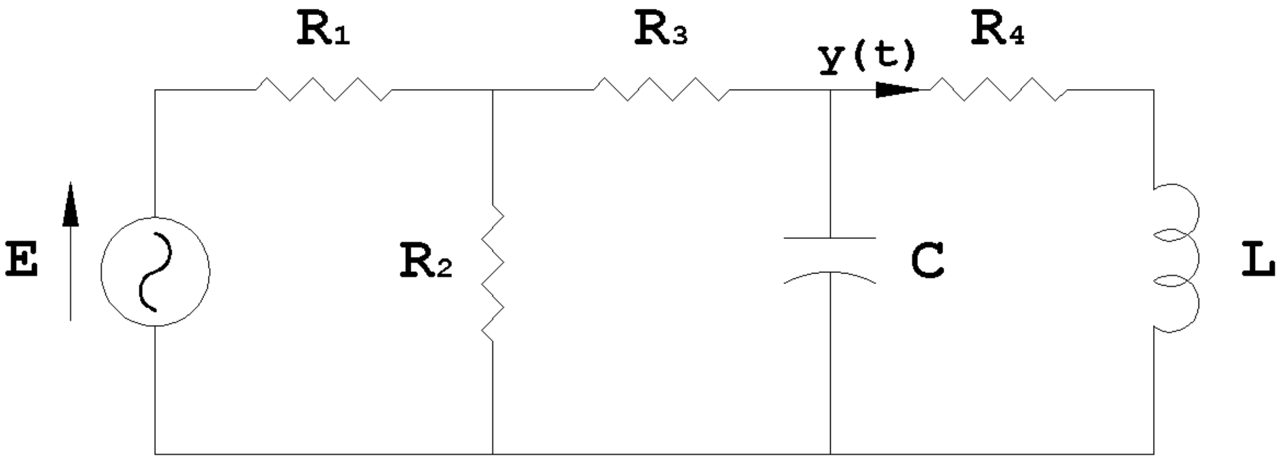
Fondamenti di Automatica - 17 Febbraio 2009 – Traccia B

Studente:____ Matricola:_________________



1) Per la rete elettrica in figura, determinare una rappresentazione i.s.u., prendendo come ingresso la tensione fornita dal generatore e come uscita la corrente che circola nell'induttore.

2) Calcolare l'espressione analitica e tracciare l'andamento qualitativo della risposta del sistema
$$F(s) = \frac{(s+20)}{(s^2+2s+9)}$$
a fronte di un segnale di ingresso u(t)=1(t).

3) Ricavare le f.d.t. dei seguenti sistemi e classificarli in base alla stabilità.

a) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$, $y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x$

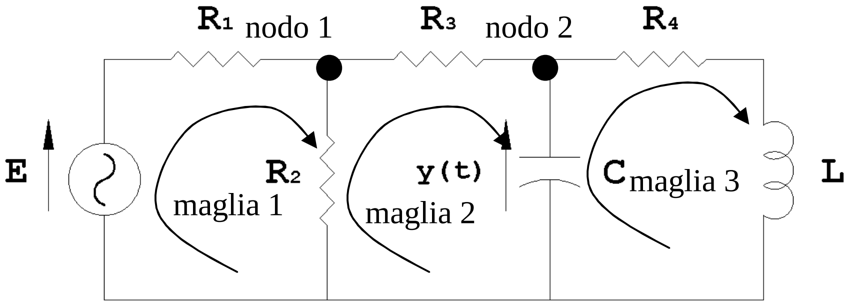
b) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$, $y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} x$

c) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} u$, $y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x + u$

4) Tracciare i diagrammi di Bode della f.d.t.
$$L(s) = \frac{(s+1)(s+200)}{(s-20)(s^2+3s+16)}$$

Tempo a disposizione: 2.5 ore

Esercizio 1)



equazioni di stato del capacitore C: $V_C = x_1$; $i_C = C\dot{x}_1$;

equazioni di stato dell'induttore L: $i_L = x_2$; $V_L = L\dot{x}_2$;

Dalle equazioni al nodo 1 e 2 e alla maglia 1 e 2 si ricava:

$$\begin{cases} i_{R1} = i_{R2} + i_{R3} \\ i_{R3} = C\dot{x}_1 + x_2 \\ v_{R2} = i_{R2}R_2 = i_{R3}R_3 + x_1 \\ v_{R1} = i_{R1}R_1 = u - v_{R2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_{R2} = \dfrac{v_{R2}}{R_2} = \dfrac{(C\dot{x}_1 + x_2)R_3 + x_1}{R_2} \\ u = \left(\dfrac{(C\dot{x}_1 + x_2)R_3 + x_1}{R_2} + (C\dot{x}_1 + x_2)\right)R_1 + (C\dot{x}_1 + x_2)R_3 + x_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = (C\dot{x}_1 + x_2)\left(\left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right)R_1 + R_3\right) + x_1\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{x}_1 = -\frac{\left(1 + \dfrac{R_1}{R_2}\right)}{C\left(\left(1 + \dfrac{R_3}{R_2}\right)R_1 + R_3\right)}x_1 - \frac{1}{C}x_2 + \frac{u}{C\left(\left(1 + \dfrac{R_3}{R_2}\right)R_1 + R_3\right)}$$

Dall'equazione alla maglia 3 si ricava:

$$x_1 = L\dot{x}_2 + x_2R_4 \Rightarrow \dot{x}_2 = \frac{1}{L}x_1 - \frac{R_4}{L}x_2$$

La rappresentazione i-s-u risulta:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\dfrac{(R_1 + R_2)}{C(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)} & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R_4}{L} \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} \dfrac{R_2}{C(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)} \\ 0 \end{pmatrix}u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}x$$

N.B. L'esercizio poteva essere risolto più rapidamente applicando il teorema di Thevenin ai capi del condensatore.

Esercizio 2)

$$Y(s) = F(s)U(s) = \frac{(s+20)}{(s^2+2s+9)}\frac{1}{s}$$

Scomposizione in fratti semplici:

$$Y(s) = \frac{(s+20)}{(s^2+2s+9)}\frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(s^2+2s+9)} = \frac{(A+B)s^2+(2A+C)s+9A}{s(s^2+2s+9)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 2A+C=1 \\ 9A=20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 20/9 \\ B = -20/9 \\ C = -31/9 \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{20}{9}\cdot\frac{1}{s} + \frac{-\frac{20}{9}s - \frac{31}{9}}{(s^2+2s+9)} = \frac{20}{9}\left(\frac{1}{s} - \frac{s+\frac{31}{20}}{(s^2+2s+9)}\right)$$

I polinomi s^2+2s+9 e $s+31/20$ si possono scrivere come:

$$s^2+2s+9 = (s+1)^2 + (2\sqrt{2})^2$$

$$s+31/20 = s+1+{}^{11}\!/_{20}$$

$$Y(s) = \frac{20}{9}\cdot\left[\frac{1}{s} - \frac{(s+1)}{(s+1)^2+(2\sqrt{2})^2} - \frac{11}{40\sqrt{2}}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{(s+1)^2+(2\sqrt{2})^2}\right].$$

Antitrasformando ricaviamo l'espressione di *y(t)*:

$$y(t) = \frac{20}{9}\left[1 - e^{-t}\cos\left(2\sqrt{2}t\right) - \frac{11\sqrt{2}}{80}e^{-t}\sin\left(2\sqrt{2}t\right)\right]1(t)$$

Parametri caratteristici della risposta a gradino:

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = 0$$

$$y'(0) = \lim_{s\to\infty} s^2Y(s) = 1$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \frac{20}{9}$$

I modi di evoluzione del sistema sono dati dai poli della f.d.t., ossia dalle radici del denominatore: calcolando il Δ si vede che le radici sono complesse e coniugate, quindi ci riportiamo alla forma ingegneristica del termine trinomio:

$$\left(1 + \frac{2\varsigma}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right) = \left(1 + \frac{2}{9}s + \frac{1}{9}s^2\right)$$

$$\begin{cases} \frac{2\varsigma}{\omega_n} = \frac{2}{9} \\ \omega_n = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varsigma = \frac{1}{3} = 0.33 \\ \omega_n = 3 \end{cases}$$

$$T_{a1} = \frac{4,6}{\xi\omega_n} \cong 4.6s$$

$$numero\ di\ oscillazioni = \frac{1}{2\xi} \cong 1.5$$

$$T_{\max} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \cong 1.11s$$

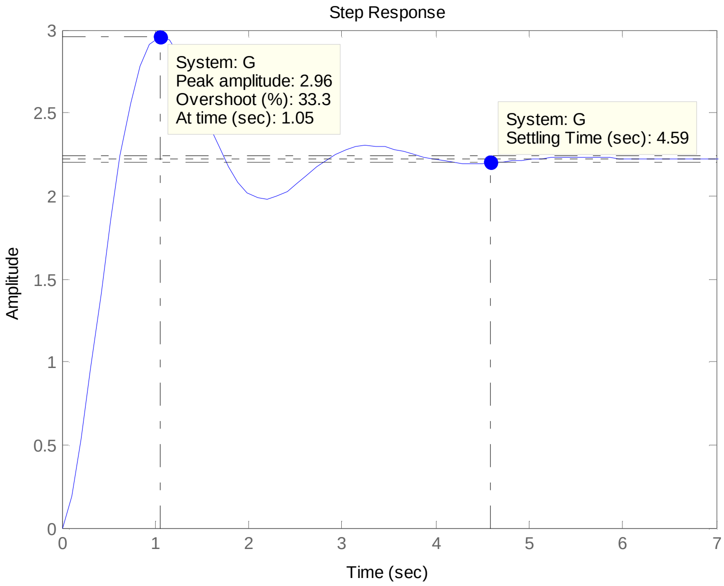
$$s\% = 100e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \cong 33\%$$

$$y_{\max} = y_\infty\left(1+e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\right) \cong 3$$

$$T_r\ \ periodo\ \ di\ \ oscillazione = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \cong 2.2s$$

L’andamento reale calcolato in Matlab è riportato nella figura seguente.

Si noti che lo zero introduce un effetto derivativo, peraltro molto limitato in quanto lo zero è posto a pulsazione più elevata rispetto ai poli.



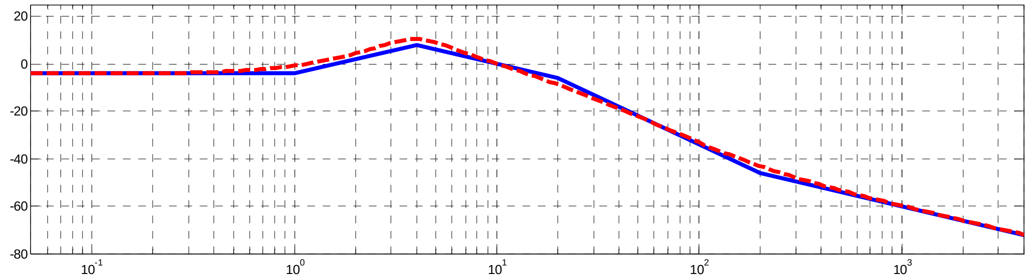
Esercizio 3)

a) $G(s)=\frac{(s-1)}{(s^2+2s+3)}$; sistema asintoticamente stabile, presenta una coppia di poli complessi coniugati a parte reale negativa ($p_{1,2}=-1\pm 1.4i$).

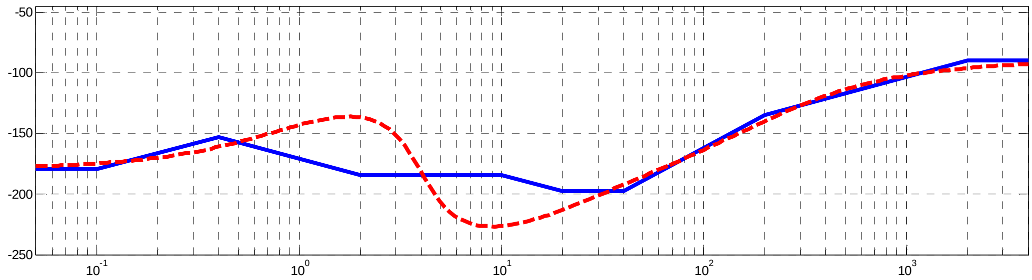
b) $G(s)=\frac{(2s+2)}{(s^2+2s+5)}$; sistema asintoticamente stabile, presenta una coppia di poli complessi coniugati a parte reale negativa ($p_{1,2}=-1\pm 2i$).

c) $G(s)=\frac{(s^2-6s+8)}{(s^2-7s+10)}$; sistema instabile, presenta poli reali positivi ($p_1=2, p_2=5$).

Esercizio 4)



20
0
-20
-40
-60
-80
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}



-50
-100
-150
-200
-250
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}