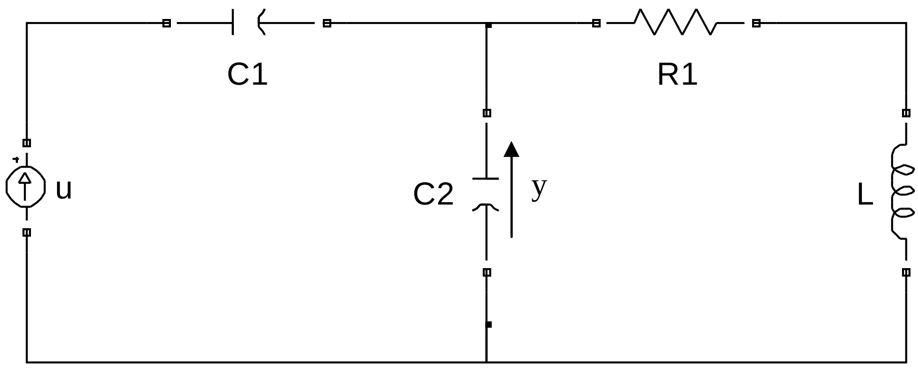
Fondamenti di Automatica - 12 Febbraio 2007 – A-C-E

Studente:____ Matricola:__________________



1) Calcolare una rappresentazione i-s-u e la f.d.t. del circuito elettrico in figura, considerando come ingresso, *u*, la corrente fornita dal generatore e come uscita, *y*, la tensione sul condensatore C_2.

2) Calcolare l'espressione analitica e tracciare l'andamento qualitativo della risposta indiciale del sistema

$$F(s) = \frac{(s+8)}{(s^2+s+5)}.$$

3) Discutere la stabilità dei seguenti sistemi

a) $W_1(s) = \dfrac{(1-s)}{s^2 - s + 5}$ b) $W_2(s) = \dfrac{(s+1)}{s(s^2+s-5)}$ c) $W_3(s) = \dfrac{(s^2+3s+1)}{s^2+10s-11}$

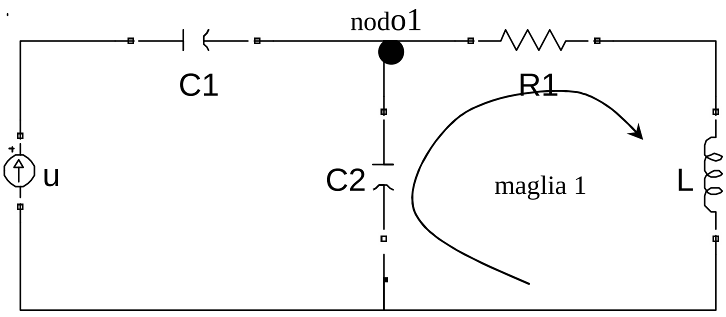
d) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.3 & -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$, $y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x$ e) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -0.3 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$, $y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x$

4) Tracciare i diagrammi di Bode della f.d.t.

$$L(s) = \frac{5(2s+1)}{s(s^2+17s-60)}$$

Tempo a disposizione: 2.5 ore

ESERCIZIO 1)



equazioni di stato del capacitore C1: $V_{C1} = x_1$; $i_{C1} = C_1\dot{x}_1$;

equazioni di stato dell'induttore C2: $V_{C2} = x_2$; $i_{C2} = C_2\dot{x}_2$;

equazioni di stato dell'induttore L: $i_L = x_3$; $V_L = L\dot{x}_3$;

l'uscita $y = x_2$;

La corrente che circola in C1 è pari ad u: $u = C_1\dot{x}_1 \Rightarrow \dot{x}_1 = \dfrac{1}{C_1}u$

equazione di Kirchoff nodo 1: $C\dot{x}_1 = u = C_2\dot{x}_2 + x_3 \Rightarrow \dot{x}_2 = -\dfrac{1}{C_2}x_3 + \dfrac{1}{C_2}u$

equazione alla maglia 1: $x_2 - R_1x_3 - L\dot{x}_3 = 0 \Rightarrow \dot{x}_3 = \dfrac{1}{L}x_2 + \dfrac{R_1}{L}x_3$

rappresentazione i-s-u:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/C_2 \\ 0 & 1/L & -R_1/L \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1/C_1 \\ 1/C_2 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

la f.d.t. si ricava da:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} s(s+R_1/L)+1/C_2L & 0 & 0 \\ 0 & s(s+R_1/L) & s/C_2 \\ 0 & s/L & s^2 \end{bmatrix}}{\dfrac{s(s^2LC_2 + sC_2R_1 + 1)}{LC_2}} \begin{bmatrix} 1/C_1 \\ 1/C_2 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{sL + R_1}{s^2LC_2 + sC_2R_1 + 1}$$

ESERCIZIO 2)

$$Y(s)=F(s)U(s)=\frac{(s+8)}{(s^2+s+5)}\frac{1}{s}$$

Calcoliamo prima l'espressione analitica.

Scomposizione in fratti semplici:

$$Y(s)=\frac{(s+8)}{(s^2+s+5)}\frac{1}{s}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{(s^2+s+5)}=\frac{(A+B)s^2+(A+C)s+5A}{s(s^2+3s+45)}\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\A+C=1\\5A=8\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A=8/5\\B=-8/5\\C=-3/5\end{cases}$$

$$Y(s)=\frac{8}{5}\cdot\left[\frac{1}{s}-\frac{(s+3/8)}{(s^2+s+5)}\right]$$

I polinomi s^2+s+5 e $s+3/8$ si possono scrivere come:

$$s^2+s+5=(s+1/2)^2+(\sqrt{19}/2)^2$$

$$s+3/8=s+1/2-1/8$$

$$Y(s)=\frac{8}{5}\cdot\left[\frac{1}{s}-\frac{(s+1/2)}{(s+1/2)^2+(\sqrt{19}/2)^2}+\frac{1}{4\sqrt{19}}\frac{\sqrt{19}/2}{(s+1/2)^2+(\sqrt{19}/2)^2}\right]$$

antitrasformando ricaviamo l'espressione di *y(t)*:

$$y(t)=\frac{8}{5}\left[1-e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{19}}{2}t\right)+\frac{1}{4\sqrt{19}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{19}}{2}t\right)\right]1(t)$$

Nel seguito determiniamo l'andamento qualitativo della risposta indiciale.

Parametri caratteristici della risposta indiciale:

Valore iniziale: $y(0)=\lim_{s\to\infty}sY(s)=0$

Valore iniziale della derivata: $y'(0)=\lim_{s\to\infty}s^2Y(s)=1$

Valore finale: $\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{s\to 0}sY(s)=\frac{8}{5}$

I modi di evoluzione del sistema sono dati dai poli della f.d.t., ossia dalle radici del denominatore: calcolando il Δ si vede che le radici sono complesse e coniugate, quindi ci riportiamo alla forma ingegneristica del termine trinomio:

$$\left(1+\frac{2\varsigma}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n}\right)=\left(1+\frac{1}{5}s+\frac{1}{5}s^2\right),$$

da cui

$$\begin{cases}\dfrac{2\xi}{\omega_n}=\dfrac{1}{5}\\ \omega_n=\sqrt{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\xi=0.224\\ \omega_n=2.24\end{cases}$$

$$T_{a1}=\frac{4{,}6}{\xi\omega_n}\cong 9.2\sec$$

$$numero\ di\ oscillazioni=\frac{1}{2\xi}\cong 2.2$$

$$T_{\max}=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\cong 1.44\sec$$

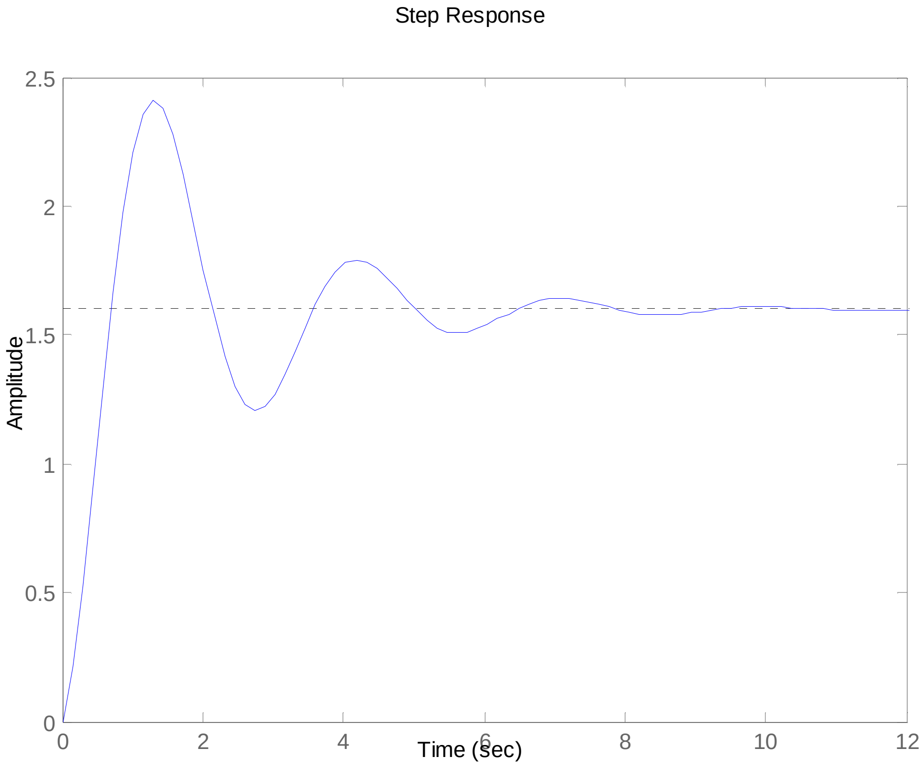
$$s\%=100e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\cong 49\%$$

$$y_{\max}=y_\infty\left(1+e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\right)\cong 2.38$$

$$T_r\ \ periodo\ \ di\ \ oscillazione=\frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\cong 2.88\sec$$

L’andamento reale calcolato in Matlab è riportato nella figura seguente.

Si noti che lo zero introduce un effetto derivativo, peraltro molto limitato in quanto lo zero è posto a pulsazione più elevata rispetto ai poli, che comporta un valore reale di y_{max} leggermente maggiore e un piccolo anticipo del T_{max}.



ESERCIZIO 3)

La stabilità viene determinata dal segno della parte reale dei poli:

a) Sistema instabile, presenta poli complessi coniugati a parte reale positiva
b) Sistema instabile, presenta un polo a parte reale positiva
c) Sistema instabile, presenta un polo a parte reale positiva
d) Sistema instabile, presenta un polo a parte reale positiva; i poli si possono facilmente ottenere ricavando le radici del polinomio caratteristico $p_\lambda(s)$ a partire dalla matrice dinamica A ($p_\lambda(s) = \det(sI - A)$)
e) Sistema instabile, presenta due poli a parte reale positiva

ESERCIZIO 4)