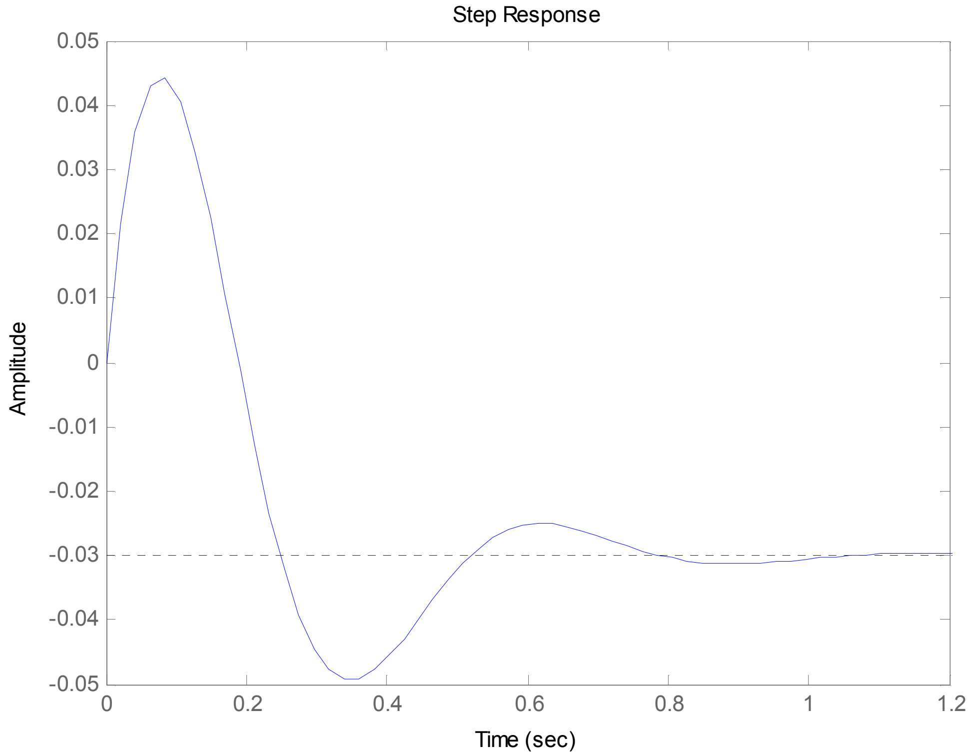
$$\begin{aligned}
\bar{x}_1 &= -\frac{M_1+M_2}{K_1}g \\
\bar{x}_3 &= -\left(\frac{M_1+M_2}{K_1} + \frac{M_2}{K_2}\right)g
\end{aligned}$$

Le nuove variabili di stato sono $\tilde{x}_1 = x_1 - \bar{x}_1$, $\tilde{x}_3 = x_3 - \bar{x}_3$, mentre x_2, x_4 rimangono invariate. La rappresentazione ISU è

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{x}}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{K_1+K_2}{M_1}\tilde{x}_1 - \frac{B_1+B_2}{M_1}x_2 + \frac{K_2}{M_1}\tilde{x}_3 + \frac{B_2}{M_1}x_4 \\
\dot{\tilde{x}}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= \frac{K_2}{M_2}\tilde{x}_1 + \frac{B_2}{M_2}x_2 - \frac{K_2}{M_2}\tilde{x}_3 - \frac{B_2}{M_2}x_4 + \frac{u}{M_2} \\
y &= x_1
\end{aligned}$$

Esercizio 2)

$$y(t) = \left[-0.03 + e^{-5t}\left(0.03\cos(11.62t) + 0.116\sin(11.62t)\right)\right] \cdot 1(t)$$



$\omega_n = 12.6$ rad/s $\quad \zeta = 0.395 \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1.2 \quad y(\infty) = -0.03$

$T_{a1} = 0.92$ s $\quad T_r = 0.54$ s $\quad T_{\min} = 0.27$ s

$S\% = 26\% \quad y_{\min} = -0.03(1+0.26) = -0.038$

N.B. In realtà la sottoelongazione è maggiore a causa dell'effetto derivativo dello zero a frequenza più bassa dei poli.

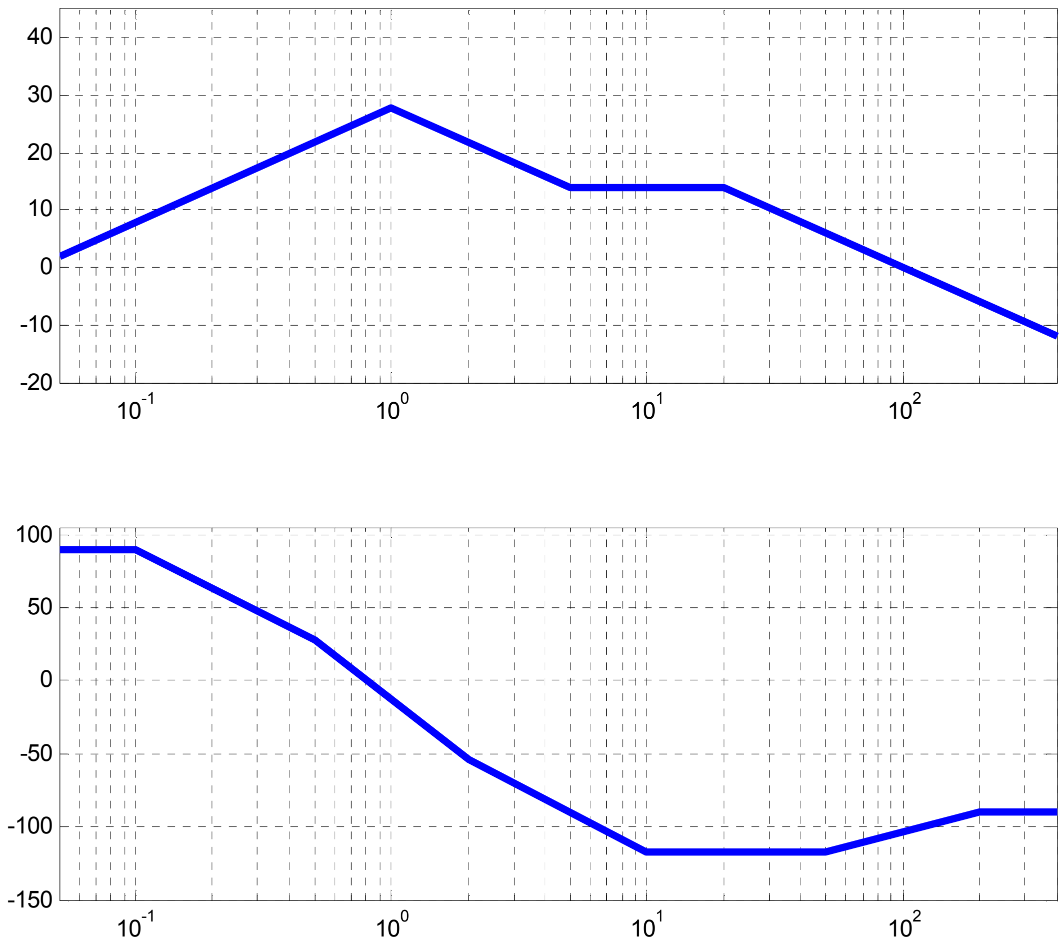
Esercizio 3)

a) $F(s) = \dfrac{4s+18}{s^2+5s+2}$ Autovalori: -4.5616, -0.4384 → Asint. Stab.;

b) $F(s) = \dfrac{2s^2+14s+34}{s^2+6s+13}$ Autovalori: -3 ± 2i → Asint. Stab.;

c) $F(s) = \dfrac{a}{s^2+s+a-2}$ Asint. Stab. per a>2.

Esercizio 4)


40
30
20
10
0
-10
-20
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
100
50
0
-50
-100
-150
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}