Richiami sui Numeri Complessi

Ing. Alessio Merola

Laboratorio di Biomeccatronica

Cenni storici

- Nel 16° secolo, il simbolo $\sqrt{-1}$ è stato introdotto come soluzione all'equazione quadratica $x^2+1=0$. Tale simbolo fu definito successivamente **come unità immaginaria *i***.

- Nel 19° secolo, K. F. Gauss and W.R. Hamilton definirono i numeri complessi "*come coppia ordinate di numeri reali dotate di alcune proprietà particolari*".

Definizione di numero complesso

- Se a e b sono numeri reali, la coppia ordinata (a,b) è detta **numero complesso.**
- I numeri a e b sono definiti come le **componenti del numero complesso** rappresentato dalla coppia (a,b); la prima componente, a **,** è definita come **parte reale** del numero complesso, la seconda componente, b , è detta **parte immaginaria.**
- Ogni numero complesso può essere espresso nella forma

$$a+ib$$

Operazioni con i numeri complessi

- Somma algebrica

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$$

$$(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d)$$

- Prodotto

$$(a+ib)(c+id)=ac-bd+i(bc+ad)$$

- Rapporto

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i}=\frac{(a_1+b_1 i)}{(a_2+b_2 i)}\frac{(a_2-b_2 i)}{(a_2-b_2 i)}=\frac{a_1 a_2+b_1 b_2+(a_2 b_1-a_1 b_2)i}{a_2^2+b_2^2}.$$

Operazioni con i numeri complessi

- Il **complesso coniugato** del numero complesso $z = a + ib$ è definito come $\bar{z} = a - ib$.
- Valgono le seguenti identità

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 / z_2} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$$

$$z\bar{z} = |z|^2 \qquad\qquad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Operazioni con i numeri complessi

- Se $(a,b) \neq (0,0)$, esiste un numero complesso (c,d) tale che

$$(a,b)(c,d) = (1,0),$$

le cui componenti sono

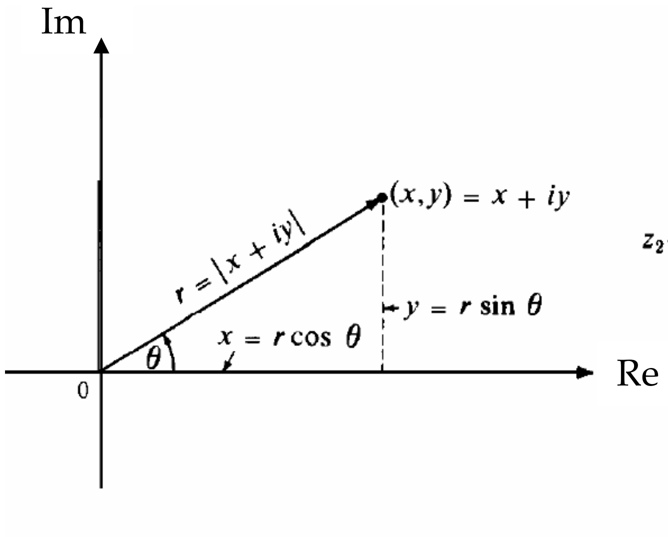
$$c = \frac{a}{a^2 + b^2}, d = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Tale numero è detto **complesso reciproco** di (a,b).

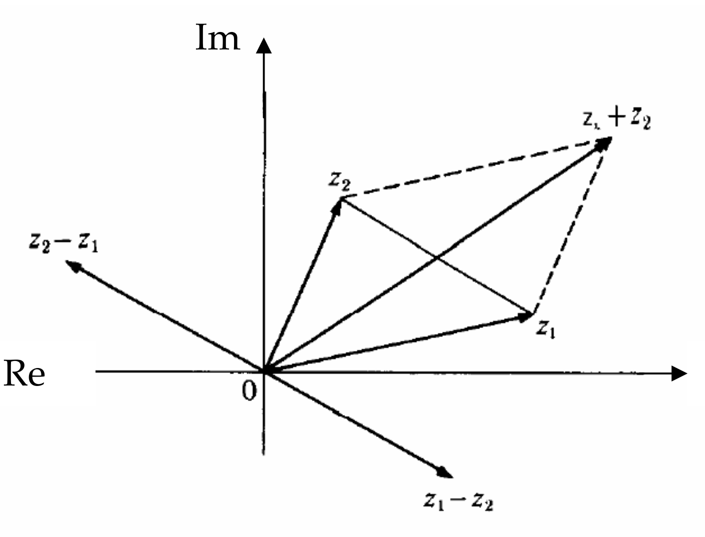
Proprietà delle operazioni con i numeri complessi

- Le operazioni di addizione e moltiplicazione dei numeri complessi soddisfano le proprietà commutativa, associativa e distributiva.
- Se *x, y, z* sono numeri complessi arbitrari, valgono le seguenti proprietà:
  - $x + y = y + x, \qquad xy = yx$ (Pr. commutativa)
  - $x+(y+z)=(x+y)+z, \quad x(yz)=(xy)z$ (Pr. associativa)
  - $x(y+z) = xy + xz$ (Pr. distributiva)

Rappresentazione polare dei numeri complessi



Rappresentazione nel piano complesso

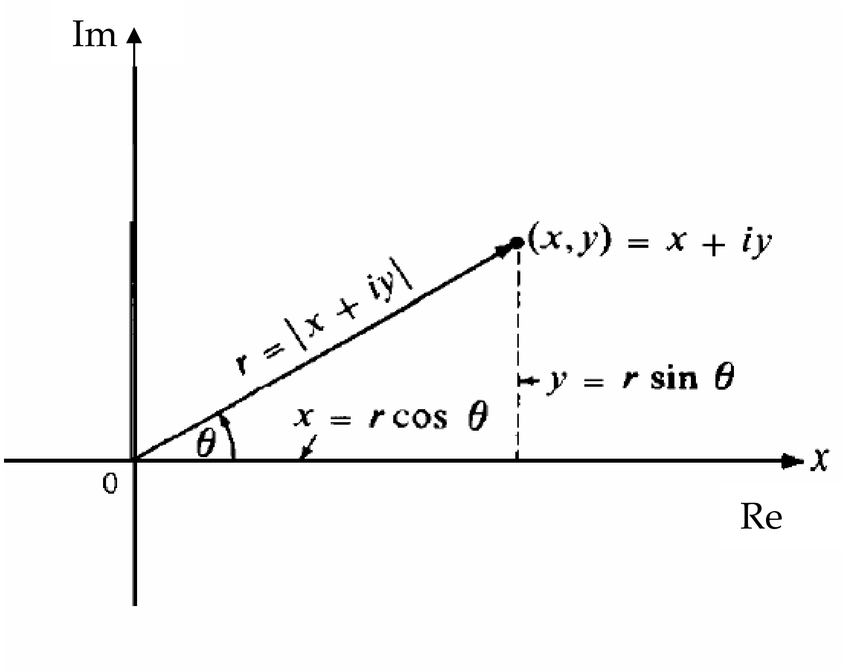


Addizione e sottrazione di numeri complessi con la regola del parallelogramma

- Formula di Eulero

$$x + iy = r(\cos\theta + i\, sen\theta) = re^{i\theta}$$

Rappresentazione polare dei numeri complessi



- Modulo

$$r = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Argomento

$$\theta = arctg\,\frac{y}{x}, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

Proprietà del modulo

- $$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$$
- $$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$
- $$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0$$

Esempi

- Esprimere i seguenti numeri complessi nella forma $z = a + ib$
  - $z_1 = (1+i)^2$
  - $z_2 = \frac{1}{1+i}$
  - $z_3 = \frac{1+i}{1-2i}$

Esempi

- Calcolare modulo e argomento dei seguenti numeri complessi
  - $z_1 = -3i$
  - $z_2 = 2i$
  - $z_3 = -3 + \sqrt{3}i$