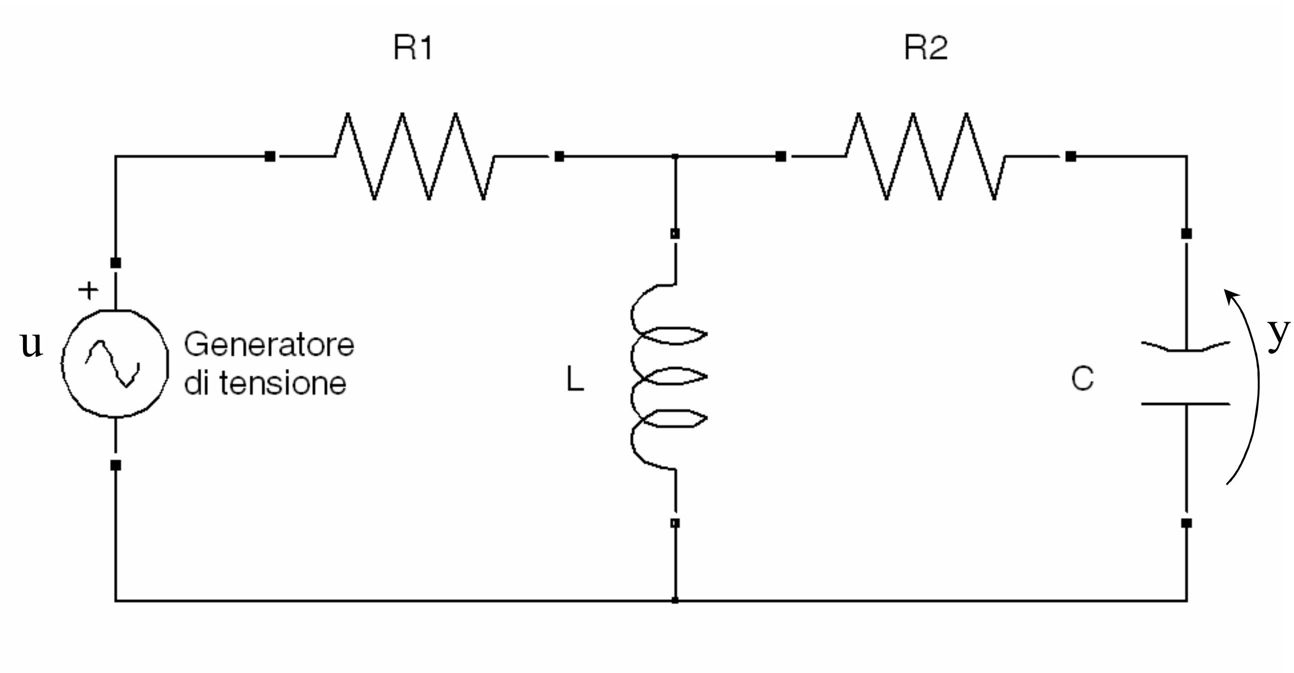
Prova Scritta di Fondamenti di Automatica del 15 Febbraio 2006 - A

Studente:__________________________________ **Matricola:**__________________



1) Calcolare la rappresentazione i.s.u. e la f.d.t del sistema elettrico rappresentato in figura.

2) Per un sistema avente f.d.t.

$$F(s)=\frac{(s+1)}{(s^2+6s+8)}$$

calcolare l'espressione analitica della risposta al segnale *u(t)=1(t)*.

3) Tracciare l'andamento qualitativo della risposta indiciale del sistema avente f.d.t.

$$\frac{(0.3s+1)}{(4s^2+1.2s+1)}$$

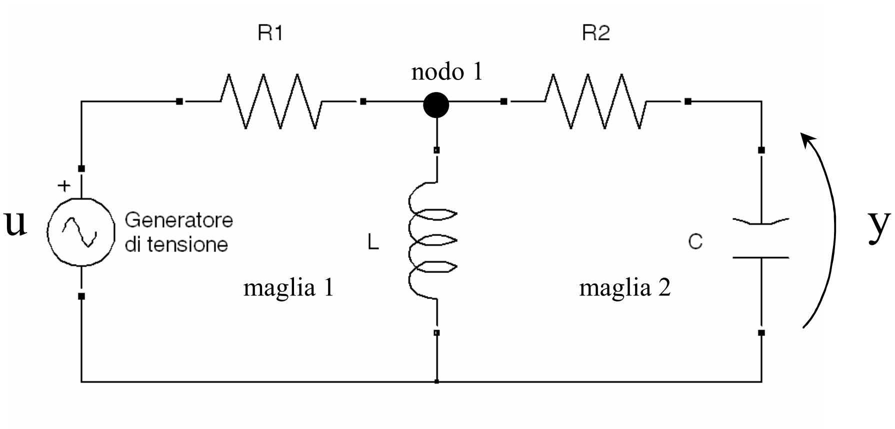
4) Tracciare i diagrammi di Bode della seguente f.d.t.

$$L(s)=10\frac{(s+30)}{(s^2-6s-16)}$$

Tempo a disposizione: 2 ore

SOLUZIONE

1)



equazioni di stato dell'induttore: $i_L = x_1$; $V_L = L\dot{x}_1$;

equazioni di stato del capacitore: $V_C = x_2$; $i_C = C\dot{x}_2$; $y = V_C = x_2$.

$i_{R_1} = i_L + i_C = x_1 + C\dot{x}_2$ equazione di Kirchoff nodo 1

$u - R_1(x_1 + C\dot{x}_2) - L\dot{x}_1 = 0$ equazione alla maglia 1

$L\dot{x}_1 - x_2 - R_2C\dot{x}_2 = 0$ equazione alla maglia 2

ricavando $\dot{x}_1$ dall'equazione alla maglia 2:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{L}x_2 + \frac{R_2C}{L}\dot{x}_2$$

e sostituendo all'equazione alla maglia 1, dopo una serie di semplificazioni, otteniamo $\dot{x}_2$:

$$\dot{x}_2 = -\frac{R_1}{(R_1+R_2)C}x_1 - \frac{1}{(R_1+R_2)C}x_2 + \frac{1}{(R_1+R_2)C}u$$

ricostituendo in $\dot{x}_1$, ricaviamo:

$$\dot{x}_1 = -\frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L}x_1 + \frac{R_1}{(R_1+R_2)L}x_2 + \frac{R_2}{(R_1+R_2)L}u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L} & \frac{R_1}{(R_1+R_2)L} \\ -\frac{R_1}{(R_1+R_2)C} & -\frac{1}{(R_1+R_2)C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_2}{(R_1+R_2)L} \\ \frac{1}{(R_1+R_2)C} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

la f.d.t. si ricava da:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

2)

Scriviamo l'espressione analitica della risposta al gradino nel dominio di Laplace:

$$Y(s) = F(s)U(s) = \frac{(s+1)}{(s^2+6s+8)}\frac{1}{s} = \frac{(s+1)}{s(s^2+6s+8)} = \frac{(s+1)}{s(s+4)(s+2)}$$

Utilizzando la scomposizione in fratti semplici si ricavano i coefficienti *A*, *B* e *C* in modo da scomporre la *Y(s)* per antitrasformarla nella *y(t)*:

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{(s+4)} + \frac{C}{(s+2)}$$

$$A = \lim_{s\to 0} \frac{(s+1)}{(s+4)(s+2)} = \frac{1}{8}$$

$$B = \lim_{s\to -4} \frac{(s+1)}{s(s+2)} = -\frac{3}{8}$$

$$C = \lim_{s\to -2} \frac{(s+1)}{s(s+4)} = \frac{1}{4}$$

Sostituendo i coefficienti sopra determinati otteniamo:

$$Y(s) = \frac{1/8}{s} - \frac{3/8}{(s+4)} + \frac{1/4}{(s+2)}$$

antitrasformando ricaviamo l'espressione di *y(t)*:

$$y(t) = \left[\frac{1}{8} - \frac{3}{8}e^{-4t} + \frac{1}{4}e^{-2t}\right]1(t)$$

3)

$$Y(s) = W(s)U(s) = \frac{0,3s+1}{4s^2+1,2s+1}\frac{1}{s} = \frac{0,3s+1}{s(4s^2+1,2s+1)}$$

ricaviamo i parametri caratteristici della risposta a gradino:

$$(4s^2+1,2s+1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{2\xi}{\omega_n} = 1,2 \\ \omega_n = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi = 0,3 \\ \omega_n = 0,5 \end{cases}$$

$$s\% = 100e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \cong 37,4$$

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \cong 0,477 \quad rad/\sec$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_r} \cong 13,16 \quad \sec$$

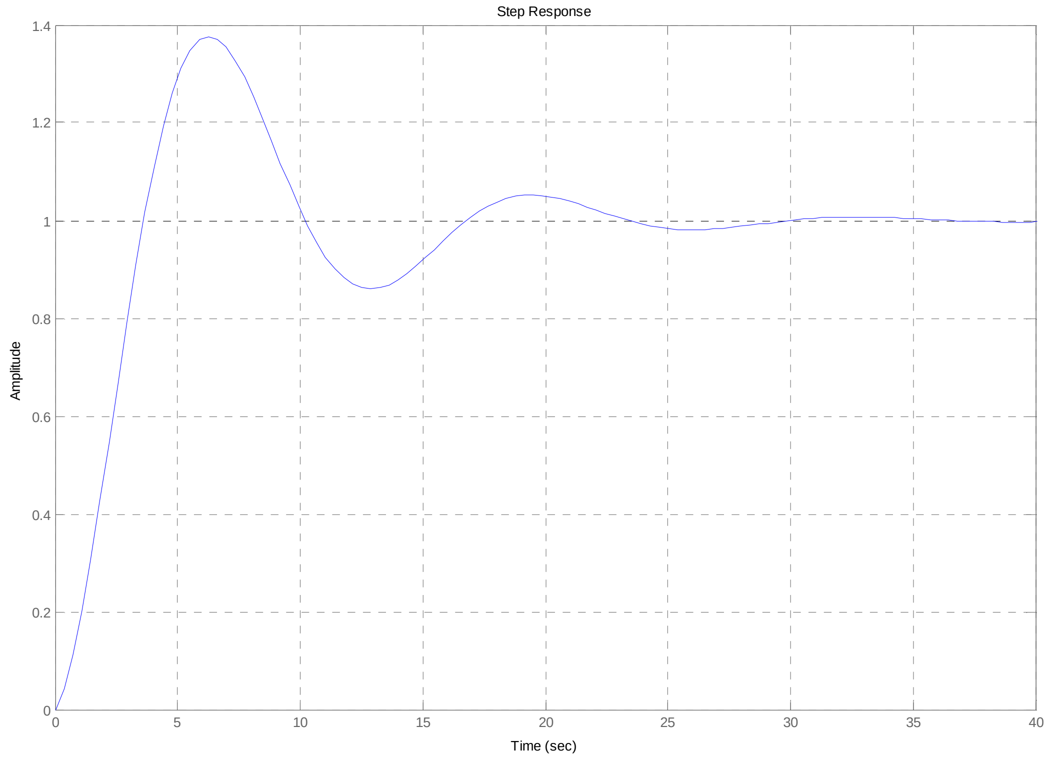
$$T_{a1} = \frac{4,6}{\xi\omega_n} \cong 30,67 \quad \sec$$

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty}\frac{0,3s+1}{(4s^2+1,2s+1)} = 0$$

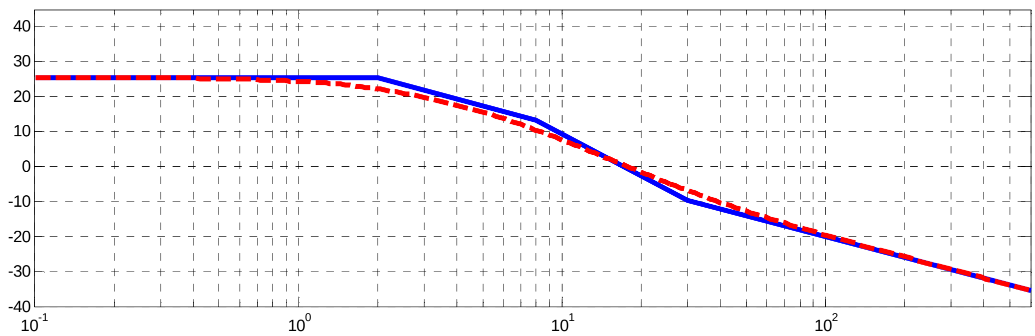
$$y'(0) = \lim_{s\to\infty} s^2Y(s) = \lim_{s\to\infty}\frac{0,3s^2+s}{(4s^2+1,2s+1)} = \frac{0,3}{4} = 0,075$$

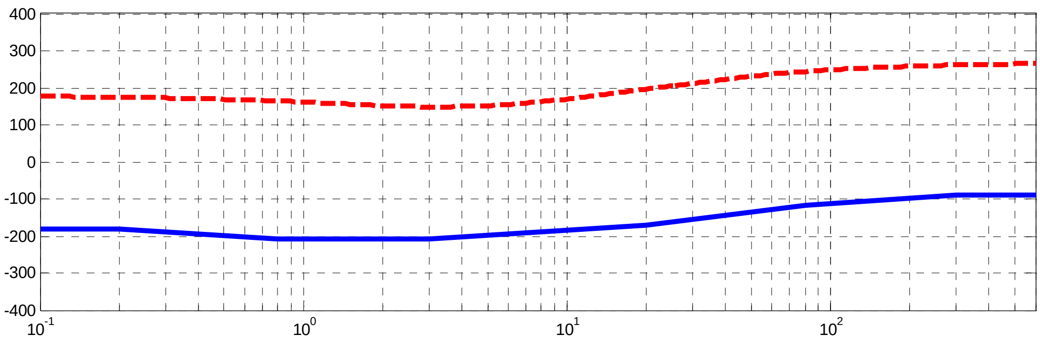
$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0}\frac{0,3s+1}{(4s^2+1,2s+1)} = 1$$

$$W(0) = 1$$


Step Response
Amplitude
Time (sec)
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
5
10
15
20
25
30
35
40

4)


40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}


400
300
200
100
0
-100
-200
-300
-400
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}