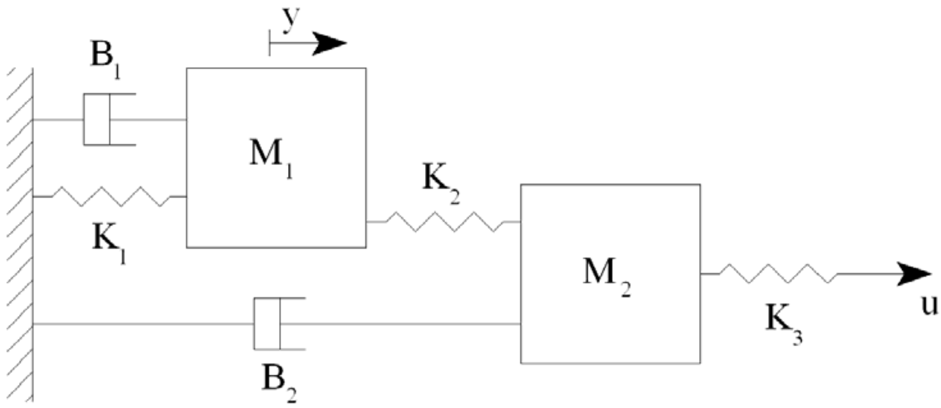
## *Fondamenti di Automatica - 13 Marzo 2008 - C*

**Studente:**________________________________________ **Matricola:**_________________




1) Calcolare una rappresentazione i-s-u e la f.d.t. del sistema meccanico in figura, considerando come ingresso, *u*, lo spostamento dell'estremità della molla 3 e come uscita, *y*, lo spostamento della massa $M_1$.

2) Calcolare l'espressione analitica e tracciare l'andamento qualitativo della risposta indiciale del sistema

$$F(s) = \frac{(s+20)}{(s^2+10s+24)}.$$

3) Per il sistema avente la seguente rappresentazione i-s-u

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x$$

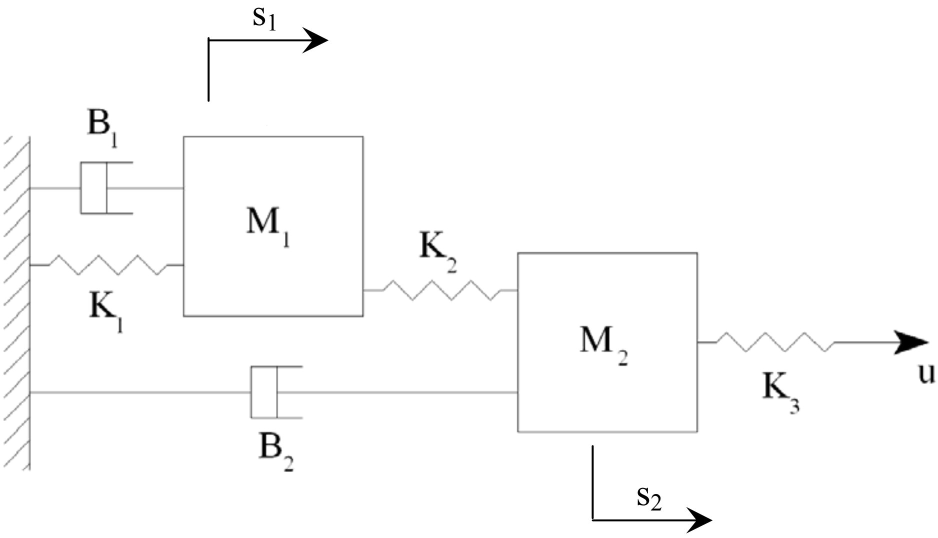
discuterne la stabilità al variare di $a \in [-\infty \quad +\infty]$

4) Tracciare i diagrammi di Bode della f.d.t.

$$L(s) = 30\frac{(s+0.5)}{(s-5)(s^2+s+3)}$$

**Tempo a disposizione: 2.5 ore**

Esercizio 1)




Applicando la seconda legge della dinamica a ciascuna massa, si ottengono le equazioni del moto

$$
\begin{aligned}
M_1\ddot{s}_1 &= -K_1 s_1 - K_2 s_1 + K_2 s_2 - B_1\dot{s}_1 \\
M_2\ddot{s}_2 &= K_2 s_1 - K_2 s_2 - K_3 s_2 - B_2\dot{s}_2 + K_3 u.
\end{aligned}
$$

Definito il vettore di stato $x = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dot{s}_1 & \dot{s}_2 \end{pmatrix}^T$, la rappresentazione ISU del sistema è

$$
\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{K_1+K_2}{M_1} & \dfrac{K_2}{M_1} & -\dfrac{B_1}{M_1} & 0 \\ \dfrac{K_2}{M_2} & -\dfrac{K_2+K_3}{M_2} & 0 & -\dfrac{B_2}{M_2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{K_3}{M_2} \end{pmatrix} u\,.
$$

$$
y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x
$$

La funzione di trasferimento vale

$$
W(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 0 & -1 & 0 \\ 0 & s & 0 & -1 \\ \dfrac{K_1+K_2}{M_1} & -\dfrac{K_2}{M_1} & s+\dfrac{B_1}{M_1} & 0 \\ -\dfrac{K_2}{M_2} & \dfrac{K_2+K_3}{M_2} & 0 & s+\dfrac{B_2}{M_2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{K_3}{M_2} \end{pmatrix} =
$$

$$
= \frac{\dfrac{K_2}{K_3}}{M_1M_2s^4 + (B_1M_2 + B_2M_1)s^3 + (B_1B_2 + K_1M_2 + K_3M_1 + K_2(M_1+M_2))s^2 + (B_1(K_2+K_3) + B_2(K_1+K_2))s + K_1(K_2+K_3) + K_2K_3}
$$

Esercizio 2)

$$Y(s) = F(s)U(s) = \frac{(s+20)}{(s^2+10s+24)}\frac{1}{s}$$

Scomposizione in fratti semplici:

$$Y(s) = \frac{(s+20)}{(s^2+10s+24)}\frac{1}{s} = \frac{(s+20)}{(s+4)(s+6)}\frac{1}{s} = \frac{A}{s}+\frac{B}{s+4}+\frac{C}{s+6};$$

$$A = \lim_{s\to 0}\frac{(s+20)}{(s+4)(s+6)} = \frac{5}{6}$$

$$B = \lim_{s\to -4}\frac{(s+20)}{s(s+6)} = -2$$

$$C = \lim_{s\to -6}\frac{(s+20)}{s(s+4)} = \frac{7}{6}$$

$$Y(s) = \frac{5/6}{s} - \frac{2}{s+4} + \frac{7/6}{s+6}$$

Antitrasformando ricaviamo l'espressione di *y(t)*:

$$y(t) = \left[\frac{5}{6} - 2e^{-4t} + \frac{7}{6}e^{-6t}\right]1(t)$$

Parametri caratteristici della risposta a gradino:

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = 0$$

$$y'(0) = \lim_{s\to\infty} s^2Y(s) = 1$$

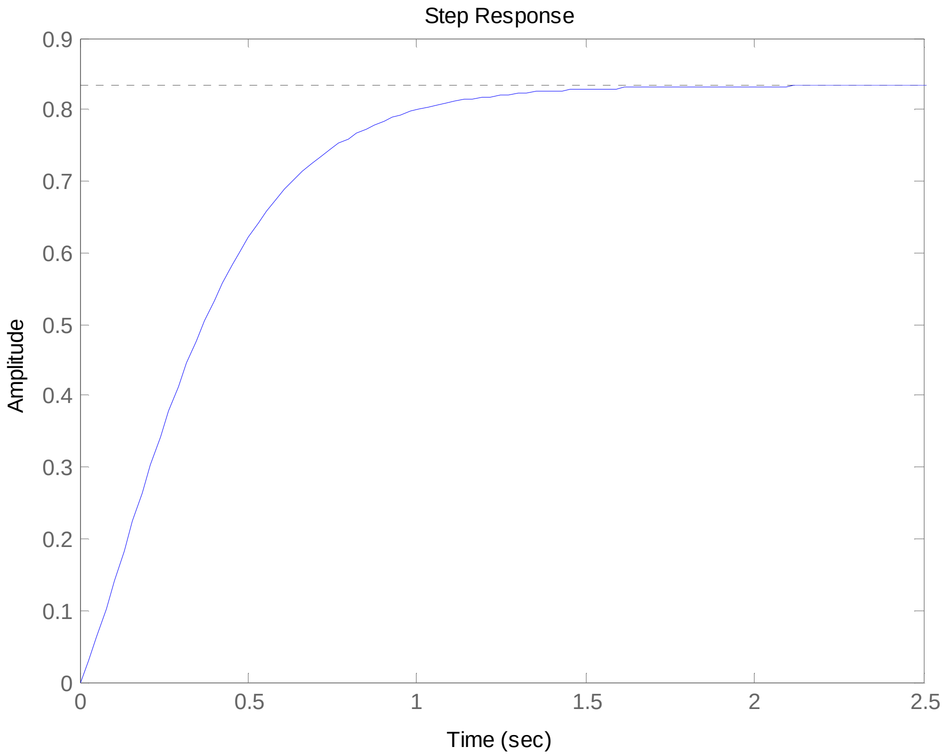
$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \frac{5}{6}$$

I modi di evoluzione del sistema sono determinati dai poli. I poli sono vicini, quindi non c'è un polo dominante. In questo caso il tempo di assestamento è leggermente maggiore di

$$T_{a1} \cong 4{,}6\tau = 1.15 \quad \text{sec}$$

dove $\tau$ è la costante di tempo del polo più vicino all'asse reale.

L'andamento reale calcolato in Matlab è riportato nella figura seguente.




## Esercizio 3)

Per studiare la stabilità occorre analizzare il segno della parte reale dei poli.

I poli si possono facilmente ottenere ricavando le radici del polinomio caratteristico $p_\lambda(s)$ a partire dalla matrice dinamica A ( $p_\lambda(s) = \det(sI - A)$ ).

$$p_\lambda(s) = s^2 - 3s + 2 - 3a$$

$$s_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(2 - 3a)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1 + 12a}}{2}$$

Sia nel caso in cui il $\Delta \leq 0$ $(1 + 12a \leq 0 \Leftrightarrow a \leq -\frac{1}{12} \Rightarrow$ due soluzioni complesse e coniugate o due soluzioni reali e coincidenti la cui parte reale è positiva) sia nel caso in cui il $\Delta > 0$ avremo almeno una soluzione a parte reale positiva, pertanto il sistema risulta instabile al variare di $a \in [-\infty \quad +\infty]$.

# Esercizio 4