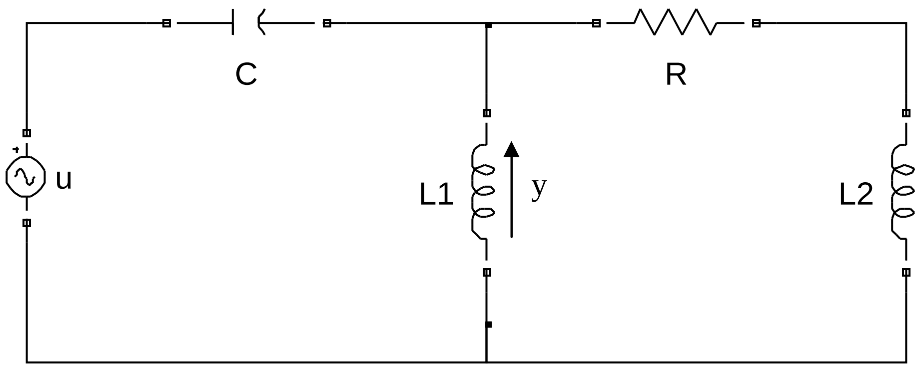
Fondamenti di Automatica - 12 Febbraio 2007 – B-D-F

Studente:____ **Matricola:**__________________



1) Calcolare una rappresentazione i-s-u e la f.d.t. del circuito elettrico in figura, considerando come ingresso, u, la tensione fornita dal generatore e come uscita, y, la tensione sull'induttore L_1.

2) Calcolare l'espressione analitica e tracciare l'andamento qualitativo della risposta indiciale del sistema
$$F(s) = \frac{(s+24)}{(s^2+3s+45)}.$$

3) Discutere la stabilità dei seguenti sistemi

a) $W_1(s) = \dfrac{(1-s)}{10-2s+s^2}$ b) $W_2(s) = \dfrac{(s+1)}{s(s^2+s+1)}$ c) $W_3(s) = \dfrac{(s^2-35s+100)}{s^2-6s-16}$

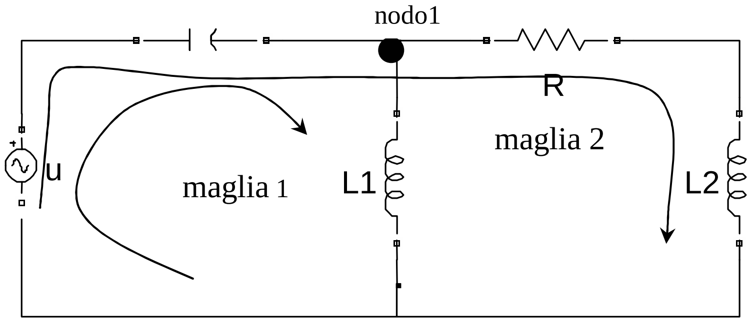
d) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0.5 & 3 \\ -1 & 0.1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$, $y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x$ e) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0.3 & -0.6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} u$, $y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} x$

4) Tracciare i diagrammi di Bode della f.d.t.
$$L(s) = \frac{10(10s-1)}{s(s^2+3.5s+1.5)}$$

Tempo a disposizione: 2.5 ore

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1)



equazioni di stato del capacitore C: $V_C = x_1$; $i_C = C\dot{x}_1$;

equazioni di stato dell'induttore L1: $i_{L1} = x_2$; $V_{L1} = L_1\dot{x}_2$;

equazioni di stato dell'induttore L2: $i_{L2} = x_3$; $V_{L2} = L_2\dot{x}_3$;

uscita, tensione su L1: $y = u - x_1$

equazione di Kirchoff nodo 1: $C\dot{x}_1 = x_2 + x_3 \Rightarrow \dot{x}_1 = \frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{C}x_3$

equazione alla maglia 1: $u - x_1 - L_1\dot{x}_2 = 0 \Rightarrow \ \dot{x}_2 = -\frac{1}{L_1}x_1 + \frac{1}{L_1}u$

equazione alla maglia 2: $u - x_1 - Rx_3 - L_2\dot{x}_3 = 0 \Rightarrow \ \dot{x}_3 = -\frac{1}{L_2}x_1 - \frac{R}{L_2}x_3 + \frac{1}{L_2}u$

rappresentazione i-s-u:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1/C & 1/C \\ -1/L_1 & 0 & 0 \\ -1/L_2 & 0 & -R/L_2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/L_1 \\ 1/L_2 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + u(t)$$

la f.d.t. si ricava da:

$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D =$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} s(s+R/L_2) & (s+R/L_2)/C & s/C \\ -(s+R/L_2)/L_1 & s(s+R/L_2)+1/L_2C & -1/L_1C \\ -s/L_2 & -1/L_2C & s^2+1/L_1C \end{bmatrix}}{\frac{s^3L_1CL_2 + s^2L_1CR + s(s^3L_1 + L_2) + R}{L_1CL_2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L_1 \\ 1/L_2 \end{bmatrix} + 1 =$$

$$= \frac{s^3L_1CL_2 + s^2L_1CR}{s^3L_1CL_2 + s^2L_1CR + s(s^3L_1 + L_2) + R}$$

ESERCIZIO 2)

$$Y(s)=F(s)U(s)=\frac{(s+24)}{(s^2+3s+45)}\frac{1}{s}$$

Calcoliamo dapprima l'espressione analitica della risposta indiciale.

Scomposizione in fratti semplici:

$$Y(s)=\frac{(s+24)}{(s^2+3s+45)}\frac{1}{s}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{(s^2+3s+45)}=\frac{(A+B)s^2+(3A+C)s+45A}{s(s^2+3s+45)}\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\3A+C=1\\45A=24\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A=8/15\\B=-8/15\\C=-3/5\end{cases}$$

$$Y(s)=\frac{8}{15}\cdot\left[\frac{1}{s}-\frac{(s+9/8)}{(s^2+3s+45)}\right]$$

I polinomi $s^2+3s+45$ e $s+9/8$ si possono scrivere come:

$$s^2+3s+45=(s+3/2)^2+(3\sqrt{19}/2)^2$$

$$s+9/8=s+3/2-3/8$$

In tal modo possiamo riportare la *Y(s)* ad una sommatoria di forme notevoli,

$$Y(s)=\frac{8}{15}\cdot\left[\frac{1}{s}-\frac{(s+3/2)}{(s+3/2)^2+(3\sqrt{19}/2)^2}+\frac{1}{4\sqrt{19}}\frac{3\sqrt{19}/2}{(s+3/2)^2+(3\sqrt{19}/2)^2}\right]$$

antitrasformando (vedi tabella trasformate Laplace) ricaviamo l'espressione di *y(t)*:

$$y(t)=\frac{8}{15}\left[1-e^{-\frac{3}{2}t}\cos\left(\frac{3\sqrt{19}}{2}t\right)+\frac{1}{4\sqrt{19}}e^{-\frac{3}{2}t}\sin\left(\frac{3\sqrt{19}}{2}t\right)\right]1(t)$$

Nel seguito determiniamo l'andamento qualitativo della risposta indiciale.

Parametri caratteristici della risposta a gradino:

Valore iniziale: $y(0)=\lim_{s\to\infty}sY(s)=0$;

Valore iniziale della derivata: $\dot{y}(0)=\lim_{s\to\infty}s^2Y(s)=1$

Valore finale: $y(\infty)=\lim_{s\to 0}sY(s)=\frac{8}{15}$

I modi di evoluzione del sistema sono dati dai poli della f.d.t., ossia dalle radici del denominatore.

Calcolando il Δ si vede che le radici sono complesse e coniugate, quindi ci riportiamo alla forma ingegneristica del termine trinomio:

$$\left(1+\frac{2\varsigma}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n}\right)=\left(1+\frac{1}{15}s+\frac{1}{45}s^2\right),$$

da cui

$$\begin{cases}\dfrac{2\xi}{\omega_n}=\dfrac{1}{15}\\ \omega_n=\sqrt{45}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\xi=0.224\\ \omega_n=6.71\end{cases}$$

$$T_{a1}=\frac{4,6}{\xi\omega_n}\cong 3.1\sec$$

$$numero\ di\ oscillazioni=\frac{1}{2\xi}\cong 2.2$$

$$T_{\max}=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\cong 0.48\sec$$

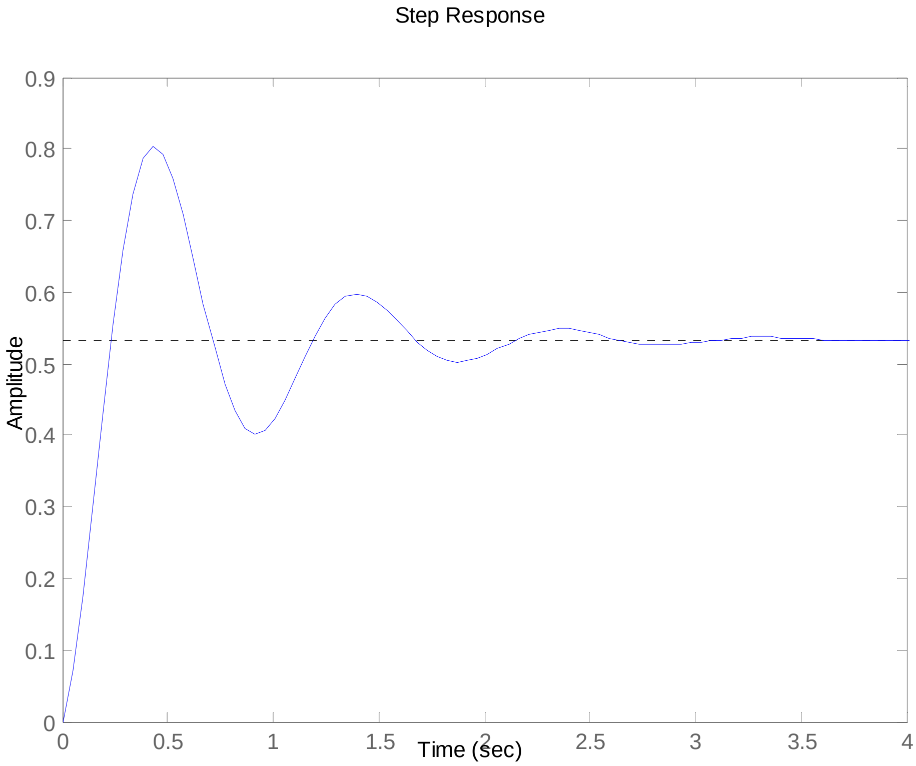
$$s\%=100e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\cong 49\%$$

$$y_{\max}=y_\infty\left(1+e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\right)\cong 0.79$$

$$T_r\ \ periodo\ \ di\ \ oscillazione=\frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\cong 0.96\sec$$

L’andamento reale calcolato in Matlab è riportato nella figura seguente.

Si noti che lo zero introduce un effetto derivativo, peraltro molto limitato in quanto esso è posto a pulsazione più elevata rispetto ai poli; ciò comporta un valore reale di y_{max} leggermente maggiore e un piccolo anticipo del T_{max}.



ESERCIZIO 3)

La stabilità viene determinata dal segno della parte reale dei poli:

a) Sistema instabile, presenta un polo a parte reale positiva
b) Sistema (semplicemente) stabile, presenta poli a parte reale negativa ed un solo polo nell'origine
c) Sistema instabile, presenta poli complessi coniugati a parte reale positiva
d) Sistema instabile, presenta poli complessi coniugati a parte reale positiva, si possono facilmente ottenere ricavando le radici del polinomio caratteristico $p_\lambda(s)$ a partire dalla matrice dinamica A ($p_\lambda(s) = \det(sI - A)$)
e) Sistema (semplicemente) stabile, presenta un polo a parte reale negativa ed uno nell'origine

ESERCIZIO 4)