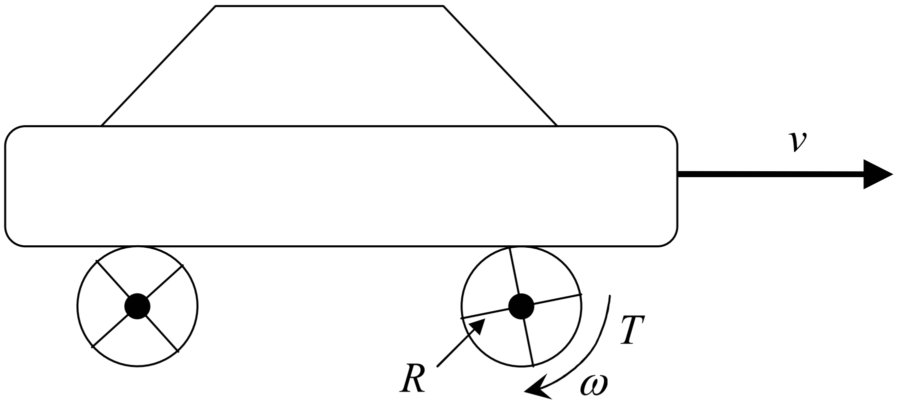
Prova Scritta di Fondamenti di Automatica del 15 Marzo 2006

Studente:____ **Matricola:**_________________



1) Si consideri l'automobile schematizzata in figura. L'ingresso del sistema è la coppia T alle ruote motrici, l'uscita è la velocità del veicolo. Si assuma di poter ridurre l'inerzia di tutto il sistema ad un momento di inerzia equivalente all'asse motore pari a $J_t=0.5\ N\cdot m\cdot s^2$. Sia $R=30\ cm$ il raggio delle ruote e si assuma di avere un momento resistente equivalente, generato dall'attrito viscoso, pari a $T_v=k_v\cdot v$, con $k_v=1\ N\cdot s$. Calcolare la rappresentazione i.s.u. e la f.d.t del sistema. (Suggerimento: si noti che la relazione tra velocità lineare del veicolo e velocità angolare della ruota, in condizioni ideali, è pari a $v=\omega R$).

2) Per un sistema avente f.d.t.

$$F(s) = \frac{(0.2s+1)}{(s^2+12s+20)}$$

calcolare l'espressione analitica della risposta al segnale $u(t)=1(t)$.

3) Tracciare l'andamento qualitativo della risposta indiciale del sistema avente f.d.t.

$$W(s) = \frac{100(0.1s+1)}{(s^2+2.4s+16)}$$

4) Tracciare i diagrammi di Bode della seguente f.d.t.

$$L(s) = \frac{10(s+10)}{(s^2-32s-60)}$$

Tempo a disposizione: 2 ore

ESERCIZIO 1

L'equazione che governa la dinamica del sistema è la seconda legge di Newton per un corpo in rotazione, ossia

$$\sum_i T_i = J\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Nel caso in esame i momenti agenti all'asse sono quello motore, T, e quello dovuto all'attrito viscoso, T_v, che si oppone alla rotazione e quindi va sommato con segno negativo. Dunque,

$$T = J_t\ddot{\theta} + T_v = J_t\ddot{\theta} + k_v v = J_t\ddot{\theta} + k_v R\dot{\theta} \qquad (1)$$

Scegliendo come stati la posizione angolare $x_1 = \theta$ e la velocità angolare $x_2 = \omega = \dot{\theta} = \dot{x}_1$, otteniamo la rappresentazione i.s.u.

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -k_v R/J_t \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/J_t \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & R \end{pmatrix} x \end{cases}$$

Chiaramente, è possibile costruire una rappresentazione equivalente prendendo come stati posizione e velocità lineari, ossia $x_1=s$, $x_2=v$, e sfruttando la relazione $v = R\omega$:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -k_v R/J_t \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ R/J_t \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

Per quanto riguarda la f.d.t., osserviamo che l'eq. (1) può essere riscritta, rispetto all'ingresso u e all'uscita y, come

$$\frac{J_t}{R}\dot{y} + k_v y = u \qquad (2)$$

Trasformando la (2) nel dominio di Laplace si ottiene la f.d.t.

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{\frac{J_t}{R}s + k_v}$$

Allo stesso risultato si può arrivare partendo dalla rappresentazione i.s.u. e calcolando la f.d.t. con la formula $W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$.

ESERCIZIO 2

Calcoliamo la risposta nel dominio di Laplace:

$$Y(s) = F(s)U(s) = \frac{(0.2s+1)}{(s^2+12s+20)} \cdot \frac{1}{s}$$

Si noti che il denominatore della *F(s)* può essere fattorizzato in due poli reali $\left(s^2+12s+20\right) = (s+2)(s+10)$, quindi la scomposizione in fratti semplici risulta

$$\frac{(0.2s+1)}{s(s+2)(s+10)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+2)} + \frac{C}{(s+10)}$$

Moltiplicando a sinistra e destra per *s* e ponendo *s=0* otteniamo *A=0.05*.
Moltiplicando a sinistra e destra per *(s+2)* e ponendo *s=-2* otteniamo *B=-0.0375*.
Moltiplicando a sinistra e destra per *(s+10)* e ponendo *s=-10* otteniamo *C=-0.0125*.

Anti-trasformando i singoli termini e sommando otteniamo l'espressione analitica della risposta indiciale

$$y(t) = \left(0.05 - 0.0375e^{-2t} - 0.0125e^{-10t}\right) \cdot 1(t).$$

ESERCIZIO 3

Calcoliamo la risposta nel dominio di Laplace

$$Y(s) = W(s)U(s) = \frac{100(0.1s+1)}{\left(s^2+2.4s+16\right)} \cdot \frac{1}{s}$$

Sfruttando i teoremi del valore iniziale e del valore finale troviamo

- valore iniziale $y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = 0$;
- valore finale $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \frac{100}{16} = 6.25$;
- valore iniziale della derivata $\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s^2 Y(s) = 10$;

I modi di evoluzione del sistema sono dati dai poli della f.d.t., ossia dalle radici del denominatore: calcolando il *Δ* si vede che le radici sono complesse e coniugate, quindi ci riportiamo alla forma ingegneristica del termine trinomio:

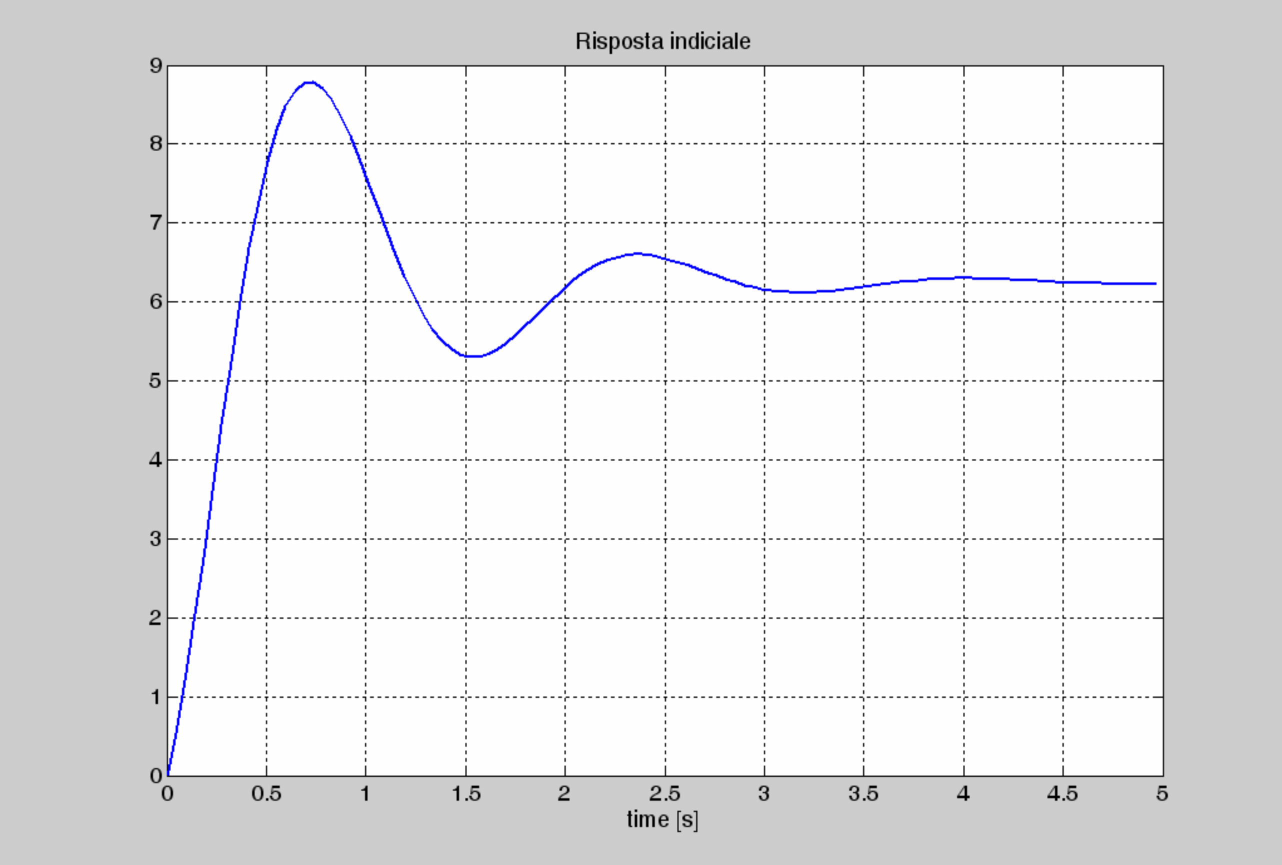
$$\left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right) = \left(1 + 0.15s + 0.0625s^2\right)$$

da cui si possono calcolare i parametri caratteristici di un modo di evoluzione pseudo-periodico, ossia $\omega_n = 4$ e $\zeta = 0.3$.
Calcoliamo alcuni parametri utili per il tracciamento del grafico:

- tempo di assestamento all'1%: $T_{a1} = \frac{4.6}{\zeta\omega_n} = 3.8\,s$;

- # oscillazioni: $\frac{1}{2\zeta} = 1.7$;
- tempo di massima sovraelongazione: $T_{\max} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.82\,s$;
- sovraelongazione percentuale: $S\% = 100\,e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 37\%$;
- valore massimo: $y_{\max} = y_\infty\left(1+e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\right) = 8.56$
- periodo di oscillazione: $T_r = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 1.64\,s$.

L'andamento reale calcolato in Matlab è riportato nella figura seguente.



Si noti che lo zero introduce un effetto derivativo, peraltro molto limitato in quanto lo zero è posto a pulsazione più elevata rispetto ai poli, che comporta un valore reale di y_{max} leggermente maggiore e un piccolo anticipo del T_{max}.

ESERCIZIO 4

Calcoliamo zeri, poli e guadagno della f.d.t.

Zeri: 1 zero reale in -10
Poli: 2 poli reali in +33.8 e -1.78.

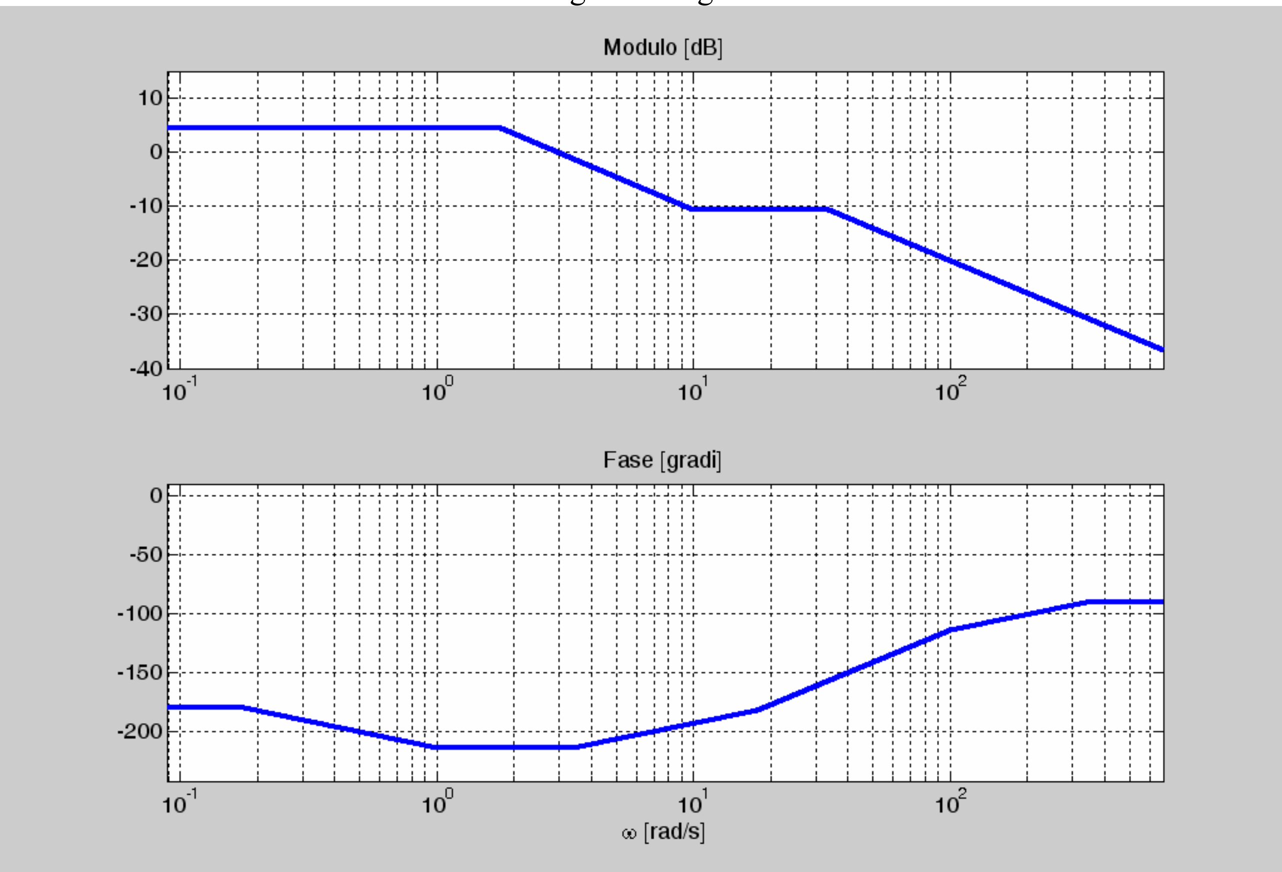
Riportiamo la f.d.t. nella forma generale,

$$L(s) = \frac{10(s+10)}{(s^2 - 32s - 60)} = \frac{10(s+10)}{(s+1.78)(s-33.8)} = -\frac{10\cdot 10(1+0.1s)}{1.78\cdot 33.8(1+0.562s)(1-0.0296s)}$$
$$= -1.667\frac{(1+0.1s)}{(1+0.562s)(1-0.0296s)}$$

Dall'espressione calcolata si ricava il valore *K=-1.66*7.

Si noti che tale valore poteva essere calcolato anche ponendo *s=0* nella forma di partenza, tuttavia, in generale, ciò non è possibile se vi sono poli o zeri nell'origine. In tal caso conviene riportare la f.d.t. nella forma generale, come mostrato sopra.

Mediante il comando *bodeas* si ricavano i seguenti diagrammi di Bode



Si noti che il diagramma delle fasi parte da -180°, essendo il *K* negativo, e che il polo a parte reale positiva dà un contributo positivo alla fase.