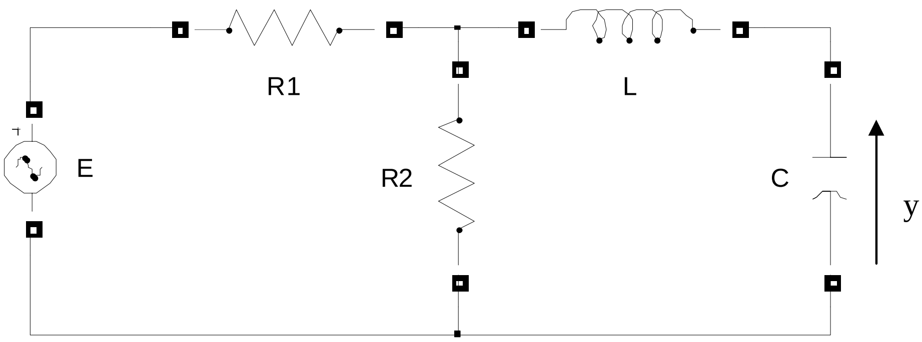
## *Fondamenti di Automatica - 20 Settembre 2007 - B*

**Studente:__________________________________________ Matricola:_________________**




1) Calcolare una rappresentazione i-s-u e la f.d.t. del sistema in figura, considerando come ingresso, *u*, la tensione del generatore E e come uscita, *y*, la tensione del condensatore C.

2) Calcolare l'espressione analitica e tracciare l'andamento qualitativo della risposta indiciale del sistema

$$F(s) = \frac{(s+12)}{(s^2+2s+8)}.$$

3) Classificare i seguenti sistemi secondo la proprietà di stabilità, motivando brevemente la scelta effettuata.

a) $W_1(s) = \frac{(s-2)}{s^2+8s+16}$ b) $W_2(s) = \frac{(s+10)}{(s^2+4s+1)s}$

c) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$, $y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$

d) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$, $y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x$

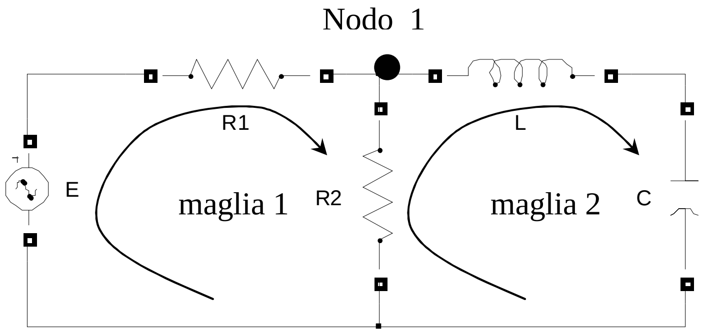
e) $W_3(s) = \frac{(s+3)}{s^2-4s+1}$

4) Tracciare i diagrammi di Bode della f.d.t.

$$L(s) = -\frac{4(1+5s)}{(s^2+s-6)}$$

**Tempo a disposizione: 2.5 ore**

Esercizio 1)




equazioni di stato dell'induttore L: $i_L = x_1$; $V_L = L\dot{x}_1$;

equazioni di stato del capacitore C: $V_C = x_2$; $i_C = C\dot{x}_2$;

l'uscita $y = x_2$;

il condensatore è in serie con l'induttore: $x_1 = C\dot{x}_2$

equazione alla maglia 2: $i_{R_2} R_2 = L\dot{x}_1 + x_2 \Rightarrow i_{R_2} = \frac{L\dot{x}_1 + x_2}{R_2}$

equazione al nodo 1: $i_{R_1} = x_1 + i_{R_2} = x_1 + \frac{L\dot{x}_1 + x_2}{R_2}$

equazione alla maglia 1:

$$u = R_1 i_{R1} + R_2 i_{R_2} = R_1\left(x_1 + \frac{L\dot{x}_1 + x_2}{R_2}\right) + R_2\left(\frac{L\dot{x}_1 + x_2}{R_2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{x}_1 = -\frac{R_1}{L\left(\frac{R_1}{R_2}+1\right)}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L\left(\frac{R_1}{R_2}+1\right)}u$$

rappresentazione i-s-u:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{R_1}{L\left(\frac{R_1}{R_2}+1\right)} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{L\left(\frac{R_1}{R_2}+1\right)} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

la f.d.t. si ricava da:

$$W(s)=C(sI-A)^{-1}B+D=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} s+\dfrac{R_1}{L\left(\dfrac{R_1}{R_2}+1\right)} & \dfrac{1}{L} \\ -\dfrac{1}{C} & s\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{L\left(\dfrac{R_1}{R_2}+1\right)} \\ 0\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{\dfrac{R_2+R_1}{\dfrac{R_1}{R_2}+1}}{s^2LC(R_1+R_2)+sCR_1R_2+R_1+R_2}$$

Esercizio 2)

$$Y(s)=F(s)U(s)=\frac{(s+12)}{(s^2+2s+8)}\frac{1}{s}$$

Scomposizione in fratti semplici:

$$Y(s)=\frac{(s+12)}{(s^2+2s+8)}\frac{1}{s}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{(s^2+2s+8)}=\frac{(A+B)s^2+(2A+C)s+8A}{s(s^2+2s+8)}\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\2A+C=1\\8A=12\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A=3/2\\B=-3/2\\C=-2\end{cases}$$

$$Y(s)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s}+\frac{-\frac{3}{2}s-2}{s^2+2s+8}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{s+\frac{4}{3}}{s^2+2s+8}\right)$$

I polinomi $s^2+2s+8$ e $s+10/3$ si possono scrivere come:

$$s^2+2s+8=(s+1)^2+(\sqrt{7})^2$$

$$s+4/3=s+1+1/3$$

$$Y(s)=\frac{3}{2}\cdot\left[\frac{1}{s}-\frac{(s+1)}{(s+1)^2+(\sqrt{7})^2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{7}}\frac{\sqrt{7}}{(s+1)^2+(\sqrt{7})^2}\right].$$

Antitrasformando ricaviamo l'espressione di *y(t)*:

$$y(t)=\frac{3}{2}\left[1-e^{-t}\cos\left(\sqrt{7}t\right)-\frac{\sqrt{7}}{21}e^{-t}\sin\left(\sqrt{7}t\right)\right]1(t)$$

Parametri caratteristici della risposta a gradino:

$$y(0)=\lim_{s\to\infty}sY(s)=0$$

$$y'(0)=\lim_{s\to\infty}s^2Y(s)=1$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \frac{3}{2}$$

I modi di evoluzione del sistema sono dati dai poli della f.d.t., ossia dalle radici del denominatore: calcolando il $\Delta$ si vede che le radici sono complesse e coniugate, quindi ci riportiamo alla forma ingegneristica del termine trinomio:

$$\left(1+\frac{2\varsigma}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}\right)=\left(1+\frac{1}{4}s+\frac{1}{8}s^2\right)$$

$$\begin{cases}\dfrac{2\varsigma}{\omega_n}=\dfrac{1}{4} \\ \omega_n = 2\sqrt{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\varsigma=\sqrt{2}/4 \\ \omega_n = 2\sqrt{2}\end{cases}$$

$$T_{a1} = \frac{4{,}6}{\xi\omega_n} \cong 4.6 \quad \sec$$

$$\textit{numero di oscillazioni} = \frac{1}{2\xi} \cong 1.41$$

$$T_{\max} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \cong 1.19 \sec$$

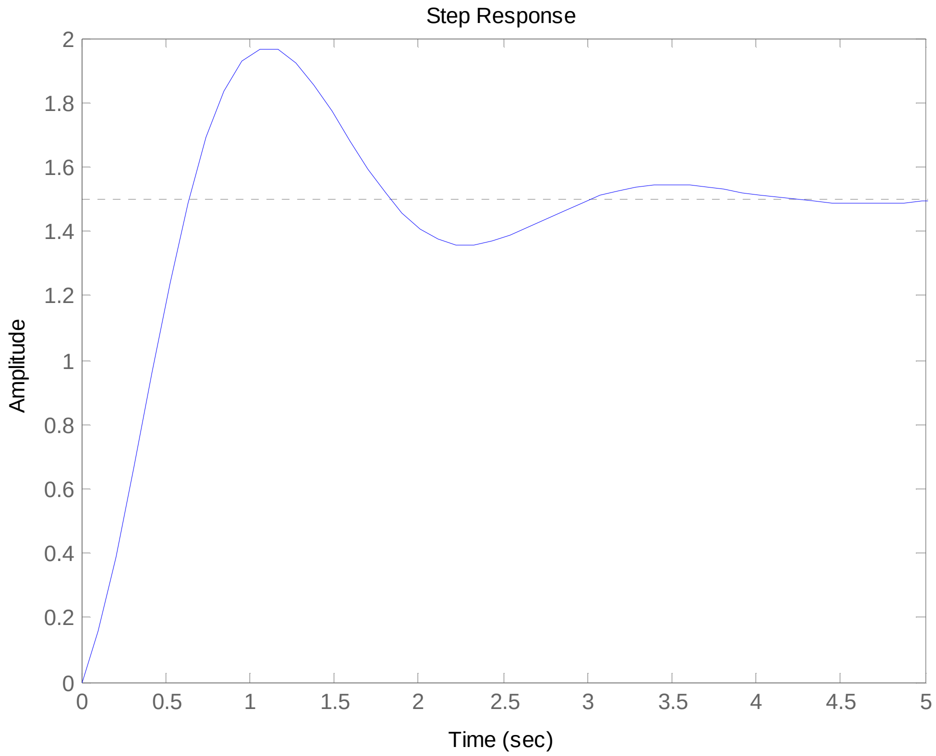
$$s\% = 100e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \cong 31\%$$

$$y_{\max} = y_\infty\left(1+e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\right) \cong 1.96$$

$$T_r \;\; \textit{periodo di oscillazione} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \cong 2.37 \quad \sec$$

L'andamento reale calcolato in Matlab è riportato nella figura seguente.

Si noti che lo zero introduce un effetto derivativo, peraltro molto limitato in quanto lo zero è posto a pulsazione più elevata rispetto ai poli, che comporta un valore reale di $y_{max}$ leggermente maggiore e un piccolo anticipo del $T_{max}$.




# Esercizio 3)

La stabilità viene studiata guardando al segno della parte reale dei poli.

a) Sistema stabile, presenta due poli reali coincidenti negativi.
b) Sistema semplicemente stabile, presenta un polo nell'origine di molteplicità 1.
c) Sistema instabile, presenta un polo reale positivo; i poli si possono facilmente ottenere ricavando le radici del polinomio caratteristico $p_\lambda(s)$ a partire dalla matrice dinamica A ( $p_\lambda(s) = \det(sI - A)$ ).
d) Sistema instabile, presenta un polo reale positivo.
e) Sistema instabile, presenta due poli reali positivi.

Esercizio 4)