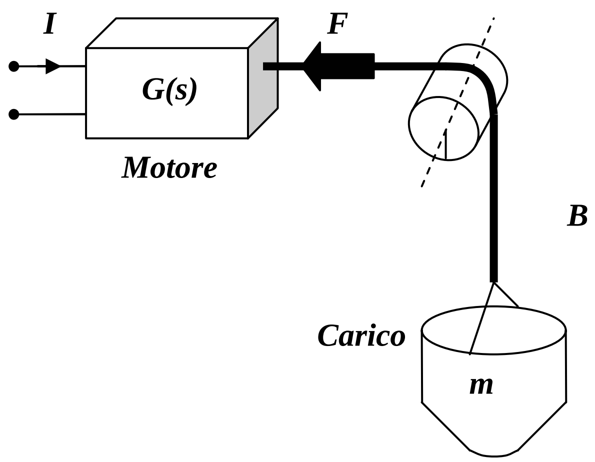
Prova Scritta di Fondamenti di Automatica del 21 Giugno 2006 – A

Studente:____ Matricola:_________________



1) Per il sistema gru schematizzato in figura, si assuma che il motore sia descritto da una fdt

$$G(s) = \frac{F(s)}{I(s)} = \frac{1000}{(0.01s^2 + 0.08s + 1)}$$

Si noti che il carico è soggetto alla forza di gravità (g=9,81 m^2/s) e ad una forza di attrito viscoso con coefficiente di attrito B=5 Nm/s. Supponendo di poter applicare solo ingressi del tipo a gradino, $I(t) = A \cdot 1(t)$, si calcoli il valore di *A* necessario per sollevare di 20 m un carico di 500 Kg in un tempo pari a circa 1 min.

2) Per un sistema avente f.d.t.

$$F(s) = \frac{(s-5)}{(s^2 + 2s + \alpha)}$$

discutere la stabilità del sistema al variare di $\alpha \in [-\infty, +\infty]$.

3) Tracciare l'andamento qualitativo della risposta indiciale del sistema avente f.d.t.

$$L(s) = \frac{5(s+10)}{(s^2 + 10s + 9)}$$

4) Tracciare i diagrammi di Bode della f.d.t. *L(s)* data nell'es. 3)

Tempo a disposizione: 2 ore

SOLUZIONE

1)

Funzione di trasferimento del motore:

$$G(s)=\frac{F(s)}{I(s)}=\frac{1000}{(0.01s^2+0.08s+1)}$$

dato che la dinamica del sistema motore è molto veloce, $T_{as}\cong 0.8\,\sec$, che è circa 1/60 della durata di sollevamento è possibile approssimare tale sistema ad un sistema statico. Per cui la forza fornita da motore si considererà istantaneamente pari a

$$F=G(0)A=1000A$$

La forza totale applicata al carico è pari a $F_T=F-mg=1000A-mg$.

Applicando la seconda legge di Newton si ricava l'equazione del moto associata al carico

$$m\dot{v}(t)=-Bv(t)+F_T\ ,$$

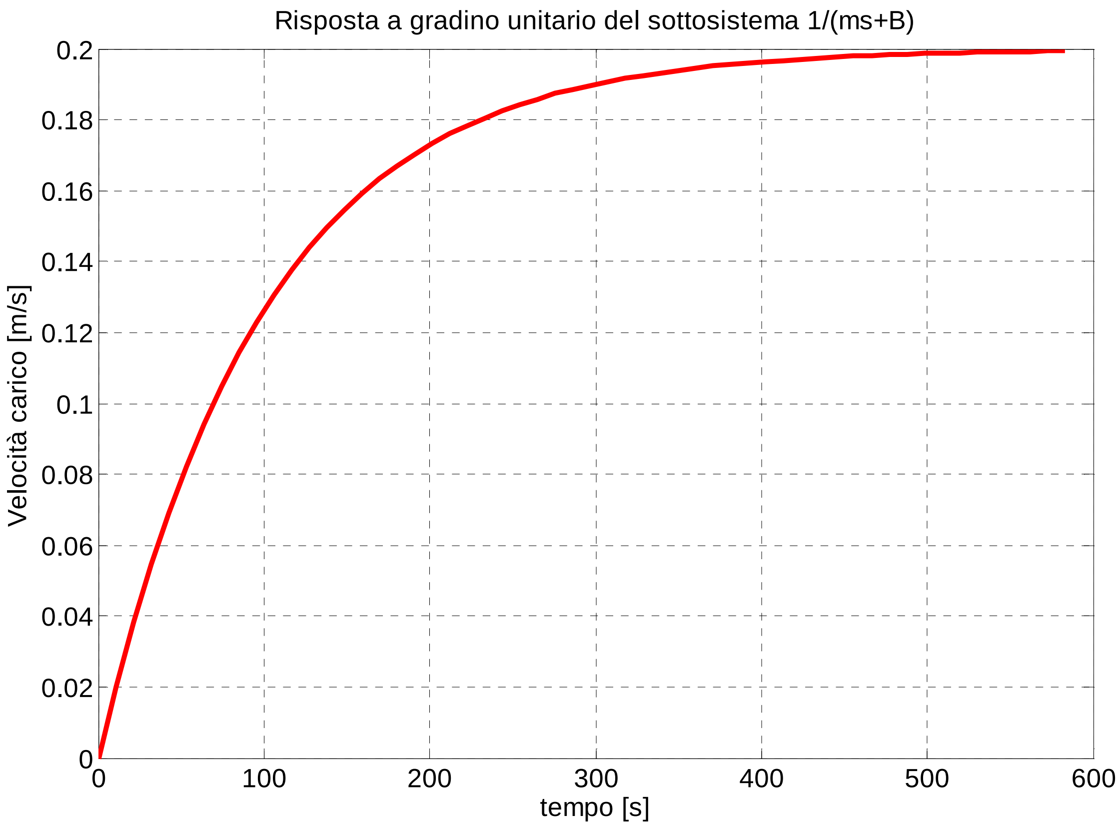
dove F_T denota la forza totale applicata al carico.

La funzione di trasferimento velocità/forza è:

$$W(s)=\frac{V(s)}{F(s)}=\frac{1}{ms+B}=\frac{\frac{1}{B}}{\frac{m}{B}s+1}$$

Si tratta di un sistema del primo ordine, avente costante di tempo $\tau=\frac{m}{B}=100\,\sec$. Si noti che il tempo di assestamento (4.6τ) è molto maggiore dei 60 secondi richiesti per percorrere la distanza assegnata. Non è dunque lecito per questo secondo sottosistema trascurare la dinamica nel transitorio e assumere che la risposta sia a regime.

La risposta al gradino unitario è riportata in figura:



Poiché 60 secondi sono un intervallo abbastanza breve rispetto al tempo di assestamento, possiamo approssimare l'andamento dell'esponenziale con una retta, la cui pendenza è pari alla pendenza iniziale della risposta al gradino, che risulta essere

$$\lim_{t\to 0}\frac{dv}{dt}=\lim_{s\to\infty} sW(s)\frac{\overline{F}_T}{s}=\frac{\overline{F}_T}{m}$$

dove $\overline{F}_T$ è l'ampiezza del gradino di forza totale applicata al carico.

L'approssimazione ad una retta passante per l'origine porta alla seguente espressione di *v(t)*

$$v(t)=\frac{\overline{F}_T}{m}t$$

da cui si ottiene lo spazio percorso, *s(t)*, integrando rispetto al tempo

$$s(t)=\frac{\overline{F}_T}{2m}t^2$$

Imponiamo infine la condizione fornita nella traccia, ottenendo

$$s(60)=20 \Rightarrow (1000A-mg)\frac{1}{2m}(30)^2=30 \Rightarrow A=4.91$$

2)

Per studiare la stabilità occorre analizzare il segno della parte reale dei poli:

$$s^2 + 2s + \alpha$$

Le soluzioni generiche del polinomio sono (utilizzando la formula ridotta):

$$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-\alpha}$$

quindi in base al segno del discriminante possiamo avere due casi:

$\alpha \geq 1 \Rightarrow \Delta \leq 0 \Rightarrow$ due soluzioni complesse e coniugate o due soluzioni reali e coincidenti la cui parte reale è negativa (vedi s_{12})

$\alpha < 1 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$ due soluzioni reali e distinte

in quest'ultimo caso occorre studiare il segno complessivo di s_{12}, imponendo cioè che s_{12} sia minore di zero:

$$-1 \pm \sqrt{1-\alpha} < 0 \Rightarrow \pm\sqrt{1-\alpha} < 1 \Rightarrow 1-\alpha < 1 \Rightarrow -\alpha < 0 \Rightarrow \alpha > 0 \Rightarrow \text{sistema A.S.}$$

quindi, intersecando le soluzioni con il caso delle soluzioni complesse e coniugate abbiamo che se:

$\alpha > 0 \Rightarrow$ Parte Reale di s_{12} negativa $\Rightarrow$ Sistema Asintoticamente Stabile

$\alpha < 0 \Rightarrow$ Parte Reale di s_{12} positiva $\Rightarrow$ Sistema Instabile

$\alpha = 0 \Rightarrow$ Parte Reale di s_1 negativa e Parte Reale di s_2 nulla $\Rightarrow$ Sistema Semplicemente Stabile

3)

$$Y(s) = L(s)U(s) = \frac{5(s+10)}{(s^2+10s+9)}\frac{1}{s} = \frac{5(s+10)}{s(s^2+10s+9)}$$

prima di ricavare i parametri caratteristici della risposta a gradino occorre vedere se i poli sono complessi e coniugati o reali:

$$(s^2+10s+9) = 0 \Rightarrow s_{12} = -5 \pm \sqrt{25-9} = -5 \pm \sqrt{16} = -5 \pm 4 = \begin{cases} -9 \\ -1 \end{cases}$$

Siamo nel caso di poli reali e distinti, per cui quindi la W(s) può essere fattorizzata

$$L(s) = \frac{5(s+10)}{(s+9)(s+1)} = \frac{50\cancel{\left(\frac{s}{10}+1\right)}}{9\cancel{\left(\frac{s}{9}+1\right)}(s+1)} \cong \frac{5.56}{(s+1)}$$

Abbiamo una coppia polo-zero in alta frequenza, dunque si è potuto effettuare una semplificazione ottenendo un sistema del primo ordine. **Si noti che prima di effettuare la semplificazione bisogna**

riportare il sistema nella forma canonica, mettendo in evidenza il guadagno statico. In caso contrario si ottiene un approssimante sbagliato perché si modifica il guadagno.

$$L(0) = 5.56$$

I parametri caratteristici della risposta a gradino sono

$$Y(s) = L(s)U(s) \cong \frac{5.56}{s(s+1)}$$

valore iniziale

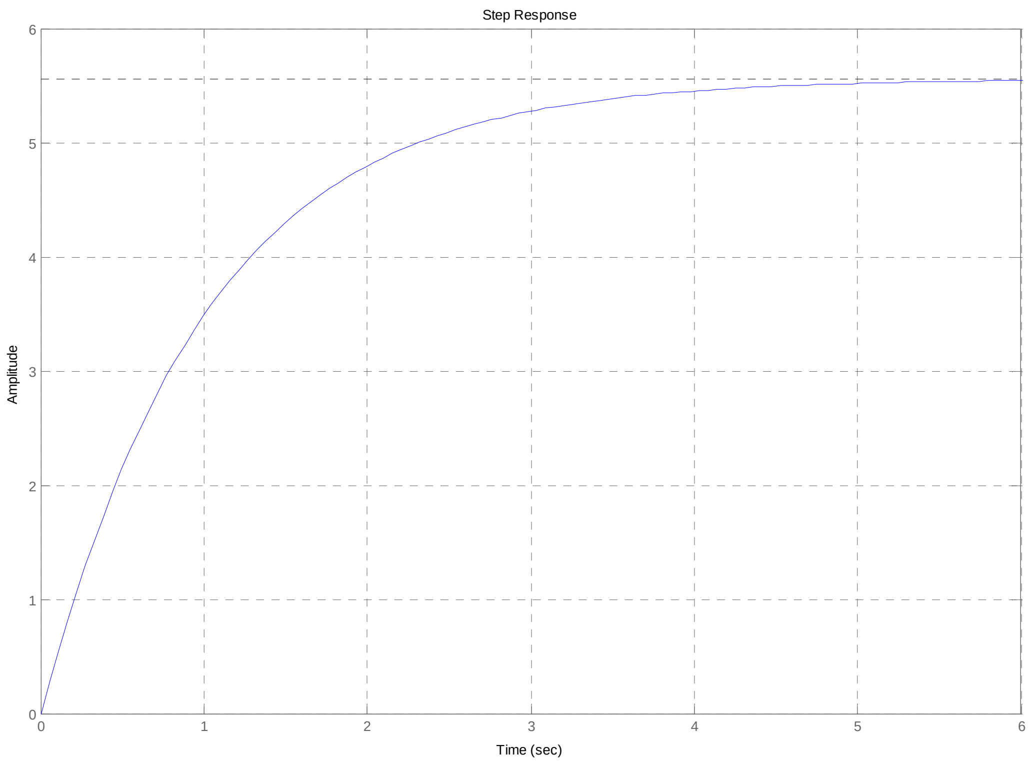
$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{5.56}{(s+1)} = 0$$

valore iniziale della derivata

$$\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s^2Y(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{5.56s}{(s+1)} = \frac{5.56}{1} = 5.56$$

valore finale

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{5.56}{(s+1)} = 5.56$$



4) Diagrammi asintotici ricavati mediante il comando *bodeas*