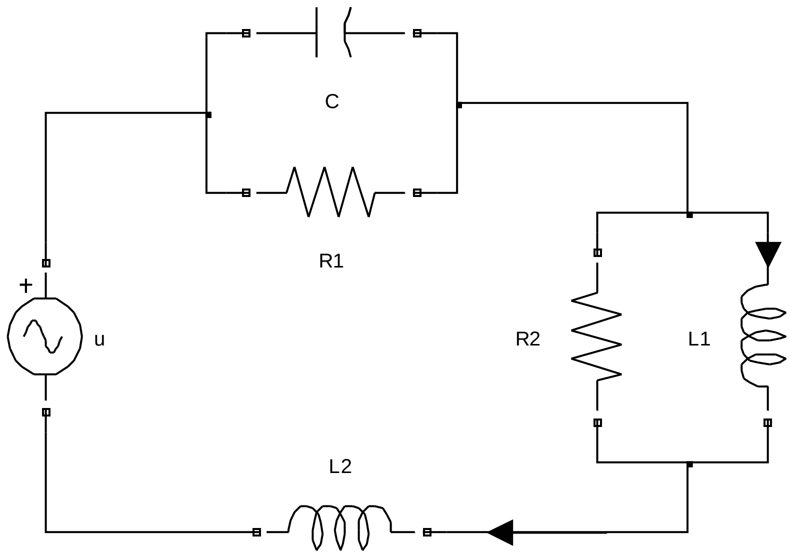
## *Prova Scritta di Fondamenti di Automatica del 19 Luglio 2006*

**Studente:_________________________________________ Matricola:_________________**




1) Calcolare una rappresentazione i-s-u dello circuito elettrico in figura, considerando come ingresso, *u*, la tensione fornita dal generatore e come uscita, *y*, la somma delle correnti circolanti nei due induttori.

2) Calcolare la f.d.t. del sistema di cui al punto 1), utilizzando i seguenti valori dei parametri
$R_1$=10 Ω, $R_2$=5 Ω, C=10 nF, $L_1$=2 mH, $L_2$=0.5 mH

3) Per un sistema avente f.d.t.
$$F(s) = \frac{(s+5)}{(s^2+7s-30)}$$
calcolare l'espressione analitica della risposta indiciale.

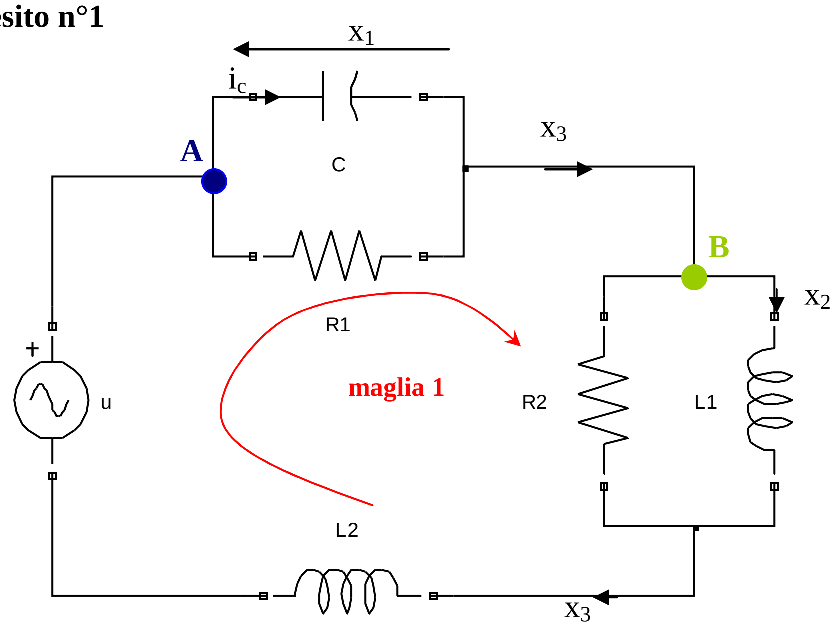
4) Tracciare l'andamento qualitativo della risposta indiciale del sistema avente f.d.t.
$$L(s) = \frac{5(s-1)}{(s^2+13s+30)}$$

5) Tracciare i diagrammi di Bode della f.d.t. *L(s)* data nell'es. 4)

**Tempo a disposizione: 2.5 ore**

# SOLUZIONE

**Quesito n°1**




**Variabili di stato**

- $x_1$ Tensione sul condensatore
- $x_2$ Corrente sull'induttore $L_1$
- $x_3$ Corrente sull'induttore $L_2$

**Equazione di Kirchhoff al nodo A**

$x_3 = i_c + i_{R_1}$ (1)

$i_c$ e $i_{R_1}$ sono le correnti che attraversano rispettivamente il condensatore C e il resistore $R_1$.

$i_c = C\dot{x}_1$ (2)

Dalla legge di Ohm

$$i_{R_1} = \frac{V_{R_1}}{R_1}$$

$V_{R_1} = x_1$ poiché il resistore $R_1$ e il condensatore C sono collegati in parallelo. Pertanto:

$i_{R_1} = \frac{x_1}{R_1}$ (3)

Sostituendo (2) e (3) in (1), si ottiene la prima equazione di stato:

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{R_1 C}x_1 + \frac{1}{C}x_3$$

**Equazione di Kirchhoff al nodo B**

$x_3 = x_2 + i_{R_2}$ (4)

Poiché il resistore $R_2$ e l'induttore $L_1$ sono in parallelo

$V_{R_2} = V_{L_1} = L_1 \dot{x}_2$

$i_{R_2}$ è la corrente che attraversa il resistore $R_2$.

Dalla legge di Ohm

$$i_{R2} = \frac{V_{R_2}}{R_2} = \frac{L_1 \dot{x}_2}{R_2} \quad (5)$$

Sostituendo (5) in (4), si ottiene la seconda equazione di stato:

$$\dot{x}_2 = -\frac{R_2}{L_1} x_2 + \frac{R_2}{L_1} x_3 \quad (6)$$

**Equazione di Kirchhoff alla maglia 1**

$u - x_1 - V_{R_2} - V_{L_2} = 0$ (7)

dove $V_{R_2}$ e $V_{L_2}$ sono le tensioni rispettivamente sul resistore $R_2$ e sull'induttore $L_2$.

$V_{R_2} = V_{L_1} = L_1 \dot{x}_2$ (8)

$V_{L_2} = L_2 \dot{x}_3$ (9)

Sostituendo (6) in (8), si ottiene:

$V_{R_2} = L_1 \dot{x}_2 = -R_2 x_2 + R_2 x_3$ (10)

Infine, sostituendo (8) e (9) in (7) si ottiene la terza equazione di stato

$$\dot{x}_3 = -\frac{1}{L_2} x_1 + \frac{R_2}{L_2} x_2 - \frac{R_2}{L_2} x_3 + \frac{1}{L_2} u$$

Si arriva alla rappresentazione i-s-u

$\dot{x} = Ax + Bu$

$y = Cx + D$

dove $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C} & 0 & \frac{1}{C} \\ 0 & -\frac{R_2}{L_1} & \frac{R_2}{L_1} \\ -\frac{1}{L_2} & \frac{R_2}{L_2} & -\frac{R_2}{L_2} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_2} \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, D=0.

**Quesito n°2**

Per
$R_1$=10 Ω, $R_2$=5 Ω, C=10 nF, $L_1$=2 mH, $L_2$=0.5 mH

**s**i determinano i valori numerici degli elementi delle matrici A,B,C.

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

L'espressione risultante della funzione di trasferimento è:

$$W(s) = \frac{2*10^3 s^2 + 2*10^{10} s + 10^{14}}{s^3 + 10^7 s^2 + 3.25*10^{11} s + 5*10^{14}}$$

**Quesito n°3**
L'espressione analitica della risposta al gradino nel dominio di Laplace si ricava:

$$Y(s) = F(s)U(s) = \frac{s+5}{s^2 + 7s - 30}\frac{1}{s} = \frac{s+5}{s(s-3)(s+10)}$$

Utilizzando la scomposizione in fratti semplici si ricavano i coefficienti *A*, *B* e *C* in modo da antitrasformare la *Y(s)* così scomposta:

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s+10}$$

A= $-\frac{1}{6}$

B= $\frac{8}{39}$

C= $-\frac{1}{26}$

Antitrasformando, si ricava l'espressione di *y(t)*:

$$y(t) = \left[-\frac{1}{6} + \frac{8}{39}e^{3t} - \frac{1}{26}e^{-10t}\right]1(t)$$

**Quesito n°4**

$$L(s) = \frac{5(s-1)}{s^2 + 13s + 30} = \frac{5(s-1)}{(s+3)(s+10)} = -\frac{1}{6}\frac{(-s+1)}{\left(\frac{s}{3}+1\right)\left(\frac{s}{10}+1\right)}$$

L'andamento qualitativo della risposta allo scalino si determina rifacendosi alla risposta indiciale tipica di un sistema con uno zero reale e due poli reali, di cui uno dominante (ossia a pulsazione molto più bassa dell'altro). Il polo -3 è dominante. Il guadagno del sistema è negativo, $L(0) = -\frac{1}{6}$.

Infatti, il valore a regime della risposta calcolato con il teorema del valore finale risulta pari a:

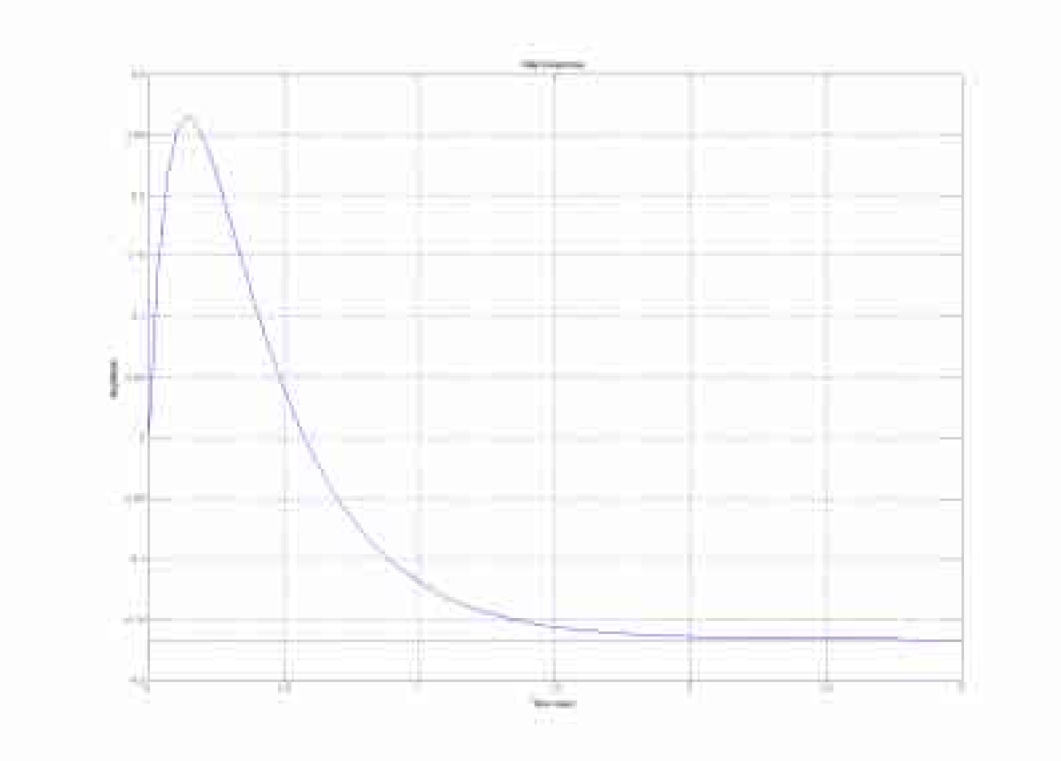
$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} sY(s) = -\frac{1}{6}$$

$$y(0) = \lim_{s \to \infty} sY(s) = 0$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s \to \infty} s^2 Y(s) = 5$$

**Si noti che il valore iniziale della derivata è positivo, per cui l'andamento iniziale sarà crescente, per poi cambiare verso e tendere al valore finale, che è invece negativo.**

**Il tempo di assestamento del sistema è dettato dal polo dominante, la cui costante di tempo è $\tau$ =*1/3* s, per cui $T_{a1}$ = *4.6×1/3 = 1.53 s*.**



**Quesito n°5**

**N.B. Si noti che lo zero è a parte reale positiva, per cui fornisce un contributo di fase negativo, al pari dei poli a parte reale negativa.**