

## Fondamenti di Automatica – 7 Luglio 2010 – Traccia B

Studente: \_\_\_\_\_ Matricola: \_\_\_\_\_

- 1) Calcolare una rappresentazione i-s-u del sistema in figura, considerando come ingresso la forza  $F$ , e come uscita la quota della massa  $M_2$  (si consideri anche la forza peso).

- 2) Calcolare l'espressione analitica e tracciare l'andamento qualitativo della risposta del sistema

$$F(s) = \frac{(2s - 12)}{(4s^2 + 32s + 400)}$$

a fronte di un segnale di ingresso  $u(t)=1(t)$ .

- 3) Ricavare le f.d.t. dei seguenti sistemi e classificarli in base alla stabilità.

a)  $\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} u$   
 $y = (1 \ 1)x$

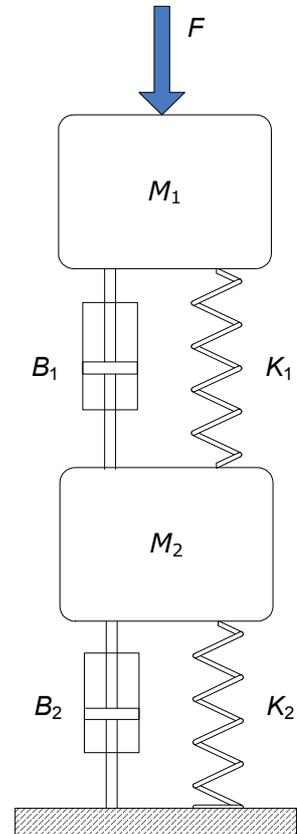
b)  $\dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$   
 $y = (1 \ 0)x + 3u$

c)  $\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$   
 $y = (1 \ 0)x$

Per il sistema al punto c) discutere la stabilità al variare del parametro  $a \in [-\infty \ +\infty]$ .

- 4) Tracciare i diagrammi di Bode della f.d.t.

$$L(s) = \frac{100(s+1)(s-5)}{s(s^2 - 30s + 900)}$$



**Tempo a disposizione: 2.5 ore**

### Esercizio 1)

Ponendo  $x_1 = s_1$ ,  $x_2 = \dot{s}_1$ ,  $x_3 = s_2$ ,  $x_4 = \dot{s}_2$  (dove gli spostamenti  $s_1, s_2$  sono definiti positivi verso l'alto) otteniamo le equazioni di stato

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{K_1}{M_1}x_1 - \frac{B_1}{M_1}x_2 + \frac{K_1}{M_1}x_3 + \frac{B_1}{M_1}x_4 - \frac{u}{M_1} - g \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{K_1}{M_2}x_1 + \frac{B_1}{M_2}x_2 - \frac{K_1 + K_2}{M_2}x_3 - \frac{B_1 + B_2}{M_2}x_4 - g\end{aligned}$$

dove  $g$  è l'accelerazione di gravità.

Per trovare la forma ISU, è necessario effettuare un cambio di variabili, prendendo come riferimento la condizione di equilibrio sotto la forza peso e con ingresso nullo. Per trovare l'equilibrio annulliamo le derivate, quindi avremo  $\dot{x}_2 = 0$ ,  $\dot{x}_4 = 0$  e:

$$\begin{aligned}0 &= -\frac{K_1}{M_1}x_1 + \frac{K_1}{M_1}x_3 - g \\ 0 &= \frac{K_1}{M_2}x_1 - \frac{K_1 + K_2}{M_2}x_3 - g\end{aligned}$$

Dal sistema di due equazioni di sopra troviamo i valori di equilibrio

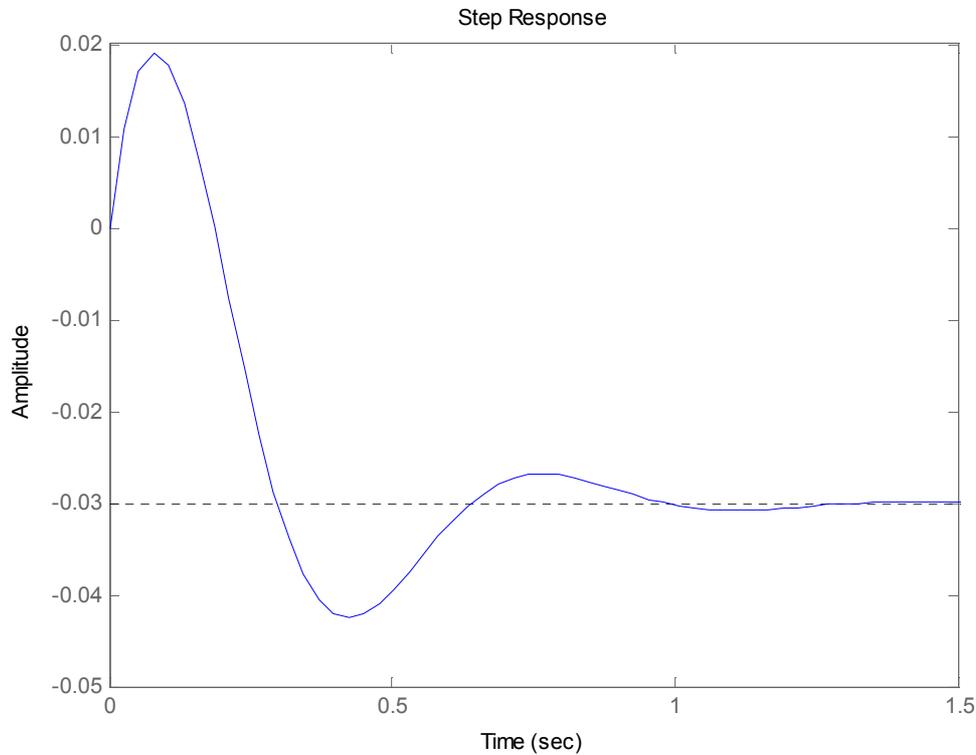
$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= -\left(\frac{M_1 + M_2}{K_2} + \frac{M_1}{K_1}\right)g \\ \bar{x}_3 &= -\frac{M_1 + M_2}{K_1}g\end{aligned}$$

Le nuove variabili di stato sono  $\tilde{x}_1 = x_1 - \bar{x}_1$ ,  $\tilde{x}_3 = x_3 - \bar{x}_3$ , mentre  $x_2, x_4$  rimangono invariate. La rappresentazione ISU è

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{K_1}{M_1}\tilde{x}_1 - \frac{B_1}{M_1}x_2 + \frac{K_1}{M_1}\tilde{x}_3 + \frac{B_1}{M_1}x_4 - \frac{u}{M_1} \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{K_1}{M_2}\tilde{x}_1 + \frac{B_1}{M_2}x_2 - \frac{K_1 + K_2}{M_2}\tilde{x}_3 - \frac{B_1 + B_2}{M_2}x_4 \\ y &= x_2\end{aligned}$$

### Esercizio 2)

$$y(t) = [-0.03 + e^{-4t}(0.03 \cos(9.165t) + 0.0676 \sin(9.165t))] \cdot 1(t)$$



$$\begin{aligned} \omega_n &= 10 \text{ rad/s} & \zeta &= 0.4 & y(0) &= 0 & y'(0) &= 0.5 & y(\infty) &= -0.03 \\ T_{al} &= 1.15 \text{ s} & T_r &= 0.68 \text{ s} & & & T_{\min} &= 0.34 \text{ s} \\ S\% &= 25\% & y_{\min} &= -0.03(1 + 0.25) = -0.0375 & & & & & & \end{aligned}$$

N.B. In realtà la sottoelongazione è maggiore a causa dell'effetto derivativo dello zero a frequenza più bassa dei poli.

### Esercizio 3)

a)  $F(s) = -\frac{s}{s^2 + 4s + 6}$

Autovalori:  $-2 \pm 1.414i \rightarrow$  Asint. Stab.;

b)  $F(s) = \frac{3s^2 + 16s + 30}{s^2 + 5s + 10}$

Autovalori:  $-2.5 \pm 1.936i \rightarrow$  Asint. Stab.;

c)  $F(s) = \frac{a}{s^2 + 2s + 1 - a}$

Asint. Stab. per  $a < 1$ .

**Esercizio 4)**

