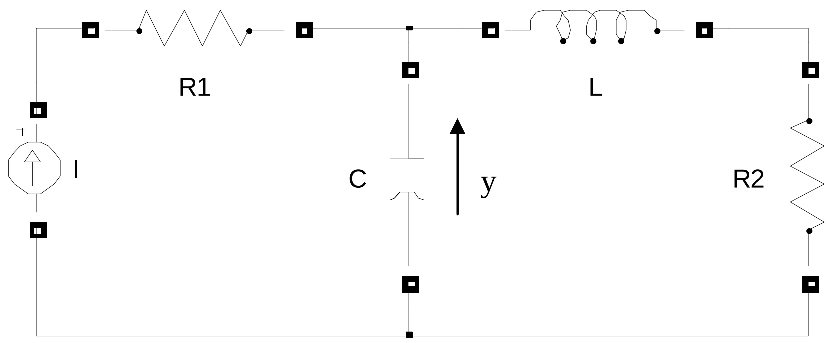
Fondamenti di Automatica - 20 Settembre 2007 - D

Studente:____ Matricola:_________________



1) Calcolare una rappresentazione i-s-u e la f.d.t. del sistema in figura, considerando come ingresso, *u*, la corrente del generatore I e come uscita, *y*, la tensione del condensatore C.

2) Calcolare l'espressione analitica e tracciare l'andamento qualitativo della risposta indiciale del sistema

$$F(s) = \frac{(s+8)}{(s^2+2s+6)}.$$

3) Classificare i seguenti sistemi secondo la proprietà di stabilità, motivando brevemente la scelta effettuata.

a) $W_1(s) = \dfrac{(s-2)}{s^2+2s+4}$ b) $W_2(s) = \dfrac{(s+5)}{(s^2-s+1)s}$

c) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$, $y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x$

d) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$, $y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x$

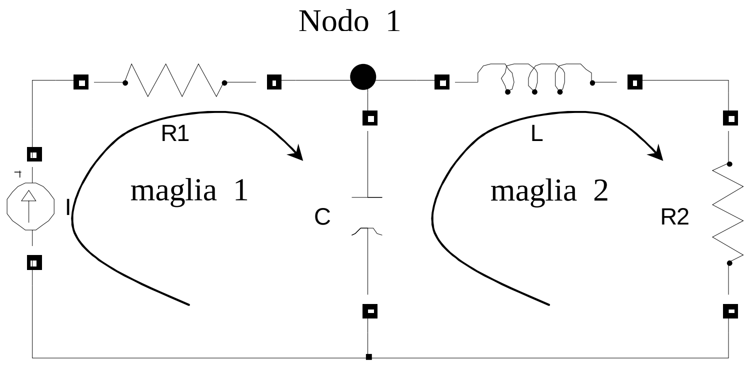
e) $W_3(s) = \dfrac{(s+3)}{s^2+2s+1}$

4) Tracciare i diagrammi di Bode della f.d.t.

$$L(s) = -\frac{(2+2s)}{(s^2-7s+10)}$$

Tempo a disposizione: 2.5 ore

Esercizio 1)



equazioni di stato del capacitore C: $V_C = x_1$; $i_C = C\dot{x}_1$;

equazioni di stato dell'induttore L: $i_L = x_2$; $V_L = L\dot{x}_2$;

l'uscita $y = x_1$;

equazione al nodo 1: $u = C\dot{x}_1 + x_2 \Rightarrow \dot{x}_1 = -\frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{C}u$

equazione alla maglia 2: $x_1 = L\dot{x}_2 + R_2 x_2 \Leftrightarrow \dot{x}_2 = \frac{x_1}{L} - \frac{R_2}{L}x_2$

rappresentazione i-s-u:
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

la f.d.t. si ricava da:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & s + \frac{R_2}{L} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{sL + R_2}{s^2 LC + sCR_2 + 1}$$

Esercizio 2)

$$Y(s) = F(s)U(s) = \frac{(s+8)}{(s^2 + 2s + 6)}\frac{1}{s}$$

Scomposizione in fratti semplici:

$$Y(s)=\frac{(s+8)}{(s^2+2s+6)}\frac{1}{s}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{(s^2+2s+6)}=\frac{(A+B)s^2+(2A+C)s+6A}{s(s^2+2s+6)}\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\2A+C=1\\6A=8\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A=4/3\\B=-4/3\\C=-5/3\end{cases}$$

$$Y(s)=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{s}+\frac{-\frac{4}{3}s-\frac{5}{3}}{(s^2+2s+6)}=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{s}-\frac{s+\frac{5}{4}}{(s^2+2s+6)}\right)$$

I polinomi s^2+2s+6 e $s+5/4$ si possono scrivere come:

$s^2+2s+6=(s+1)^2+(\sqrt{5})^2$

$s+5/4=s+1+1/4$

$$Y(s)=\frac{4}{3}\cdot\left[\frac{1}{s}-\frac{(s+1)}{(s+1)^2+(\sqrt{5})^2}-\frac{1}{4\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{(s+1)^2+(\sqrt{5})^2}\right].$$

Antitrasformando ricaviamo l'espressione di *y(t)*:

$$y(t)=\frac{4}{3}\left[1-e^{-t}\cos(\sqrt{5}t)-\frac{1}{4\sqrt{5}}e^{-t}\sin(\sqrt{5}t)\right]1(t)$$

Parametri caratteristici della risposta a gradino:

$$y(0)=\lim_{s\to\infty}sY(s)=0$$

$$y'(0)=\lim_{s\to\infty}s^2Y(s)=1$$

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{s\to0}sY(s)=\frac{4}{3}$$

I modi di evoluzione del sistema sono dati dai poli della f.d.t., ossia dalle radici del denominatore: calcolando il Δ si vede che le radici sono complesse e coniugate, quindi ci riportiamo alla forma ingegneristica del termine trinomio:

$$\left(1+\frac{2\varsigma}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}\right)=\left(1+\frac{1}{3}s+\frac{1}{6}s^2\right)$$

$$\begin{cases}\frac{2\varsigma}{\omega_n}=\frac{1}{3}\\\omega_n=\sqrt{6}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\varsigma=\frac{\sqrt{6}}{6}\\\omega_n=\sqrt{6}\end{cases}$$

$$T_{a1} = \frac{4,6}{\xi\omega_n} \cong 4.6 \quad \sec$$

$$numero\ di\ oscillazioni = \frac{1}{2\xi} \cong 1.22$$

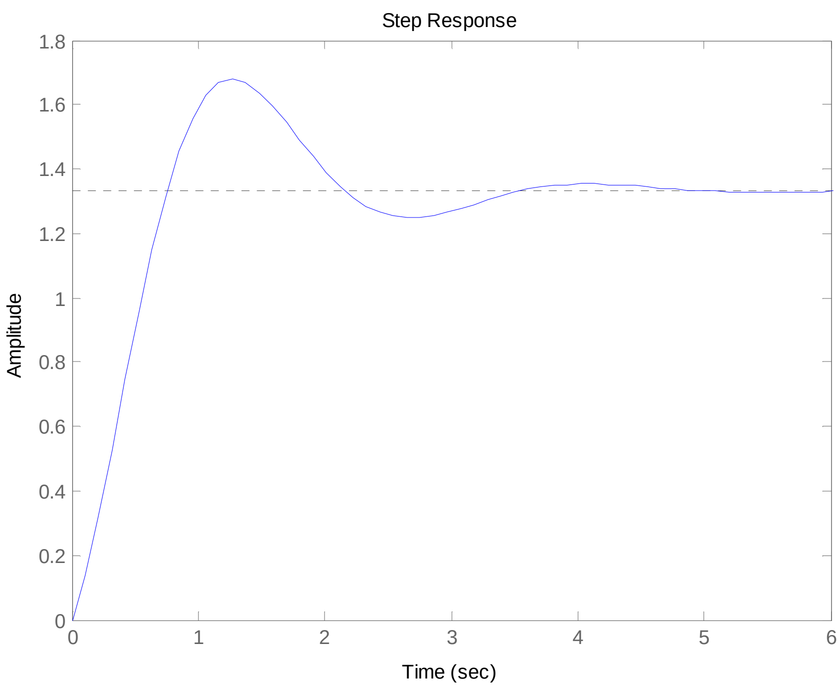
$$T_{\max} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \cong 1.4\sec$$

$$s\% = 100e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \cong 25\%$$

$$y_{\max} = y_\infty\left(1+e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\right) \cong 1.66$$

$$T_r\ \ periodo\ \ di\ \ oscillazione = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \cong 2.81 \quad \sec$$

L’andamento reale calcolato in Matlab è riportato nella figura seguente.
Si noti che lo zero introduce un effetto derivativo, peraltro molto limitato in quanto lo zero è posto a pulsazione più elevata rispetto ai poli, che comporta un valore reale di y_{max} leggermente maggiore e un piccolo anticipo del T_{max}.



Esercizio 3)

La stabilità viene studiata guardando al segno della parte reale dei poli.

a) Sistema asintoticamente stabile, presenta una coppia di poli complessi coniugati a parte reale negativa.
b) Sistema instabile, presenta una coppia di poli complessi coniugati a parte reale positiva.
c) Sistema instabile, presenta una coppia di poli reali positivi; i poli si possono facilmente ottenere ricavando le radici del polinomio caratteristico $p_\lambda(s)$ a partire dalla matrice dinamica A ($p_\lambda(s) = \det(sI - A)$).
d) Sistema asintoticamente stabile, presenta due poli reali negativi.
e) Sistema asintoticamente stabile, presenta due poli reali coincidenti negativi.

Esercizio 4)