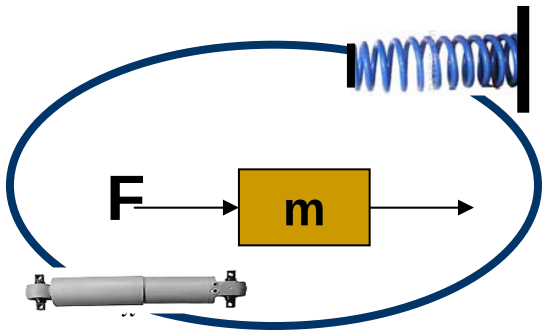
Richiami sulle Equazioni Differenziali

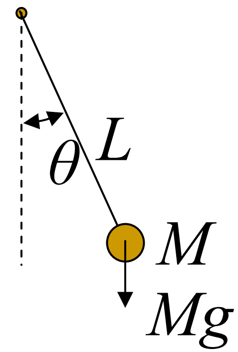
Ing. Alessio Merola

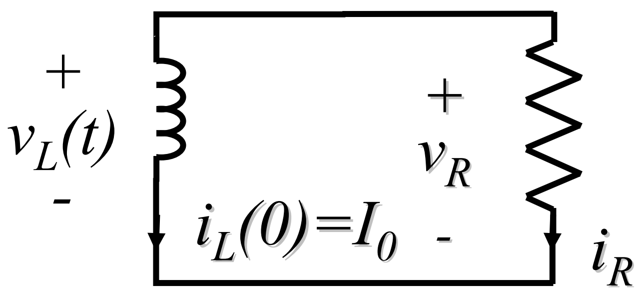
Laboratorio di Biomeccatronica

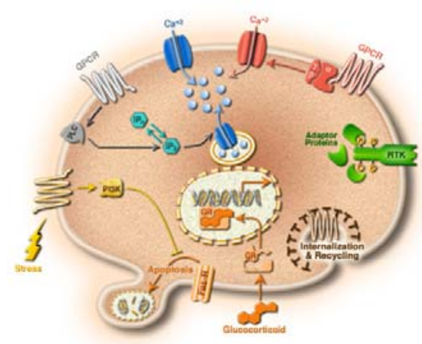
Generalità sulle Equazioni Differenziali

Rappresentazione matematica di fenomeni dinamici









Definizioni generali

Si dice **equazione differenziale di ordine n** ogni equazione che leghi una funzione incognita *y(t)* della variabile indipendente *t* alle sue derivate fino all'ordine *n* attraverso una assegnata funzione *F*, in generale dipendente da *t*,

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}^{(\mathbf{n})}, \mathbf{y}^{(\mathbf{n-1})}, \ldots, \dot{\mathbf{y}}, \mathbf{y}, \mathbf{t}) = \mathbf{0}$$

Un'equazione differenziale si dice in **forma normale o esplicita** se è possibile scriverla nella forma

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y, t)$$

Soluzione o integrale

Una soluzione dell'equazione è una funzione y = y(t) definita in un intervallo I tale che

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}^{(\mathbf{n})}, \mathbf{y}^{(\mathbf{n-1})}, \ldots, \dot{\mathbf{y}}, \mathbf{y}, \mathbf{t}) = \mathbf{0} \qquad \text{per ogni } t \in I$$

Soluzione o integrale

Un'equazione differenziale ammette infinite soluzioni.

ESEMPIO

$$\dot{y} = f(y,t)$$

Calcolando una soluzione approssimata, si ha

$$\frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{\Delta t} = f(y(t_k), t_k)$$

Quindi,

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + f(y(t_k), t_k)\Delta t$$

Integrale generale e particolare

L’insieme di tutte le soluzioni è definito **integrale generale** di un’equazione differenziale, rappresentato da una funzione del tempo definita a meno di una costante

$$\tilde{y}(t) = \varphi(t, k)$$

La soluzione passante per un punto (t_0, y_0) fissato è detta **integrale particolare**.

La condizione $y_0 = y(t_0)$ con cui si individua l'integrale particolare prende il nome di **condizione iniziale**.

L'integrale particolare si ottiene da quello generale ricavando il valore della costante k mediante la condizione iniziale.

Integrale generale e particolare

L'**integrale generale** di un'equazione differenziale di ordine *n* risulta definito a meno di *n* costanti determinabili imponendo *n* condizioni iniziali del tipo

$$y(t_0) = y_0, \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \quad y^{(2)}(t_0) = y_0^{(2)}, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Eq. diff. lineari a coefficienti costanti

Un'equazione differenziale è detta **lineare** se la funzione *F* è lineare rispetto alla funzione incognita *y* e a tutte le sue derivate che in essa compaiono.

La forma generale di una siffatta equazione è

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = b(t)$$

Se i coefficienti $a_1,\ldots,a_n$ non variano al variare del tempo, l'equazione differenziale è detta **lineare a coefficienti costanti**

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b(t)$$

Se $b(t)=0$, l'equazione è detta **omogenea**, altrimenti è detta **completa**.

Soluzione delle eq. diff. lineari, omogenee, a coefficienti costanti e reali

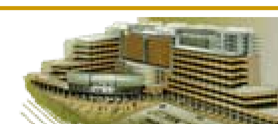
Data un'equazione differenziale omogenea lineare a coefficienti costanti reali del tipo

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = 0$$

Si dimostra che, se $y_1(t)$, $y_2(t)$,… $y_n(t)$ sono n integrali linearmente indipendenti, l'**integrale generale** è

$$y(t) = k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t) + \ldots + k_n y_n(t)$$

dove $k_1(t)$, $k_2(t)$,… $k_n(t)$ sono costanti arbitrarie.



Soluzione delle eq. diff. lineari, omogenee, a coefficienti costanti reali – Procedura di calcolo

1. Si determinano le soluzioni dell'equazione caratteristica associata
$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

2. Se λ_0 è una radice reale dell'eq. caratteristica con molteplicità m_i esistono m_i integrali indipendenti
$$e^{\lambda_0 t}, te^{\lambda_0 t}, \ldots, t^{r-1}e^{\lambda_0 t};$$

3. Se $\alpha_l \pm j\omega_l$ è una coppia di radici complesse dell'equazione caratteristica con molteplicità m_l esistono $2m_l$ soluzioni linearmente indipendenti
$$e^{\alpha t}\cos\beta t,\ te^{\alpha t}\cos\beta t, \ldots, t^{s-1}e^{\alpha t}\cos\beta t$$
$$e^{\alpha t}\sin\beta t,\ te^{\alpha t}\sin\beta t, \ldots, t^{s-1}e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

Soluzione delle eq. diff. lineari, omogenee, a coefficienti costanti reali – Esempi

$$\begin{cases} \dot{y} + 3y = 0 \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0 \\ y(0) = -1 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{y} + 2\dot{y} + 3y = 0 \\ y(0) = 2 \\ \dot{y}(0) = -1 \end{cases}$$

Soluzione delle eq. diff. lineari a coefficienti costanti complete

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b(t)$$

La soluzione è data da

$$y(t) = \underbrace{\tilde{y}(t)}_{\text{Integrale particolare equazione completa}} + \underbrace{\bar{y}(t)}_{\text{Integrale generale equazione omogenea } (b=0)}$$

Soluzione delle eq. diff. lineari a coefficienti costanti complete – Calcolo integrale particolare

Il calcolo dell'integrale particolare è possibile in casi particolari, e.g. quando la funzione *b*(*t*) e le sue derivate successive hanno la stessa struttura.

Questa condizione è verificata nei seguenti casi:

1. $b(t)$ è un polinomio in t (ad es. $b(t)=1$, $b(t)=t$, $b(t)=t^2$, etc.)
2. $b(t)$ è una funzione sinusoidale
3. $b(t)$ è una combinazione lineare di un polinomio in t e di funzioni sinusoidali

Soluzione delle eq. diff. lineari a coefficienti costanti complete – Esempio

$$\begin{cases} \dot{y} + 3y = t \\ y(0) = 0 \end{cases}$$