Prova Scritta di Fondamenti di Automatica del 13 Settembre 2006

Studente:____ Matricola:_________________

1) Una persona del peso di 75 Kg decide di provare il salto con l'elastico (bungee jumping) da una piattaforma posta a 50 m di altezza. La corda elastica a riposo ha una lunghezza l=15 m, il suo coefficiente elastico $k=5$ *N/m* e il corpo in caduta sia soggetto ad un coefficiente di attrito viscoso b=13 Ns/m. Si verifichi che la persona non arrivi a toccare il suolo. (Suggerimento: nei primi 15m di caduta il corpo è soggetto alla sola forza di attrito viscoso, e la velocità al momento in cui la corda si tende (t_1=1.84 s) è $v(t_1)$=15.6 m/s.)

2) Per un sistema avente f.d.t.
$$F(s) = \frac{1}{(s^2 + 2s + 9)}$$
calcolare l'espressione analitica della risposta indiciale.

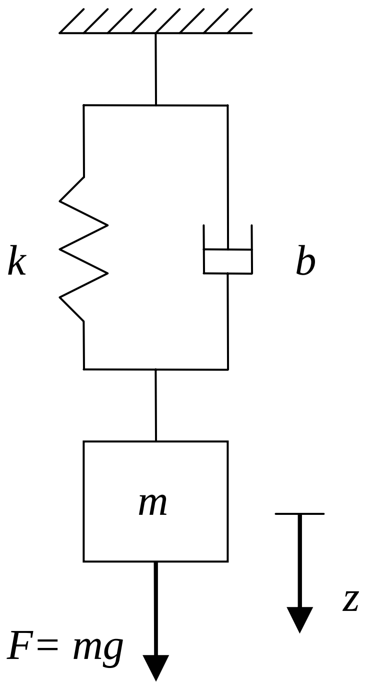
3) Tracciare l'andamento qualitativo della risposta indiciale del sistema avente f.d.t.
$$G(s) = \frac{10(0.1s - 1)}{(s^2 + 2s + 9)}$$

4) Tracciare i diagrammi di Bode della f.d.t.
$$L(s) = \frac{s(s + 20)}{(s^2 - 4s - 5)}$$

Tempo a disposizione: 2 ore

ESERCIZIO 1

Dal momento in cui la corda è tesa, ossia dopo che il corpo ha percorso 15 m dal punto di lancio, il sistema può essere schematizzato come in figura



L'origine dell'asse *z* si trova quindi ad una distanza di 35 m dal suolo.
Dobbiamo verificare se la risposta del sistema ad un gradino di ampiezza *mg* (il corpo è soggetto alla sola forza di gravità) supera tale limite. Bisogna considerare, inoltre, che la condizione iniziale non è nulla, per cui avremo sia la risposta in evoluzione forzata sia la risposta in evoluzione libera: se chiamiamo x_1 lo spostamento e $x_2=dz/dt$ la velocità del corpo lungo l'asse *z*, lo stato iniziale $x(0)=x_0=[0;\ 15.6]$.

Ricaviamo il modello i-s-u del sistema: l'eq. di governo si ricava facilmente dalla II legge di Newton,

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = u\ .$$

Ponendo $x_1 = z$ e $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{z}$, ricaviamo il modello i-s-u

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} u\ , \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

mentre la funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{1}{\left(ms^2 + bs + k\right)}\ .$$

Calcoliamo la risposta in evoluzione libera nel dominio di Laplace:

$$Y_L(s) = C(sI - A)^{-1} x_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & -1 \\ 0.0667 & s + 0.173 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 15.6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\begin{pmatrix} s + 0.173 & 1 \\ -0.0667 & s \end{pmatrix}}{\left(s^2 + 0.173s + 0.0667\right)} \begin{pmatrix} 0 \\ 15.6 \end{pmatrix} = \frac{15.6}{\left(s^2 + 0.173s + 0.0667\right)}$$

Antitrasformando la $Y_L(s)$ otteniamo la risposta libera nel tempo:

$$Y_L(s) = \frac{15.6}{\left(s^2 + 0.173s + 0.0667\right)}$$

$$= \frac{15.6}{0.243} \cdot \frac{0.243}{(s + 0.0865)^2 + 0.243^2} \rightarrow y_L(t) = \left[64.2 e^{-0.0865t} \sin(0.243t)\right] \cdot 1(t)$$

Per quanto riguarda la risposta forzata troviamo i parametri caratteristici della risposta a gradino della fdt *G(s)* riportata sopra:

- guadagno statico $G(0) = 0.2$
- coefficiente di smorzamento $\zeta = 0.34$
- sovraelongazione percentuale *S=32%*
- pulsazione naturale $\omega = 0.258$ rad/s.

L'uscita a regime sarà pari a $y(\infty) = G(0) \cdot mg = 147$ m, mentre il punto di massima sovraelongazione sarà

$$y_{\max} = y(\infty)\left(1 + \exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\right) = 194 \text{ m}$$

A questo valore bisogna aggiungere il dislivello di 15 m dalla pedana di lancio e l'ulteriore contributo dovuto all'evoluzione libera, che ha segno positivo lungo l'asse *z*.

Appare dunque evidente che il corpo impatta con il suolo

(Esercizio fuori traccia: si provi a calcolare il valore minimo della costante elastica, *k*, tale che il corpo non raggiunge il suolo).

ESERCIZIO 2

$$F(s) = \frac{1}{(s^2 + 2s + 9)}$$

La risposta indiciale è

$$Y(s) = F(s)\frac{1}{s} = \frac{1}{s\left(s^2 + 2s + 9\right)} = \frac{0.111}{s} - \frac{0.111s + 0.222}{\left(s^2 + 2s + 9\right)} =$$

$$= \frac{0.111}{s} - 0.111\left[\frac{s+1}{(s+1)^2 + 8} + \frac{1}{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{8}}{(s+1)^2 + 8}\right]$$

Antitrasformando otteniamo l'espressione analitica della risposta indiciale

$$y(t) = \{0.111 - 0.111 e^{-t}\cos(2.83t) - 0.0393 e^{-t}\sin(2.83t)\}\cdot 1(t)$$

ESERCIZIO 3

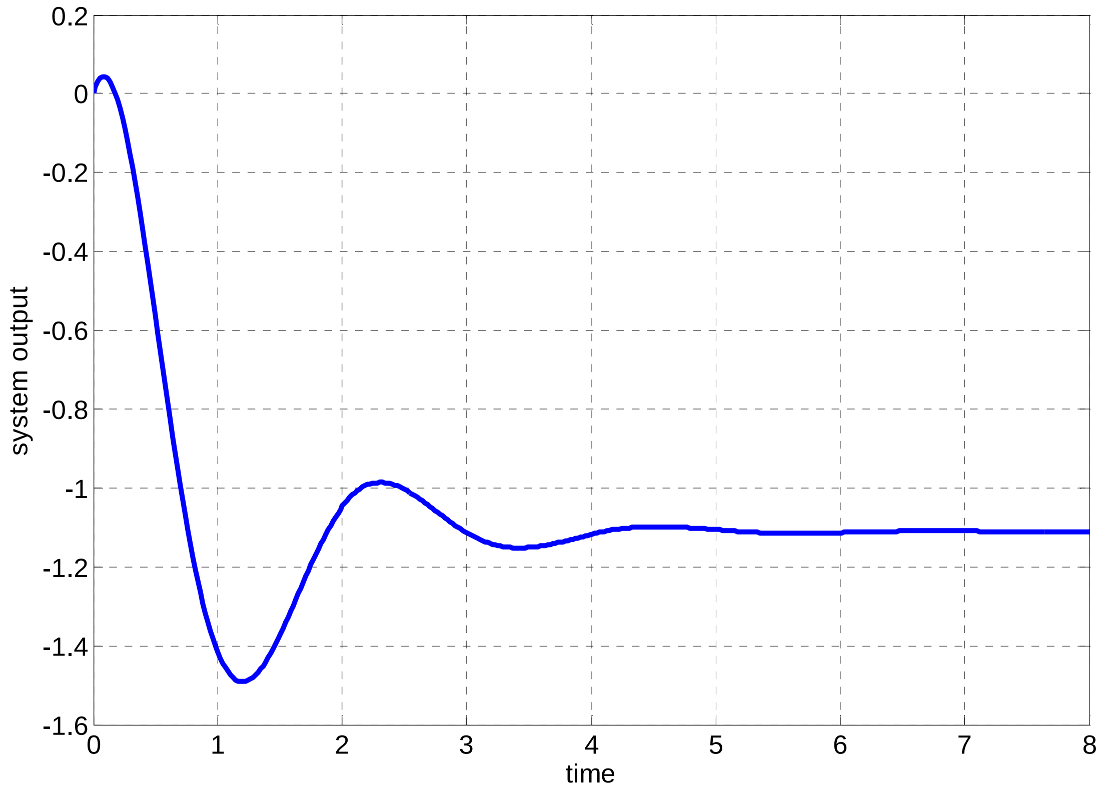
$$G(s) = \frac{10(0.1s-1)}{\left(s^2+2s+9\right)}$$

Il sistema presenta una coppia di poli complessi e coniugati e uno zero reale. Calcoliamo i parametri caratteristici:

- guadagno statico, $G(0) = -10/9 = -1.11$
- coefficiente di smorzamento dei poli complessi, $\zeta = 0.33$
- pulsazione naturale, $\omega = 3$ rad/s
- periodo di oscillazione, $T = \dfrac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 2.22$ s
- istante di massima sovraelongazione, $T_{\max} = T/2 = 1.11$ s
- picco di massima sottoelongazione (il guadagno è negativo), $y_{\max} = 1.48$ (alla sovraelongazione dovuta ai poli bisogna aggiungere l'effetto derivativo dello zero, che è tanto maggiore quanto più lo zero è vicino all'asse immaginario)
- tempo di assestamento, $T_{a1} = \dfrac{4.6}{\zeta\omega_n} = 4.65$ s
- numero di oscillazioni, $\dfrac{1}{2\zeta} \approx 1.5$
- valore iniziale, $y(0) = \lim\limits_{s\to\infty} sY(s) = \lim\limits_{s\to\infty} sG(s)\dfrac{1}{s} = \lim\limits_{s\to\infty} G(s) = 0$
- valore iniziale della derivata,
  $y(0) = \lim\limits_{s\to\infty} s^2Y(s) = \lim\limits_{s\to\infty} s^2G(s)\dfrac{1}{s} = \lim\limits_{s\to\infty} sG(s) = 1$, **si noti che la derivata iniziale è positiva mentre il valore di regime è negativo**.

L'andamento della risposta è riportato nella figura successiva. Si noti che l'effetto dello zero è praticamente trascurabile in quanto esso si trova a frequenza più alta rispetto ai poli.

(Esercizio fuori traccia: con l'ausilio del Matlab si verifichi come cambia la risposta indiciale quando lo zero si avvicina all'asse reale)



system output
time
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1.2
-1.4
-1.6
0
1
2
3
4
5
6
7
8

ESERCIZIO 4

$$L(s) = \frac{s(s+20)}{(s^2 - 4s - 5)}$$