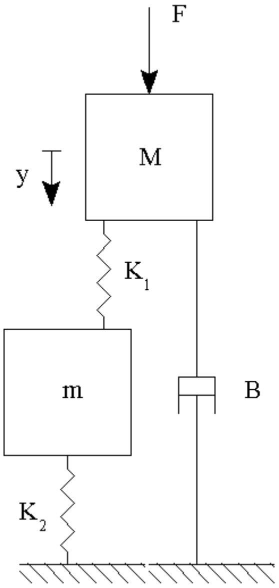
Fondamenti di Automatica – 10 Marzo 2009 – Traccia A

Studente:____ Matricola:__________________



1) Per il sistema meccanico in figura, determinare una rappresentazione i.s.u., considerando come ingresso, *u*, la forza *F* e come uscita, *y*, lo spostamento della massa *M*.

2) Calcolare l'espressione analitica e tracciare l'andamento qualitativo della risposta del sistema
$$F(s)=\frac{(6s+72)}{(6s^2+5s+1)}$$
a fronte di un segnale di ingresso u(t)=1(t).

3) Ricavare le f.d.t. dei seguenti sistemi e classificarli in base alla stabilità.

a) $\dot{x}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}u$, $y=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}x$

b) $\dot{x}=\begin{pmatrix}7 & 2\\ 4 & 0\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}u$, $y=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}x+u$

c) $\dot{x}=\begin{pmatrix}-5 & 7\\ a & -3\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}u$, $y=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}x$

Per il sistema al punto c) discutere la stabilità al variare del parametro $a\in[-\infty \quad +\infty]$.

4) Tracciare i diagrammi di Bode della f.d.t.

$$L(s)=\frac{(s-3)(s+20)}{(2s+1)(s^2+10s+25)}$$

Tempo a disposizione: 2.5 ore

Esercizio 1)

Supponiamo che il sistema sia all'equilibrio sotto la forza peso, quindi indichiamo con s1, s2, gli spostamenti rispetto a tale condizione di equilibrio.
Le equazioni di governo del sistema sono

$$M\ddot{s}_1 = -B\dot{s}_1 - k_1(s_1 - s_2) + u$$
$$m\ddot{s}_2 = k_1(s_1 - s_2) - k_2 s_2$$

Da cui ricaviamo la forma i.s.u. ponendo

$$y = s_1 = x_1, \quad \dot{s}_1 = x_2, \quad s_2 = x_3, \quad \dot{s}_2 = x_4, \quad u = F,$$

ossia

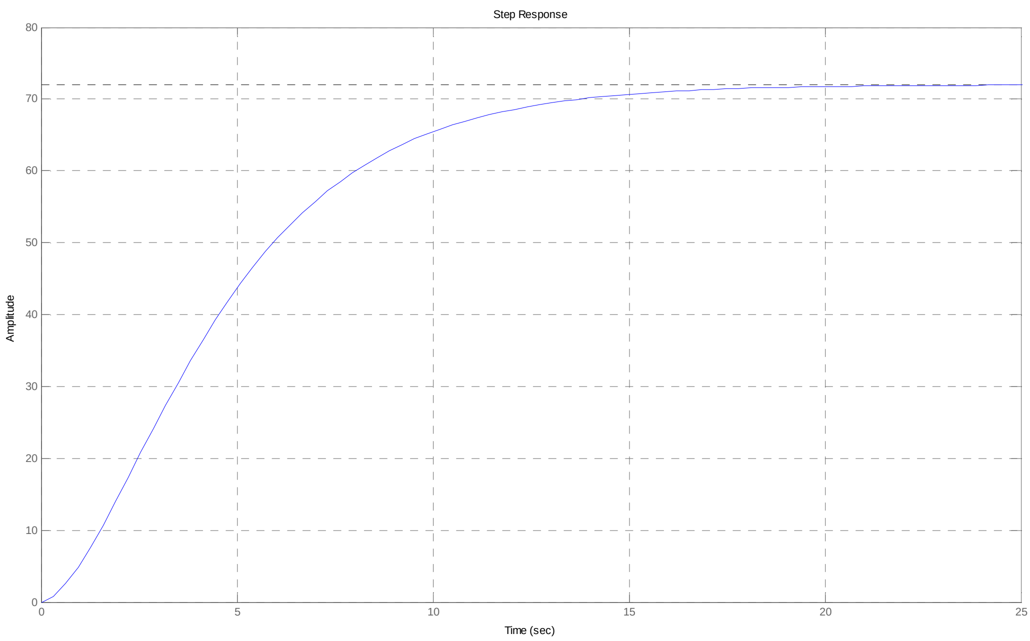
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{M} & -\frac{B}{M} & \frac{k_1}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{m} & 0 & -\frac{(k_1+k_2)}{m} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u.$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

Esercizio 2)

Risposta analitica:

$$y(t) = \left[72 - 210e^{-\frac{1}{3}t} + 138e^{-\frac{1}{2}t} \right] 1(t)$$

Risposta qualitativa:



Val. iniziale = 0, Val. finale = 72, Val deriv. Iniziale = 1, Ta1≈14.

Esercizio 3)

a) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} u$

$y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x$

poli: -1.32, 5.32 → instabile

$$F(s) = \frac{3s+7}{s^2 - 4s - 7}$$

b) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$

$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x + u$

poli: -1, 8 → instabile

$$F(s) = \frac{s^2 - 6s - 6}{s^2 - 7s - 8}$$

c) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ a & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$

$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$

poli: $-4 \pm \sqrt{1+7a}$ → asintoticamente stabile per a<15/7=2.14

$$F(s) = \frac{7}{s^2 + 8s + 15 - 7a}$$

Esercizio 4)