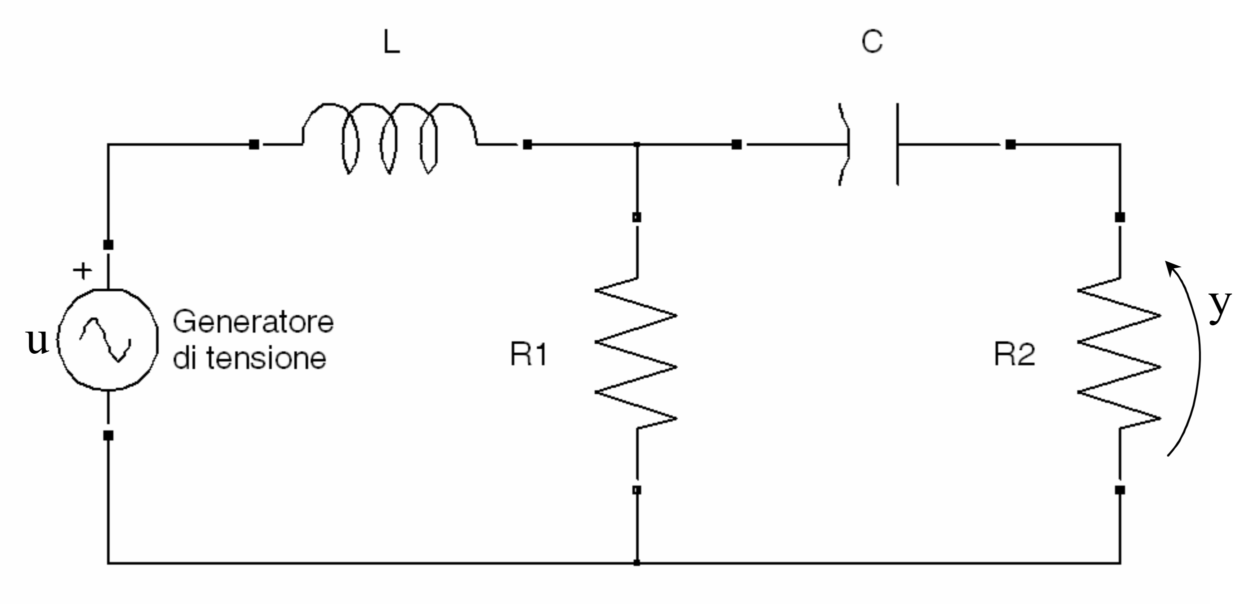
Prova Scritta di Fondamenti di Automatica del 15 Febbraio 2006 – C

Studente:____ **Matricola:**__________________



1) Calcolare la rappresentazione i.s.u. e la f.d.t del sistema elettrico rappresentato in figura.

2) Per un sistema avente f.d.t.

$$F(s) = \frac{(s+2)}{(s^2+3s+9)}$$

calcolare l'espressione analitica della risposta al segnale *u(t)=1(t)*.

3) Tracciare l'andamento qualitativo della risposta indiciale del sistema avente f.d.t.

$$\frac{5(s+3)}{(s^2+10s)}$$

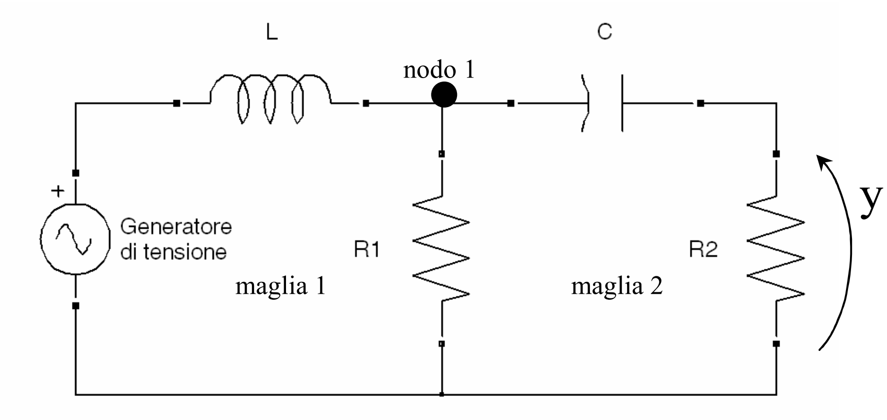
4) Tracciare i diagrammi di Bode della seguente f.d.t.

$$L(s) = 30\frac{(s-10)}{(s^2+2s-3)}$$

Tempo a disposizione: 2 ore

SOLUZIONE

1)



equazioni di stato dell'induttore: $i_L = x_1$; $V_L = L\dot{x}_1$;

equazioni di stato del capacitore: $V_C = x_2$; $i_C = C\dot{x}_2$; $y = V_{R_2}$.

$u - L\dot{x}_1 - R_1 i_{R1} = 0$ equazione alla maglia 1 **(1)**

$R_2 C\dot{x}_2 + x_2 - R_1 i_{R_1} = 0$ equazione alla maglia 2 **(2)**

$x_1 = i_1 + C\dot{x}_2$ equazione di Kirchoff nodo 1 **(3)**

Dalla (3):

$C\dot{x}_2 = x_1 - i_{R_1}$ **(4)**

Sostituendo (4) in (2) si ottiene l'espressione di i_{R_1} in funzione degli stati:

$$i_{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} x_1 + \frac{1}{R_1 + R_2} x_2 \quad \textbf{(5)}$$

Dalla (1),

$$\dot{x}_1 = -\frac{R_1}{L} i_{R_1} + \frac{1}{L} u \quad \textbf{(6)}$$

Sostituendo la (5) nella (6), si ottiene

$$\dot{x}_1 = -\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} x_1 - \frac{R_1}{(R_1 + R_2)L} x_2 + \frac{1}{L} u$$

Dalla (3),

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{C}i_{R_1} \quad \textbf{(7)}$$

Sostituendo nella (7) la (5), si ottiene l'espressione di $\dot{x}_2$.

$$\dot{x}_2 = \frac{R_1}{C(R_1+R_2)}x_1 - \frac{1}{C(R_1+R_2)}x_2$$

L'espressione dell'uscita si ottiene dalla seguente equazione alla maglia 2:

$$y + x_2 = R_1 i_{R_1}$$

nella quale si sostituisce la **(5)**.

Pertanto:

$$y = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}x_1 - \frac{R_2}{R_1+R_2}x_2$$

Si giunge così alla rappresentazione ISU matriciale:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1 R_2}{(R_1+R_2)L} & -\frac{R_1}{(R_1+R_2)L} \\ \frac{R_1}{(R_1+R_2)C} & -\frac{1}{(R_1+R_2)C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} & -\frac{R_2}{R_1+R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

La f.d.t. si ricava con:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

2)

L'espressione analitica della risposta al gradino nel dominio di Laplace si ricava:

$$Y(s) = F(s)U(s) = \frac{s+2}{s(s^2+3s+9)}$$

Si utilizzando la seguente scomposizione in fratti semplici per ricavare i coefficienti A, B e C:

$$\frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+3s+9} = \frac{(A+B)s^2 + (3A+C)s + 9A}{s(s^2+3s+9)}$$

$$(A+B)s^2 + (3A+C)s + 9A \equiv s+2$$

Uguagliando i coefficienti dei termini di pari grado si ha:

$$A + B = 0$$
$$3A + C = 1$$
$$9A = 2$$

$$A = \frac{2}{9}$$

$$B = -\frac{2}{9}$$

$$C = \frac{1}{3}$$

da cui:

$$Y(s) = \frac{2}{9}\frac{1}{s} + \frac{1}{3}\frac{1 - \frac{2}{3}s}{s^2 + 3s + 9}$$

si noti che $s^2 + 3s + 9$ può essere scritto come:

$$\left(s + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

Rielaborando ulteriormente il secondo termine della $Y(s)$:

$$-\frac{2}{3}\frac{s - \frac{3}{2}}{\left[s - \left(-\frac{3}{2}\right)\right]^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = -\frac{2}{3}\frac{s - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}}{\left[s - \left(-\frac{3}{2}\right)\right]^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= -\frac{2}{3}\frac{s - \left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}}{\left[s - \left(-\frac{3}{2}\right)\right]^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= -\frac{2}{3}\frac{s - \left(-\frac{3}{2}\right)}{\left[s - \left(-\frac{3}{2}\right)\right]^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{2}{3}\frac{-3}{\left[s - \left(-\frac{3}{2}\right)\right]^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= -\frac{2}{3}\frac{s - \left(-\frac{3}{2}\right)}{\left[s - \left(-\frac{3}{2}\right)\right]^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{2}{3}\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}{\left[s - \left(-\frac{3}{2}\right)\right]^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= -\frac{2}{3}\frac{s - \left(-\frac{3}{2}\right)}{\left[s - \left(-\frac{3}{2}\right)\right]^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{4}{9}\sqrt{3}\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\left[s - \left(-\frac{3}{2}\right)\right]^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

Il secondo termine della Y(s) è stato così ricondotto nella seguente somma delle due forme notevoli:

$$\frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2+\omega^2}+\frac{\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$$

Antitrasformando, si ricava l'espressione di *y(t)*:

$$y(t)=\left\{\frac{2}{9}+\frac{1}{3}\left[-\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}t}\cos\left(\frac{3}{2}\sqrt{3t}\right)+\frac{4}{9}\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}t}sen\left(\frac{3}{2}\sqrt{3t}\right)\right]\right\}1(t)$$

3)

$$Y(s)=G(s)U(s)=\frac{5(s+3)}{(s^2+10s)}\frac{1}{s}$$

Applicando il teorema del valore iniziale:

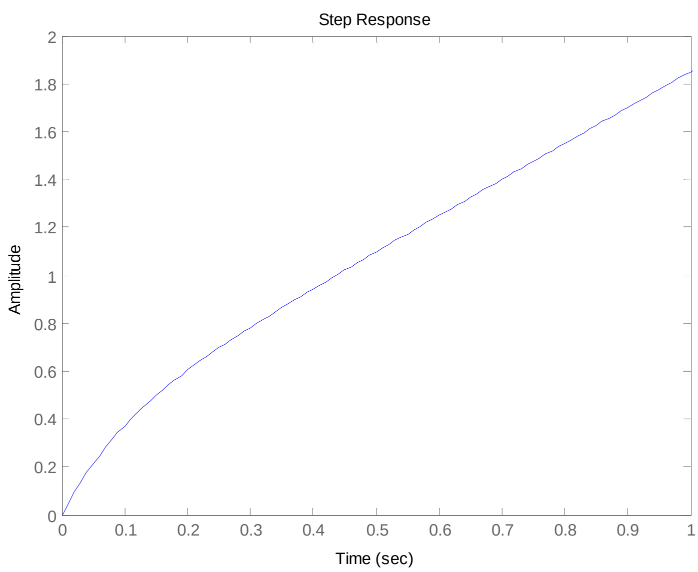
$$y(0)=\lim_{s\to\infty}sY(s)=\lim_{s\to\infty}s\frac{5(s+3)}{s(s^2+10s)}=0$$

Teorema del valore finale:

$$y(\infty)=\lim_{s\to 0}sY(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{5(s+3)}{s(s^2+10s)}=\infty$$

$$y'(0)=\lim_{s\to\infty}s^2Y(s)=\lim_{s\to\infty}s^2\frac{5(s+3)}{s(s^2+10s)}=5$$

$$y'(\infty)=\lim_{s\to 0}s^2Y(s)=\lim_{s\to 0}s^2\frac{5(s+3)}{s(s^2+10s)}=\frac{3}{2}$$



4)

$$L(s) = 30\frac{(s-10)}{(s^2+2s-3)}$$