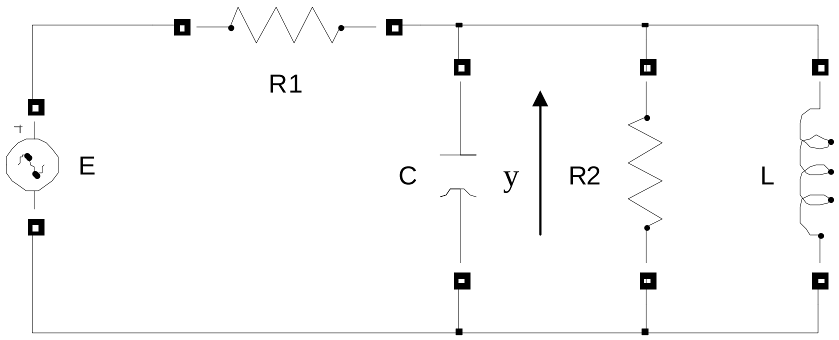
Fondamenti di Automatica - 03 Ottobre 2007 - A

Studente:____ Matricola:__________________



1) Calcolare una rappresentazione i-s-u e la f.d.t. del sistema in figura, considerando come ingresso, *u*, la tensione del generatore E e come uscita, *y*, la tensione del condensatore C.

2) Calcolare l'espressione analitica e tracciare l'andamento qualitativo della risposta indiciale del sistema

$$F(s) = \frac{(s+8)}{(s^2+22s+40)}\,.$$

3) Classificare i seguenti sistemi secondo la proprietà di stabilità, motivando brevemente la scelta effettuata.

a) $W_1(s) = \dfrac{(s-2)}{s^2+s+1/4}$ b) $W_2(s) = \dfrac{(s+10)}{s(s+1)(s+4)^2}$

c) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$, $y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x$

d) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$, $y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x$

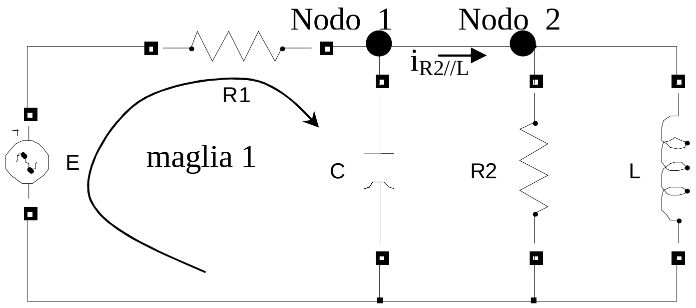
e) $W_3(s) = \dfrac{(s+3)}{s^3+4s^2+4s}$

4) Tracciare i diagrammi di Bode della f.d.t.

$$L(s) = -2\frac{(s+6)}{(s^2+s+6)}$$

Tempo a disposizione: 2.5 ore

Esercizio 1



equazioni di stato del capacitore C: $V_C = x_1$; $i_C = C\dot{x}_1$;

equazioni di stato dell'induttore L: $i_L = x_2$; $V_L = L\dot{x}_2$;

l'uscita $y = x_1$;

il capacitore C, l'induttore L e la resistenza R_2 sono in parallelo: $x_1 = L\dot{x}_2 = i_{R2}R_2$

equazioni al nodo 1 e 2: $\begin{cases} i_{R1} = C\dot{x}_1 + i_{R2//L} \\ i_{R2//L} = i_{R2} + x_2 = \dfrac{x_1}{R_2} + x_2 \end{cases} \Rightarrow i_{R1} = C\dot{x}_1 + \dfrac{x_1}{R_2} + x_2$

equazione alla maglia 1:

$$u = R_1 i_{R1} + x_1 \Leftrightarrow u = R_1\left(C\dot{x}_1 + \frac{x_1}{R_2} + x_2\right) + x_1 \Leftrightarrow \dot{x}_1 = -\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)\frac{1}{CR_1}x_1 - \frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{R_1C}u$$

rappresentazione i-s-u: $$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\left(1 + \dfrac{R_1}{R_2}\right)\dfrac{1}{CR_1} & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{R_1C} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

la f.d.t. si ricava da:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s + \left(1 + \dfrac{R_1}{R_2}\right)\dfrac{1}{CR_1} & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L} & s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{R_1C} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{sLR_2}{s^2 LCR_1R_2 + sL(R_1 + R_2) + R_2R_1}$$

Esercizio 2)

$$Y(s) = F(s)U(s) = \frac{(s+8)}{(s^2 + 22s + 40)}\frac{1}{s}$$

Scomposizione in fratti semplici:

$$Y(s)=\frac{(s+8)}{(s^2+22s+40)}\frac{1}{s}=\frac{(s+8)}{(s+2)(s+20)}\frac{1}{s}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s+20};$$

$$A=\lim_{s\to 0}\frac{(s+8)}{(s+2)(s+20)}=\frac{1}{5}$$

$$B=\lim_{s\to -2}\frac{(s+8)}{s(s+20)}=-\frac{1}{6}$$

$$B=\lim_{s\to -20}\frac{(s+8)}{s(s+2)}=-\frac{1}{30}$$

$$Y(s)=\frac{1/5}{s}-\frac{1/6}{s+2}-\frac{1/30}{s+20}$$

Antitrasformando ricaviamo l'espressione di *y(t)*:

$$y(t)=\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{6}e^{-2t}-\frac{1}{30}e^{-20t}\right]1(t)$$

Parametri caratteristici della risposta a gradino:

$$y(0)=\lim_{s\to\infty}sY(s)=0$$

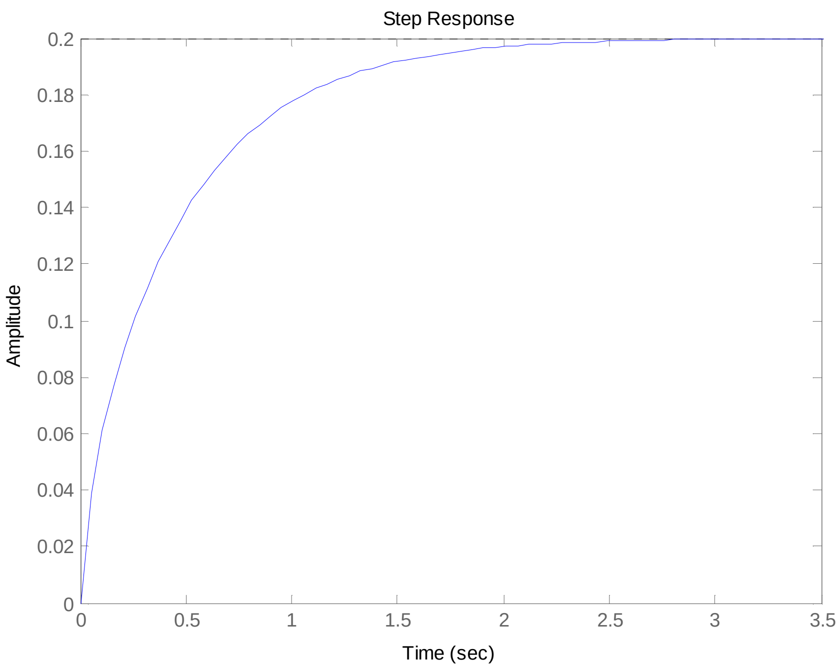
$$y'(0)=\lim_{s\to\infty}s^2Y(s)=1$$

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{s\to 0}sY(s)=\frac{1}{5}$$

I modi di evoluzione del sistema sono determinati dal polo dominante s=-2.

$$T_{a1}=4{,}6\tau=2.3\quad \text{sec}$$

L'andamento reale calcolato in Matlab è riportato nella figura seguente.



Esercizio 3)

La stabilità viene studiata guardando al segno della parte reale dei poli.

a) Sistema asintoticamente stabile, presenta due poli reali coincidenti negativi.
b) Sistema semplicemente stabile, presenta un polo nell'origine di molteplicità 1.
c) Sistema asintoticamente stabile, presenta due poli reali coincidenti negativi; i poli si possono facilmente ottenere ricavando le radici del polinomio caratteristico $p_\lambda(s)$ a partire dalla matrice dinamica A ($p_\lambda(s) = \det(sI - A)$).
d) Sistema instabile, presenta un polo reale positivo.
e) Sistema semplicemente stabile, presenta un polo nell'origine di molteplicità 1.

Esercizio 4)