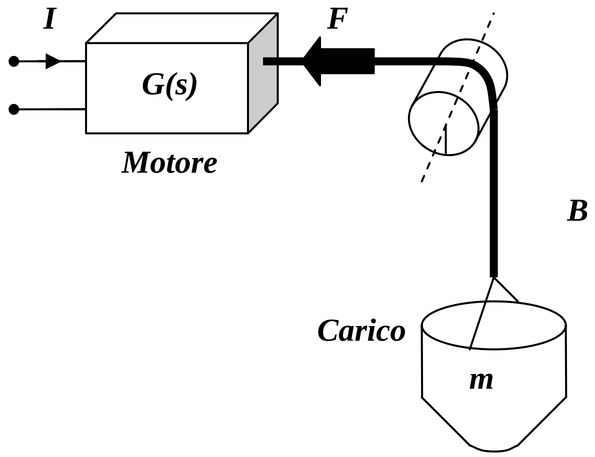
Prova Scritta di Fondamenti di Automatica del 21 Giugno 2006 – B

Studente:____ Matricola:_________________



1) Per il sistema gru schematizzato in figura, si assuma che il motore sia descritto da una fdt

$$G(s) = \frac{F(s)}{I(s)} = \frac{1000}{(0.01s^2 + 0.08s + 1)}$$

Si noti che il carico è soggetto alla forza di gravità (g=9,81 m^2/s) e ad una forza di attrito viscoso con coefficiente di attrito B=2 Nm/s. Supponendo di poter applicare solo ingressi del tipo a gradino, $I(t) = A \cdot 1(t)$, si calcoli il valore di *A* necessario per sollevare di 30 m un carico di 800 Kg in un tempo pari a circa 1 min.

2) Per un sistema avente f.d.t.

$$F(s) = \frac{(1-s)}{(\alpha s^2 + 3s + 1)}$$

discutere la stabilità del sistema al variare di $\alpha \in [-\infty, +\infty]$.

3) Tracciare l'andamento qualitativo della risposta indiciale del sistema avente f.d.t.

$$L(s) = \frac{3(s+1)}{(s^2 + 0.22s + 1.1)}$$

4) Tracciare i diagrammi di Bode della f.d.t. *L(s)* data nell'es. 3)

Tempo a disposizione: 2 ore

SOLUZIONE

1)

Funzione di trasferimento del motore:

$$G(s) = \frac{F(s)}{I(s)} = \frac{1000}{(0.01s^2 + 0.08s + 1)}$$

dato che la dinamica del sistema motore è molto veloce, $T_{as} \cong 0.8\,\text{sec}$, che è circa 1/60 della durata di sollevamento è possibile approssimare tale sistema ad un sistema statico. Per cui la forza fornita da motore si considererà istantaneamente pari a

$$F = G(0)A = 1000A$$

La forza totale applicata al carico è pari a $F_T = F - mg = 1000A - mg$.

Applicando la seconda legge di Newton si ricava l'equazione del moto associata al carico

$$m\dot{v}(t) = -Bv(t) + F_T\ ,$$

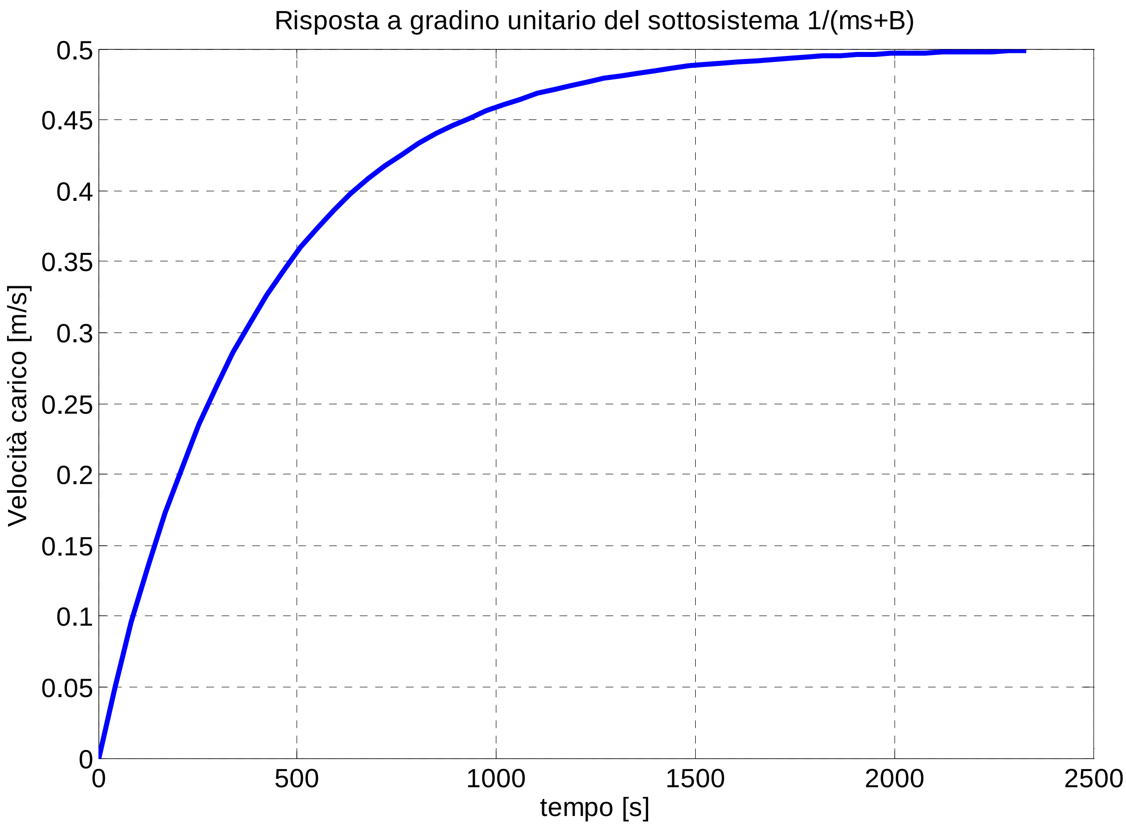
dove F_T denota la forza totale applicata al carico.

La funzione di trasferimento velocità/forza è:

$$W(s) = \frac{V(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms + B} = \frac{\frac{1}{B}}{\frac{m}{B}s + 1}$$

Si tratta di un sistema del primo ordine, avente costante di tempo $\tau = \frac{m}{B} = 400\,\text{sec}$. Si noti che il tempo di assestamento (4.6τ) è molto maggiore dei 60 secondi richiesti per percorrere la distanza assegnata. Non è dunque lecito per questo secondo sottosistema trascurare la dinamica nel transitorio e assumere che la risposta sia a regime.

La risposta al gradino unitario è riportata in figura:



Poiché 60 secondi sono un intervallo abbastanza breve rispetto al tempo di assestamento, possiamo approssimare l'andamento dell'esponenziale con una retta, la cui pendenza è pari alla pendenza iniziale della risposta al gradino, che risulta essere

$$\lim_{t\to 0}\frac{dv}{dt} = \lim_{s\to\infty} sW(s)\frac{\overline{F}_T}{s} = \frac{\overline{F}_T}{m}$$

dove $\overline{F}_T$ è l'ampiezza del gradino di forza totale applicata al carico.

L'approssimazione ad una retta passante per l'origine porta alla seguente espressione di *v(t)*

$$v(t) = \frac{\overline{F}_T}{m}t$$

da cui si ottiene lo spazio percorso, *s(t)*, integrando rispetto al tempo

$$s(t) = \frac{\overline{F}_T}{2m}t^2$$

Imponiamo infine la condizione fornita nella traccia, ottenendo

$$s(60) = 30 \Rightarrow (1000A - mg)\frac{1}{2m}(30)^2 = 30 \Rightarrow A = 7.86$$

2)

Per studiare la stabilità occorre analizzare il segno della parte reale dei poli:

$$\alpha s^2 + 3s + 1$$

Le soluzioni generiche del polinomio sono:

$$s_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4\alpha}}{2\alpha}$$

quindi in base al segno del discriminante possiamo avere due casi:

$\alpha \geq \frac{9}{4} \Rightarrow \Delta \leq 0 \Rightarrow$ due soluzioni complesse e coniugate o due soluzioni reali e coincidenti la cui parte reale è negativa (vedi s_{12})

$\alpha < \frac{9}{4} \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$ due soluzioni reali e distinte

in quest'ultimo caso occorre studiare il segno complessivo di s_{12}, imponendo cioè che s_{12} sia minore di zero:

$$\frac{-3 \pm \sqrt{9-4\alpha}}{2\alpha} < 0 \Rightarrow \begin{cases} -3 \pm \sqrt{9-4\alpha} < 0 \\ 2\alpha > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} -3 \pm \sqrt{9-4\alpha} > 0 \\ 2\alpha < 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha > 0 \Rightarrow \text{ sistema A.S.}$$

quindi, intersecando le soluzioni con il caso delle soluzioni complesse e coniugate abbiamo che se:

$\alpha > 0 \Rightarrow$ Parte Reale di s_{12} negativa $\Rightarrow$ Sistema Asintoticamente Stabile

$\alpha < 0 \Rightarrow$ Parte Reale di s_{12} positiva $\Rightarrow$ Sistema Instabile

$\alpha = 0 \Rightarrow$ polo del primo ordine a parte reale negativa $\Rightarrow$ Sistema Asintoticamente Stabile

3)

$$Y(s) = L(s)U(s) = \frac{3(s+1)}{(s^2+0.22s+1.1)}\frac{1}{s} = \frac{3(s+1)}{s(s^2+0.22s+1.1)}$$

prima di ricavare i parametri caratteristici della risposta a gradino occorre vedere se i poli sono complessi e coniugati o reali:

$$(s^2+0.22s+1.1)=0 \Rightarrow s_{12} = -0.11 \pm \sqrt{0.11^2-1.1} = -0.11 \pm j1.043$$

Siamo quindi nel caso di poli complessi e coniugati.

Ricaviamo i parametri caratteristici della risposta indiciale:

guadagno statico

$$L(0) = 2.73$$

coefficiente di smorzamento e pulsazione naturale

$$\begin{cases} \frac{2\xi}{\omega_n} = 0{,}20 \\ \omega_n = \sqrt{1.1} = 1.05 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi = 0{,}105 \\ \omega_n = 1.05 \end{cases}$$

sovraelongazione percentuale

$$s\% = 100 e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \cong 139{,}31\%$$

valore di picco

y_{max}=$L(0)(1+e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}})=4.68$

pulsazione di risonanza

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \cong 1{,}044 \quad rad/\sec$$

periodo di oscillazione

$$T = \frac{2\pi}{\omega_r} \cong 6{,}015 \quad \sec$$

tempo di assestamento all’1%

$$T_{a1} = \frac{4{,}6}{\xi\omega_n} \cong 41{,}72 \quad \sec$$

numero approssimativo di oscillazioni

$$\frac{1}{2\xi} \cong 4{,}76$$

valore iniziale

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{3(s+1)}{(s^2+0.22s+1.1)} = 0$$

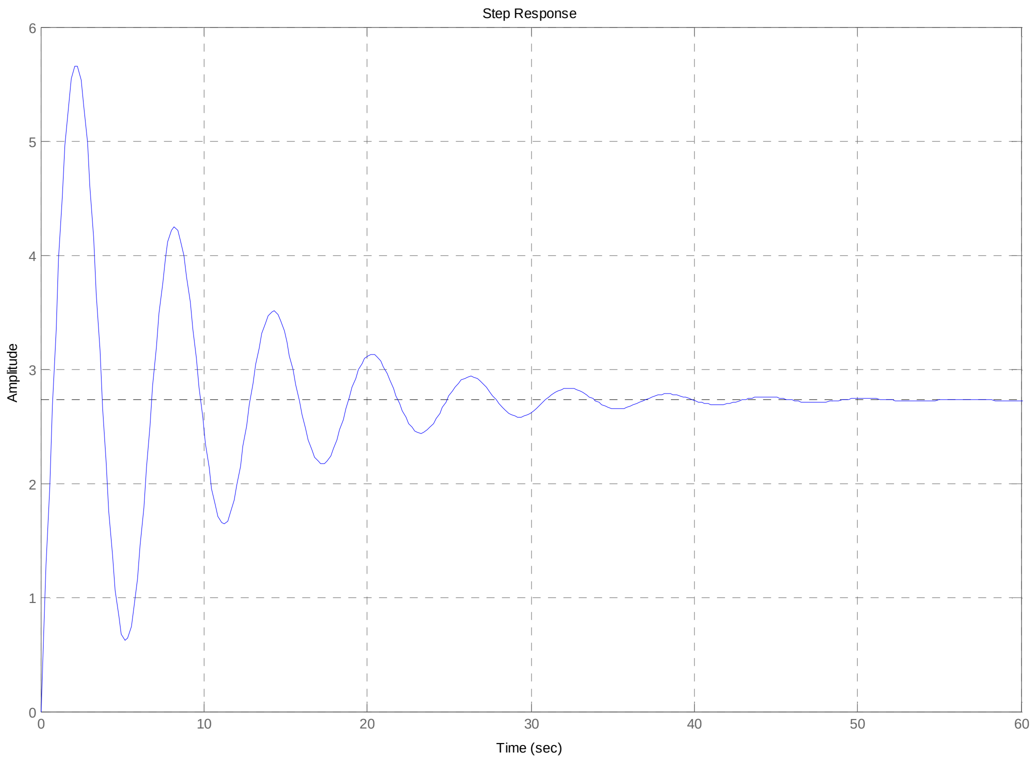
valore iniziale della derivata

$$y'(0) = \lim_{s\to\infty} s^2 Y(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{3(s^2+s)}{(s^2+0.22s+1.1)} = \frac{3}{1} = 3$$

valore finale

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{3(s+1)}{(s^2+0.22s+1.1)} = \frac{3}{1.1} = 2.73$$

La risposta effettiva ottenuta in Matlab è riportata in figura



Si noti che la presenza di uno zero in bassa frequenza produce un effetto derivativo che fa aumentare leggermente la sovraelongazione e il numero di oscillazioni

4)