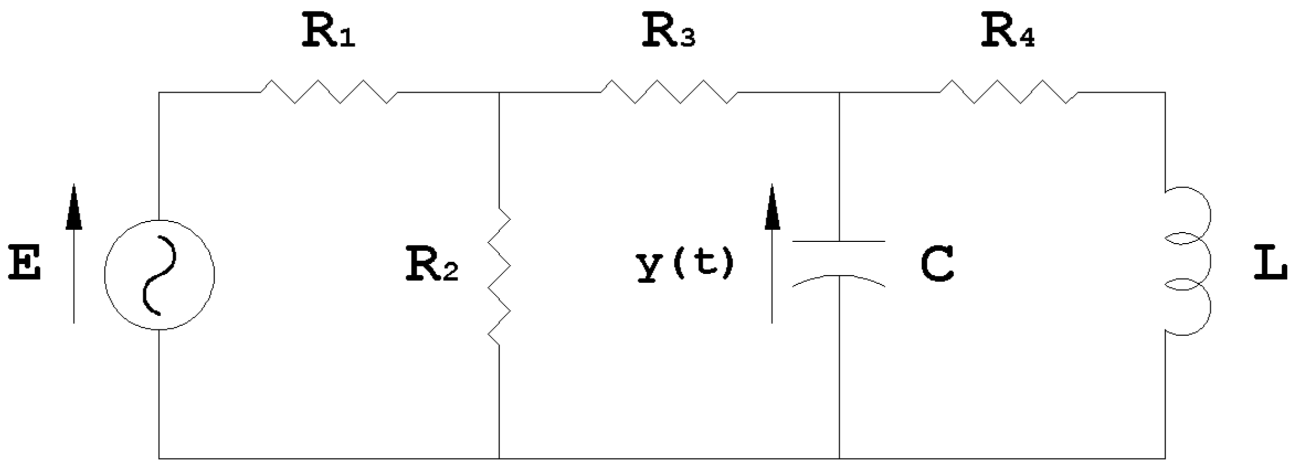
Fondamenti di Automatica - 17 Febbraio 2009 – Traccia A

Studente:____ **Matricola:**_________________



1) Per la rete elettrica in figura, determinare una rappresentazione i.s.u., prendendo come ingresso la tensione fornita dal generatore e come uscita la tensione ai capi del condensatore.

2) Calcolare l'espressione analitica e tracciare l'andamento qualitativo della risposta del sistema
$$F(s) = \frac{(s+30)}{(s^2+3s+16)}$$
a fronte di un segnale di ingresso u(t)=1(t).

3) Ricavare le f.d.t. dei seguenti sistemi e classificarli in base alla stabilità.

a) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$, $\quad y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x$

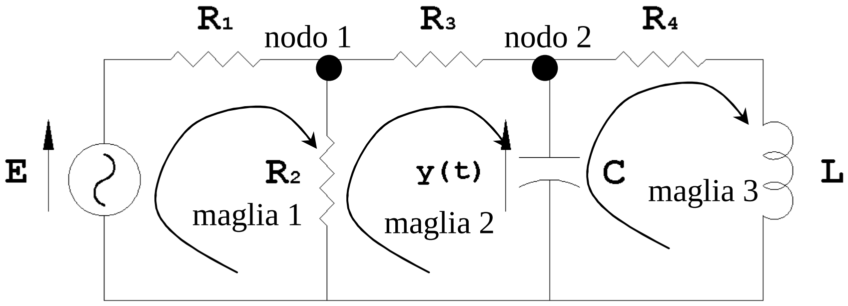
b) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$, $\quad y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} x$

c) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} u$, $\quad y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x + u$

4) Tracciare i diagrammi di Bode della f.d.t.
$$L(s) = \frac{(s-2)(s+100)}{(s+10)(s^2+2s+9)}$$

Tempo a disposizione: 2.5 ore

Esercizio 1)



equazioni di stato del capacitore C: $V_C = x_1$; $i_C = C\dot{x}_1$;

equazioni di stato dell'induttore L: $i_L = x_2$; $V_L = L\dot{x}_2$;

Dalle equazioni al nodo 1 e 2 e alla maglia 1 e 2 si ricava:

$$\begin{cases} i_{R1} = i_{R2} + i_{R3} \\ i_{R3} = C\dot{x}_1 + x_2 \\ v_{R2} = i_{R2}R_2 = i_{R3}R_3 + x_1 \\ v_{R1} = i_{R1}R_1 = u - v_{R2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_{R2} = \dfrac{v_{R2}}{R_2} = \dfrac{(C\dot{x}_1 + x_2)R_3 + x_1}{R_2} \\ u = \left(\dfrac{(C\dot{x}_1 + x_2)R_3 + x_1}{R_2} + (C\dot{x}_1 + x_2) \right) R_1 + (C\dot{x}_1 + x_2)R_3 + x_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = (C\dot{x}_1 + x_2)\left(\left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right) R_1 + R_3 \right) + x_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{x}_1 = -\frac{\left(1 + \dfrac{R_1}{R_2}\right)}{C\left(\left(1 + \dfrac{R_3}{R_2}\right)R_1 + R_3\right)} x_1 - \frac{1}{C} x_2 + \frac{u}{C\left(\left(1 + \dfrac{R_3}{R_2}\right)R_1 + R_3\right)}$$

Dall'equazione alla maglia 3 si ricava:

$$x_1 = L\dot{x}_2 + x_2 R_4 \Rightarrow \dot{x}_2 = \frac{1}{L} x_1 - \frac{R_4}{L} x_2$$

La rappresentazione i-s-u risulta:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\dfrac{(R_1 + R_2)}{C(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)} & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R_4}{L} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \dfrac{R_2}{C(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

N.B. L'esercizio poteva essere risolto più rapidamente applicando il teorema di Thevenin ai capi del condensatore.

Esercizio 2)

$$Y(s) = F(s)U(s) = \frac{(s+30)}{(s^2+3s+16)}\frac{1}{s}$$

Scomposizione in fratti semplici:

$$Y(s) = \frac{(s+30)}{(s^2+3s+16)}\frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(s^2+3s+16)} = \frac{(A+B)s^2+(3A+C)s+16A}{s(s^2+3s+16)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 3A+C=1 \\ 16A=30 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=15/8 \\ B=-15/8 \\ C=-37/8 \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{15}{8}\cdot\frac{1}{s} + \frac{-\frac{15}{8}s-\frac{37}{8}}{(s^2+3s+16)} = \frac{15}{8}\left(\frac{1}{s} - \frac{s+\frac{37}{15}}{(s^2+3s+16)}\right)$$

I polinomi $s^2+3s+16$ e $s+37/15$ si possono scrivere come:

$$s^2+3s+16 = (s+3/2)^2 + (\sqrt{55}/2)^2$$

$$s+37/15 = s+3/2+29/30$$

$$Y(s) = \frac{15}{8}\cdot\left[\frac{1}{s} - \frac{(s+3/2)}{(s+3/2)^2+(\sqrt{55}/2)^2} - \frac{29}{15}\cdot 1/\sqrt{55}\frac{\sqrt{55}/2}{(s+3/2)^2+(\sqrt{55}/2)^2}\right].$$

Antitrasformando ricaviamo l'espressione di *y(t)*:

$$y(t) = \frac{15}{8}\left[1-e^{-\frac{3}{2}t}\cos\left(\sqrt{55}/2\,t\right) - \frac{29\sqrt{55}}{825}e^{-\frac{3}{2}t}\sin\left(\sqrt{55}/2\,t\right)\right]1(t) =$$

$$= 1.875\left[1-e^{-\frac{3}{2}t}\cos(3.708t) - 0.261e^{-\frac{3}{2}t}\sin(3.708t)\right]1(t)$$

Parametri caratteristici della risposta a gradino:

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = 0$$

$$y'(0) = \lim_{s\to\infty} s^2Y(s) = 1$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \frac{15}{8}$$

I modi di evoluzione del sistema sono dati dai poli della f.d.t., ossia dalle radici del denominatore:

calcolando il Δ si vede che le radici sono complesse e coniugate, quindi ci riportiamo alla forma ingegneristica del termine trinomio:

$$\left(1+\frac{2\varsigma}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}\right)=\left(1+\frac{3}{16}s+\frac{1}{16}s^2\right)$$

$$\begin{cases}\dfrac{2\varsigma}{\omega_n}=\dfrac{3}{16}\\ \omega_n=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\varsigma=\dfrac{3}{8}=0.375\\ \omega_n=4\end{cases}$$

$$T_{a1}=\frac{4,6}{\xi\omega_n}\cong 3.1s$$

$$numero\ di\ oscillazioni=\frac{1}{2\xi}\cong 1.33$$

$$T_{\max}=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\cong 0.85s$$

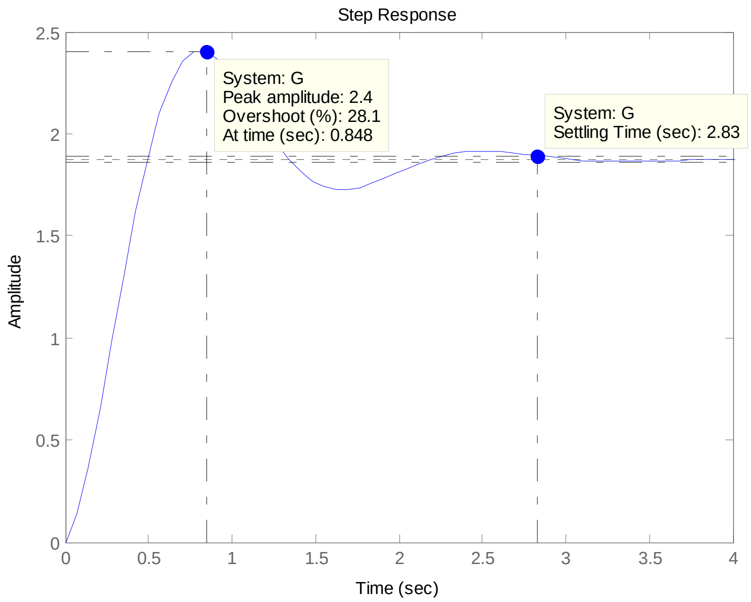
$$s\%=100e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\cong 28\%$$

$$y_{\max}=y_\infty\left(1+e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\right)\cong 2.4$$

$$T_r\ \ periodo\ \ di\ \ oscillazione=\frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\cong 1.7s$$

L’andamento reale calcolato in Matlab è riportato nella figura seguente.

Si noti che lo zero introduce un effetto derivativo, peraltro molto limitato in quanto lo zero è posto a pulsazione più elevata rispetto ai poli.



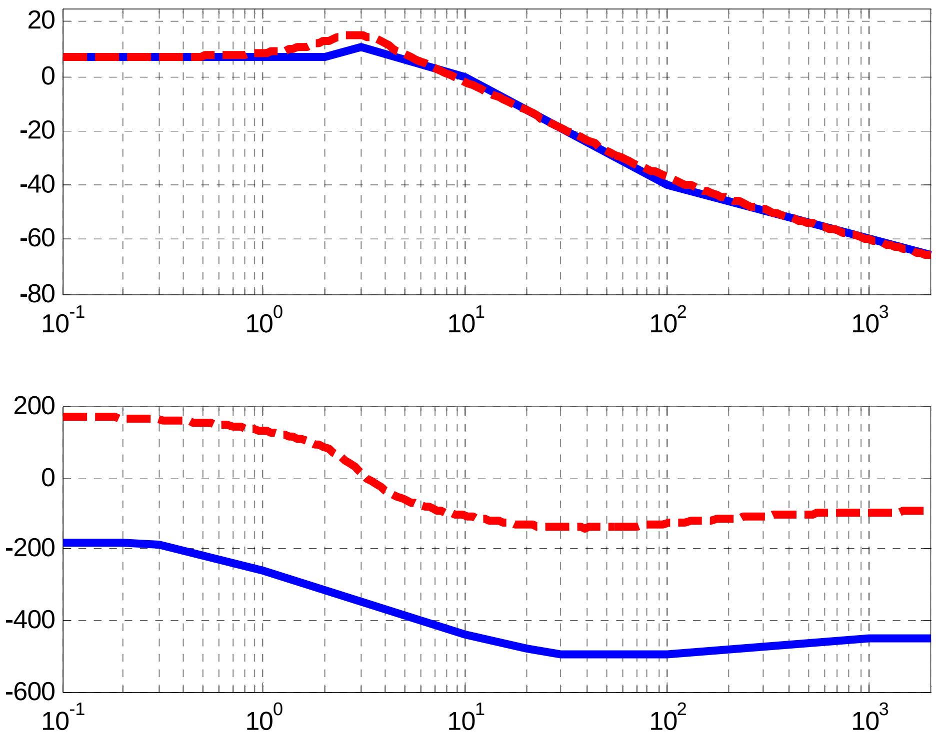
Esercizio 3)

a) $G(s)=\dfrac{(s+1)}{(s^2+3s+2)}$; sistema asintoticamente stabile, presenta due poli reali negativi ($p_1=-1, p_2=-2$).

b) $G(s)=\dfrac{(2s-12)}{(s^2-5s-2)}$; sistema instabile, presenta un polo reale positivo ($p_1=-0.4, p_2=5.4$).

c) $G(s)=\dfrac{(s^2-7s+12)}{(s^2-8s+15)}$; sistema instabile, presenta poli reali positivi ($p_1=3, p_2=5$).

Esercizio 4)


20
0
-20
-40
-60
-80
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
200
0
-200
-400
-600
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}