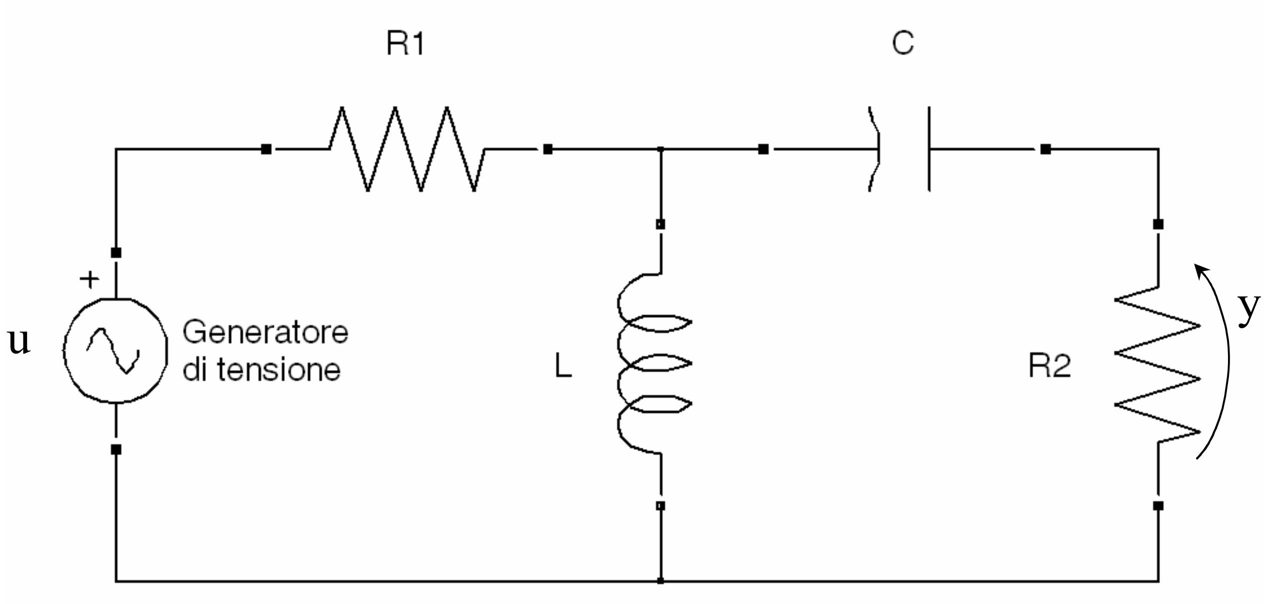
Prova Scritta di Fondamenti di Automatica del 15 Febbraio 2006 - D

Studente:____ **Matricola:**__________________



1) Calcolare la rappresentazione i.s.u. e la f.d.t del sistema elettrico rappresentato in figura.

2) Per un sistema avente f.d.t.

$$F(s) = \frac{(0.2s+1)}{(s^2+5s+25)}$$

calcolare l'espressione analitica della risposta al segnale *u(t)=1(t)*.

3) Tracciare l'andamento qualitativo della risposta indiciale del sistema avente f.d.t.

$$\frac{20(0.1s+1)}{(s^2+1.5s+9)}$$

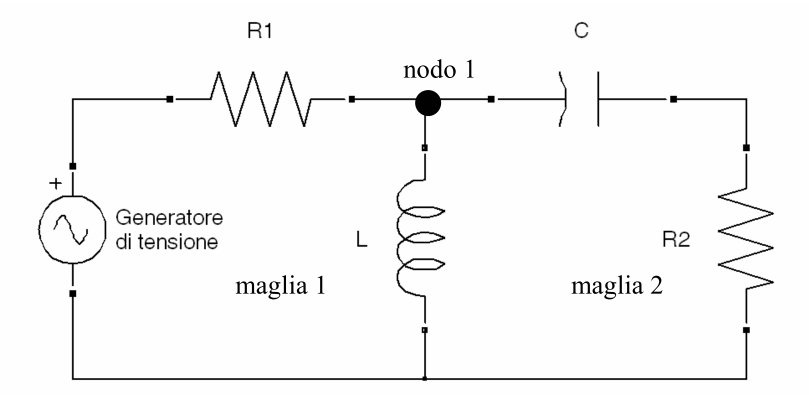
4) Tracciare i diagrammi di Bode della seguente f.d.t.

$$L(s) = 0.1\frac{(-s+20)}{(s^2+45s-250)}$$

Tempo a disposizione: 2 ore

SOLUZIONE

1)



equazioni di stato dell'induttore: $i_L = x_1$; $V_L = L\dot{x}_1$;

equazioni di stato del capacitore: $V_C = x_2$; $i_C = C\dot{x}_2$; $y = V_C = x_2$.

$i_{R_1} = i_L + i_C = x_1 + C\dot{x}_2$ equazione di Kirchoff nodo 1

$u - R_1(x_1 + C\dot{x}_2) - L\dot{x}_1 = 0$ equazione alla maglia 1

$L\dot{x}_1 - x_2 - R_2C\dot{x}_2 = 0$ equazione alla maglia 2

ricavando $\dot{x}_1$ dall'equazione alla maglia 2:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{L}x_2 + \frac{R_2C}{L}\dot{x}_2$$

e sostituendo all'equazione alla maglia 1, dopo una serie di semplificazioni, otteniamo $\dot{x}_2$:

$$\dot{x}_2 = -\frac{R_1}{(R_1+R_2)C}x_1 - \frac{1}{(R_1+R_2)C}x_2 + \frac{1}{(R_1+R_2)C}u$$

ricostituendo in $\dot{x}_1$, ricaviamo:

$$\dot{x}_1 = -\frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L}x_1 + \frac{R_1}{(R_1+R_2)L}x_2 + \frac{R_2}{(R_1+R_2)L}u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L} & \dfrac{R_1}{(R_1+R_2)L} \\ -\dfrac{R_1}{(R_1+R_2)C} & -\dfrac{1}{(R_1+R_2)C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{R_2}{(R_1+R_2)L} \\ \dfrac{1}{(R_1+R_2)C} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

la f.d.t. si ricava da:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

2)

Scriviamo l'espressione analitica della risposta al gradino nel dominio di Laplace:

$$Y(s) = F(s)U(s) = \frac{(0{,}2s+1)}{(s^2+5s+25)}\frac{1}{s} = \frac{(0{,}2s+1)}{s(s^2+5s+25)}$$

Utilizzando la scomposizione in fratti semplici si ricavano i coefficienti *A*, *B* e *C* in modo da scomporre la *Y(s)* per antitrasformarla nella *y(t)*:

$$\frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(s^2+5s+25)}$$

facendo il m.c.m.

$$\frac{A(s^2+5s+25)+Bs^2+Cs}{s(s^2+5s+25)} = \frac{(A+B)s^2+(5A+C)s+25A}{s(s^2+5s+25)}$$

uguagliando con la Y(s) originale:

$$\frac{(A+B)s^2+(5A+C)s+25A}{s(s^2+5s+25)} = \frac{(0{,}2s+1)}{s(s^2+5s+25)}$$

otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 5A+C=0{,}2 \\ 25A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-\dfrac{1}{25} \\ C=0 \\ A=\dfrac{1}{25} \end{cases}$$

Sostituendo i coefficienti sopra determinati otteniamo:

$$Y(s) = \frac{1/25}{s} - \frac{(1/25)s}{(s^2+5s+25)} = \frac{1/25}{s} - \frac{(1/25)s}{\left(s^2+5s+\frac{25}{4}\right)+\frac{75}{4}} = \frac{1/25}{s} - \frac{(1/25)s}{\left(s+\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1/25}{s} - \frac{1}{25}\frac{s+5/2}{\left(s+\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2} - \frac{1}{25}\frac{5/2}{\left(s+\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1/25}{s} - \frac{1}{25}\frac{s+5/2}{\left(s+\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2} - \frac{\sqrt{5}}{75}\frac{\frac{5\sqrt{5}}{2}}{\left(s+\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2}$$

antitrasformando ricaviamo l'espressione di *y(t)*:

$$y(t)=\left[\frac{1}{25}-\frac{1}{25}e^{-\frac{5}{2}t}\cos\frac{5\sqrt{5}}{2}t+\frac{\sqrt{5}}{75}e^{-\frac{5}{2}t}sen\frac{5\sqrt{5}}{2}t\right]1(t)$$

3)

$$Y(s)=W(s)U(s)=\frac{20(0{,}1s+1)}{(s^2+1{,}5s+9)}\frac{1}{s}=\frac{20(0{,}1s+1)}{s(s^2+1{,}5s+9)}$$

ricaviamo i parametri caratteristici della risposta a gradino:

$$(s^2+1{,}5s+9)=9\left(\frac{s^2}{9}+\frac{1{,}5}{9}s+1\right)$$

$$\begin{cases}\dfrac{2\xi}{\omega_n}=0{,}17\\ \omega_n=\sqrt{9}=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\xi=0{,}255\\ \omega_n=3\end{cases}$$

$$s\%=100e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\cong 43{,}8$$

$$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\cong 2{,}901 \quad rad/\sec$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega_r}\cong 2{,}165 \quad \sec$$

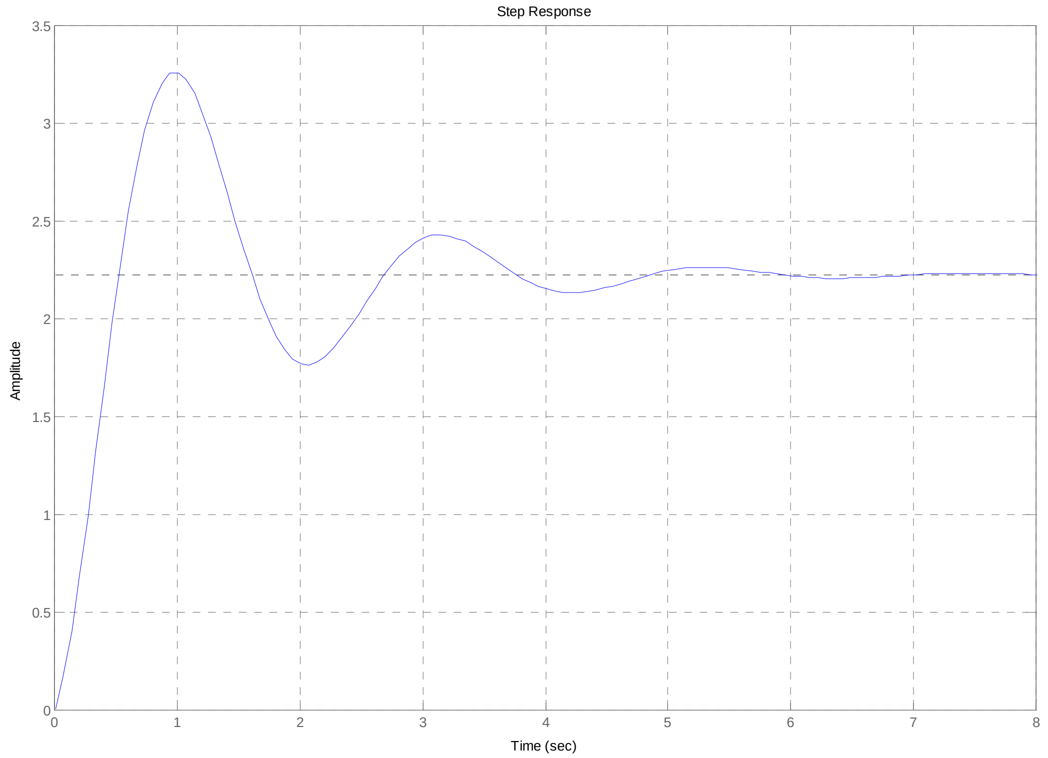
$$T_{a1}=\frac{4{,}6}{\xi\omega_n}\cong 6{,}01 \quad \sec$$

$$y(0)=\lim_{s\to\infty}sY(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{20(0{,}1s+1)}{(s^2+1{,}5s+9)}=0$$

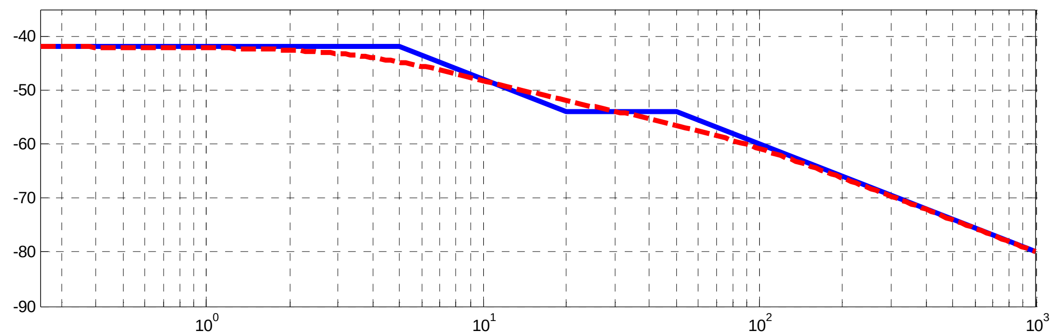
$$y'(0)=\lim_{s\to\infty}s^2Y(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{20(0{,}1s^2+s)}{(s^2+1{,}5s+9)}=\frac{2}{1}=2$$

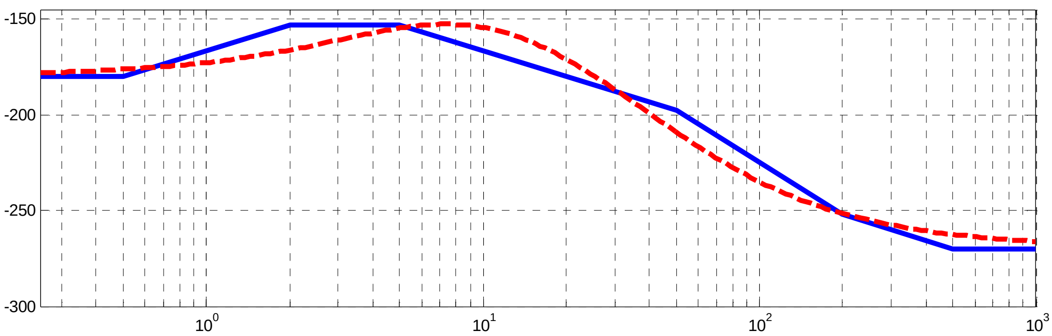
$$y(\infty)=\lim_{s\to 0}sY(s)=\lim_{s\to 0}\frac{20(0{,}1s+1)}{(s^2+1{,}5s+9)}=\frac{20}{9}$$

$$W(0)=\frac{20}{9}$$


Step Response
Amplitude
Time (sec)
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
0
1
2
3
4
5
6
7
8

4)


-40
-50
-60
-70
-80
-90
10^0
10^1
10^2
10^3


-150
-200
-250
-300
10^0
10^1
10^2
10^3