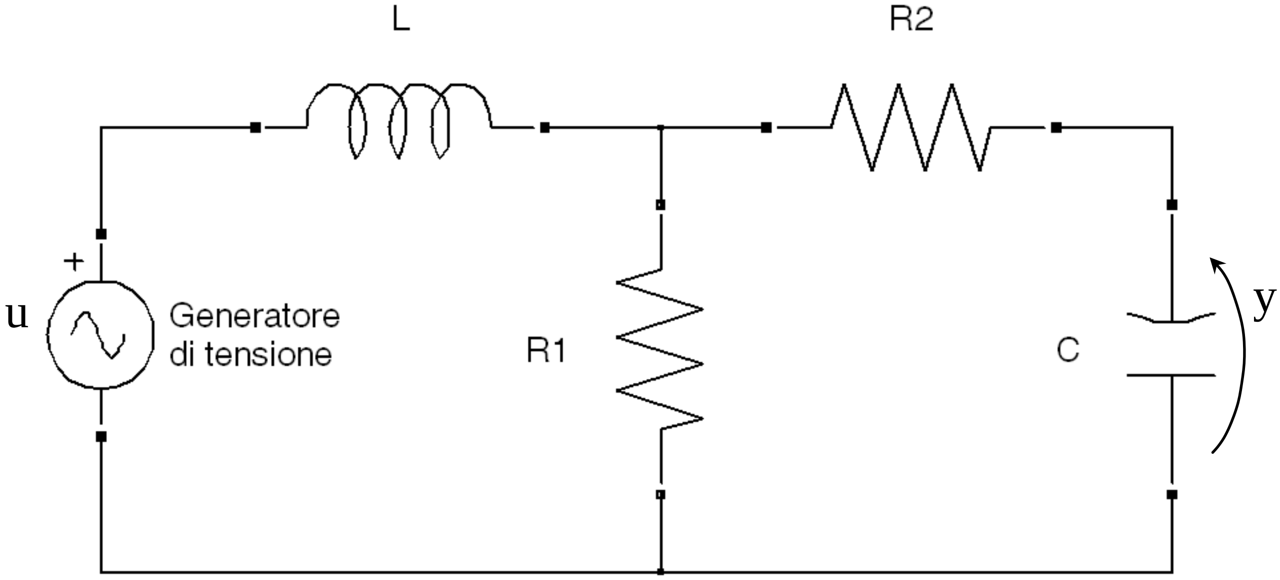
Prova Scritta di Fondamenti di Automatica del 15 Febbraio 2006 - B

Studente:____ **Matricola:**__________________



1) Calcolare la rappresentazione i.s.u. e la f.d.t del sistema elettrico rappresentato in figura.

2) Per un sistema avente f.d.t.

$$F(s) = \frac{(s+1)}{(s^2+5s)}$$

calcolare l'espressione analitica della risposta al segnale *u(t)=1(t)*.

3) Tracciare l'andamento qualitativo della risposta indiciale del sistema avente f.d.t.

$$\frac{10(0.1s+1)}{(s^2+0.8s+4)}$$

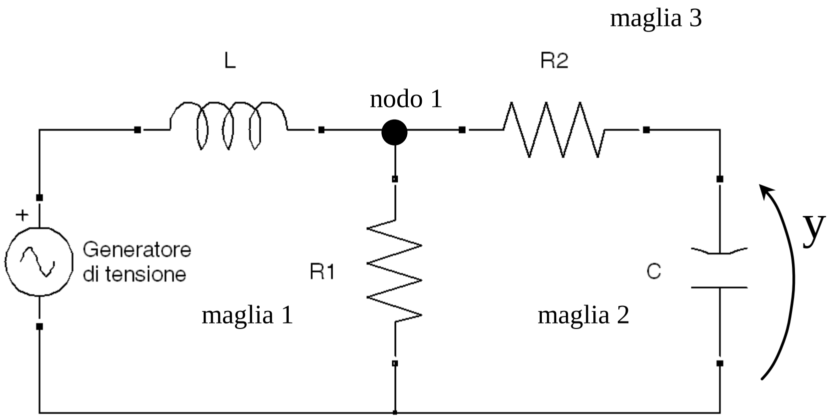
4) Tracciare i diagrammi di Bode della seguente f.d.t.

$$L(s) = 20\frac{(s+3)}{(s^2-9.5s-5)}$$

Tempo a disposizione: 2 ore

SOLUZIONE

1)



equazioni di stato dell'induttore: $i_L = x_1$; $V_L = L\dot{x}_1$;

equazioni di stato del capacitore: $V_C = x_2$; $i_C = C\dot{x}_2$; $y = V_C = x_2$.

$i_{R_1} = i_L - i_C = x_1 - C\dot{x}_2$ equazione di Kirchoff nodo 1 **(1)**

$u - L\dot{x}_1 - R_1 i_{R1} = 0$ equazione alla maglia 1

$R_2 C\dot{x}_2 + x_2 - R_1 i_{R_1} = 0$ equazione alla maglia 2 **(2)**

sostituendo (1) in (2) si ottiene l'espressione di $\dot{x}_2$:

$$\dot{x}_2 = \frac{R_1}{(R_1 + R_2)C} x_1 - \frac{1}{(R_1 + R_2)C} x_2$$

Sfruttando l'equazione alla maglia esterna 3

$$u - L\dot{x}_1 - R_2 C\dot{x}_2 - x_2 = 0$$

da cui:

$$C\dot{x}_2 = \frac{u}{R_2} - \frac{L}{R_2}\dot{x}_1 - \frac{1}{R_2} x_2 \quad \textbf{(3)}$$

Sostituendo la (3) in (1)

$$i_1 = x_1 + \frac{1}{R_2} x_2 + \frac{L}{R_2}\dot{x}_1 - \frac{1}{R_2} u \quad \textbf{(4)}$$

e sostituendo a sua volta la (4) nell'equazione alla maglia 1, si ottiene l'espressione di $\dot{x}_1$:

$$\dot{x}_1 = -\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} x_1 - \frac{R_1}{(R_1 + R_2)L} x_2 + u$$

Si giunge così alla rappresentazione ISU matriciale:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} & -\frac{R_1}{(R_1 + R_2)L} \\ \frac{R_1}{(R_1 + R_2)C} & -\frac{1}{(R_1 + R_2)C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

La f.d.t. si ricava con:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

2)

L'espressione analitica della risposta al gradino nel dominio di Laplace si ricava:

$$Y(s) = F(s)U(s) = \frac{(s+1)}{s(s+5)} \frac{1}{s} = \frac{(s+1)}{s^2(s+5)}$$

Utilizzando la scomposizione in fratti semplici si ricavano i coefficienti *A*, *B* e *C* in modo da antitrasformare in *y(t)* la *Y(s)* così scomposta:

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+5}$$

$$As(s+5) + B(s+5) + Cs^2 = s + 1$$

svolgendo i prodotti ed eguagliando i termini di pari grado di s, si ottiene un sistema di 3 equazioni in 3 incognite da cui si ricavano i valori di A,B e C:

A= $\frac{4}{25}$

B= $\frac{1}{5}$

C= $-\frac{4}{25}$

Antitrasformando, si ricava l'espressione di *y(t)*:

$$y(t) = \left[\frac{4}{25} + \frac{1}{5}t - \frac{4}{25}e^{-5t}\right] 1(t)$$

3)

$$Y(s) = F(s)U(s) = \frac{10(0{,}1s+1)}{s^2+0{,}8s+4}\frac{1}{s}$$

ricaviamo i parametri caratteristici della risposta al gradino:

$$s^2+0{,}8s+4$$

$$\begin{cases} \dfrac{2\xi}{\omega_n} = 0{,}2 \\ \omega_n = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi = 0{,}2 \\ \omega_n = 2 \end{cases}$$

$$s\% = 100e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \cong 52{,}6\%$$

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 1{,}96 \quad rad/\sec$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_r} = 6{,}856 \quad \sec$$

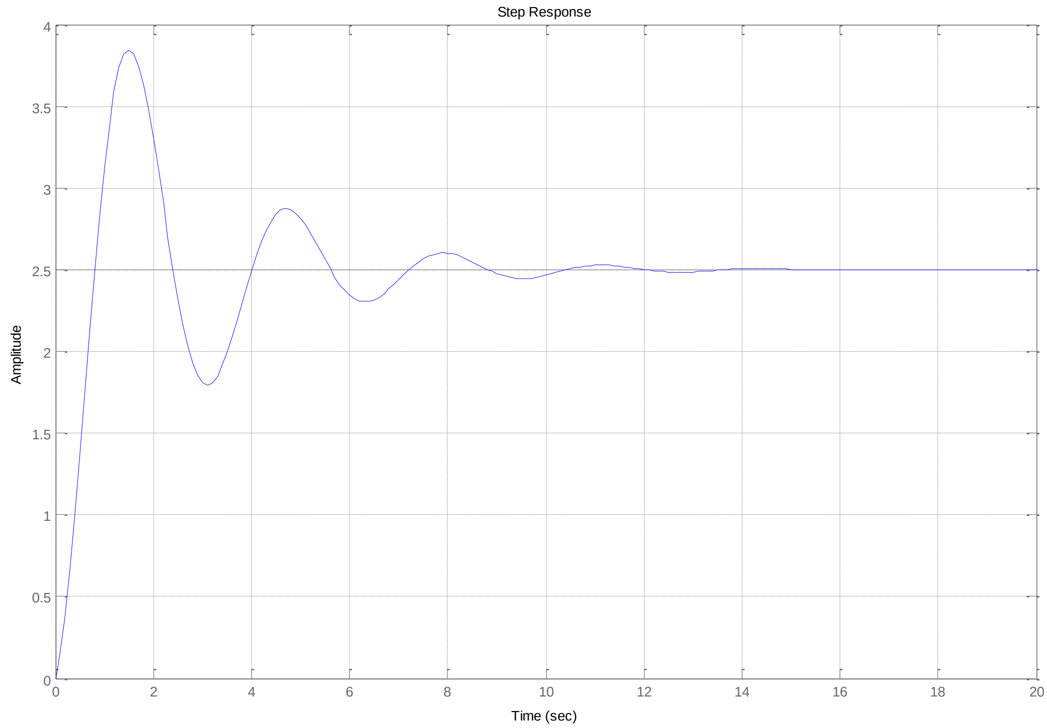
$$T_{a1} = \frac{4{,}6}{\xi\omega_n} = 11{,}5 \quad \sec$$

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty}\frac{s+10}{s^2+0{,}8s+4} = 0$$

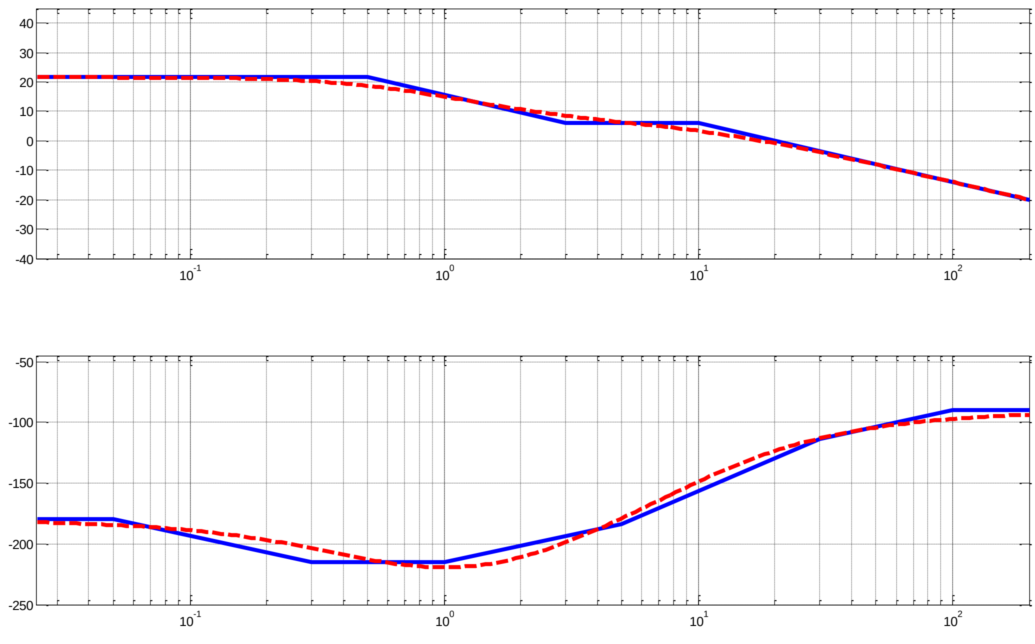
$$y'(0) = \lim_{s\to\infty} s^2Y(s) = \lim_{s\to\infty}\frac{s^2+10s}{s^2+0{,}8s+4} = 1$$

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0}\frac{s+10}{s^2+0{,}8s+4} = \frac{5}{2}$$

$$F(0) = \frac{5}{2}$$


Step Response
Amplitude
Time (sec)
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

4)


40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-100
-150
-200
-250
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}