7 Matematica finanziaria nell'economia e nell'estimo

7.1 Premessa

Il perito chiamato a formulare un giudizio di stima deve talora ricorrere all'ausilio della matematica finanziaria, di cui di seguito si espongono i concetti fondamentali. La matematica finanziaria, pertanto, costituisce esclusivamente uno strumento al servizio dell'estimo e dell'economia.

Infatti l'estimo esaurisce il suo compito nel momento in cui il perito è giunto in possesso di tutti i dati necessari per formulare il giudizio di stima. Per tutte le eventuali successive operazioni la matematica finanziaria ha la sola funzione di concretare il più probabile valore di un bene economico in vista di una determinata ragione pratica o di un determinato quesito estimativo, oppure per formulare un giudizio di convenienza.

In relazione a tali scopi, la conoscenza della matematica finanziaria, come di un complesso di altre discipline, può costituire una necessità sia per lo studioso dell'estimo, sia per risolvere problemi economico-estimativi in sede professionale.

N.B. Si rileva che le circostanze, i dati e i saggi di interesse impiegati nei vari esercizi svolti nel testo e nell'Appendice hanno per lo più un valore didattico. Per i simboli, i coefficienti moltiplicatori e le formule finanziarie si rimanda all'Allegato T dell'Appendice.
Dal 2001, nell'ambito di 11 Paesi dell'Unione Europea, è entrato in vigore l'Euro (€), in sostituzione delle relative valute. Per l'Italia un Euro corrispondeva a 1936,27 lire.

7.2 Interesse

L'interesse è il prezzo che si paga per l'uso di un capitale. Sua unità di misura è il tasso o piede o ragione e si indica col simbolo r. Si è adottato il simbolo r, anziché quello internazionale i, per ragioni di uniformità con le allegate tavole finanziarie, sia, in parte, anche perché il simbolo r è tradizionalmente in uso nella letteratura economico-estimativa italiana.

Il saggio di interesse può essere espresso in termini unitari (es.: $r = 0,05$) o in termini percentuali (es.: $r = 5\%$). **Nelle applicazioni economico-estimative si userà sempre il saggio di interesse unitario, cioè l'interesse maturato da un euro nel tempo di un anno.**

In linea di massima, il saggio di interesse è direttamente proporzionale al rischio e alla durata di impiego, in quanto aumenta con questi. Esso è inoltre, a parità di offerta ed entro certi limiti, direttamente proporzionale alla domanda e, a parità di domanda, inversamente proporzionale all'offerta, come si verifica in genere per il prezzo di un prodotto. Tale variabilità dell'interesse dipende logicamente dalla quantità di risparmio che è disponibile sul mercato.

Un tempo l'interesse era negativo, in quanto si doveva pagare una certa percentuale perché un dato capitale fosse custodito, mentre oggi è sempre positivo, poiché il capitale stesso è reso fruttifero con gli investimenti eseguiti da parte dello stesso banchiere.

Per montante (M) di un capitale si intende la somma del capitale e dei relativi interessi maturati in un determinato periodo di tempo. Quindi:

Montante = Capitale + Interessi

Il montante unitario si indica col simbolo q e sta a rappresentare il capitale di un euro con i relativi interessi maturati nel tempo di un anno. Così, ad esempio, il montante di un euro al saggio del 4% per un anno sarà:

$$q = 1 + r = 1 + 0,04 = 1,04$$

L'interesse si distingue in semplice e composto.

Si ha l'interesse semplice quando gli interessi maturati da un capitale in un dato tempo non maturano a loro volta altri interessi; gli interessi quindi restano inerti, cioè infruttiferi. Altrimenti, e cioè quando si maturano gli interessi degli interessi, si ha l'*interesse composto* che può essere:

a) *interesse composto discontinuo annuo*: quando gli interessi vengono aggiunti al capitale che li ha prodotti una volta all'anno;

b) *interesse composto convertibile*: quando gli interessi maturati da un capitale si mutano, a loro volta, in capitale più volte nel tempo di un anno;
c) *interesse composto continuo o matematico*: quando gli interessi si convertono in capitale ad ogni istante. Esso, seppur teoricamente concepibile, non trova alcuna applicazione pratica.

Normalmente, nelle applicazioni estimative, **si parla di interesse semplice se il tempo a cui si riferisce è inferiore od al massimo uguale ad un anno**; ciò, tuttavia, non esclude che si possa determinare l'interesse semplice per un periodo superiore, o l'interesse composto per un periodo inferiore ad un anno.

7.2.1 Problemi relativi all'interesse semplice

1) **Problema dell'interesse vero e proprio**

$$I = C_0 \cdot r \cdot n$$

ove: I indica l'interesse maturato, C_0 il capitale iniziale, r il saggio unitario di interesse, n il numero di mesi o giorni per cui si usufruisce del capitale; così, ad esempio, per 70 giorni si avrà $n = \frac{70}{365}$; per 5 mesi si avrà $n = \frac{5}{12}$.

Per determinare l'interesse di un capitale per un anno si moltiplicherà quindi il capitale espresso in euro per il saggio unitario. Così:

$$I = C_0 \cdot r$$

Da questa espressione è possibile ricavare sia il valore del capitale che il saggio di interesse:

$$C_0 = \frac{I}{r} \quad r = \frac{I}{C_0}$$

La formula $C_0 = \frac{I}{r}$, detta anche di capitalizzazione, è di fondamentale importanza nell'estimo per determinare il valore di un bene economico suscettibile di fornire un reddito medio annuo costante, tendente all'infinito.

ESERCIZIO N. 1 - *Tizio deposita in Buoni Fruttiferi presso un Ufficio postale la somma di 3.000 euro all'interesse del 5%.*

Si vuol conoscere l'ammontare degli interessi che Tizio riscuoterà dopo un anno. Applicando la formula dell'interesse semplice:

$$I = C_0 \cdot r$$

si ottiene:

$I = 3.000 \cdot 0{,}05 = 150$ euro (interesse annuo).

Il capitale capace di maturare in un anno 150 euro di interessi al saggio del 5% corrisponderà a $C_0 = \frac{I}{r}$. Secondo i dati di cui sopra:

$$C_0 = \frac{150}{0{,}05} = € \ 3.000 \text{ (capitale depositato)}$$

Il saggio d'interesse, che su un capitale di 3.000 euro dà 150 euro di interessi annui, sarà:

$$r = \frac{I}{C_0} = \frac{150}{3.000} = 0{,}05 = 5\%$$

2) **Problema del montante**

Dato che il montante è costituito dalla somma di un capitale e degli interessi da questo maturati in un dato tempo, esso si determinerà con la risoluzione della seguente espressione:

$$M = C_0 + C_0 \cdot r \cdot n = C_0\,(1 + rn)$$

ESERCIZIO N. 2 - *Quale è il montante di un capitale di 1.000 euro per 90 giorni al saggio d'interesse del 5%, considerando l'anno commerciale di 360 giorni?*

$$M = 1.000\left(1 + 0{,}05 \cdot \frac{90}{360}\right) = 1.012{,}50 \text{ euro}$$

Il montante è dato pure dal capitale più gli interessi:

$$M = C_0 + C_0 \cancel{\cdot}\, rn$$

Raccogliendo C_0 a fattor comune:

$$M = C_0\,(1 + rn)$$

In definitiva, quindi, si avrà:

$$M = C_0 + C_0 rn;$$

$$M = 1.000 + 1.000 \cdot 0{,}05 \cdot \frac{90}{360}$$

$$M = 1.000 + 12{,}50 = 1.012{,}50 \text{ euro}$$

3) **Problema dello sconto**

a) sconto commerciale usato in pratica:

$$Sc = M \cdot r \cdot n$$

b) sconto razionale:

$$Sc = \frac{M \cdot r \cdot n}{1 + rn}$$

Nei calcoli finanziario-estimativi si deve usare solo e sempre lo sconto razionale. Le banche applicano normalmente lo sconto commerciale; solo per somme elevate ricorrono allo sconto razionale.
A parità di capitale, di tempo e di saggio, lo sconto commerciale è matematicamente uguale all'interesse. Le due formule relative infatti sono:

$$Sc = M \cdot r \cdot n$$
$$I = C_0 \cdot r \cdot n$$

L'apparente differenza si verifica perché, mentre lo sconto si calcola in base ad un capitale futuro M (montante) dal quale esso va detratto per ottenere quello presente C_0, l'interesse invece si calcola in base ad un capitale presente C_0, al quale esso va aggiunto per ottenere il corrispondente capitale futuro M.
Riassumendo:

$$M - Sc = C_0$$

$$C_0 + I = M$$

Lo sconto commerciale, come è ovvio, è lievemente maggiore, a parità di condizioni, di quello razionale.

Esercizio n. 3 - *Dato un capitale di 15.000 euro realizzabile fra 43 giorni, si vuole conoscere l'ammontare di quel capitale futuro M all'attualità. Sia il saggio di sconto del 5%. I giorni sono quelli dell'anno solare.*

$$C_0 = \frac{15.000}{1 + 0,05 \cdot 43/365} = 14.912 \text{ euro (arrotondato)}$$

Esercizio n. 4 - *Una cambiale per l'importo di 300.000 euro con scadenza a sette mesi viene oggi scontata presso una Banca al saggio del 6%.*

Si vuol sapere a quanto ammonta lo sconto effettuato. Adottando la formula dello sconto commerciale, esso risulta di 10.500 euro; infatti:

$$Sc = M\,r\,n$$

$$Sc = 300.000 \cdot 0,06 \cdot 7/12$$

$$Sc = 10.500 \text{ euro}$$

Con l'applicazione, invece, della formula razionale l'importo relativo è evidentemente minore e ammonta precisamente a 10.145 euro. E risolvendo:

$$Sc = \frac{M\,r\,n}{1 + r\,n} = \frac{10.500}{1 + 0,06 \cdot 7/12} = 10.145 \text{ euro}$$

4) **Problema del valore scontato**

È il problema inverso del montante. Infatti, avendo un capitale M disponibile fra n giorni, e volendo calcolare quale sarebbe oggi il relativo capitale C_0, con l'operazione dello sconto semplice, risulta che:

$$C_0 = \frac{M}{1 + rn}$$

Esercizio n. 5 - *Essendo Tizio in possesso di una cambiale di 10.000 euro che scade fra 5 mesi, a quanto ammonta la somma che egli riscuoterebbe se la cambiale venisse scontata in Banca al saggio dell'8%?*

$$C_0 = M\,\frac{1}{1 + rn}$$

$$C_0 = 10.000\,\frac{1}{1 + 0,08\,\frac{5}{12}}$$

$$C_0 = 9.666 \text{ (valore scontato in euro)}$$

7.2.2 Problemi relativi all'interesse composto discontinuo annuo

L'interesse composto discontinuo annuo si ha quando l'interesse viene aggiunto al capitale che lo ha maturato alla fine di ogni anno e **viene adottato in tutte le applicazioni economico-estimative riguardanti tempi superiori ad un anno,** salvo disposizioni diverse.
In analogia ai problemi esposti per l'interesse semplice, quelli inerenti all'interesse composto discontinuo annuo sono:

1) **Problema del montante**

Dato un capitale presente C_0, qualora si voglia conoscere l'ammontare del capitale futuro M, comprensivo del capitale iniziale e dei relativi interessi composti maturati in un determinato numero di anni, la formula generale da adottare sarà:

$$M = C_0\,q^n$$

in cui $q = 1 + r$

A tale formula si arriva per gradi e con un semplice ragionamento. Infatti, il montante che si avrà alla fine del primo anno e che si chiamerà C_1, sarà dato dal capitale iniziale C_0 più i relativi interessi di un anno. Così:

$$C_1 = C_0 + C_0 \cdot r$$

Raccogliendo ora C_0 a fattor comune, si ha:

$$C_1 = C_0\,(1 + r)$$

$$C_1 = C_0\,q$$

Procedendo in tal guisa si avrà che, chiamando C_2 il montante dello stesso capitale C_0 alla fine del 2° anno, esso sarà dato dal valore del montante del 1° anno C_1 più i relativi interessi maturati nel 2° anno. Così:

$$C_2 = C_1 + C_1 \cdot r$$

Raccogliendo C_1 a fattor comune:

$$C_2 = C_1\,(1 + r)$$

Sostituendo ora a C_1 il suo valore, si ha:

$$C_2 = C_0\,(1 + r)\,(1 + r)$$

$$C_2 = C_0\,(1 + r)^2$$

$$C_2 = C_0\,q^2$$

In definitiva, si avrà che M, cioè il montante del capitale presente C_0 per n anni, si esprimerà con la formula generale:

$$M = C_0 (1 + r)^n$$

Più semplicemente:

$$M = C_0\, q^n$$

Si deduce, pertanto, che per conoscere l'ammontare M di un capitale attuale C_0 (credito, debito, costo, prodotto, ecc.) fra n anni ad interesse composto, basterà moltiplicare il valore C_0 per il coefficiente $(1 + r)^n$ e cioè per q^n. Per semplicità di conteggio tale coefficiente si trova nelle **tavole finanziarie** già espresso in numero decimale e distinto in base al saggio di interesse e al numero degli anni. Le **tavole finanziarie** si trovano nell'Allegato U dell'Appendice.

Esercizio n. 6 - *A quanto ammonterà fra 10 anni un capitale di 50.000 euro depositato oggi in Banca all'interesse del 4%?*

$M = C_0q^n = 50.000 \cdot 1{,}04^{10} = 50.000 \cdot 1{,}4802 =$ € 74.010

2) **Problema del valore scontato**

È il problema inverso del montante. Infatti, avendo un capitale M disponibile fra n anni, e volendo conoscere quale sarebbe oggi il corrispondente capitale C_0, risulterà che:

$$C_0 = M \frac{1}{q^n}$$

Il coefficiente $\frac{1}{q^n}$ trova pure nelle tavole finanziarie appositamente compilate.

Esercizio n. 7. - *Il diritto di realizzare fra otto anni un credito di 100.000 euro viene ceduto oggi ad una terza persona.*
Quale somma viene pagata attualmente supposto un saggio di sconto del 6%?

È evidente che volendo realizzare oggi la somma che si riscuoterà fra otto anni, tale somma sarà inferiore. Infatti:

$$C_0 = M \frac{1}{q^n} = 100.000 \frac{1}{1{,}06^8} = 100.000 \cdot 0{,}6274 =$$

= € 62.740

3) **Problema dell'interesse**

Ogni qualvolta si voglia calcolare l'interesse composto I_n maturato in n anni da un dato capitale C_0 e ad un prestabilito saggio r, la formula generale da adottare è la seguente:

$$In = C_0 (q^n - 1)$$

Essendo dato il montante M dal capitale C_0 più gli interessi In, ne consegue che gli interessi sono dati dalla differenza tra il montante M e il capitale presente C_0. Così:

$$I_n = M - C_0$$

Sostituendo ad M il suo valore, dato dalla formula del montante, si avrà:

$$I_n = C_0\, q^n - C_0$$

Raccogliendo C_0 a fattor comune, si ottiene in definitiva che:

$$I_n = C_0 (q^n - 1)$$

Il coefficiente $(q^n - 1)$ non si trova direttamente nelle tavole finanziarie; basterà solo rilevare l'entità del coefficiente q^n e da questa togliere un'unità.

Se, ad esempio, si dovesse determinare l'interesse maturato da un capitale C_0 in tre anni e cinque mesi, si dovrà calcolare, ovviamente, l'interesse composto discontinuo annuo per i tre anni e l'interesse semplice per il restante periodo di cinque mesi sul montante del terzo anno.

Dalla suddetta formula dell'interesse composto si può ricavare, conoscendo l'interesse periodico e il saggio di interesse, il capitale C_0 capace di generare proprio quell'interesse:

$$C_0 = I_n \frac{1}{q^n - 1}$$

Tale formula, detta anche di capitalizzazione, è di fondamentale importanza nell'estimo per determinare il valore di un bene economico capace di fornire un reddito periodico, cioè ogni n anni, costante e considerato illimitato.

In definitiva, volendo conoscere il valore di un immobile capace di generare periodicamente un reddito costante, supposto infinito, basterà moltiplicare tale reddito per il coefficiente di capitalizzazione $\frac{1}{q^n - 1}$ che si trova direttamente nelle tavole finanziarie.

Esercizio n. 8 - *Depositando oggi in Banca la somma di 100.000 euro al saggio d'interesse del 5%, quale sarà l'interesse maturato dopo otto anni?*

$$I_n = C_0 (q^n - 1)$$
$$I_8 = 100.000\ (1{,}05^8 - 1)$$
$$I_8 = 100.000 \cdot 0{,}4775 = € 47.750$$

Dalla formula dell'interesse composto $I_n = C_0 (q^n - 1)$, si può ricavare, conoscendo l'interesse periodico ed il saggio di interesse, il capitale capace di generare proprio quell'interesse.

La formula relativa, pertanto, sarà la seguente:

$$C_0 = I_n \frac{1}{q^n - 1}$$

Con gli stessi dati dell'esempio precedente, il capitale capace di maturare in otto anni 47.750 euro di interessi al saggio del 5% corrisponderà infatti a:

$$C_0 = I_n \frac{1}{q^n - 1}$$

$$C_0 = 47.750 \frac{1}{1{,}05^8 - 1}$$

$$C_0 = 47.750 \cdot 2{,}0944$$

$$C_0 = 100.000 \text{ euro (arrotondato per eccesso)}$$

4) **Problema dello sconto**
Dato un capitale M realizzabile fra n anni, si vuol conoscere l'ammontare dello sconto composto da detrarsi da tale valore M per ottenere il capitale C_0 realizzabile subito.
Come l'interesse, anche lo sconto è dato dalla differenza tra il montante M e il capitale presente C_0. Così:

$$Sc = M - C_0$$

Sostituendo a C_0 il suo valore, dato dalla formula del valore scontato, si ha:

$$Sc = M - M \frac{1}{q^n}$$

Sviluppando si avrà:

$$Sc = \frac{Mq^n - M}{q^n}$$

Raccogliendo M a fattor comune si otterrà, in definitiva, la formula generale dello sconto composto:

$$Sc = M \frac{q^n - 1}{q^n}$$

Il coefficiente $\frac{q^n - 1}{q^n}$ si trova nelle tavole finanziarie di qualsiasi manuale; nell'eventualità può essere scomposto nei seguenti due coefficienti:

$$(q^n - 1) \frac{1}{q^n}$$

ESERCIZIO N. 9 - *Si voglia conoscere l'ammontare dello sconto da applicare oggi ad un capitale di 40.000 euro che, percepibile fra cinque anni, si voglia realizzare subito (ad esempio una cambiale a cinque anni, un credito posticipato di cinque anni, un mutuo pagabile fra cinque anni, un prodotto realizzabile fra cinque anni). Sia* $r = 5\%$.

$$Sc = M \frac{q^n - 1}{q^n}$$

$$Sc = 40.000 \frac{1{,}05^5 - 1}{1{,}05^5}$$

$Sc = 40.000 \cdot 0{,}2164 =$ € 8,656 (sconto effettuato)

A conclusione del presente paragrafo, si vuole sottolineare come i problemi relativi all'interesse semplice non si applicano mai, così almeno nel campo finanziario ed estimativo, per un tempo superiore a un anno, se non nei casi esplicitamente dichiarati; diversamente, e cioè per tempi maggiori di un anno, si tratterà sempre di applicare i problemi dell'interesse composto discontinuo annuo, salvo eccezioni o disposizioni di legge.

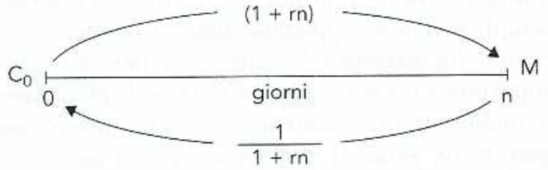
7.3 Riporto dei capitali nel tempo

Nel capitolo dell'interesse si è parlato di montante e di valore scontato la cui determinazione si fa spostando nel tempo i valori a mezzo di coefficienti. Un capitale spostato nel futuro si trasforma in montante; spostato nel passato, invece, si tramuta in valore scontato.
Ciò premesso conviene precisare un principio fondamentale della matematica finanziaria secondo il quale ***non si possono addizionare, sottrarre o confrontare tra loro valori differiti nel tempo, se prima non si rendono omogenei, cioè se non si riferiscono allo stesso momento***. Se due o più capitali, infatti, si rendono disponibili in tempi diversi, è come se si trattasse di beni differenti tra loro, e quindi non sommabili. Il farlo sarebbe come addizionare tra loro frumento e cavoli, cioè beni tra loro eterogenei.
Pertanto in forza del principio per cui un valore riferito ad una determinata epoca non può essere addizionato o sottratto con un altro riferito ad epoca diversa se non quando ambedue i valori siano resi omogenei, e cioè riferiti alla stessa epoca, ne consegue che uno dei due valori deve essere riportato all'epoca dell'altro, oppure che ambedue devono essere riportati ad una terza epoca.
Non si può, ad esempio, addizionare un capitale disponibile nel 1990 con uno disponibile nel 2000. Si dovrà prima riferire ambedue i capitali alla stessa epoca, cioè o ambedue al 1990 o ambedue al 2000 con l'operazione di "riporto", di uno di essi; oppure si potranno riportare ambedue i valori ad una terza epoca, come ad esempio il 1997 o il 2003. Tale spostamento di capitali nel tempo si raggiunge coi soliti coefficienti di posticipazione o di anticipazione, sia a interesse semplice che composto.
I due coefficienti da impiegarsi per tempi inferiori ad un anno sono:

$(1 + rn)$ = **coefficiente di posticipazione** di un capitale a interesse semplice;

$\frac{1}{1 + rn}$ = **coefficiente di anticipazione** di un capitale a sconto semplice.

Graficamente il tutto si può così rappresentare:



Infatti:

$C_0 (1 + rn) = M$ (montante semplice o capitale futuro)

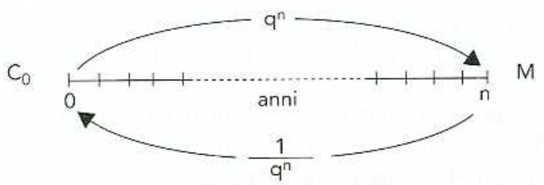
$M \frac{1}{1 + rn} = C_0$ (valore scontato o capitale presente)

Per tempi superiori ad un anno, al fine di trasportare i capitali nel tempo, si usano, invece, i seguenti due coefficienti:

q^n = **coefficiente di posticipazione** di un capitale a interesse composto;

$\frac{1}{q^n}$ = **coefficiente di anticipazione** di un capitale a sconto composto.

Graficamente, in questo caso, si ha:



Infatti:

$C_0 q^n = M$ (montante composto o valore futuro)

$M \frac{1}{q^n} = C_0$ (valore scontato o valore presente)

Si rileva, infine, ad evitare erronee interpretazioni, che si ha omogeneità di valori riferiti ad epoche diverse, solo quando questi vengono riportati allo stesso momento; **tale omogeneità, quindi, si riferisce esclusivamente al fattore tempo attraverso gli interessi che ne derivano, e non riguarda l'eventuale variata capacità di acquisto della moneta**. In altre parole il riporto di un capitale nel tempo non ha nulla a che vedere con la sua eventuale svalutazione o rivalutazione, alle quali, se occorresse, si addiviene usando opportuni coefficienti approntati dall'Istituto Centrale di Statistica.

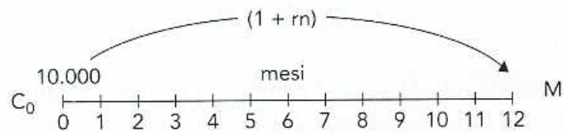
Qualora si voglia rivalutare una somma tra un'epoca e un'altra – come avviene di sovente per debiti di valore – si applica il coefficiente di rivalutazione Istat dedotto in base all'aumento del costo della vita o dei prezzi al consumo, che può essere facilmente richiesto presso l'Ufficio di Statistica della locale Camera di Commercio. E ciò senza generalizzare, poiché talora esistono casi di rivalutazione del tutto particolari cui vanno applicati indici e considerazioni altrettanto particolari (come potrebbe accadere per il valore di un terreno agricolo o di un'area fabbricabile, o per le spese sostenute in tempi diversi nell'esecuzione di una trasformazione fondiaria, e così via), nel senso cioè che talune rivalutazioni di beni, di valori o di costi nel tempo non si possono effettuare ricorrendo, *sic et simpliciter*, agli indici Istat dei prezzi al consumo o all'ingrosso, o alla loro semisomma.

Naturalmente questi capitali o valori oggetto di spostamento nel tempo, per avere un fondamento economico, devono essere dei beni produttivi atti a generare frutti e cioè che concorrono alla produzione di ricchezza quali i terreni, i fabbricati, le scorte aziendali, il denaro, il capitale di anticipazione, i crediti, ecc. I beni improduttivi sono quelli invece che vengono avulsi dal fenomeno produttivo e perciò resi inerti, come, ad esempio, la tesaurizzazione del denaro, l'oro, le gioie, un quadro, ecc.

ESERCIZIO N. 10 - *Di un particolare fabbricato civile si conosce il fitto che viene pagato una volta all'anno anticipatamente per 10.000 euro.*

Quale sarà l'ammontare del canone reale? Sia $r = 0{,}05$.

Graficamente:



Numericamente:
Il canone d'affitto, riferito alla fine dell'anno, si determinerà in base alla formula generale del montante semplice, e precisamente moltiplicando il capitale C_0 per il coefficiente di posticipazione semplice $(1 + rn)$:

$$M = C_0(1 + rn)$$

Sostituendo ai simboli i valori noti, si avrà:

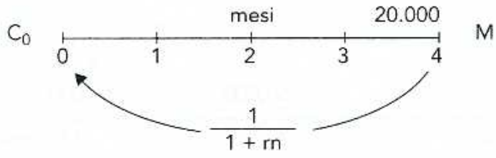
$$10.000 \left(1 + 0{,}05 \frac{12}{12}\right)$$

$$M = 10.000 \cdot 1{,}05$$

$$M = € \ 10.500 \text{ (canone posticipato)}$$

ESERCIZIO N. 11 - *Tizio tra 4 mesi deve estinguere un debito di 20.000 euro. Quanto dovrebbe pagare per liberarsi subito dal suo debito?*
Sia il saggio di sconto il 6%.

Graficamente:



Numericamente:

L'ammontare del debito presente C_0, e cioè riferito all'attualità, si determinerà in base alla formula generale del valore scontato semplice e precisamente moltiplicando il debito futuro M per il coefficiente di anticipazione semplice $\frac{1}{1+rn}$.

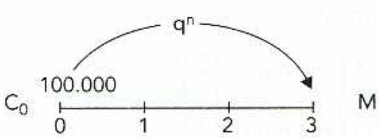
$$C_0 = M\,\frac{1}{1+rn} = 20.000\,\frac{1}{1+0{,}06 \cdot 4/12} = € \ 19.607$$

(debito attuale)

Esercizio n. 12 - *Un grosso industriale ha sostenuto tre anni fa, per l'esecuzione di un'opera di miglioramento, una spesa di 100.000 euro. Si vuole conoscere oggi l'ammontare di tale spesa. Sia $r = 0{,}09$.*

La spesa odierna sarà costituita dal montante di 100.000 euro alla fine del triennio considerato, perché la somma investita nell'immobile tre anni fa è rimasta improduttiva; è evidente che i mancati redditi di un investimento costituiscono una spesa indiretta. In definitiva, nel nostro caso, per riferire ad oggi la spesa sostenuta tre anni fa, dovranno essere aggiunti al capitale allora speso gli interessi che questo capitale avrebbe maturato in un investimento produttivo.

Graficamente:



Numericamente:

$M = C_0\,q^n$

$M = 100.000\,q^3$

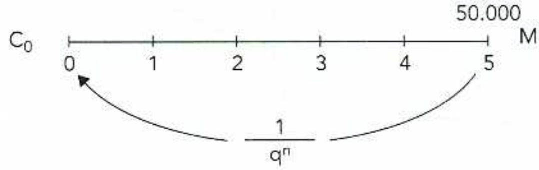
$M = 100.000 \cdot 1{,}09^3 = 100.000 \cdot 1{,}2950$

$M = 129.500$ (spesa totale al 3° anno in euro)

Esercizio n. 13 - *Tizio fra cinque anni deve estinguere un debito di 50.000 euro. Se volesse liberarsi oggi dal suo onere, quanto dovrebbe sborsare? Sia il saggio di sconto pari al 12%.*

Evidentemente, il creditore che realizza oggi un credito che gli competerebbe fra 5 anni deve accordare al debitore una riduzione sulla somma, corrispondente allo sconto composto.

Graficamente:



Numericamente:

$C_0 = M\,\frac{1}{q^n}$

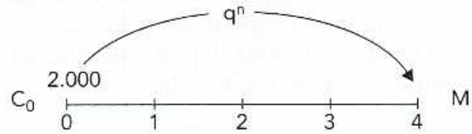
$C_0 = 50.000\,\frac{1}{1{,}12^5}$

$C_0 = 50.000 \cdot 0{,}5674 = € \ 28.370$ (somma da pagarsi oggi)

Esercizio n. 14 - *Un risparmiatore ha depositato oggi in Buoni Fruttiferi postali la somma di 2.000 euro. Quale somma realizzerà complessivamente fra 4 anni al saggio d'interesse del 10%?*

Fra 4 anni il risparmiatore ritirerà quindi una somma data dal montante del capitale depositato e cioè comprensiva di capitale e di interessi composti.

Graficamente:



Numericamente:

$M = C_0\,q^n$

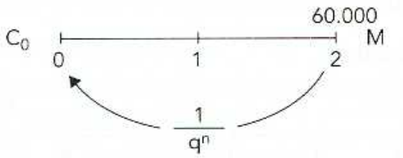
$M = 2.000 \cdot 1{,}10^4$

$M = 2.000 \cdot 1{,}4641 = € \ 2.928$ (somma da ritirarsi dopo 4 anni)

Esercizio n. 15 - *Una cooperativa agricola, in seguito all'esecuzione di un importante miglioramento fondiario, viene ad avere da parte dello Stato un diritto di credito, quale contributo, di 60.000 euro riscuotibile fra due anni. Per esigenze finanziarie, la cooperativa vuole cedere oggi ad una Banca il suo diritto di credito. Quale somma realizzerà? Sia il saggio di sconto il 9,5%.*

Il capitale futuro M di 60.000 euro, realizzabile fra due anni, viene scontato all'attualità e cioè moltiplicato per il coefficiente di anticipazione $\frac{1}{q^n}$.

Graficamente:



Numericamente:

$$C_0 = M \frac{1}{q^n}$$

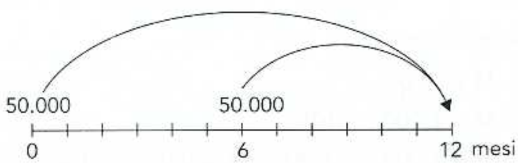
$$C_0 = 60.000 \frac{1}{1{,}095^2}$$

$C_0 = 60.000 \cdot 0{,}8340 =$ € 50.040 (somma reperibile subito).

Esercizio n. 16 - *Un locatario per l'uso di un complesso industriale paga un canone annuo di 100.000 euro suddiviso in due semestralità anticipate. A quanto ammonta l'affitto percepito dal proprietario, riferito alla fine dell'anno? Sia $r = 0{,}05$.*

Le due rate semestrali di 50.000 euro cadauna corrisposte in due tempi diversi, per poter essere tra loro addizionate, devono essere rese omogenee, e cioè riferite allo stesso momento, che nel nostro caso è la fine dell'anno. Tale omogeneità si ottiene addizionando alle due rate gli interessi semplici che esse hanno maturato nel tempo intercorrente tra il momento in cui sono state versate e quello a cui vanno riferite. Ciò si ottiene riportando l'importo delle due rate alla fine dell'anno con il coefficiente di posticipazione ad interesse semplice: $1 + rn$. Risolvendo:

Graficamente:



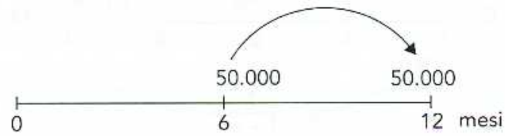
Numericamente:

$$M = 50.000 \left(1 + 0{,}05 \frac{12}{12}\right) + 50.000 \left(1 + 0{,}05 \frac{6}{12}\right)$$

$M = 50.000 \ (2 + 0{,}05 \frac{18}{12}) =$ € 103.750 (canone annuo posticipato)

Con gli stessi dati dell'esercizio, le due rate semestrali, anziché anticipate si considerino posticipate.
Il canone annuo posticipato e cioè riferito a fine dell'anno sarà:

Graficamente:



Numericamente:

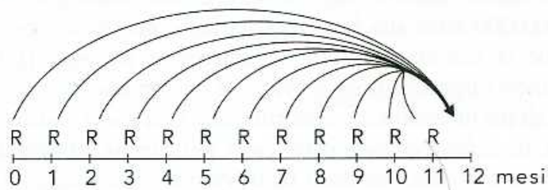
$M = 50.000 \left(1 + 0{,}05 \frac{6}{12}\right) + 50.000 =$ € 101.250

(canone annuo posticipato)

Esercizio n. 17 - *Supposto che per l'uso di una lussuosa villa con parco si paghino rate anticipate di 10.000 euro mensili, a quanto ammonta l'annuo canone complessivo e posticipato, ammesso un saggio d'interesse del 5%?*

Secondo il noto e fondamentale principio finanziario per cui non si possono addizionare valori riferiti ad epoche diverse, le singole mensilità dovranno essere riportate allo stesso momento e, nel nostro caso, alla fine dell'anno, per cui, rese così omogenee, si potrà farne la somma aritmetica.

Graficamente:



dove R = rata mensile di € 10.000 (anche se il simbolo R è improprio).

Numericamente:

$$10.000 \left(1 + 0{,}05 \frac{12}{12}\right) +$$
$$10.000 \left(1 + 0{,}05 \frac{11}{12}\right) +$$
$$10.000 \left(1 + 0{,}05 \frac{10}{12}\right) +$$
$$10.000 \left(1 + 0{,}05 \frac{9}{12}\right) +$$
$$10.000 \left(1 + 0{,}05 \frac{8}{12}\right) +$$
$$10.000 \left(1 + 0{,}05 \frac{7}{12}\right) +$$
$$10.000 \left(1 + 0{,}05 \frac{6}{12}\right) +$$
$$10.000 \left(1 + 0{,}05 \frac{5}{12}\right) +$$
$$10.000 \left(1 + 0{,}05 \frac{4}{12}\right) +$$

$$10.000\left(1+0{,}05\,\frac{3}{12}\right)+$$
$$10.000\left(1+0{,}05\,\frac{2}{12}\right)+$$
$$10.000\left(1+0{,}05\,\frac{1}{12}\right)=$$
$$\overline{10.000\left(12+0{,}05\,\frac{78}{12}\right)}$$

Pertanto in definitiva e più semplicemente si avrà:

$$M = 10.000\left(12 + 0{,}05\,\frac{78}{12}\right)$$

$M = 10.000\ (12 + 0{,}325)$

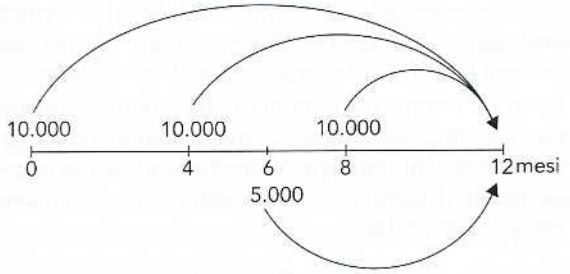
$M = 10.000 \cdot 12{,}325$

$M = 123.250$ euro (canone annuo posticipato e cioè riferito alla fine dell'anno)

Esercizio n. 18 - *Tizio per l'uso di un grosso supermercato che detiene in locazione paga un canone annuo di 30.000 euro suddivise in tre rate anticipate. Le spese annue mediamente anticipate a carico della proprietà ammontano a 5.000 euro. Si vuole conoscere il reddito annuo percepito dal proprietario del fabbricato. Sia r = 0,06. Si determini poi anche il valore del fabbricato, supposto un saggio di capitalizzazione del 5%.*

Il reddito annuo (R) si determina per differenza fra il canone lordo annuo d'affitto e la spesa annua: ambedue i valori, evidentemente, devono essere riferiti alla stessa epoca e precisamente alla fine dell'anno poiché solo in tale momento si possono conoscere i proventi e le spese. In definitiva, quindi, le tre rate dovranno essere riportate a fine d'anno col coefficiente di posticipazione ad interesse semplice $(1 + rn)$. Pure di mesi sei viene riportata la spesa mediamente anticipata di 5.000 euro per il semplice fatto che le spese non si sostengono tutte alla fine o esclusivamente all'inizio dell'anno, bensì esse si considerano pressoché uniformemente distribuite durante tutto l'anno, e pertanto concentrate al 6° mese. Risolvendo si avrà:

Graficamente:



Numericamente:

$$Ca = 10.000 \cdot 1{,}06 + 10.000\left(1 + 0{,}06\,\frac{2}{3}\right) + 10.000\left(1 + 0{,}06 \cdot \frac{1}{3}\right) = 10.600 + 10.400 + 10.200 = 31.200$$

(canone lordo annuo posticipato in euro)

$Sp = 5.000\left(1 + 0{,}06\,\frac{1}{2}\right) =$ € 5.150 (spesa annua posticipata)

$R = 31.200 - 5.150 =$ € 26.050 (reddito medio annuo posticipato)

Essendo R l'interesse annuo medio ritraibile del supermercato, si può, capitalizzando tale reddito, determinare il capitale (valore dell'immobile) capace di fornire proprio quel reddito annuo. Infatti 26.050 euro costituiscono il frutto annuo maturato di un capitale X al saggio d'interesse del 5%. Poiché l'interesse annuo I di un capitale C_0 è dato dalla formula C_0r il capitale C_0, conoscendo l'interesse annuo e il saggio r, a sua volta sarà uguale a $\frac{I}{r}$ e nel nostro caso a:

$$V_0 = \frac{26.050}{0{,}05} = 521.000 \text{ euro (valore del supermercato)}$$

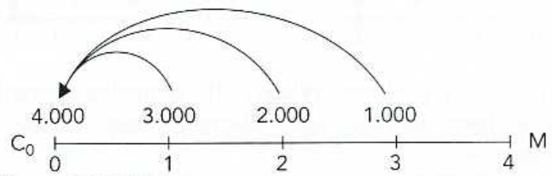
Esercizio n. 19 - *Tizio a partire da oggi e per quattro anni consecutivi, ha verso Caio i seguenti debiti a decorrere dall'inizio di ogni anno:*

1° anno	€	*4.000*
2° "	"	*3.000*
3° "	"	*2.000*
4° "	"	*1.000*
Totale	€	*10.000*

Volendo Tizio adesso liquidare i suoi debiti con un'unica somma, quanto dovrebbe pagare? Il saggio di sconto convenuto sia il 6%.

Naturalmente, i singoli debiti, per poter essere addizionati al momento attuale, devono essere tutti riferiti ad oggi e ciò si ottiene anticipandoli col coefficiente di sconto composto $\frac{1}{q^n}$.

Graficamente:



Numericamente:

$$C_0 = 4.000 + 3.000 \frac{1}{1{,}06} + 2.000 \frac{1}{1{,}06^2} + 1.000 \frac{1}{1{,}06^3}$$

$$= 4.000 + 3.000 \cdot 0{,}9434 + 2.000 \cdot 0{,}8900 + 1.000 \cdot 0{,}8396 =$$

$$= 4.000 + 2.830 + 1.780 + 839 =$$

$= 9.449$ (somma da pagare subito in euro).

7.4 Annualità

Le annualità sono valori, positivi o negativi, che si ripetono ad intervalli regolari di un anno, e possono essere costituite, ad esempio, da redditi, prodotti, costi, debiti, crediti, quote, ecc.

L'ammontare di ciascuna annualità viene indicato simbolicamente con la lettera a. Le annualità possono essere:

a) rispetto alla scadenza: **posticipate o anticipate** a seconda che si verifichino alla fine o all'inizio di ogni anno;
b) rispetto all'entità: **costanti o variabili** a seconda che si ripetano con il medesimo o con diverso ammontare;
c) rispetto alla durata: **limitate o illimitate** a seconda che si verifichino per un numero finito o indefinito di anni.

Un'annualità si ritiene infinita quando si ripete, o si ritiene che si ripeta, per oltre 80 anni.
Naturalmente le annualità possono essere costanti o variabili e nello stesso tempo limitate o illimitate come posticipate o anticipate. Qui saranno studiate le annualità ***costanti*** nei seguenti tipi di combinazione:

- annualità costanti posticipate limitate;
- annualità costanti anticipate limitate;
- annualità costanti posticipate illimitate;
- annualità costanti anticipate illimitate.

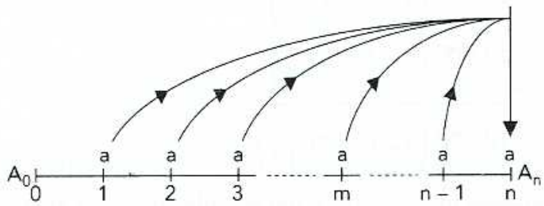
7.4.1 Annualità costanti posticipate limitate

Sono valori che si ripetono costantemente alla fine di ogni anno per un determinato numero di anni e graficamente si possono rappresentare nel seguente modo:

Tre sono i problemi relativi alle annualità costanti posticipate limitate: *accumulazione finale, iniziale e intermedia.*

a) ACCUMULAZIONE FINALE: si ottiene riferendo le annualità all'anno n e cioè alla fine del periodo.

Rappresentazione grafica:



Per ottenere la somma di una serie di annualità alla fine dell'anno n con i relativi interessi composti, occorre riportare, con il coefficiente di posticipazione q^n, una ad una le singole annualità alla fine del periodo di anni considerato ed eseguire quindi la somma aritmetica.
In pratica, però, ogni qualvolta si debba determinare la somma finale di un dato numero di *annualità costanti*, tale procedimento comporterebbe eccessivi calcoli e quindi un dispendio di tempo considerevole.
Pertanto, seguendo il procedimento dianzi indicato si arriva, per successive semplificazioni matematiche, ad una formula generale molto semplice:

$$A_n = a \frac{q^n - 1}{r}$$

Infatti, indicando col simbolo An l'accumulazione finale, esaminando attentamente il grafico sopra tracciato, e trasportando una ad una le singole annualità alla fine dell'anno n, partendo da quella che si verifica alla fine del periodo, si avrà una espressione aritmetica in cui le diverse annualità si possono fra di loro addizionare perché rese omogenee in quanto riferite alla stessa epoca e precisamente alla fine del periodo. Così:

$$A_n = a + a\,q + \ldots + a\,q^{n-2} + a\,q^{n-1}$$

Raccogliendo l'annualità a fattore comune, si ottiene:

$$A_n = a\,(1 + q + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1})$$

Osservando i termini tra parentesi si rileva che essi costituiscono una progressione geometrica crescente di ragione q, intendendosi per ragione di una progressione geometrica il rapporto costante tra due termini qualsiasi e consecutivi della serie o, più precisamente, tra ogni termine della serie con quello precedente.
Poiché la somma dei termini di una progressione geometrica crescente è uguale a una frazione che ha per numeratore l'ultimo termine moltiplicato per la ragione meno il primo, e per denominatore la ragione meno l'unità, si ha:

$$A_n = a \frac{q^{n-1}\,q - 1}{q - 1}$$

Svolgendo:

$$A_n = a\,\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Sostituendo al q del denominatore il suo valore $1 + r$, si ha:

$$A_n = a\,\frac{q^n - 1}{1 + r - 1}$$

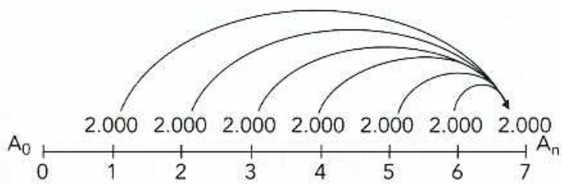
Semplificando, infine, al denominatore le due unità di valore uguale e di segno contrario, si avrà in definitiva la formula che dà l'*accumulazione finale di annualità costanti posticipate e limitate*:

$$A_n = a\,\frac{q^n - 1}{r}$$

Il coefficiente $\frac{q^n - 1}{r}$ si trova già elaborato nelle tavole finanziarie.
Pertanto, ogni qualvolta si voglia determinare la somma riferita alla fine del periodo di una serie di *valori annui costanti e posticipati*, basterà moltiplicare l'importo dell'annualità per il coefficiente relativo sopraindicato.

Esercizio n. 20 - *Si abbia da oggi per diritto, alla fine di ogni anno e per 7 anni consecutivi, un reddito di 2.000 euro. Supposto che l'esigibilità di tutti i redditi avvenga alla fine del 7° anno, determinare l'ammontare complessivo ritraibile. Sia $r = 0{,}08$.*

Per una pronta e chiara risoluzione conviene sempre rappresentare la serie dei valori annui con il relativo grafico.



Risolvendo si ha:

$$A_n = a\,\frac{q^n - 1}{r}$$

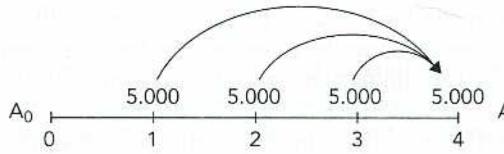
$$A_7 = 2.000\,\frac{1{,}08^7 - 1}{0{,}08}$$

$A_7 = 2.000 \cdot 8{,}9228 =$ € 17.845 (reddito totale al 7° anno)

Esercizio n. 21 - *Per la manutenzione straordinaria di un fabbricato il proprietario ha speso alla fine di ogni anno per quattro anni consecutivi 5.000 euro. Si vuol conoscere la spesa complessiva riferita alla fine del periodo considerato. Sia $r = 0{,}05$.*

Prima di addivenire alla somma delle singole spese annue, queste dovrebbero essere riportate alla fine del 4° anno col coefficiente di posticipazione ad interesse composto q^n. In realtà essendo costante la spesa annua, la somma richiesta si otterrà applicando direttamente la formula che dà l'accumulazione finale di una serie di annualità costanti e posticipate.

Graficamente:



Numericamente:

$$A_n = a\,\frac{q^n - 1}{r}$$

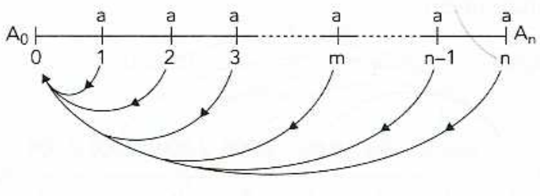
$$A_4 = 5.000\,\frac{1{,}05^4 - 1}{0{,}05}$$

$$A_4 = 5.000 \cdot 4{,}3101$$

$A_4 = 21.550$ (spesa totale al 4° anno in euro)

b) Accumulazione iniziale: si ottiene riferendo le annualità all'anno zero del periodo.

Rappresentazione grafica:



Per ottenere la somma iniziale, cioè all'anno zero o comunque all'attualità, di un determinato numero di annualità costanti e posticipate, si fa un ragionamento inverso all'accumulazione finale. Infatti si dovranno riportare una ad una, con il coefficiente di sconto composto $\frac{1}{q^n}$, le singole annualità all'anno zero ed eseguirne, quindi, data l'omogeneità delle annualità riferite allo stesso momento, la somma aritmetica.
Con un procedimento matematico, che è superfluo ripetere, si arriva in definitiva alla *formula generale dell'accumulazione iniziale di annualità costanti, posticipate, limitate.*
Indicando la somma iniziale col simbolo A_0, si ha:

$$A_0 = a\,\frac{q^n - 1}{r\,q^n}$$

Tale formula non è altro che quella finale riportata all'attualità col coefficiente di sconto composto $\frac{1}{q^n}$.

Infatti:

$$A_0 = A_n \frac{1}{q^n}$$

dove: $A_n = a \frac{q^n - 1}{r}$ (formula dell'accumulazione finale).

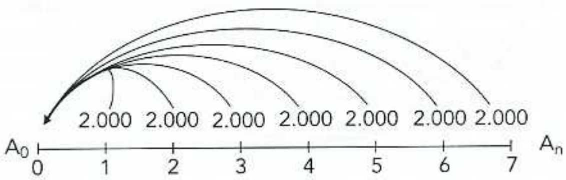
Si deve però notare che, se si ha a disposizione una serie di annualità costanti posticipate limitate, di cui si vuole conoscere la somma iniziale, non occorre trovare quella finale e quindi scontarla. Sarà sufficiente applicare la formula generale che fornisce direttamente l'accumulazione iniziale, risparmiando in tal guisa un'operazione.

Il coefficiente di accumulazione iniziale di annualità costanti, posticipate e limitate $\frac{q^n - 1}{r\,q^n}$ si trova direttamente nelle tavole finanziarie.

In definitiva, ogni qualvolta si voglia conoscere all'anno zero la somma di più valori annui *costanti e posticipati* verificantisi per un determinato numero di anni, basterà moltiplicare l'annualità data per il relativo coefficiente sopra esposto.

Esercizio n. 22 - *Si prenda in considerazione l'esercizio n. 20, applicato trattando del problema dell'accumulazione finale, e si supponga che i sette redditi annui siano, invece, subito esigibili cioè all'anno zero, e che il primo si verifichi fra un anno.*

Graficamente:



Numericamente:

$$A_0 = a \frac{q^n - 1}{r\,q^n}$$

$$A_0 = 2.000 \frac{1{,}08^7 - 1}{0{,}08 \cdot 1{,}08^7}$$

$$A_0 = 2.000 \cdot 5{,}2063$$

$$A_0 = € \; 10.412 \text{ (credito totale ritraibile subito)}$$

Lo stesso risultato si sarebbe ottenuto scontando all'attualità la somma finale di 17.845 euro ottenuta nell'esempio citato, quale credito totale riferito all'anno 7°. Infatti:

$$A_0 = A_n \frac{1}{q^n}$$

$$A_0 = 17.845 \frac{1}{1{,}08^7}$$

$$A_0 = 17.845 \cdot 0{,}5834 = € \; 10.411$$

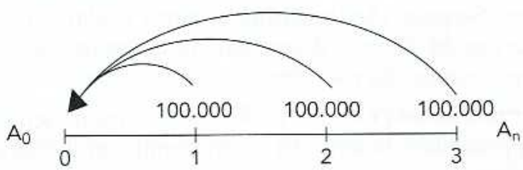
La lieve differenza nel risultato è data dalle approssimazioni dei coefficienti finanziari.

Esercizio n. 23 - *Un agricoltore, in seguito all'acquisto di una particolare macchina agricola, risulta debitore verso la Ditta fornitrice per tre anni consecutivi di una somma annua di 100.000 euro pagabile alla fine di ogni anno a partire da oggi. Se l'agricoltore volesse liberarsi subito dal suo debito versando un unico importo, quanto dovrebbe pagare? Sia il saggio di sconto il 9,5%.*

Evidentemente, le tre rate di 100.000 euro ciascuna, prima di poterle addizionare, dovranno essere riferite, perché diventino valori omogenei, allo stesso momento e, nel nostro caso, all'attualità e cioè all'anno zero. Il relativo spostamento nel tempo, e cioè dal momento in cui ogni singola rata si verificherà ad oggi, sarà fatto mediante il noto coefficiente di anticipazione a sconto composto $\frac{1}{q^n}$.

Dato però che le tre rate annue sono **costanti e posticipate**, sarà molto più semplice applicare la formula che dà direttamente la somma iniziale di una serie di annualità costanti e posticipate. Risolvendo:

Graficamente:



Numericamente:

$$A_0 = a \frac{q^n - 1}{r\,q^n}$$

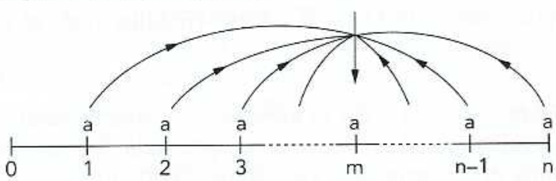
$$A_0 = 100.000 \frac{1{,}095^3 - 1}{0{,}095 \cdot 1{,}095^3}$$

$$A_0 = 100.000 \cdot 2{,}5089$$

$$A_0 = € \; 250.890 \text{ (debito totale pagabile subito)}$$

c) Accumulazione intermedia: si ottiene riferendo le annualità ad un anno intermedio *m* del periodo.

Rappresentazione grafica:



L'accumulazione intermedia pertanto consente di eseguire la somma di una serie di annualità in un anno

intermedio di un dato periodo e cioè all'anno m; il simbolo m sta ad indicare il numero degli anni che intercorrono dall'anno zero all'anno intermedio del periodo considerato.
Per risolvere tale problema si può partire tanto dalla formula della somma iniziale come da quella finale; si tratterà solo di spostarle rispettivamente nel tempo con i già noti quanto importanti coefficienti del montante e del valore scontato. Così, indicando l'accumulazione intermedia col simbolo A_m, si ha:

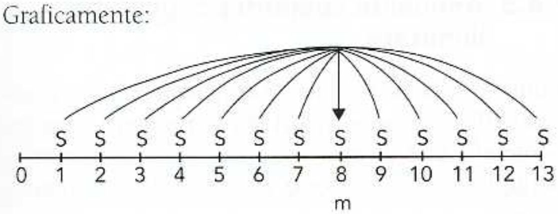
$$A_m = A_0\, q^m$$

oppure:

$$A_m = A_n \frac{1}{q^{n-m}}$$

Esercizio n. 24 - *Per eseguire un determinato lavoro, la cui durata è di 13 anni, si spendono mediamente ogni anno posticipatamente 1.000 euro. Si vuol conoscere la somma totale di tali spese alla fine dell'ottavo anno. Sia r = 0,05.*

Graficamente:



dove S = spesa annua di € 1.000.
Numericamente:

$$A_m = A_0\, q^m$$

$$A_m = a \frac{q^n - 1}{r\, q^n}\, q^m$$

$$A_8 = 1.000 \frac{1{,}05^{13} - 1}{0{,}05 \cdot 1{,}05^{13}}\, 1{,}05^8$$

$$A_8 = 1.000 \cdot 9{,}3936 \cdot 1{,}4775$$

$$A_8 = 9.393 \cdot 1{,}4775 = € \; 13.878$$

Oppure:

$$A_m = A_n \frac{1}{q^{n-m}}$$

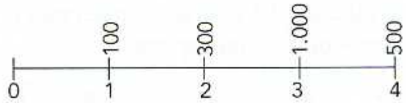
$$A_m = a \frac{q^n - 1}{r} \frac{1}{q^{n-m}}$$

$$A_8 = 1.000 \frac{1{,}05^{13} - 1}{0{,}05} \frac{1}{1{,}05^{13-8}}$$

$$A_8 = 1.000 \cdot 17{,}7130 \frac{1}{1{,}05^5}$$

$$A_8 = 17.713 \cdot 0{,}7835 = € \; 13.878$$

d) Annualità variabili posticipate limitate: se le annualità sono posticipate e limitate, ma non costanti, e cioè quando **le annualità sono variabili**, si procede come nel seguente esempio:



Per riportare le quattro annualità variabili alla fine del periodo e cioè, in questo caso alla fine del 4° anno, si seguirà il noto procedimento del riporto dei capitali nel tempo. Fatto $q = 1 + r$

$$A_4 = 500 + 1.000\, q + 300\, q^2 + 100\, q^3$$

Per ottenere l'accumulazione iniziale, e cioè all'anno zero, si procederà nel seguente modo, non conoscendo l'accumulazione finale A_4

$$A_0 = 500 \frac{1}{q^4} + 1.000 \frac{1}{q^3} + 300 \frac{1}{q^2} + 100 \frac{1}{q}$$

Conoscendo, invece, l'accumulazione finale, basterà scontare tale somma all'anno zero, e cioè di quattro anni, supposto però di adottare lo stesso saggio:

$$A_0 = A_4 \frac{1}{q^4}$$

Se si volessero accumulare le quattro annualità variabili ad un anno intermedio del periodo, ad esempio alla fine del 3° anno, si avrà:

$$A_3 = 500 \frac{1}{q} + 1.000 + 300\, q + 100\, q^2$$

Qualora si avesse già a disposizione l'A_4 o l'A_0, per ottenere l'A_3 si dovrà semplicemente eseguire una delle due seguenti operazioni:

$$A_3 = A_4 \frac{1}{q}$$

oppure:

$$A_3 = A_0\, q^3$$

Le annualità possono essere *variabili* secondo:

a) *una legge matematica*: quando la serie delle annualità varia in base ad una progressione aritmetica crescente o decrescente;
b) *una legge economica*: quando le annualità variano di poco tra l'una e l'altra (ad esempio le quote di manutenzione dei fabbricati o di un fondo, i prezzi unitari di alcuni prodotti in periodi normali);
c) *una legge naturale*: come nel caso del prodotto unitario del suolo o di un frutteto, ecc.;
d) *senza alcuna legge*: in quanto i valori sono saltuari.

7.4.2 Annualità costanti anticipate limitate

Queste annualità differiscono dalle posticipate solo perché si verificano al principio anziché alla fine di ognuno degli anni del periodo considerato e graficamente si possono così rappresentare:

Per trovare le solite tre somme o accumulazioni (A_n, A_0, A_m) non vi è che da applicare il procedimento analitico già noto, e cioè basta riportare, una ad una, le singole annualità all'anno n per avere A_n, all'anno zero per avere A_0, all'anno m per avere A_m.
Osservando il grafico si rileva che le annualità anticipate si verificano un anno prima di quelle posticipate. Basterà quindi posticipare di un anno l'annualità mediante il coefficiente di posticipazione annua q e quindi applicare gli stessi coefficienti di accumulazione relativi alle annualità costanti *posticipate* e limitate. Pertanto si avrà:

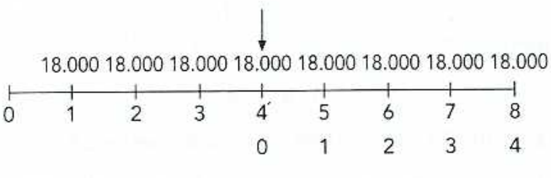
$$A_n = (a\ q)\ \frac{q^n - 1}{r}$$

$$A_0 = (a\ q)\ \frac{q^n - 1}{r\ q^n}$$

$$A_m = A_0\ q^m = A_n\ \frac{1}{q^{n-m}}$$

ESERCIZIO N. 25 - *Un agricoltore ha acquistato una grossa trattrice convenendo di pagarla in 8 rate annuali e posticipate di 18.000 euro ciascuna. Dopo aver pagato la terza rata, e in occasione della scadenza della quarta, si ripromette di liquidare completamente il debito. Quanto dovrà sborsare l'agricoltore, adottando il saggio di sconto del 6%?*

Per fissare meglio le idee si fa seguire l'abituale grafico:



Essendo già state pagate tre rate, alla fine del quarto anno l'agricoltore dovrà pagare la quarta rata più la somma iniziale delle rimanenti quattro che, nei confronti del momento in cui avviene l'operazione, sono posticipate.

Pertanto:

$$A_0 = a + a\ \frac{q^n - 1}{r\ q^n} \quad \text{dove } n = 4$$

$$A_0 = 18.000 + 18.000\ \frac{1{,}06^4 - 1}{0{,}06 \cdot 1{,}06^4}$$

$A_0 = 18.000 + 18.000 \cdot 3{,}4651$

$A_0 = 18.000 + 62.372 =$ € 80.372 (somma da liquidare al quarto anno)

Lo stesso risultato si sarebbe ottenuto usando direttamente la formula dell'accumulazione iniziale di annualità costanti, *anticipate*, limitate. Infatti:

$$A_0 = a\ \frac{q^n - 1}{r\ q^n}\ q \quad \text{dove } n = 5$$

$$A_0 = 18.000\ \frac{q^5 - 1}{rq^5}\ q$$

$$A_0 = 18.000 \cdot 4{,}2124 \cdot 1{,}06 = € \ 80.373$$

La lieve differenza del risultato è dovuta alle approssimazioni dei coefficienti finanziari.

7.4.3 Annualità costanti posticipate illimitate

A differenza delle limitate, le annualità costanti posticipate illimitate sono valori che si ripetono costantemente alla fine di ogni anno per un tempo infinitamente lungo e si possono graficamente così rappresentare:

Dei tre problemi esaminati con le annualità limitate, in questo caso si presenta di fondamentale importanza soltanto il problema dell'accumulazione iniziale A_0 in quanto l'accumulazione finale non è determinabile perché infinitamente grande, e l'accumulazione intermedia A_m, seppur matematicamente concepibile, in pratica non è altro che il montante composto di un capitale C_0 all'anno m.
L'*accumulazione iniziale* si ottiene applicando il procedimento analitico già noto e cioè portando una ad una le singole annualità all'anno zero con il coefficiente di anticipazione a sconto composto $\frac{1}{q^n}$. Osservando attentamente il grafico, infatti, e cominciando dalla annualità posta all'infinito, si avrà:

$$A_0 = a\ \frac{1}{q^\infty} + \ldots + a\ \frac{1}{q^3} + a\ \frac{1}{q^2} + a\ \frac{1}{q}$$

e raccogliendo l'annualità a fattor comune si avrà:

$$A_0 = a\left(\frac{1}{q^\infty} + \ldots + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q}\right)$$

Poiché i termini tra parentesi costituiscono una progressione geometrica crescente di ragione q, e dato che tale progressione è trasformabile in una frazione che ha per numeratore l'ultimo termine moltiplicato per la ragione meno il primo, e per denominatore la ragione meno l' unità, si avrà:

$$A_0 = a \frac{\frac{1}{q} q - \frac{1}{q^\infty}}{q - 1}$$

Svolgendo:

$$A_0 = a \frac{1 - 0}{q - 1}$$

Sostituendo a q posto al denominatore il suo valore, si ha:

$$A_0 = a \frac{1}{1 + r - 1}$$

Semplificando, infine, al denominatore le due unità di valore uguale e di segno contrario si avrà in definitiva la formula che dà ***la somma iniziale di infinite annualità costanti e posticipate:***

$$A_0 = \frac{a}{r}$$

Tale formula si può anche ricavare da quella che fornisce l'accumulazione iniziale di annualità costanti, posticipate e limitate, facendo n uguale a infinito, o meglio tendente all'infinito. Infatti:

$$A_0 = a \frac{q^n - 1}{r\, q^n}$$

e sostituendo:

$$A_0 = a \frac{q^\infty - 1}{r\, q^\infty}$$

Essendo, al numeratore, n tendente all'infinito, si avrà che $(q^\infty - 1)$ rimane praticamente uguale a q^∞.
Pertanto:

$$A_0 = \frac{a\, q^\infty}{r\, q^\infty}$$

e semplificando si otterrà in definitiva:

$$A_0 = \frac{a}{r}$$

La formula $A_0 = \frac{a}{r}$ richiama la formula $C_0 = \frac{I}{r}$ che si ricava da quella dell'interesse semplice annuo:

$$I = C_0\, r$$

Le due formule sono sostanzialmente uguali e si dicono formule di capitalizzazione dei redditi annui, costanti, posticipati, illimitati.

La formula è denominata di capitalizzazione perché ogni qualvolta si divide il reddito netto, perpetuo, annuo costante e posticipato di un capitale per il suo saggio di interesse, si ottiene il valore del capitale capace di generare tale reddito.
Così il reddito annuo di cinque euro di un capitale diviso per il suo saggio di interesse ($r = 0{,}05$), riproduce il capitale di cento euro capace di fruttare cinque euro all'anno. Infatti:

$$100 = \frac{5}{0{,}05}$$

da cui:

$$5 = 100 \cdot 0{,}05$$

Ciò dimostra che l'interesse di cinque euro annui deve essere costante perché possa riprodurre il capitale di cento euro; diversamente variando l'interesse annuo, e fisso restando il saggio, varierà anche il capitale.
Altrettanto dicasi per determinare il valore di un fondo rustico, di un fabbricato o di un altro immobile qualsiasi capace di fornire un reddito netto medio annuo costante tendente all'infinito, per ottenere il relativo valore capitale basterà dividere tale reddito per un opportuno saggio di interesse. Così, ad esempio, suppongasi che un fondo rustico dia un reddito annuo netto – chiamato più propriamente beneficio fondiario (*Bf*), che rappresenta l'interesse annuo del capitale fondiario spettante come compenso al proprietario del fondo – di 10.000 euro, e stabilito $r = 0{,}02$, si determini il valore del fondo.

$$V_0 = \frac{Bf}{r} = \frac{10.000}{0{,}02} = 500.000 \text{ euro}$$

Da ciò risulta evidente che l'accumulazione iniziale di redditi, tendenzialmente infiniti, di un immobile corrisponde al suo valore capitale. Si avrà quindi:

$$A_0 = \frac{a}{r} = V_0$$

Naturalmente il reddito annuo dovrà essere costante e nell'ipotesi che si verifichi all'infinito o, come si è visto, per un tempo superiore agli 80 anni. Da ciò si deduce la regola generale: "***Per ottenere un capitale o il valore di un immobile, basta dividere il suo reddito annuo netto costante*** (oppure l'interesse annuo costante) ***per un adeguato saggio d'interesse, denominato in questi casi più precisamente saggio di capitalizzazione***".
Nel caso di un immobile produttivo, il "*saggio di capitalizzazione*" dovrebbe corrispondere al "***saggio medio annuo di rendimento***" per ogni 100 euro di valore capitale dell'immobile stesso.
La semplicità di detta formula di capitalizzazione non sminuisce l'importanza che le si deve attribuire nei

calcoli finanziari e nelle applicazioni estimative. Torna opportuno, infatti, mettere subito in rilievo che il valore di uno stabile o di un immobile, capace di fornire un reddito medio annuo costante, è direttamente proporzionale al reddito e inversamente al saggio di capitalizzazione.
In altre parole, il valore di un immobile aumenta con l'aumentare del suo reddito e col diminuire del saggio. Perciò lievi variazioni di saggio comportano sensibili ripercussioni sull'entità del valore capitale corrispondente.
Così fra due beni immobili simili, capaci di produrre lo stesso reddito annuo, avrà più valore quello che presenta maggiori comodità e dà maggiori garanzie di sicurezza e di durata, in quanto proprio queste prerogative incidono sostanzialmente sul saggio di capitalizzazione, abbassandolo. ***Inoltre bisogna tener presente che il reddito annuo posticipato da capitalizzare deve essere sempre medio, continuativo e depurato di tutte le spese afferenti al puro proprietario dell'immobile.***
In definitiva, quindi, l'accumulazione iniziale di infinite annualità costanti e posticipate si ottiene con la nota formula:

$$A_0 = \frac{a}{r}$$

Qualora queste infinite annualità siano redditi medi annui netti e costanti, maturati da un immobile, l'accumulazione iniziale di tali redditi corrisponde al valore dell'immobile stesso capace di fornire proprio quei redditi.

Si rileva, a proposito della formula $A_0 = \frac{a}{r}$, che dividere un valore *a* per il saggio unitario *r* equivale a moltiplicare quel valore annuo per il rapporto:

$$\frac{100}{\textit{saggio percentuale}}$$

Se, ad esempio, il saggio unitario *r* è uguale al 5%, avremo:

$$A_0 = \frac{a}{r} = \frac{a}{0{,}05} = a\,\frac{100}{5} = a \cdot 20$$

Così, se il saggio invece è del 2%, la somma iniziale di infinite annualità costanti si ottiene moltiplicando l'annualità per 50 volte. E se il saggio è del 4% si moltiplica l'annualità per 25 volte.

Naturalmente, se l'immobile (es.: una cava o una miniera) è capace di fornire un reddito annuo costante *non illimitato* e cioè per *n* anni, o comunque per un periodo inferiore agli 80 anni, il corrispondente valore si otterrà ugualmente accumulando all'attualità i relativi redditi annui limitati con l'espressione:

$$V_0 = a\,\frac{q^n - 1}{r\,q^n} = A_0$$

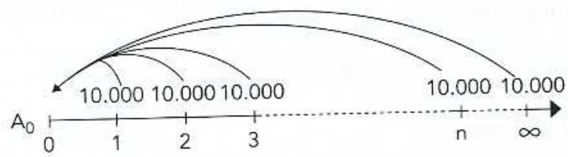
Si può dire quindi, secondo un principio generale, che il *valore di un immobile capace di fornire un reddito*, comunque sia, *è dato dalla somma dei suoi redditi futuri scontati all'attualità*.

N.B. Si rileva peraltro che *la determinazione del "valore di mercato" di un immobile mediante la capitalizzazione dei suoi redditi* rimane in pratica alquanto approssimativa e, talora, anche di difficile applicazione, specie nella scelta del saggio di capitalizzazione.
Ciò non vuol dire che, in sede operativa non si possa fare, in quanto esistono delle eccezioni, dei casi di assoluta necessità per l'inesistenza del mercato (v. immobili industriali, cave, ecc.), o per convenienza professionale, o per soddisfare la richiesta del committente, o *semplicemente* per conoscere il più probabile valore di un immobile sulla base dei suoi redditi futuri supposti mediamente costanti nel tempo e a un determinato saggio.

ESERCIZIO N. 26 - *Per ipotesi Tizio sia debitore verso Caio di una somma annua di 10.000 euro da pagarsi per sempre alla fine di ogni anno. Tizio vuol saldare oggi il suo debito con un'unica somma. Sia il saggio di sconto il 5%.*

Il debito totale riferito all'attualità sarà pari alla capitalizzazione del debito annuo e questa coinciderà, evidentemente, con l'accumulazione iniziale dei debiti annui costanti ed infiniti.

Graficamente:



Numericamente:

$$A_0 = \frac{a}{r}$$

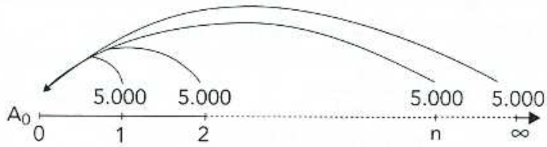
$$A_0 = \frac{10.000}{0{,}05}$$

$A_0 = 10.000 \cdot 20 = 200.000$ (debito totale all'attualità in euro)

ESERCIZIO N. 27 - *Un Ente pubblico in seguito ad una occupazione temporanea di un fondo privato, a scopo di pubblica utilità, arreca al fondo stesso un danno permanente annuo per mancato reddito di 5.000 euro. Sia il saggio d'interesse il 4%. Determinare l'indennizzo spettante al proprietario.*

Supposto che il primo mancato reddito si verifichi tra un anno e che la stima del danno sia riferita al tempo di finita occupazione, l'indennizzo corrispondente sarà uguale alla somma iniziale di tali infiniti danni annui posticipati e costanti.

Graficamente:



Numericamente:

$$\text{Indennizzo} = \frac{a}{r}$$

$$Ind = \frac{5.000}{0{,}04} = 5.000 \cdot 25 = € \; 125.000$$

(totale risarcimento danni)

Esercizio n. 28 - *Il proprietario di un fabbricato locato percepisce annualmente in media dall'inquilino un canone annuo complessivo posticipato di 5.000 euro. Le spese medie annue complessive posticipate, sostenute dal proprietario dello stabile, ammontano a 1.600 euro. Quale sarà il valore del fabbricato supponendo continua la durata della locazione e il saggio di capitalizzazione del 2%?*

Il valore dell'immobile corrisponderà, evidentemente, alla somma iniziale degli infiniti redditi medi netti percepibili dal proprietario alla fine di ogni anno. Reddito annuo (R) = 5.000 – 1.600 = 3.400 euro.

$$V_0 = \frac{R}{r}$$

$$V_0 = \frac{3.400}{0{,}02} = 170.000 \text{ euro (valore fabbricato)}$$

Esercizio n. 29 - *Un fondo fornisce mediamente una produzione annua lorda vendibile di 80.000 euro; le relative spese medie annue a carico del proprietario ammontano complessivamente a 66.000 euro. Si determini il valore del fondo. Sia $r = 0{,}03$.*

Il reddito annuo capitalizzabile posticipato di un immobile si trova per detrazione delle spese annue dal reddito lordo annuo; occorre però che ambedue i termini (reddito lordo annuo e costo) siano riferiti allo stesso momento e praticamente alla fine dell'anno agrario o commerciale, o finanziario, a seconda del tipo di impresa.

In definitiva, la determinazione del valore di un immobile con la formula di capitalizzazione dei redditi annui costanti posticipati, **si deve fare solo basandosi sul reddito al netto di tutte le spese dirette e indirette, e cioè sostenute o sostenibili dal puro proprietario, per produrre tale reddito medio annuo continuativo**.

Nel nostro caso, quindi, il valore del fondo sarà uguale alla somma iniziale degli infiniti benefici fondiari (Bf) percepibili annualmente dal proprietario.

B_f = 80.000 – 66.000 = 24.000 euro

$$V_0 = \frac{Bf}{r} = \frac{24.000}{0{,}03} = 800.000 \text{ (valore del fondo in euro)}$$

Esercizio n. 30 - *Il valore di un fabbricato civile sia di 400.000 euro. A quanto ammonta il relativo reddito medio annuo (R), e cioè il compenso ritraibile dal proprietario, supposto un saggio di capitalizzazione del 3%?*

Conoscendo il valore di un immobile qualsiasi, si può facilmente ricavare il relativo reddito annuo netto, utilizzando la formula di capitalizzazione dei redditi annui costanti:

$$V_0 = \frac{a}{r}$$

da cui, infatti, si ricava l'annualità corrispondente al reddito annuo:

$$a = V_0 \, r = R$$

E per analogia di concetti si ritorna, in conclusione, a parlare dell'interesse semplice che un capitale può maturare in un anno, e la cui determinazione si fa con la formula: $I = C_0 \, r$.

Essendo noto il capitale, la difficoltà maggiore, quindi, consiste nel fissare il saggio d'interesse che dovrà essere, nel caso particolare degli immobili, l'appropriato saggio di rendimento che si determinerà basandosi su altri simili investimenti che presentino per analogia le stesse caratteristiche di durata e di sicurezza di impiego. Supponendo, nel nostro caso, un saggio di rendimento del 3%, il reddito annuo medio del fabbricato sarà:

$$R = V_0 \, r = 400.000 \cdot 0{,}03 = €12.000$$

7.4.4 Annualità costanti anticipate illimitate

A differenza delle posticipate illimitate, queste annualità si verificano all'inizio di ogni anno, e perciò la somma iniziale A_0 sarà data dalla formula delle annualità posticipate illimitate, prolungate di un anno e cioè moltiplicate per il coefficiente q. Così si avrà:

$$A_0 = \frac{a}{r} q$$

L'accumulazione iniziale di infinite annualità costanti e *anticipate* corrisponde al valore capitale di un immobile capace di dare un reddito netto che continua all'infinito e che si realizza all'inizio di ogni anno. Quindi:

$$A_0 = \frac{a}{r} q = V_0$$

Tale formula di capitalizzazione trova scarsa applica-

zione nella pratica estimativa, per la ragione che il reddito netto annuo capitalizzabile fornito da un immobile si può solamente concepire alla fine di una gestione annua, quando cioè si conoscono, secondo il principio dell'ordinarietà, sia i ricavi che le spese sostenute per la produzione, e con riferimento al puro proprietario.
In definitiva si può affermare che la vera formula di capitalizzazione dei redditi annui di un bene immobile è la seguente:

$$A_0 = \frac{a}{r} = V_0$$

in cui a sia il reddito medio, annuo, posticipato e continuativo.

7.4.5 Ricerca dell'annualità (Problemi inversi)

Da tutte le formule finora esposte, e cioè dalle somme di annualità anticipate o posticipate e limitate o illimitate, si può evidentemente ricavare la relativa annualità come dimostra il seguente specchietto:

$$A_n = a\,\frac{q^n - 1}{r} \quad \rightarrow a = A_n\,\frac{r}{q^n - 1}$$

$$A_0 = a\,\frac{q^n - 1}{r\,q^n} \quad \rightarrow a = A_0\,\frac{r\,q^n}{q^n - 1}$$

$$A_0 = \frac{a}{r} \quad \rightarrow a = A_0 r$$

$$A_n = a\,\frac{q^n - 1}{r}\,q \quad \rightarrow a = A_n\,\frac{r}{q^n - 1}\cdot\frac{1}{q}$$

$$A_0 = a\,\frac{q^n - 1}{r\,q^n}\,q \quad \rightarrow a = A_0\,\frac{r\,q^n}{q^n - 1}\cdot\frac{1}{q}$$

$$A_0 = \frac{a}{r}\,q \quad \rightarrow a = A_0\,r\,\frac{1}{q}$$

Si può sin d'ora rilevare che il ricavo dell'annualità dalle singole formule di accumulazione iniziale, finale e intermedia tanto di annualità limitate che illimitate, non è altro che un problema che rientra in quello della ricerca dell'annualità media annua tenendo conto del tempo e di conseguenza degli interessi.

Esercizio n. 31 - *La somma di tutte le spese calcolate alla fine del periodo economico di un vigneto sia di 380.000 euro. Supposto il periodo uguale a 32 anni ed il saggio d'interesse del 5%, si determini la spesa media annua.*

La relativa rappresentazione grafica potrebbe essere la seguente:

La spesa media annua viene desunta dalla formula dell'accumulazione finale di un determinato numero di annualità costanti posticipate, per cui:

$$a = A_n\,\frac{r}{q^n - 1}$$

$$a = 380.000\,\frac{0{,}05}{1{,}05^{32} - 1} =$$

$$= 380.000 \cdot 0{,}0133 =$$

$$= 5.054 \text{ (spesa media annua in euro)}$$

Il coefficiente $\frac{r}{q^n - 1}$ si trova direttamente nelle tavole finanziarie.
Se, a titolo di controllo, vogliamo risolvere il problema inverso, i dati devono coincidere. Supposto, infatti, di conoscere la spesa media annua di un vigneto della durata di 32 anni pari a 5.054 euro, la spesa complessiva dell'arboreto, alla fine del periodo, al saggio del 5%, sarà:

$$A_n = a\,\frac{q^n - 1}{r}$$

$$A_{32} = 5.054\,\frac{1{,}05^{32} - 1}{0{,}05}$$

$$A_{32} = 5.054 \cdot 75{,}2988$$

$$A_{32} = 380.000 \text{ (spesa totale a fine periodo in euro)}$$

Esercizio n. 32 - *Il valore di un immobile industriale a reddito annuo è di 1.000.000 di euro. Si vuole conoscere il reddito medio annuo. Sia $r = 0{,}05$.*

Naturalmente la relativa annualità si ricaverà dalla formula generale di capitalizzazione dei redditi annui e cioè da $V_0 = \frac{a}{r}$; per cui $a = V_0 \cdot r$.

Infatti il reddito annuo medio corrisponderà a:

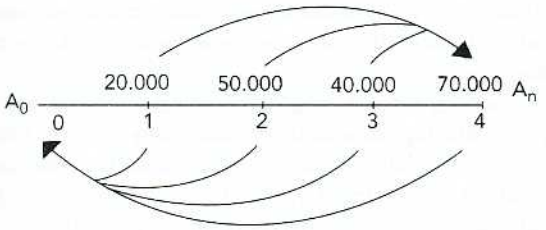
$$R = 1.000.000 \cdot 0{,}05 = 50.000 \text{ euro}$$

Esercizio n. 33 - *Un industriale per l'esecuzione di un particolare miglioramento immobiliare ha sostenuto ogni anno posticipatamente e per quattro anni consecutivi le seguenti spese:*

1° anno .... € 20.000
2° anno .... € 50.000
3° anno .... € 40.000
4° anno .... € 70.000

Determinare la spesa media annua. Sia $r = 0{,}06$.

Graficamente il problema si può così rappresentare:



Innanzi tutto si dovranno accumulare le singole spese annue alla stessa epoca e cioè all'inizio o alla fine del periodo considerato. Dalla spesa totale così ottenuta si potrà ricavare l'annualità media.
Supposto ora di riferire l'accumulazione delle spese alla fine del periodo, risolvendo si avrà:

$$A_n = 20.000 \cdot 1{,}06^3 + 50.000 \cdot 1{,}06^2 + 40.000 \cdot 1{,}06 + 70.000$$

$$A_n = 20.000 \cdot 1{,}1910 + 50.000 \cdot 1{,}1236 + 40.000 \cdot 1{,}06 + 70.000$$

$$A_n = 23.820 + 56.180 + 42.400 + 70.000$$

$$A_4 = 192.400 \text{ euro}$$

L'annualità si ricava dalla formula: $A_n = a\,\dfrac{q^n - 1}{r}$; per cui:

$$a = A_n\,\frac{r}{q^n - 1}$$

$$a = 192.400\,\frac{0{,}06}{1{,}06^4 - 1}$$

$$a = 192.400 \cdot 0{,}2286$$

$$a = 43.982 \text{ (spesa media annua in euro)}$$

Se poi si volesse calcolare l'annualità media dall'accumulazione delle spese riferite all'inizio del periodo si otterrebbe lo stesso risultato. Infatti:

$$A_0 = 20.000\,\frac{1}{1{,}06} + 50.000\,\frac{1}{1{,}06^2} + 40.000\,\frac{1}{1{,}06^3} + 70.000\,\frac{1}{1{,}06^4}$$

$$A_0 = 20.000 \cdot 0{,}9434 + 50.000 \cdot 0{,}89 + 40.000 \cdot 0{,}8396 + 70.000 \cdot 0{,}7921$$

$$A_0 = 18.868 + 44.500 + 33.584 + 55.447$$

$$A_0 = 152.399 \text{ euro}$$

L'annualità si ricava dalla formula: $A_0 = a\,\dfrac{q^n - 1}{r\,q^n}$; per cui:

$$a = A_0\,\frac{r\,q^n}{q^n - 1}$$

$$a = 152.399\,\frac{0{,}06 \cdot 1{,}06^4}{1{,}06^4 - 1}$$

$$a = 152.399 \cdot 0{,}2886$$

$$a = 43.982 \text{ (spesa media annua in euro)}$$

7.5 Quota di reintegrazione e di deprezzamento dei capitali

Per quota di reintegrazione (*Q/re*) si intende, in genere, **la somma di denaro che deve essere annualmente accantonata per rinnovare o formare un capitale in un determinato numero di anni ad un dato saggio e per un particolare scopo**.
La quota di reintegrazione o formazione di un capitale in n anni, si determina applicando direttamente la formula:

$$a = A_n\,\frac{r}{q^n - 1} = Q/re$$

dove: a è l'annualità, e cioè la somma annua da accantonare e A_n è il capitale che si vuol costituire in n anni.
Tale formula, infatti, si ricava da quella che fornisce la somma finale di una serie di annualità costanti e posticipate:

$$A_n = a\,\frac{q^n - 1}{r}$$

Logicamente per poter ricavare l'annualità a, devono essere noti gli altri dati, e cioè la somma finale A_n o somma da accantonare, il saggio d'interesse r ed il tempo espresso in n anni. **Reintegrare un capitale, quindi, significa costituire, rinnovare o formare un capitale in un determinato periodo di tempo**.
Così, in definitiva, quando si voglia conoscere la quota annua a, che si deve accantonare in n anni per formare o rinnovare un determinato capitale A_n, basterà moltiplicare l'ammontare del capitale, che si vuol costituire, per il fattore $\dfrac{r}{q^n - 1}$ che si trova nelle tavole finanziarie già calcolato. E ciò, naturalmente, va inteso a parità di condizioni e prescindendo dal mutevole potere di acquisto della moneta.
Si usa spesso dire: "ammortamento fabbricati", "ammortamento macchine e attrezzi", "ammortamento bestiame" intendendo ciò che più propriamente viene indicato come "*deprezzamento*" dei capitali.
Il vero significato della parola "ammortamento" sarà precisato più innanzi.
La quota di ammortamento del bestiame viene usualmente denominata "quota di rimonta".
***La quota di deprezzamento di uno di detti capitali, in altre parole, è il prezzo medio di svalutazione che il capitale viene a subire annualmente per uso, consumo e progresso tecnico*.**

Va ancora opportunamente rilevato che, in qualsiasi investimento mobiliare o immobiliare, si deve avere riguardo solo alla sua *durata economica* e non a quella *tecnica*, per il fatto che un capitale (macchina, impianto, fabbricato, ecc.) si usa solo finché esso risulta conveniente, a prescindere dalla sua ulteriore utilizzazione per efficienza fisica, meccanica o fisiologica.

In conclusione, la formula per ricercare la quota di deprezzamento di uno dei suddetti capitali, impropriamente detta quota di ammortamento, **è in pratica molto semplice**:

$$Q/dep = \frac{Vi - Vf}{n}$$

in cui:

Q/dep = quota di deprezzamento medio annuo del capitale;
Vi = valore iniziale del capitale (*a prezzi correnti*);
Vf = valore finale del capitale (*a prezzi correnti*);
n = durata economica del capitale espressa in anni.

Tale quota equivale così a una percentuale costante sul valore o costo iniziale del capitale, prescindendo quindi dall'età e dallo stato di conservazione del capitale stesso.

In altri termini, detta quota di deprezzamento, determinata in modo lineare o graduale, **corrisponde alla quota parte del valore iniziale del capitale** – diminuito del suo eventuale valore finale – **che in media ogni anno si distrugge nel processo produttivo e come tale va inserita nella voce quote (Q) del costo di produzione**.

Si sa che nella realtà il deprezzamento di un capitale, quale una macchina, è annualmente decrescente o comunque variabile, ma nelle applicazioni contabili ed estimative – proprio per non alterare il risultato economico annuo dell'azienda – ***si deve attuare il succitato metodo del deprezzamento lineare o graduale, specie in un bilancio preventivo medio annuo***.

Comunque, per quanto riguarda il *deprezzamento medio annuo*, espresso in percentuale sul *valore a nuovo dell'intero parco macchine*, esso varia, da studi fatti in proposito, intorno all'8÷13%, a seconda della maggiore o minore eterogeneità della durata economica delle macchine e dell'incidenza del valore residuo finale rispetto a quello iniziale.

Di conseguenza, gli interessi passivi medi annui sulle macchine andranno calcolati, al saggio di interesse del 3÷5%, su un capitale che si ritiene normalmente presente nell'azienda nel tempo. In base a indagini dirette, questo capitale – con un dato valore finale delle singole macchine – varia intorno al 55-60% del *valore a nuovo complessivo delle macchine*, calcolato ben si intende coi prezzi correnti al momento della stima, e nel caso in cui le macchine, in linea di massima, abbiano una *vita economica* variabile fra i tre e i dodici anni.

D'altronde, *per ogni singola macchina* – sempre nell'ipotesi del deprezzamento lineare e con un certo valore residuo finale – *il capitale mediamente presente*, nell'ambito della relativa prevista durata economica, va calcolato con la seguente espressione generale:

$$\frac{Vi + Vf}{2}$$

Una volta noto il capitale mediamente presente di ciascuna macchina, si può conoscere il capitale mediamente presente di tutte le macchine del complesso aziendale, facendone la somma aritmetica. E nell'ipotesi che le macchine abbiano una durata economica variabile tra i tre e i dodici anni, il capitale mediamente presente varierà, come già detto, intorno al 55-60% del valore complessivo delle macchine. ***Solo nel caso in cui il valore residuo finale di tutte le macchine sia uguale a zero, o supposto nullo, il capitale mediamente presente sarà, come è ovvio, pari al 50% del valore a nuovo del parco macchine, prescindendo dalla vita economica delle singole macchine***.

Pertanto il capitale mediamente presente di una macchina, rispetto al valore iniziale, diminuirà col diminuire del valore residuo finale, fino ad essere – come già rilevato – pari alla metà del valore iniziale qualora il valore residuo finale sia considerato nullo. Ciò dimostra che, in ogni caso, il calcolo degli interessi sulle macchine, in un bilancio aziendale, è interdipendente con le relative quote di deprezzamento.

Prova ne sia che, se per esempio una macchina avesse la *durata economica di un anno*, col valore residuo nullo, la quota di deprezzamento equivarrebbe esattamente al valore iniziale della macchina stessa, e quindi gli interessi relativi dovrebbero essere calcolati *su metà* del suddetto valore iniziale, in quanto ovviamente la macchina si distruggerebbe completamente, in modo pressoché uniforme giorno per giorno, nell'arco di un anno.

In definitiva, le *quote* sulle macchine e gli *interessi* relativi – *in un bilancio preventivo medio annuo* – non devono mai essere determinati né in base al valore di media vetustà reale delle macchine effettivamente presenti, né – e ciò sarebbe semplicemente inconcepibile – sul loro valore corrente al momento del rilievo aziendale.

Si rileva inoltre che non si ritiene concettualmente corretto calcolare il deprezzamento medio annuo di una macchina con la formula di reintegrazione dei capitali – ritenuta classica – per cui $Q/re = (Vi - Vf) \cdot r/q^n - 1$, e gli interessi medi annui sul valore iniziale a nuovo della macchina (Vi), *in quanto tale formula fornisce soltanto l'entità della somma che l'imprenditore,* *o un risparmiatore* – per qualsiasi scopo – *si propone di accantonare per costituire un capitale ad un dato saggio* r *in* n *anni, e non il reale deprezzamento medio annuo di una macchina, quale parte del costo effettivo di produzione*. Senza contare che in un bilancio aziendale, così operando, si avrebbe che:

1) al capitalista verrebbe ad essere attribuito un compenso annuo sulle macchine superiore a quello realmente spettantegli in quanto, in effetti, il valore delle macchine mediamente presente in azienda nel tempo è inferiore a quello iniziale (*Vi*);
2) il reddito netto dell'imprenditore concreto e il prodotto netto aziendale risulterebbero artificiosamente superiori al loro probabile valore effettivo, proprio in conseguenza della minore quota di deprezzamento calcolata con la classica formula di reintegrazione;
3) il rapporto tra i compensi delle varie figure economiche viene a risultare inevitabilmente sfasato, e pertanto non verosimile.

Comunque, ambedue le formule $\left[Q/dep = \frac{Vi - Vf}{n} \text{ o } Q/re = (Vi - Vf)\frac{r}{q^n - 1}\right]$, per il diverso scopo che perseguono, risultano in definitiva, a parità di condizioni, ugualmente valide e razionali, pur restando nella realtà approssimative ed empiriche. Basti pensare, in proposito, alla previsione della durata economica della macchina, alla determinazione del suo valore finale residuo e al continuo progresso tecnico, per rendersi conto dei limiti ognora presenti nella valutazione, in conseguenza della mutevole realtà di ambienti e situazioni. **L'importante è saper distinguere, quanto meno, quando si deve applicare una formula rispetto all'altra nel campo economico, estimativo, contabile e finanziario.**

In linea di massima, **solo in un caso** – ferme restando tutte le altre condizioni – il risultato finale di un bilancio aziendale non sarebbe molto difforme, con l'adozione dell'una o dell'altra formula, e precisamente nella determinazione del ***beneficio fondiario medio annuo***, afferente alla figura economica del proprietario di un fondo rustico.

In altri termini, a questo scopo, e prescindendo da ogni particolare considerazione, si ritiene pressoché indifferente calcolare la quota di deprezzamento (*Q*) e gli interessi sulle singole macchine (*I*) con una delle due seguenti procedure:

Prima procedura:

$$Q = \frac{Vi - Vf}{n} \qquad I = \frac{Vi + Vf}{2} \cdot r$$

Seconda procedura:

$$Q = (Vi - Vf)\frac{r}{q^n - 1} \qquad I = Vi \cdot r$$

Dove, ancora *Vi* è il più probabile valore a nuovo delle macchine al momento di stima o della rilevazione.

Nel presupposto che il valore residuo finale *Vf* sia nullo per tutte le macchine dell'azienda, gli interessi si calcoleranno ovviamente – con riferimento alla *prima procedura* – su metà del valore iniziale del parco macchine.

Così:

$$I = \frac{1}{2} Vi \cdot r$$

Ad evitare eventuali confusioni in argomento, si fa presente che, qualora una macchina dovesse essere valutata – durante il suo periodo di utilizzazione – per scopi che presuppongono il valore di mercato (compravendita, divisione, successione, ecc.), è ovvio che sarà il mercato stesso ad indicare il relativo più probabile valore realizzabile in una libera contrattazione, in base allo stato effettivo di conservazione in cui si trova la macchina al momento di stima.

Pertanto, per queste esigenze pratiche, o comunque per scopi non economico-contabili e finanziari, il valore di una macchina si calcolerà **soltanto** in base al mercato, prescindendo quindi tanto dalle quote determinate, o che si determinano, o che si dovrebbero determinare a fini economico-contabili (quota di deprezzamento per il costo di produzione) o a scopi finanziari (quota di accantonamento per la formazione di un capitale).

In conclusione ***nei bilanci economici preventivi medi annui***, le quote e gli interessi relativi alle macchine si dovrebbero determinare – riassumendo quanto finora esposto – seguendo le seguenti operazioni:

1) ***stabilire il numero e il tipo delle macchine che si ritengono normalmente necessarie all'azienda oggetto di studio***, in base alla sua ordinaria destinazione economica;
2) ***fissare il più probabile valore a nuovo di ciascuna macchina*** – se le macchine vengono abitualmente acquistate nuove – o comunque quello iniziale di acquisto, adottando, in ogni caso, i prezzi correnti più probabili del momento del rilievo aziendale;
3) ***determinare il più probabile deprezzamento medio annuo*** mediante una unica percentuale sul valore iniziale di acquisto delle macchine nel loro complesso o anche, talora, se necessario, con percentuali differenti per ogni singola macchina o per gruppi di macchine *sulla base della espressione generale*:

$$\frac{Vi - Vf}{n}$$

Tale deprezzamento medio annuo, comunque calcolato, dovrebbe necessariamente rappresentare la quota parte del valore iniziale di acquisto delle macchine mediamente distrutto in un ciclo produttivo, nell'ambito del periodo medio di utilizzazione di ciascuna macchina;

4) ***gli interessi passivi medi annui sulle macchine, di conseguenza, andranno calcolati, ad un adeguato saggio, su un capitale corrispondente al valore delle macchine che si ritiene normalmente e mediamente presente nell'azienda.***

Parte del capitale agrario è costituito dal bestiame e questo capitale deve essere reintegrato e cioè, con un termine più comune, va soggetto a rimonta.
Nelle stalle con un numero elevato di capi, il rinnovo del bestiame avviene normalmente con i nuovi nati, il cui numero è sufficiente a sostituire i capi di finita carriera. In altri casi, la rimonta avviene dall'esterno, con acquisto di capi da allevamento sul mercato.
Comunque, quando la rimonta si fa con acquisti sul mercato, si sostiene effettivamente una spesa che deve essere oggetto di calcolo per determinare la quota annua di ammortamento del capitale bestiame. La quota di rimonta, infatti, è data dalla differenza tra il valore medio annuo dei capi acquistati e quello dei capi da scarto, supponendo un periodo utile di sfruttamento di 5÷7 anni secondo la razza e le attitudini all'indirizzo produttivo.

Anche per gli arboreti e le piantagioni legnose in genere – come per le macchine e le altre scorte fisse – bisogna computare, tra le spese medie annue di un bilancio aziendale, una quota parte della spesa di impianto.
Premesso che gli impianti arborei costituiscono un investimento fondiario e che pertanto i relativi interessi vengono ad essere conglobati nel beneficio fondiario – *corrispondente al reddito derivante da una entità economica e produttiva inscindibile quale è il capitale fondiario, o assimilabile in altri termini all'interesse ritraibile dalla terra nuda con quanto in essa incorporato e immobilizzato* (fabbricati, 'piantagioni legnose, sistemazioni idraulico-agrarie, ecc.) –, tre sono i casi che, sostanzialmente, si possono presentare.

1) ***Arboreti coetanei***: trattandosi di impianti arborei costituiti da piante della stessa età, la quota annua di reintegrazione si determinerà – da un punto di vista teorico concettualmente corretto – in base alla classica formula, per cui:

$$Q/re = (Vi - Vf)\,\frac{r}{q^n - 1}$$

dove:

Vi = valore iniziale, o costo totale di impianto riferito al momento zero e cioè all'inizio del ciclo economico dell'arboreto; se, ad esempio, la fase di impianto, detta anche fase improduttiva, termina al terzo anno dall'inizio del ciclo, tutte le spese del triennio – esplicite ed implicite – devono essere riportate al momento zero. La fase improduttiva finisce, o si considera, come è di consuetudine, che abbia termine nell'anno in cui le spese annue di produzione non superano o almeno eguagliano il valore dei prodotti ricavati o ricavabili;
Vf = valore finale, o valore di recupero dall'abbattimento finale, escluso il prodotto principale e al netto delle spese relative all'abbattimento;
n = numero degli anni del *ciclo economico* dell'arboreto, e cioè del periodo intercorrente dall'inizio dell'impianto all'anno dell'abbattimento.

È ovvio quindi che, a scopi contabili o, comunque, per bilanci aziendali, la quota annua di reintegrazione si debba considerare per tutti gli anni formanti l'arco del ciclo economico dell'arboreto. Che se, invece, l'imprenditore volesse realmente accumulare un capitale alla fine del ciclo allo scopo di rifare l'impianto, o anche semplicemente formare un capitale pari alla totale spesa di impianto dell'arboreto, in questo caso la somma annua da accantonare si determinerà, ugualmente, con la stessa formula classica esposta in precedenza e sulla base dello stesso costo totale di impianto riferito al momento zero, ma per un numero di anni pari agli anni dell'intero ciclo diminuito di quelli della fase improduttiva. L'accantonamento, quindi, inizierà una volta ultimato l'impianto, e cioè con l'inizio della fase produttiva.

2) ***Arboreti disetanei assestati a governo annuo***: trattandosi di arboreti formati da tanti gruppi di piante disposti in età scalare di un anno quanti sono gli anni del prestabilito ciclo economico, si vengono a delineare tante parcelle di terreno di eguale investimento e produttività per cui, isolatamente considerate, sono da ritenersi alla stregua di altrettanti arboreti coetanei a governo periodico.
In questo caso la quota di reintegrazione, coinciderà ovviamente con la spesa media annua che occorre sostenere per l'impianto annuale della nuova parcella, diminuita dell'eventuale valore di recupero finale derivante dalla parcella che viene abbattuta, al netto delle relative spese.

3) ***Arboreti misti, difformi, non regolarmente assestati o, comunque, eterogenei***: di fronte a questi casi si presenta la necessità di suddividere le piante per gruppi omogenei sotto alcune preordinate caratteristiche (specie, assestamento, età, produttività, ecc.),

in modo da poter poi determinare la corrispondente quota di reintegrazione sulla base di uno dei due casi precedenti.
Comunque sia – date le incertezze e le difficoltà insite nelle piantagioni legnose in genere (durata della fase improduttiva, durata dell'intero ciclo economico, valore di recupero finale, ecc.) – si ritiene che in pratica sia ugualmente corretto determinare la quota di reintegrazione di piantagioni legnose, purché considerate o predisposte per gruppi di piante omogenee, con uno dei due seguenti procedimenti, molto più semplici e sostanzialmente equivalenti fra loro.

– ***Primo procedimento***: conoscendo il costo totale dell'impianto al momento zero, la durata economica probabile delle piante e il valore di recupero finale:

$$Q/re = \frac{Vi - Vf}{n}$$

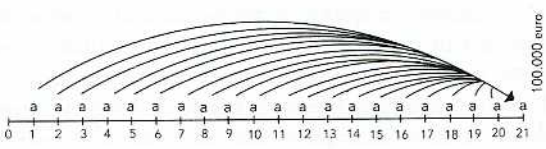
– ***Secondo procedimento***: dividendo un dato numero di piante per gli anni della loro vita probabile, si ottiene il numero delle piante che in media devono essere annualmente sostituite o rinnovate. La corrispondente quota di reintegrazione sarà fornita, evidentemente, dal prodotto di detto quoziente per il costo totale di impianto di una pianta. Così:

$$Q/re = \frac{\text{Numero delle piante}}{\text{Età media delle piante}} \cdot \text{Costo unitario per pianta}$$

Esercizio n. 34. - *Un padre, alla nascita di un figlio, decide di accantonare una somma annua in modo che il figlio, raggiunta l'età maggiore, possa avere a sua piena disposizione 100.000 euro allo scopo di poter compiere gli studi universitari.*
Supposto un saggio d'interesse del 5%, quale sarà la somma che il padre dovrà risparmiare annualmente iniziando il primo deposito dopo un anno dalla nascita del figlio?

La soluzione risulta:

Graficamente:



Numericamente:

$$a = A_n \frac{r}{q^n - 1}$$

$$a = 100.000 \frac{0,05}{1,05^{21} - 1}$$

$$a = 100.000 \cdot 0,0280$$

a = € 2.800 (somma annua posticipata da accantonare)

Esercizio n. 35. - *Un agricoltore ha eseguito l'impianto di un vigneto il cui costo totale sostenuto in un triennio, riferito all'attualità, ammonta a 15.000 euro. Supposta la durata economica di tale arboreto in 25 anni, si vuol sapere quale sarà la somma che l'agricoltore prudente dovrà accantonare ogni anno in modo che, con i relativi interessi, possa avere la disponibilità necessaria per rifare lo stesso vigneto alla fine del periodo considerato. Sia r = 0,05. Si consideri, poi, che dall'abbattimento del vigneto al 25° anno si possano realizzare, al netto di ogni spesa, 1.000 euro.*

La quota annua di rinnovazione dell'arboreto si ricaverà quindi applicando la formula classica e cioè:

$$Q/re = (Vi - Vf) \frac{r}{q^n - 1}$$

Capitale da accumulare in 25 anni:

$$A_n = 15.000 - 1.000 = 14.000 \text{ euro}$$

Somma posticipata da accantonare ogni anno, a cominciare da subito:

$$Q/re = 14.000 \frac{0,05}{1,05^{25} - 1}$$

$$Q/re = 14.000 \cdot 0,0209$$

Q/re = 293 euro (somma annua posticipata da accantonare)

Così, accantonando ogni anno al 5% la somma di 293 euro, l'agricoltore dopo 25 anni avrà la somma di 14.000 euro.
Infatti l'accumulazione finale di 25 annualità dell'ammontare di 293 euro ciascuna, al saggio d'interesse dello 0,05, corrisponde alla somma complessiva da accantonare:

$$A_n = a \frac{q^n - 1}{r}$$

$A_{25} = 293 \dfrac{q^{25} - 1}{0,05} = 293 \cdot 47,7271 =$ € 14.000 (arrotondato)

Aggiungendo ora il valore finale residuo del vigneto di 1.000 euro, realizzabile al 25° anno, si avrà il capitale di 15.000 euro, necessario per il reimpianto del vigneto stesso. E questo in regime di equilibrio economico e di stabilità della moneta.

Esercizio n. 36. - *Tizio acquista una trattrice per il prezzo di 30.000 euro. Supposta una durata economica di 12 anni e il valore residuo della macchina al 12° anno uguale a 5.000 euro, si vuol sapere quanto dovrà Tizio annualmente accantonare per avere dopo 12 anni la somma necessaria per riacquistare la stessa trattrice e allo stesso prezzo. Sia r = 0,05.*

E quale sarebbe, invece, la corrispondente quota media annua di deprezzamento.

Si dovrà innanzi tutto detrarre dal costo iniziale della macchina il suo valore residuo realizzabile al 12° anno e determinare quindi la quota annua di reintegrazione sulla differenza, che rappresenta realmente la somma da accumulare nel tempo prefissato.
Somma da accantonare in 12 anni:

$$A_n = 30.000 - 5.000 = 25.000 \text{ euro}$$

Somma da accantonare ogni anno:

$$a = A_n \frac{r}{q^n - 1}$$

$$Q/re = 25.000 \frac{r}{1{,}05^{12} - 1}$$

$Q/re = 25.000 \cdot 0{,}0628 =$ € 1.570 (somma annua da accantonare)

La quota media annua di deprezzamento della trattrice – detta impropriamente quota di ammortamento – risulterà invece risolvendo la seguente espressione:

$$Q/dep = \frac{Vi - Vf}{n}$$

$$Q/dep = \frac{30.000 - 5.000}{12} = 2.083 \text{ euro}$$

Esercizio n. 37 - *Determinare la quota di reintegrazione di un pescheto di 600 piante disposte in età scalare e la cui età del massimo tornaconto è di anni 15. La spesa totale che si sostiene per l'impianto di ogni singola pianta è di 100 euro.*

La relativa quota di reintegrazione annua si determina facilmente conoscendo il numero delle piante che in media annualmente si mettono a dimora in sostituzione di quelle che via via terminano il loro ciclo economico.

Infatti ogni anno vanno rinnovate $\left(\frac{600}{15}\right)$ 40 piante.

La quota annua di reintegrazione, perciò, ammonta (piante 40 × 100) a 4.000 euro.

Esercizio n. 38 - *Il carico di bestiame di una stalla è formato da 12 capi che hanno una durata di convenienza economica di anni 4 e che risultano scalati in età; annualmente, per l'acquisto di un capo da rinnovo, si spendono 1.200 euro e per ogni capo scartato, invece, si ricavano 700 euro. Si voglia conoscere la quota media annua di rimonta.*

Ogni anno, naturalmente, si dovranno acquistare e rispettivamente vendere n. 3 capi per poter rinnovare la stalla.

Determinata, quindi, la quota di rimonta di un capo, basterà moltiplicare questa per 3 onde ottenere la spesa totale annua che si deve sostenere per la rimonta del capitale bestiame previsto.
Così:

$$Q/re = 3\ (1.200 - 700) = 1.500 \text{ euro}$$

Qualora gli animali non fossero in regolare età scalare, fissato che sia il numero complessivo dei capi, basterà solo stabilire il periodo medio utile di sfruttamento. Così, dal rapporto dato dal numero dei capi di bestiame e dal numero degli anni di utilizzazione, si otterrà il numero dei capi che mediamente devono essere ogni anno oggetto di rimonta.

7.6 Quota di ammortamento dei capitali

È la rata annua o semestrale che si versa per estinguere un debito in un determinato numero di anni ad un prestabilito saggio di interesse.
Per risolvere il problema in esame bisogna naturalmente conoscere il capitale in euro da estinguere, il numero di anni in cui esso si deve estinguere, il saggio di interesse adottato, se la rata è annua o semestrale e, a sua volta, se posticipata o anticipata.
Nel caso che l'estinzione di un mutuo avvenga in un dato tempo a rate annuali posticipate, la quota annua di ammortamento (*Q/am*) si determinerà risolvendo la seguente espressione:

$$Q/am = A_0 \frac{r\,q^n}{q^n - 1}$$

Anche qui, non si tratta che del problema inverso dell'accumulazione iniziale di annualità costanti posticipate e limitate, per cui:

$$A_0 = a \frac{q^n - 1}{r\,q^n}$$

Naturalmente la quota di ammortamento sarà comprensiva di capitale e di interessi; il creditore, così, verrà rimborsato a rate annuali non solo del suo denaro, comunque prestato, ma anche degli interessi che il denaro stesso gli avrebbe fruttato ad un saggio determinato, se fosse stato disponibile nelle sue mani.

Il coefficiente di ammortamento $\frac{r\,q^n}{q^n - 1}$ si trova già precalcolato nelle tavole finanziarie.
Quindi, per ammortizzare un debito qualsiasi con quote annue posticipate, entro un determinato periodo di tempo, basterà moltiplicare l'ammontare del debito per il coefficiente di ammortamento indicato.
La quota annua è sempre ***posticipata*** quando si tratta di ammortizzare un debito acceso per prestito o

mutuo, con o senza garanzia ipotecaria, in quanto si paga la prima rata solo dopo un anno dalla data del prestito stesso. La quota è quasi sempre ***anticipata*** nel caso, invece, di compravendita di un bene a totale pagamento rateale.

In questo ultimo caso la quota annua di ammortamento si determinerà con la stessa precedente espressione, scontata poi, e cioè anticipata di un anno. Così:

$$Q/am = A_0 \frac{r\,q^n}{q^n - 1}\,\frac{1}{q}$$

Se il mutuo da estinguere in n anni al saggio r deve avvenire con ***rate semestrali posticipate***, la corrispondente rata si otterrà applicando la stessa formula che fornisce la quota annua posticipata di ammortamento:

$$Q/am = A_0 \frac{r\,q^n}{q^n - 1}$$

con l'avvertenza, però, di dividere per due il saggio r e di moltiplicare ugualmente per due il tempo n. Così, ad esempio, se il mutuo si dovesse estinguere in 10 anni al saggio dell'8%, la rata semestrale si calcolerà come se fosse una rata annua da pagarsi in 20 anni al saggio del 4%.

A conclusione dell'argomento si vuole rilevare che **la quota di ammortamento è costante nel periodo dell'estinzione ed è comprensiva di una *quota capitale e di una quota interessi*.**

Così, finanziariamente parlando, l'estinzione rateale di un debito viene compiuta con quote costanti formate non solo da una parte del capitale ma anche da interessi annui calcolati via via sul capitale residuo da pagare.

È evidente, così, che pur rimanendo costante la rata annua di ammortamento, la quota di capitale e quella di interesse, formanti la rata, non solo saranno di diverso ammontare, ma variano di anno in anno.

Infatti, mentre la quota capitale va aumentando col diminuire del debito, la quota interessi andrà diminuendo con lo scalare del debito stesso.

L'andamento della quota di ammortamento si può mettere in evidenza con un semplice prospetto che va sotto il nome di "**piano di ammortamento**". Esso è formato da più colonne disposte da sinistra verso destra nel seguente ordine: il numero della rata; l'ammontare della rata annua costante; la quota di capitale; la quota di interessi; il debito estinto e il debito residuo.

Risulta, così, in definitiva, che:

Q/am = Q/capitale + Q/interessi

Col passare del tempo diminuisce la quota interessi, mentre aumenta la quota capitale in modo tale però che la loro somma resta costante.

Supposto di estinguere un capitale A_0 con rate annuali posticipate ad un dato saggio r e nel tempo di n anni, si riportano qui di seguito, a titolo di esempio, le modalità da seguire per determinare la Q/interessi e la Q/capitale nei primi due anni:

$$\left.\begin{aligned} &Q/interessi\ 1°\ anno = A_0 \cdot r \\ &Q/capitale\ 1°\ anno = A_0 \frac{r}{q^n - 1} \end{aligned}\right\} = Q/am$$

$$\left.\begin{aligned} &Q/interessi\ 2°\ anno = (A_0 - Q/cap.\ 1°\ anno) \cdot r \\ &Q/capitale\ 2°\ anno = (A_0 - Q/cap.\ 1°\ anno) \cdot \frac{r}{q^{n-1} - 1} \end{aligned}\right\} = Q/am$$

E così si continua anche per tutti gli anni successivi del periodo di ammortamento considerato.

Come già detto, la quota di ammortamento è annualmente costante e per la sua determinazione basterà applicare la formula generale, già indicata, secondo la quale:

$$Q/am = A_0 \frac{r\,q^n}{q^n - 1}$$

dove: Q/am = rata annua costante posticipata di ammortamento di un mutuo in n anni e ad un dato saggio r di interesse.

Un altro sistema di *ammortamento di un debito* è quello così detto *all'americana*, che consiste nel pagamento annuale, o semestrale, degli interessi sull'importo totale del mutuo ad un dato saggio, e nella restituzione del capitale prestato alla scadenza prefissata.

Di particolare interesse, infine, è pure *l'ammortamento scalare*, adottato generalmente in Svizzera. Consiste nel pagare ogni sei mesi, o annualmente, una rata che va costantemente diminuendo nel periodo considerato, in quanto il mutuo iniziale viene suddiviso in tante quote di capitale costanti, pari al numero dei semestri o degli anni del periodo, e ad ogni quota capitale vengono aggiunti gli interessi semestrali, o annuali, sull'ammontare del debito residuo.

Secondo quanto sopra esposto, in Italia si applica il **sistema alla francese**.

ESERCIZIO N. 39 - *Un tale ha ricevuto un prestito di 50.000 euro da restituire in otto rate annuali uguali, comprensive di capitale e di interesse al 5%. Si determini la quota annua di ammortamento.*

Poiché la prima rata sarà pagata dopo un anno dal prestito, applicando la nota formula, si ha:

$$Q/am = A_0 \frac{r\,q^n}{q^n - 1}$$

Sostituendo:

$$Q/am = 50.000\,\frac{0{,}05 \cdot 1{,}05^8}{1{,}05^8 - 1}$$

$$Q/am = 50.000 \cdot 0{,}1547$$

$Q/am = 7.735$ (rata annua d'ammortamento in euro)

ESERCIZIO N. 40 - *Un agricoltore acquista una trattrice per un valore di 40.000 euro. Al momento della compravendita versa 10.000 euro pattuendo di pagare la rimanenza in rate annue costanti per un periodo di tre anni e all'interesse del 7%. A quanto ammonta la rata del debito residuo?*

Anche in questo caso la prima rata sarà versata dopo un anno dalla data del contratto. Si ha che il debito residuo da pagarsi in tre anni è di 30.000 euro. Quindi:

$$Q/am = 30.000 \frac{0{,}07 \cdot 1{,}07^3}{1{,}07^3 - 1} =$$

$$= 30.000 \cdot 0{,}3810 =$$

= € 11.430 (rata annua posticipata di ammortamento)

ESERCIZIO N. 41 - *Supponiamo ora, prendendo ancora in esame il caso precedente, che l'agricoltore abbia fatto l'acquisto senza alcun anticipo sull'importo di 40.000 euro impegnandosi di saldare il suo debito in cinque annualità costanti all'interesse dell'8%. Quale sarà la quota annua d'ammortamento comprensiva di capitale e interessi?*

In tal caso, la prima rata dovrà effettuarsi immediatamente all'atto della compravendita. Le cinque rate annue risulteranno, così, ***anticipate***. Infatti si ha:

$$Q/am = A_0 \frac{r\, q^n}{q^n - 1} \frac{1}{q}$$

$$Q/am = 40.000 \frac{0{,}08 \cdot 1{,}08^5}{1{,}08^5 - 1} \cdot \frac{1}{1{,}08}$$

$$Q/am = 40.000 \cdot 0{,}2504 \cdot 0{,}9259$$

Q/am = € 9.274 (rata annua di ammortamento)

ESERCIZIO N. 42 - *Un fondo rustico dà un* Bf *medio continuativo di 8.000 euro all'anno. Dalle indagini espletate in sito, il saggio medio di capitalizzazione risulta del 4%. Su tale fondo grava un mutuo con ipoteca di prima iscrizione, in corso di estinzione rateale, di 5.000 euro. Il mutuo è da estinguersi in 30 rate annue costanti, comprensive di capitale ed interessi al 6%. Al momento della valutazione fondiaria è stata appena pagata l'ottava rata d'ammortamento. Conoscendo tali dati si vuol determinare il valore del fondo all'attualità.*

Il valore V_0 del fondo, evidentemente, si determinerà per differenza tra il valore normale del fondo V_n e l'onere gravante sul fondo stesso.

a) Valore normale del fondo:

$$V_n = \frac{Bf}{r} = \frac{8.000}{0{,}04} = 200.000 \text{ euro}$$

b) Ammontare della rata annua d'ammortamento:

$$Q/am = 5.000 \frac{1{,}06^{30} \cdot 0{,}06}{1{,}06^{30} - 1} =$$

$$= 5.000 \cdot 0{,}0726 = 363 \text{ euro}$$

c) Accumulazione iniziale delle rimanenti 22 rate per determinare l'intero debito residuo riferito al momento della valutazione:

$$A_0 = a \frac{q^n - 1}{r\, q^n}$$

$$A_0 = 363 \frac{1{,}06^{22} - 1}{0{,}06 \cdot 1{,}06^{22}}$$

$$A_0 = 363 \cdot 12{,}0416$$

A_0 = € 43.711 (debito residuo)

d) Valore fondiario all'attualità:

V_0 = 200.000 – 4.371 = € 195.629

ESERCIZIO N. 43 - *Supposto che un Istituto Bancario abbia concesso un mutuo di 20.000 euro da estinguersi con rate semestrali in 10 anni e al saggio del 6%, si vuol sapere:*

a) *la rata semestrale di ammortamento;*
b) *il debito residuo subito dopo il pagamento della 14ª rata.*

a) Determinazione della rata semestrale di ammortamento (in questo caso il pagamento avviene in 20 rate semestrali al tasso del 3%):

$$Q/am = A_0 \frac{r\, q^n}{q^n - 1}$$

$$Q/am = 20.000 \frac{0{,}03 \cdot 1{,}03^{20}}{1{,}03^{20} - 1}$$

$Q/am = 20.000 \cdot 0{,}0672 = 1.344$ (rata semestrale di ammortamento in euro)

b) Determinazione del debito residuo.

Essendo stata appena pagata la 14ª rata semestrale, il debito residuo all'attualità sarà costituito dall'accumulazione iniziale delle 6 rimanenti rate posticipate al tasso del 3%. Così:

$$A_0 = a \frac{q^n - 1}{r\, q^n}$$

$$A_0 = 1.344 \frac{1{,}03^6 - 1}{0{,}03 \cdot 1{,}03^6}$$

$A_0 = 1.344 \cdot 5{,}4172 = 7.280$ (debito residuo all'attualità in euro)

ESERCIZIO N. 44 - *Si voglia costruire, a titolo esemplificativo, il piano d'ammortamento di un debito di 100.000* *euro da pagarsi con annualità costanti posticipate in dieci anni al tasso del 6%.*

Dal piano di ammortamento (vedi Tab. 7.1) risulta che la quota annua costante di ammortamento ammonta a 13.587 euro, come si ottiene dall'applicazione della formula generale di ammortamento:

$$Q/am = A_0 \frac{r\, q^n}{q^n - 1}$$

Sostituendo, si ha:

$$Q/am = 100.000 \frac{0{,}06 \cdot 1{,}06^{10}}{1{,}06^{10} - 1} = 100.000 \cdot 0{,}13587 =$$
$$= € \ 13.587$$

Tale rata annua è composta dalla somma della quota annua di capitale con quella degli interessi annui sul debito annuo residuo. Mentre la quota annua di capitale si calcola annualmente sul debito residuo con la formula generale di reintegrazione $a = A_n \frac{r}{q^n - 1}$ per il il numero degli anni residui di ammortamento, la quota di interessi annui si determina invece, ogni anno, sull'ammontare del debito residuo. A titolo esemplificativo si riportano qui di seguito le operazioni inerenti al primo e al secondo anno.

Primo anno:

- quota capitale = $100.000 \frac{0{,}06}{1{,}06^{10} - 1}$ =
  = 100.000 · 0,07587 . . . . = € 7.587
- quota interessi = 100.000 · 0,06 . . . = € 6.000

Rata annua di ammortamento € 13.587

Essendo il debito estinto, alla fine del primo anno, di € 7.587, il debito residuo ammonterà a € 92.413.

Secondo anno:

- quota capitale = $92.413 \frac{0{,}06}{1{,}06^{9} - 1}$ =
  = 92.413 · 0,08702 . . . . = € 8.042
- quota interessi = 92.413 · 0,06 . . . . = € 5.545

Rata annua di ammortamento € 13.587

Pertanto alla fine del 2° anno si avrà un debito residuo di 84.371 euro.

Le quote di capitale e di interessi degli anni successivi si calcolano seguendo lo stesso procedimento.

Per maggior chiarezza le singole cifre in Tabella 7.1 sono state arrotondate.

Talvolta avviene che, dovendosi estinguere un debito che viene pagato con quote annue di ammortamento **si voglia saldare in una sola volta l'intero debito residuo in un anno intermedio del periodo prestabilito**.

Per chiudere in tal caso l'obbligazione basterà eseguire l'accumulazione iniziale delle rate che restano da pagare: bisognerà, in altri termini, scontare all'anno dell'operazione le singole rate residue.

E ciò solo nel caso che non esista già un piano di ammortamento perché, se esso vi fosse, presto si farebbe a rilevare il totale debito residuo dal prospetto del piano stesso.

Supposto, ad esempio, che il debitore voglia ammortizzare il suo debito residuo appena dopo aver pagato la sesta rata, osservando il piano di ammortamento, si trova che l'ammontare residuo equivale a 47.080 euro. Qualora, invece, il piano di ammortamento non esistesse, l'intero debito residuo di 47.080 euro si determinerebbe ugualmente accumulando all'inizio del sesto anno le rimanenti quattro rate posticipate di 13.587 euro cadauna.

Tabella 7.1 - *Piano di ammortamento*

Anno	Rata annua costante	Quota capitale	Quota interessi	Debito estinto	Debito residuo
0	–	–	–	–	100.000
1	13.587	7.587	6.000	7.587	92.413
2	»	8.042	5.545	15.629	84.371
3	»	8.524	5.063	24.153	75.847
4	»	9.036	4.551	33.189	66.811
5	»	9.578	4.009	42.767	57.233
6	»	10.153	3.434	52.920	47.080
7	»	10.762	2.825	63.682	36.318
8	»	11.408	2.179	75.090	24.910
9	»	12.092	1.495	87.182	12.818
10	»	12.818	769	100.000	–
Totali	135.870	100.000	35.870	–	–

Infatti:

$$A_0 = a \frac{q^n - 1}{r\, q^n}$$

$$A_0 = 13.587 \frac{1{,}06^4 - 1}{0{,}06 \cdot 1{,}06^4}$$

$A_0 = 13.587 \cdot 3{,}4651 =$ € 47.080 (debito residuo al 6° anno)

7.7 Periodicità o poliannualità

Sono periodici o poliannuali i valori che si ripetono ogni determinato numero di anni.

In linea generale, come per le annualità, i valori poliannuali o periodici possono essere costituiti da redditi, spese, crediti, debiti, erogazioni, prodotti, ecc. Simili valori sono, ad esempio, originati da boschi a taglio periodico o intermittente e da arboreti coetanei (frutteti, vigneti, agrumeti, oliveti, gelseti, ecc.).

Il turno o periodo è l'intervallo di tempo che intercorre tra il verificarsi di due successivi valori periodici.

Si indica con:

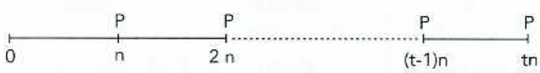
- n il numero degli anni del periodo o turno;
- t il numero dei turni o periodi;
- P la periodicità, cioè l'ammontare di ognuno di questi valori poliannuali.

Come nello studio delle annualità, così anche in quello delle periodicità si presentano, **per le periodicità "*costanti*"**, i seguenti casi:

- periodicità costanti posticipate limitate;
- periodicità costanti anticipate limitate;
- periodicità costanti posticipate illimitate;
- periodicità costanti anticipate illimitate;
- ricerca della periodicità (problemi inversi dei precedenti).

7.7.1 Periodicità costanti posticipate limitate

Sono valori che si ripetono costantemente alla fine di ognuno dei t periodi di n anni e graficamente si possono così rappresentare:



Le tre accumulazioni A_{tn}, A_0, A_m, si avranno riportando, rispettivamente, le diverse periodicità P, all'anno ultimo o all'anno zero o all'anno m del periodo considerato.

Per fare ciò si applica lo stesso procedimento già largamente usato nelle annualità. Pertanto, analogamente a quanto avveniva per le annualità costanti, posticipate e limitate, si presentano i tre seguenti problemi:

a) Accumulazione finale (A_{tn}). Si ottiene posticipando, uno ad uno, i singoli valori periodici P alla fine del periodo considerato partendo dall'ultima periodicità e facendone quindi la somma aritmetica.

$$A_{tn} = P + Pq^n + \ldots + Pq^{tn-2n} + Pq^{tn-n}$$

Raccogliendo P a fattor comune si avrà:

$$A_{tn} = P\,(1 + q^n + \ldots + q^{tn-2n} + q^{tn-n})$$

Essendo l'espressione tra parentesi una progressione geometrica crescente di ragione q^n (1), si avrà:

$$A_{tn} = P \frac{q^{tn-n}\, q^n - 1}{q^n - 1}$$

e svolgendo si otterrà, in definitiva, la formula con la quale si può determinare direttamente la ***somma finale di una serie di periodicità costanti posticipate***:

$$A_{tn} = P \frac{q^{tn} - 1}{q^n - 1}$$

Il coefficiente $\frac{q^{tn}-1}{q^n-1}$, non trovandosi direttamente nelle usuali tavole finanziarie, deve essere scomposto nei seguenti due coefficienti:

$$(q^{tn} - 1) \frac{1}{q^n - 1}$$

Esercizio n. 45 - *Si supponga che un vigneto richieda ogni sei anni una spesa per rinnovo della palatura di 250 euro. Supposta la durata economica del vigneto di anni 30, si vuol conoscere la spesa complessiva per la palatura riferita alla fine del ciclo produttivo e la quota annua posticipata relativa a detta spesa. Sia $r = 0{,}05 = i$.*

Accumulazione al 30° anno delle cinque spese periodiche:

$$A_{tn} = P \frac{q^{tn} - 1}{q^n - 1}$$

$$A_{tn} = 250 \frac{q^{30} - 1}{q^6 - 1}$$

$$A_{30} = 250\,(1{,}05^{30} - 1) \frac{1}{1{,}05^6 - 1}$$

$$A_{30} = 250 \cdot 3{,}3219 \cdot 2{,}9403$$

(1) Una progressione geometrica crescente è uguale ad una frazione che ha per numeratore l'ultimo termine moltiplicato per la ragione meno il primo, e per denominatore la ragione meno l'unità.

A_{30} = € 2.442 (spesa complessiva al 30° anno)
Spesa media annua:

$$a = A_{tn} \frac{r}{q^{tn} - 1}$$

$$a = 2.442 \frac{0{,}05}{1{,}05^{30} - 1}$$

$$a = 2.442 \cdot 0{,}0150$$

$$a = 37 \text{ euro (spesa media annua)}$$

b) ACCUMULAZIONE INIZIALE (A_0). È uguale alla somma finale A_{tn} scontata all'anno zero, ossia moltiplicata per il coefficiente di sconto $\frac{1}{q^{tn}}$

$$A_0 = P \frac{q^{tn} - 1}{q^n - 1} \frac{1}{q^{tn}}$$

c) ACCUMULAZIONE INTERMEDIA (A_m). È uguale evidentemente sia alla somma iniziale prolungata all'anno intermedio m, sia alla somma finale scontata all'anno m. Così:

$$A_m = A_0 \, q^m$$

oppure:

$$A_m = A_{tn} \frac{1}{q^{tn-m}}$$

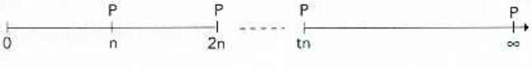
in cui m è il numero degli anni che intercorre dall'anno zero all'anno intermedio del periodo tn.

7.7.2 Periodicità costanti anticipate limitate

È chiaro che, similmente a quanto fu rilevato per le annualità, le formule con le quali si calcolano le tre somme anticipate (A_{tn}, A_0, A_m) corrispondono alle posticipate suindicate, prolungate di n anni, formanti un periodo, e cioè moltiplicate per q^n.

7.7.3 Periodicità costanti posticipate illimitate

Sono valori periodici che si ripetono costantemente alla fine di ogni periodo o turno di n anni e all'infinito, e si possono rappresentare graficamente come segue:



Come già visto per le annualità, data la successione perpetua di valori periodici e costanti, l'accumulazione finale non è determinabile perché infinitamente grande e quella intermedia non ha rilevante importanza pratica.

Non resta così che il solo problema dell'*accumulazione iniziale* che si ottiene riportando all'anno zero, una ad una, le singole periodicità P; infatti, osservando il grafico ed iniziando dalla periodicità posta all'infinito, si avrà:

$$A_0 = \frac{P}{q^\infty} + \ldots + \frac{P}{q^{2n}} + \frac{P}{q^n}$$

Raccogliendo P a fattor comune, si ottiene:

$$A_0 = P\left(\frac{1}{q^\infty} + \ldots + \frac{1}{q^{2n}} + \frac{1}{q^n}\right)$$

Osservando che l'espressione tra parentesi corrisponde a una progressione geometrica crescente di ragione q^n, si ha:

$$A_0 = P \frac{\frac{1}{q^n} q^n - \frac{1}{q^\infty}}{q^n - 1}$$

Sviluppando e semplificando si arriva, in definitiva, **alla formula che fornisce direttamente la *somma iniziale di infinite periodicità costanti e posticipate*:**

$$A_0 = P \frac{\frac{q^n}{q^n} - \frac{1}{q^\infty}}{q^n - 1} = P \frac{1 - 0}{q^n - 1} = P \frac{1}{q^n - 1}$$

Qualora le periodicità P fossero date da *redditi costanti* netti di un immobile qualsiasi, l'accumulazione iniziale degli infiniti redditi coincide col valore capitale dell'immobile stesso e pertanto la relativa formula più precisamente viene denominata *formula di capitalizzazione dei redditi periodici*. Quindi:

$$A_0 = \frac{P}{q^n - 1} = V_0$$

In conclusione, ogni qualvolta si voglia determinare la somma iniziale di infinite periodicità costanti posticipate, basterà moltiplicare l'ammontare della periodicità P per il coefficiente di capitalizzazione dei redditi periodici $\frac{1}{q^n - 1}$ che si trova nelle tavole finanziarie. È semplice constatare come dalla formula di capitalizzazione dei redditi periodici si possa passare a quella dei redditi annui $\left(\frac{a}{r}\right)$ dove $n = 1$. I redditi cioè si verificano alla fine di ogni anno anziché alla fine di ogni n anni. Così:

– se il reddito è periodico:

$$V_0 = P \frac{1}{q^n - 1}$$

– se il reddito è annuo:

$$V_0 = a \frac{1}{q - 1} = a \frac{1}{1 + r - 1} = \frac{a}{r}$$

Esercizio n. 46 - *Un ceduo matricinato, cioè che si riproduce naturalmente all'infinito, dà un reddito netto ogni 15 anni di 20.000 euro. Si vuol conoscere il valore del bosco. Sia il saggio di capitalizzazione uguale a 0,06.*

L'accumulazione iniziale degli infiniti redditi periodici costanti di un immobile qualsiasi corrisponde al suo valore capitale; quindi nel caso in esame:

$$A_0 = P\,\frac{1}{q^n - 1}$$

$$A_0 = 20.000\,\frac{1}{1{,}06^{15} - 1}$$

$$A_0 = 20.000 \cdot 0{,}7161$$

$V_0 =$ € 14.322 (valore terra nuda del ceduo)

Esercizio n. 47 - *Un vigneto, che si suppone si ripeta perpetuamente, dà un reddito lordo ogni 25 anni di 65.000 euro; le spese, riferite pure al 25° anno, ammontano a 15.000 euro. Si determini il valore terra del vigneto. Sia r = 0,06.*

Reddito periodico capitalizzabile:

$P = 65.000 - 15.000 =$ € 50.000

Valore capitale terra:

$$V_0 = P\,\frac{1}{q^n - 1}$$

$$V_0 = 50.000\,\frac{1}{1{,}06^{25} - 1}$$

$$V_0 = 50.000 \cdot 0{,}3038$$

$V_0 =$ € 15.190 (valore terra nuda del vigneto)

7.7.4 Periodicità costanti anticipate illimitate

Sono valori periodici che si ripetono costantemente all'inizio di ogni periodo e all'infinito; *l'accumulazione iniziale*, analogamente a quanto detto per le annualità, è data dalla somma iniziale delle posticipate prolungata di *n* anni e cioè di un periodo. Quindi:

$$A_0 = \frac{P}{q^n - 1}\,q^n$$

Tale formula equivale alla seguente, nella quale alla A_0 delle posticipate viene aggiunta una periodicità *P*:

$$A_0 = \frac{P}{q^n - 1} + P$$

Infatti, riducendo i due termini della seconda formula allo stesso denominatore e semplificando poi le due periodicità uguali e di segno contrario, si arriva in definitiva alla formula precedente:

$$A_0 = \frac{P}{q^n - 1} + P = \frac{P + Pq^n - P}{q^n - 1} = \frac{Pq^n}{q^n - 1} = P\,\frac{1}{q^n - 1}\,q^n$$

Nel caso in cui la periodicità anticipata sia un reddito costante infinito di un immobile, la formula predetta fornisce il valore dell'immobile stesso, capace di fornire proprio quel reddito periodico perpetuo anticipato.

Esercizio n. 48 - *Di un bosco ceduo perpetuo si conoscono i seguenti dati: il turno o periodo è di anni 16; il reddito netto periodico posticipato costante è di 50.000 euro; il saggio di capitalizzazione è uguale al 5%. Sulla scorta di tali elementi si vuol conoscere il valor capitale del bosco ceduo subito dopo effettuato un taglio e immediatamente prima.*

Qui si presenta il caso di due serie di periodicità illimitate: *posticipate* e *anticipate*.

L'accumulazione iniziale delle periodicità posticipate si ricava dalla fondamentale formula di capitalizzazione dei redditi periodici:

$$A_0 = P\,\frac{1}{q^n - 1}$$

$$A_0 = 50.000\,\frac{1}{1{,}05^{16} - 1}$$

$$A_0 = 50.000 \cdot 0{,}8454 =$$

= € 42.270 (valore del bosco subito dopo un taglio o valore terra nuda del bosco)

L'accumulazione iniziale delle periodicità anticipate si determina con la stessa formula precedente, posticipata però di un periodo, oppure come già si è visto, con l'aggiunta di una periodicità. Infatti:

a) $A_0 = P\,\frac{1}{q^n - 1}\,q^n$

oppure:

b) $A_0 = P\,\frac{1}{q^n - 1} + P$

Applicando i dati dell'esempio:

a) $V = 50.000\,\frac{1}{q^{16} - 1}\,1{,}05^{16}$

$V = 42.270 \cdot 1{,}05^{16}$

$V = 42.270 \cdot 2{,}1829 =$

= € 92.270 (valore del bosco prima di un taglio)

Oppure:

b) $V = 42.270 + P$

$V = 42.270 + 50.000 =$

= € 92.270 (valore del bosco prima di un taglio)

7.7.5 Ricerca della periodicità (Problemi inversi)

Dalle principali formule finora esposte e cioè dalle somme di periodicità anticipate o posticipate e limitate o illimitate, si può evidentemente ricavare la relativa periodicità come risulta qui di seguito:

$$A_{tn} = P\,\frac{q^{tn}-1}{q^n-1} \qquad \rightarrow P = A_{tn}\,\frac{q^n-1}{q^{tn}-1}$$

$$A_0 = P\,\frac{q^{tn}-1}{q^n-1}\,\frac{1}{q^{tn}} \qquad \rightarrow P = A_0\,\frac{q^n-1}{q^{tn}-1}\,q^{tn}$$

$$A_0 = P\,\frac{1}{q^n-1} \qquad \rightarrow P = A_0\,(q^n-1)$$

$$A_0 = \frac{P}{q^n-1}\,q^n \qquad \rightarrow P = A_0\,(q^n-1)\,\frac{1}{q^n}$$

ESERCIZIO N. 49 - *Un pioppeto a turno decennale ha un valore terra di 35.000 euro. Supposto un saggio d'interesse del 5% si determini il reddito periodico e cioè la periodicità.*

Dal valore terra di un arboreto qualsiasi si può sempre ricavare il relativo reddito periodico, che corrisponde, evidentemente, all'interesse composto dell'immobile stesso maturato nel tempo pari al turno dell'arboreto, applicando la formula propria dell'interesse composto desunta dalla formula di capitalizzazione dei redditi periodici:

$$V_0 = P\,\frac{1}{q^n-1}$$

$$P = V_0\,(q^n-1)$$

$$P = 35.000\,(1{,}05^{10}-1) =$$

$$= 35.000 \cdot 0{,}6289 =$$

= € 22.011 (reddito medio periodico decennale del pioppeto)

AVVERTENZA. Nel caso di periodicità *variabili*, analogamente a quanto rilevato per le annualità variabili, le possibili accumulazioni si dovranno effettuare riportando le singole periodicità all'anno considerato mediante i noti coefficienti di riporto dei capitali nel tempo.

7.8 Nozioni statistiche, confronti e valori medi

L'evoluzione della società italiana – peraltro simile a quella registrata da tutte le società attualmente più avanzate – da agricola a industriale e, quindi, post-industriale, che ha causato una crescente dinamicità ed integrazione delle relazioni economiche e sociali, ha imposto ed impone la necessità di disporre di un flusso crescente di informazioni, volto ad interpretare e conoscere una realtà, non solo più complessa, ma in continua trasformazione.

Tale esigenza è sentita non solo dall'operatore pubblico, il quale, peraltro, di pari passo con le trasformazioni economiche e sociali, ha progressivamente esteso il campo del proprio intervento, ma anche dagli operatori privati, i quali si trovano ad agire in una realtà complessa e mutevole.

Se, quindi, si può affermare che la società nella quale viviamo si caratterizza, rispetto al passato, per la maggiore complessità e mutevolezza delle relazioni economiche e sociali, si può aggiungere che una ulteriore caratteristica delle società contemporanee è costituita dalla crescente domanda e conseguente massiccia produzione di *informazione* che molto spesso si presenta nella forma di *documentazione statistica*.

Con il termine statistica si indica quella disciplina scientifica che studia, con metodi matematici, *fenomeni collettivi*. In particolare, la *statistica sociale* è la scienza che studia i fenomeni sociali sotto l'aspetto quantitativo. I fenomeni sociali sono quelli relativi alla vita di una collettività. Esempi di tale fenomeno sono costituiti dai movimenti della popolazione sul territorio, la composizione per età della popolazione, l'occupazione e la disoccupazione, la struttura dei consumi, l'evoluzione dei mercati dei beni, la distribuzione delle attività economiche, la scolarizzazione, ecc.

Nel linguaggio statistico, l'insieme degli elementi che costituiscono un fenomeno collettivo vengono detti *universi* o *popolazioni*. Gli elementi singoli di cui è formato un universo sono detti *unità elementari* o *unità statistiche*. Esempi di unità statistiche sono le famiglie rilevate in un censimento demografico, gli individui giudicati in un anno o quelli frequentanti un certo corso di studi, le abitazioni, le aziende, ecc.

La conoscenza delle unità statistiche avviene per mezzo delle rilevazioni statistiche. Tali rilevazioni possono essere *totali* o *parziali*. Sono totali quelle rilevazioni che riguardano tutte le unità all'interno dell'universo statistico. ***Un esempio di rilevazione totale è costituita dai censimenti***. Nel caso dei censimenti, l'universo statistico è costituito dall'intera comunità nazionale, della quale vengono studiate alcune caratteristiche attraverso una rilevazione a tappeto delle informazioni riguardanti le singole unità statistiche, unità che, nel caso del Censimento Generale della Popolazione e delle Abitazioni, sono costituite da tutte le *famiglie* italiane.

Molto spesso, tuttavia, lo studio di alcuni fenomeni avviene attraverso rilevazioni parziali o campionarie. Tali rilevazioni riguardano non la totalità delle unità statistiche costituenti l'universo statistico, ma solo una porzione di dette unità. Attraverso procedure piuttosto sofisticate, si procede alla identificazione di una porzione delle unità statistiche componenti l'universo di riferimento, cercando di selezionare quelle che si reputano sufficientemente rappresentative delle caratteristiche dell'universo stesso. *Attraverso lo studio delle caratteristiche del campione scelto si cerca di dedurre considerazioni generali riguardo il fenomeno che si intende studiare.*

Il numero delle unità considerate in una rilevazione campionaria costituisce la cosiddetta *ampiezza del campione*.

***Il grande vantaggio delle rilevazioni campionarie* consiste nell'abbassamento dei costi e dei tempi necessari per la raccolta dei dati statistici. *Una rilevazione totale, infatti, comporta tempi lunghi e notevoli costi* per l'organizzazione e la gestione della raccolta dati**. I progressi compiuti dalla statistica consentono di ottenere informazioni sul fenomeno che si intende studiare limitando il numero delle unità oggetto di rilevazione e ottenendo risultati che molto spesso non presentano forti scostamenti rispetto a quelli che si potrebbero evincere da una rilevazione totale.

Le rilevazioni statistiche possono essere classificate secondo altri criteri. Un possibile criterio fa riferimento all'*ambito territoriale* rispetto al quale viene definito l'universo statistico; in questo senso possiamo distinguere rilevazioni (totali o campionarie) riguardanti l'intera Nazione, una singola Regione, Provincia o Comune, o rilevazioni subcomunali. Analogamente, è possibile distinguere le informazioni statistiche *a seconda che l'universo* sia costituito da un particolare sottogruppo, ad esempio i soli maschi o le sole donne, oppure, nell'ambito dell'economia nazionale, un particolare settore economico.

Un ulteriore possibile criterio attiene alla periodicità con la quale vengono realizzate le rilevazioni e quindi resa disponibile la documentazione statistica. I Censimenti, ad esempio, vengono svolti con scadenza decennale. Altre rilevazioni vengono svolte con scadenze minori, ed i risultati vengono resi disponibili annualmente o, addirittura, mensilmente.

Si ritiene, infine, di richiamare l'attenzione del lettore sui soggetti che organizzano le rilevazioni, elaborano e pubblicano i dati statistici. Come accennato all'inizio, la crescente domanda di documentazione statistica, ed in particolare di statistiche sociali, ha indotto una crescente produzione di informazione statistica. La realizzazione di tale documentazione vede fortemente impegnati amministratori ed enti pubblici, ai quali si affiancano numerosi soggetti privati (v. Doxa, Censis, Abacus, ecc.). Preme inoltre richiamare l'attenzione del lettore sul fatto – soprattutto al fine di operare *confronti intertemporali* – di assicurarsi dell'*omogeneità della fonte statistica*. Molto spesso, le modalità con le quali vengono condotte le rilevazioni e le elaborazioni statistiche possono differire a seconda del soggetto che provvede alla rilevazione e all'elaborazione. In altre parole, è opportuno assicurarsi dell'omogeneità delle procedure seguite nella rilevazione ed elaborazione dei dati statistici.

Prima della costituzione del Regno d'Italia esistevano presso alcuni Stati della penisola alcuni uffici di statistica, solitamente di modeste dimensioni e male organizzati. Con l'unificazione, nell'ambito della riorganizzazione amministrativa del nuovo Stato, venne prevista la creazione – in seno al Ministero dell'Agricoltura, Industria e Commercio – di un Ufficio rivolto alla raccolta dei dati statistici nazionali fondamentali. Tale ufficio venne creato nell'ottobre 1861.

Negli anni che seguirono, variò la collocazione di tale Ufficio nell'ambito dell'organizzazione amministrativa fino a giungere, nel 1926, alla creazione di un organismo autonomo, e precisamente l'*Istituto Centrale di Statistica* (ISTAT).

Attualmente, *all'ISTAT è demandato il compito di provvedere alla effettuazione e pubblicazione di indagini statistiche che interessano le amministrazioni dello Stato o che si riferiscono all'attività nazionale, di coordinare e pubblicare lavori statistici predisposti dalle amministrazioni pubbliche e dagli enti parastatali, nonché fornire agli organismi internazionali le informazioni statistiche riguardanti il paese da essi richieste.*

Una applicazione statistica molto usata nel campo estimativo è quella del confronto diretto, la quale consente di valutare, con un certo grado di approssimazione, un determinato bene (che costituisce l'incognita) attraverso la conoscenza di un certo numero di valori noti di altri beni "simili" per caratteristiche intrinseche ed estrinseche. Tale operazione statistica del confronto si risolve attraverso la seguente proporzione:

$$\Sigma V : \Sigma p = Vx : px$$

da cui:

$$Vx = \frac{\Sigma V}{\Sigma p} \cdot px$$

dove:

Vx = *valore del bene da stimare* (l'incognita);

ΣV = *somma aritmetica dei valori noti dei beni simili a quello da stimare;*

Σp = *somma aritmetica dei parametri (fisici o economici a seconda dei casi) dei beni simili presi a confronto;*

px = *parametro del bene da stimare.*

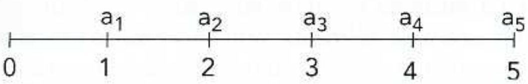
È ovvio che il risultato (e cioè il valore del bene da stimare) sarà tanto più attendibile quanto più aumenterà l'ampiezza dei casi presi a confronto.

Ed infine, a scopi pratico-estimativi, risultano pure interessanti, statisticamente, alcune informazioni intorno ai "Valori medi".

7.8.1 Media economica

All'annualità media si è avuto occasione di accennare parlando dell'ammortamento e della reintegrazione di un capitale. Si riprende l'argomento per puntualizzare il problema e per mostrare come il tempo influisca sui valori che si vanno a determinare.
Nella determinazione dell'annualità media, infatti, si tiene conto del tempo e di conseguenza degli interessi.
Ad esempio, l'espressione $a = A_n \dfrac{r}{q^n - 1}$ non serve solo a determinare la somma che si deve depositare ogni anno per costituire un dato capitale in un determinato numero di anni, bensì anche per conoscere l'annualità media annua di un dato valore (prodotto, costo, reddito, ecc.) riferito alla fine di un periodo di n anni.
Se le annualità sono variabili, per trovarne la somma finale basterà riportarle una ad una all'anno n, cioè alla fine del periodo considerato.
Dalla somma finale A_n si potrà quindi ricavare l'annualità media costante.
Un esempio mostra per cinque annualità variabili, come si procede nel calcolo:

Graficamente:



Numericamente:
Accumulazione all'anno 5:

$$A_5 = a_1\, q^4 + a_2\, q^3 + a_3\, q^2 + a_4\, q + a_5$$

$$\text{Annualità media} = A_5 \frac{r}{q^5 - 1}$$

La stessa annualità media si può ricavare anche dalla accumulazione iniziale di dette annualità variabili. Così:

$$\text{Annualità media} = A_0 \frac{r\, q^5}{q^5 - 1}$$

L'accumulazione iniziale A_0 si dovrà determinare con il solito procedimento del riporto dei capitali nel tempo e, precisamente in questo caso, con il coefficiente di sconto composto $\dfrac{1}{q^n}$, sia avrà:

$$A_0 = a_5 \frac{1}{q^5} + a_4 \frac{1}{q^4} + a_3 \frac{1}{q^3} + a_2 \frac{1}{q^2} + a_1 \frac{1}{q}$$

7.8.2 Media aritmetica

Sebbene vengano diffusamente trattate dalla statistica si ritiene opportuno richiamare anche alcune nozioni intorno alla media aritmetica semplice e ponderata.
1) ***La media aritmetica semplice*** è uguale alla somma dei termini divisa per il loro numero. In simboli si può così esprimere:

$$M_{as} = \frac{a + b + c + \ldots}{n}$$

Si supponga che un appezzamento di terreno abbia dato negli ultimi 4 anni le seguenti produzioni di frumento: quintali 32, 40, 24 e 36, e si voglia conoscere la produzione media annua. Avremo:

$$M_{as} = \frac{32 + 40 + 24 + 36}{4} = 33 \text{ q}$$

Nell'esempio illustrato, si vede quindi che le diverse produzioni, termini della media, sono originate dalla medesima grandezza, cioè dallo stesso appezzamento di terreno.
2) ***La media aritmetica è ponderata*** quando i termini entrano nel calcolo in numero diverso di volte a seconda dell'importanza che questi hanno.
In simboli si può così esprimere:

$$M_{ap} = \frac{(a \cdot x) + (b \cdot y) + (c \cdot z) + \ldots}{x + y + z + \ldots}$$

La media aritmetica ponderata differisce dalla semplice perché i diversi termini della media sono originati da grandezze diverse.
Un esempio può essere il seguente:
in seguito ad una grandinata 3 appezzamenti di un fondo investiti a grano hanno subito i seguenti danni: 30%, 12% e 25%. Le superfici sono rispettivamente di ha 2, 5 e 4.
Il danno medio per ettaro sarà:

$$M_{ap} = \frac{(30 \cdot 2) + (12 \cdot 5) + (25 \cdot 4)}{2 + 5 + 4} = \frac{220}{11} = 20\%$$

Fra l'altro, anche la ricerca del **saggio medio di rendimento** (detto saggio di capitalizzazione) **di un immobile si può determinare attraverso la *media aritmetica ponderata***. All'uopo è necessario conoscere i valori normali di mercato (V) e i redditi medi annui (R) di altri immobili *simili* per caratteristiche intrinseche ed estrinseche.
Così il saggio medio di rendimento (r) si otterrà svolgendo la seguente espressione generale:

$$r = \frac{R_1 + R_2 + \ldots R_n}{V_1 + V_2 + \ldots V_n} = \frac{\sum \text{redditi}}{\sum \text{valori}} = \text{saggio medio di rendimento}$$

E ciò sulla base del valore di un immobile determinato attraverso la capitalizzazione dei suoi redditi medi annui. Così:

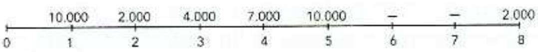
$$V = \frac{R}{r} \text{ da cui } r = \frac{R}{V} \text{ ed } R = V \cdot r$$

N.B. Errore grave sarebbe, pertanto, determinare il *saggio medio di rendimento* di altri immobili simili facendo la *media aritmetica semplice* dei saggi di rendimento dei singoli immobili presi a confronto. Così:

$$r = \frac{r_1 + r_2 + r_3 + \dots r_n}{n} = \textbf{Procedura errata.}$$

ESERCIZIO N. 50 - *Siano date le spese annue variabili per 8 anni come segue: 1° 10.000 euro; 2° 4.000 euro; 4° 7.000 euro; 5° 10.000 euro; 6° e 7° nessuna spesa; 8° 2.000 euro. Sia r = 0,05.*
Calcolare la spesa media annua posticipata in euro.

Graficamente:



Numericamente:

$$A_8 = 10.000\ q^7 + 2.000\ q^6 + 4.000\ q^5 + 7.000\ q^4 + 10.000\ q^3 + 2.000 = € \ 43.730 \text{ (accumulazione finale)}$$

La spesa media annua posticipata risulterà come segue:

$$a = A_n \frac{r}{q^n - 1}$$

$$a = 43.730 \frac{0{,}05}{1{,}05^8 - 1} = € \ 4.579 \text{ (spesa media annua)}$$

Per la determinazione dell'annualità media si è proceduto all'accumulazione finale dei valori annui variabili, ma si poteva egualmente determinarla partendo dall'accumulazione iniziale.
Infatti per determinare la stessa annualità media, partendo dall'accumulazione iniziale delle spese annue variabili del presente esercizio, si procederà nel modo che segue:

$$A_0 = 10.000 \frac{1}{q} + 2.000 \frac{1}{q^2} + 4.000 \frac{1}{q^3} + 7.000 \frac{1}{q^4} + $$
$$+ 10.000 \frac{1}{q^5} + 2.000 \frac{1}{q^8} = € \ 29.598$$

$$a = 29.598 \frac{r\,q^8}{q^8 - 1} = € \ 4.579 \text{ (spesa media annua)}$$

Per concludere, ogni qualvolta si voglia determinare il valore medio annuo di una serie di valori annui variabili, si dovranno conoscere l'accumulazione finale o iniziale dei suddetti valori annui variabili, il saggio di interesse, il tempo espresso in anni.

ESERCIZIO N. 51 - *Supposto che il reddito complessivo di un vigneto, accumulato alla fine della sua durata economica di 30 anni, sia di 100.000 euro, determinare il reddito medio annuo posticipato. Sia r = 0,05.*

Il valore annuo corrispondente si ricaverà dall'accumulazione finale di annualità costanti posticipate limitate. Così:

$$a = 100.000 \frac{0{,}05}{1{,}05^{30} - 1} = € \ 1.500 \text{ (reddito medio annuo)}$$

ESERCIZIO N. 52 - *Si supponga che nello stesso ciclo produttivo 4 appezzamenti di terreno di un'azienda agraria siano investiti a mais, e le superfici con le relative produzioni siano le seguenti:*

ha 3 con .... q 21 ad ha
ha 2 con .... q 38 ad ha
ha 4 con .... q 30 ad ha
ha 6 con .... q 42 ad ha

La produzione media per ettaro si otterrà, ovviamente, dividendo la produzione totale per la superficie totale. Quindi sarà:

$$Map = \frac{(21 \cdot 3) + (38 \cdot 2) + (30 \cdot 4) + (42 \cdot 6)}{3 + 2 + 4 + 6} = \text{q } 34$$

A completamento del presente paragrafo si riportano altri concetti di media al fine di raccogliere ulteriori fenomeni che presentano un campo di oscillazione più o meno grande e che consentono di esprimere giudizi o di fare delle comparazioni. Essi sono:

1) ***La mediana o valore mediano***: i valori di cui si vuol calcolare la media vengono ordinati in modo crescente o decrescente: il termine che si trova a metà della graduatoria si dice valore *mediano o mediana*.
Se i termini della media sono in numero pari, non esistendo alcun numero che bipartisce la graduatoria, nel senso sopraddetto, si assume come valore mediano la media aritmetica dei due termini centrali.
Se, ad esempio, lungo una strada si vuole collocare una pompa a favore di diverse famiglie, con uguale grado di utilizzazione, le cui abitazioni vengano espresse con un numero che rappresenti la distanza da un dato cippo marmoreo, a quale distanza si dovrà collocare la pompa dal cippo, per rendere minima la somma dei disagi fra tutti gli utenti? Si abbiano in proposito cinque abitazioni che distano dal cippo marmoreo, in ordine crescente: il 1° a 50 m; il 2° a 100 m; il 3° a 250 m; il 4° a 400 m; il 5° a 900 m. Il numero mediano è 250 e pertanto la pompa sarà collocata davanti all'abitazione che dista 250 m dal cippo marmoreo.

2) ***La media geometrica***: è uguale alla radice ennesima del prodotto degli n termini, e cioè:

$Mg = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}$ dove $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ sono i termini di una successione di numeri. La media geometrica non è possibile quando uno dei termini è zero. Essa viene usata, ad esempio, per determinare l'incremento legnoso medio dei boschi.

3) ***La moda o valore normale***: si dice valore normale, in una serie di valori che si ripetono più volte, quello che si presenta col maggior numero di volte, e cioè il più frequente. Nella rilevazione dei prezzi medi di mercato di un dato bene, ad esempio, sarà corretto assumere come prezzo quello che rispecchia il valore normale del mercato, scartando gli altri come valori non ordinari.

7.9 Problemi sui riparti

I riparti sono operazioni che hanno lo scopo di ripartire dei valori (somme, prodotti, debiti, crediti, spese, ecc.) proporzionalmente a degli elementi dati.

Il riparto può essere: semplice diretto, semplice inverso, composto diretto, composto inverso, misto.

Il riparto semplice e quello misto trovano una più frequente applicazione nella pratica.

7.9.1 Riparto semplice diretto

Le quote aumentano o diminuiscono direttamente coll'aumentare o col diminuire di una serie di elementi noti.

Sia, ad esempio, da ripartire una somma S in due parti X e Y direttamente proporzionali ad a e b; ciò si ottiene con una semplice proporzione.

$$S : (a + b) = X : a \qquad \text{da cui: } X = \frac{S}{a+b}\, a$$

$$S : (a + b) = Y : b \qquad \text{da cui: } Y = \frac{S}{a+b}\, b$$

In definitiva, quindi, ogni quota si ottiene dividendo la somma da ripartire S per il numero risultante dalla somma degli elementi e moltiplicando il relativo quoziente fisso per il numero corrispondente ad ogni elemento.

Esercizio n. 53 - *Tre proprietari A, B, C, di comune accordo, per il compimento di una importante opera irrigua, sostengono complessivamente una spesa di 135.000 euro. Tale spesa deve essere ripartita in proporzione diretta all'estensione del terreno posseduto dai singoli proprietari. Le superfici dei tre proprietari sono, rispettivamente, di ettari 30, 12 e 48.*

Si vuol sapere la quota di spesa spettante ad ognuno.

Dividendo la spesa totale o somma da ripartire per il numero totale degli ettari, si ottiene la spesa unitaria per ettaro e cioè il quoziente fisso; le singole quote, quindi, si otterranno moltiplicando la spesa unitaria per il numero degli ettari di ciascun proprietario. Infatti:

$$\text{Spesa ad ha} = \frac{135.000}{30 + 12 + 48} = \frac{135.000}{90} = € \ 1.500$$

Le quote saranno rispettivamente:

Proprietario A = (1.500 · 30)	€ 45.000
Proprietario B = (1.500 · 12)	€ 18.000
Proprietario C = (1.500 · 48)	€ 72.000
Spesa totale	€ 135.000

7.9.2 Riparto semplice inverso

Le quote aumentano col diminuire di una serie di elementi dati e viceversa. Il problema è analogo al precedente, con l'avvertenza, però, che la somma da ripartire viene suddivisa in proporzione diretta all'inverso dei numeri degli elementi dati.

Si voglia, a titolo esemplificativo, ripartire una somma S in due parti X e Y inversamente proporzionali ad a e b; impostando la relativa proporzione si ha:

$$S : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = X : \frac{1}{a} \qquad \text{da cui: } X = \frac{S}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \frac{1}{a}$$

$$S : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = Y : \frac{1}{b} \qquad \text{da cui: } Y = \frac{S}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \frac{1}{b}$$

Esercizio n. 54 - *Due fratelli A e B hanno sostenuto di comune accordo una spesa di 45.000 euro. La spesa va ripartita fra loro in modo che le parti siano inversamente proporzionali a 2 per A e a 3 per B.*

Si vuol conoscere il valore della parte spettante ad ognuno.

Naturalmente il valore da ripartire di 45.000 euro andrà diviso in proporzione diretta a $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$. Così:

$$\text{Quoziente fisso} = \frac{45.000}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{45.000}{\frac{5}{6}} = € \ 54.000$$

$$\text{Quota del fratello } A = 54.000 \ \frac{1}{2} = € \ 27.000$$

$$\text{Quota del fratello } B = 54.000 \ \frac{1}{3} = € \ 18.000$$

Spesa totale € 45.000

7.9.3 Riparto misto

Ogni quota deve essere direttamente proporzionale ad un elemento ed inversamente ad un altro.

In definitiva, poi, anche qui le cose procedono come nel riparto diretto semplice; poiché le quote dovranno naturalmente essere direttamente proporzionali a delle *frazioni* aventi a numeratore gli elementi diretti ed a denominatore quelli inversi.

Sia, ad esempio, da ripartire una somma S in due parti X e Y direttamente proporzionali ad a e b ed inversamente ad m ed n.

Il problema si risolve come segue:

$$S : \left(\frac{a}{m} + \frac{b}{n}\right) = X : \frac{a}{m} \qquad \text{da cui: } X = \frac{S}{\frac{a}{m} + \frac{b}{n}} \frac{a}{m}$$

$$S : \left(\frac{a}{m} + \frac{b}{n}\right) = Y : \frac{b}{n} \qquad \text{da cui: } Y = \frac{S}{\frac{a}{m} + \frac{b}{n}} \frac{b}{n}$$

ESERCIZIO N. 55 - *Tre proprietari di terreni: A, B e C, situati in pianura in vicinanza di un torrente, stabiliscono di costruire insieme un argine che valga a difendere i loro terreni dalle piene.*

Dal progetto appositamente redatto per tale lavoro risulta che l'argine per quel tratto richiederà una spesa complessiva di 30.000 euro. Si domanda al perito la ripartizione di questa spesa in ragione diretta dell'estensione dei terreni ed in ragione inversa della loro media distanza dalla sponda del torrente.

Le superfici sono rispettivamente di ettari 8, 15 e 10 e le distanze medie sono 3, 4, 5.

La spesa sarà ripartita in proporzione diretta a $\frac{8}{3}$, $\frac{15}{4}$ e $\frac{10}{5}$

$$\text{Quoziente fisso} = \frac{30.000}{\frac{8}{3} + \frac{15}{4} + \frac{10}{5}} = \frac{30.000}{\frac{505}{60}} = € \ 3.564$$

La spesa risulterà così ripartita:

Proprietario $A = 3.564 \frac{8}{3}$ .... = € 9.505

Proprietario $B = 3.564 \frac{15}{4}$ .... = € 13.366

Proprietario $C = 3.564 \frac{10}{5}$ .... = € 7.129

Spesa totale .... € 30.000

7.10 Problemi relativi alla capitalizzazione dei redditi

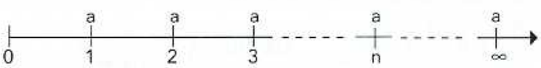
Da quanto finora esposto si è delineato, tra l'altro, che nelle applicazioni finanziario-estimative risulta di fondamentale importanza il principio per cui ***il valore** (V) **di un immobile capace di fornire un reddito equivale alla somma dei suoi redditi futuri scontati all'attualità***. Con altre parole, l'accumulazione iniziale (A_0) dei redditi futuri di un immobile coincide col suo valore di capitalizzazione, il quale, a sua volta, dovrebbe approssimarsi, qualora sia richiesto, col più probabile valore di mercato dell'immobile stesso, ove questo esista.

A chiarimento di tale fondamento si riportano qui di seguito, dato un saggio di capitalizzazione r, alcuni casi esemplificativi, a carattere generale, sulla determinazione del valore di un immobile attraverso la capitalizzazione del suo reddito, che in ogni caso si deve ritenere posticipato, sia esso limitato o illimitato, annuo o periodico.

N.B. Le espressioni matematiche riportate in testo non devono essere mandate a memoria ma soltanto adeguatamente interpretate e studiate sulla base di un ragionamento logico e deduttivo. Ogni espressione matematico-finanziaria deve essere desunta da una impostazione economico-estimativa ragionata e pertinente al caso concreto.
Illimitato, come già rilevato in altra sede, si intende normalmente quel reddito annuo o periodico che si ripete per un periodo di tempo superiore agli 80 anni. Un reddito, per contro, che si ripeta per un periodo inferiore agli 80 anni si considera, generalmente, limitato.

a) ***Immobile capace di fornire un reddito annuo, costante, posticipato e illimitato*** (es.: un fondo rustico, un fabbricato civile, un arboreto autonomo assestato a governo annuo, ecc.).

Graficamente:

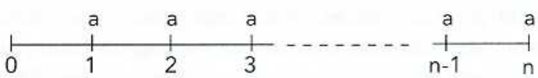


Numericamente:

$$V = \frac{a}{r} = A_0$$

b) ***Immobile capace di fornire un reddito annuo, costante, posticipato e limitato*** (es.: cava, miniera, ecc.).

Graficamente:



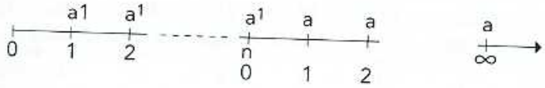
Numericamente:

$$V = a \, \frac{q^n - 1}{r \, q^n} = A_0$$

c) ***Immobile capace di fornire attualmente e per* n *anni un reddito annuo posticipato*** (a') ***e che dall'an-***

no n *fornirà un reddito costante, annuo e infinito* (a) (es.: fondo rustico o fabbricato civile temporaneamente con un reddito inferiore a quello ritenuto normale).

Graficamente:



Numericamente:

$$V = a' \frac{q^n - 1}{r\, q^n} + \frac{a}{r} \cdot \frac{1}{q^n} = A_0$$

Oppure:

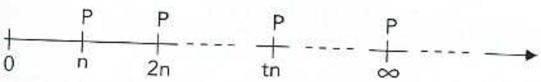
$$V = \frac{a}{r} - (a - a') \frac{q^n - 1}{r\, q^n} = A_0$$

Oppure:

$$V = \frac{a'}{r} + \frac{a - a'}{r} \frac{1}{q^n} = A_0$$

d) ***Immobile capace di fornire ogni* n *anni e all'infinito un reddito costante, periodico e posticipato* (P).** (es.: arboreto di piante coetanee, uniforme e autonomo che si ripeta indefinitamente sullo stesso terreno).

Graficamente:



Numericamente:

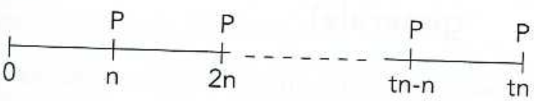
$$V = P \frac{1}{q^n - 1} = A_0$$

dove:

$$P = \sum_0^n Pr - \sum_0^n Sp = \sum_0^n Bf$$

e) ***Immobile capace di fornire ogni* n *anni e solo per* t *periodi un reddito periodico costante e posticipato* (P).** (es.: un caso realistico talora negli arboreti).

Graficamente:



Numericamente:

$$V = P \frac{q^{tn} - 1}{q^n - 1} \frac{1}{q^{tn}} = A_0$$

A conclusione di quanto esposto si rileva infine che, a parità di condizioni, il valore di un immobile in base ai suoi redditi futuri, ottenuto con una delle suindicate espressioni è, come è ovvio, direttamente proporzionale al reddito e inversamente al saggio di sconto, meglio conosciuto come saggio di capitalizzazione o saggio di rendimento. Pertanto il perito, in casi del genere, dovrà avere cura di determinare il più verosimile saggio di capitalizzazione da adottare, altrettanto bene come nei confronti dei redditi futuri dell'immobile, in armonia, ben si intende, con la ragione pratica della valutazione o col caso concreto di stima e, ove esista, con il mercato di beni immobili simili, per condizioni intrinseche ed estrinseche, a quello oggetto di stima.

N.B. Si ritiene opportuno ripetere che i redditi soggetti a capitalizzazione *sono sempre riferiti "esclusivamente" alla persona economica del puro proprietario dell'immobile.* Avremo così che: Reddito = Ricavi – Spese afferenti al puro proprietario. I redditi, come già evidenziato, possono essere annui, periodici, limitati, illimitati, costanti o variabili.

7.11. Redditi transitori e permanenti di un immobile

Avviene talvolta che certi immobili, quali fondi rustici e fabbricati urbani, diano all'attualità e per un certo numero di anni, un reddito (*Bf*, *Rn*, ecc.) diverso da quello che, trascorso questo periodo, daranno poi indefinitamente.

Per reddito transitorio si intende un reddito maggiore o minore di quello normale che si verificherà all'infinito in condizioni ordinarie.

Di solito il reddito transitorio è minore di quello permanente, come avviene ad esempio, nei fondi in corso di bonifica, nei fondi affittati ad un canone diverso da quello che si presume di poter realizzare in condizioni normali, nei fabbricati civili affittati ad un canone non adeguato al valore di mercato; è maggiore, ad esempio, nel caso di fabbricati temporaneamente affittati ad un canone superiore a quello normale. Altri casi simili, fra l'altro, si possono verificare nel caso di edifici con destinazione diversa da quella abitativa.

In queste situazioni sarà cura del perito conoscere e fissare i dati necessari, e precisamente:

a) ***l'ammontare del reddito attuale, e cioè corrente al momento di stima*** (reddito transitorio);
b) ***il più probabile reddito futuro medio e continuativo ritraibile in regime di normalità;***
c) ***il numero degli anni che presumibilmente trascorreranno prima di ottenere il reddito normale continuativo.***

Ora, nel caso in esame, il valore attuale di un immobile che fornisce un reddito transitorio, si determina capitalizzando il reddito normale continuativo permanente e sottraendo od aggiungendo, al valore così determinato, l'accumulazione iniziale della differenza tra i due redditi, per tanti anni quanti sono quelli che indicano la durata del periodo transitorio prefissato o prevedibile.

L'ammontare del reddito differenziale per n anni si ottiene con la formula dell'accumulazione iniziale di annualità costanti, posticipate e limitate:

$$A_0 = a \frac{q^n - 1}{r\, q^n}$$

Perciò, il valore attuale di un immobile a reddito transitorio si può rappresentare come segue:

$$V_a = V_n \pm R_d \frac{q^n - 1}{r\, q^n}$$

dove:

V_a = valore attuale dell'immobile al momento della stima;

V_n = valore normale che avrebbe l'immobile all'attualità in riferimento al suo reddito normale continuativo permanente;

R_d = reddito ottenuto per differenza tra i due redditi noti;

n = numero degli anni che trascorreranno prima di ottenere il reddito normale continuativo.

Al valore V_n si può fare l'aggiunta o la detrazione del valore trovato con l'ammontare del reddito differenziale $\left(Rd \frac{q^n - 1}{r\, q^n}\right)$ solo perché ambedue i valori sono omogenei in quanto riferiti allo stesso momento e, nel caso in esame, a quello che coincide con l'anno zero, momento della stima.

Si fa presente d'altra parte che il valore attuale di un immobile a reddito transitorio si può ugualmente determinare seguendo, invece, un altro procedimento, e cioè riportando all'anno zero, momento di stima, tanto i redditi transitori come quello continuativo e permanente, ed eseguire quindi la relativa somma aritmetica. Naturalmente il risultato dei due calcoli è identico in quanto il valore di un immobile, in un determinato momento, in particolari circostanze e per una data ragione pratica, è quello che è, ed è sempre lo stesso, a prescindere dal procedimento seguito per la sua rilevazione.

ESERCIZIO N. 56 - *Un perito chiamato a determinare il valore di un immobile presentemente affittato ad un canone annuo di 5.000 euro, già al netto di tutte le spese a carico del proprietario e quindi corrispondente al Bf, rileva che il canone congruo normale, sempre al netto di ogni spesa, sarebbe invece di 7.000 euro.*
Il contratto d'affittanza scade fra 4 anni. Sia r = *0,05.*

Graficamente la serie dei redditi si può rappresentare come segue:

	Bf_a	Bf_a	Bf_a	Bf_a	Bf_p	Bf_p
	5.000	5.000	5.000	5.000	7.000	7.000 → ∞
0	1	2	3	4	5	6

ove:

Bf_a = beneficio fondiario attuale transitorio;

Bf_p = beneficio fondiario continuativo e permanente.

Come già rilevato in precedenza, due sono i procedimenti che possono fornire il valore del fondo in esame.

a) $V_a = V_p - R_d \frac{q^n - 1}{r\, q^n} = \frac{Bf_p}{r} - (Bf_p - Bf_a) \frac{q^n - 1}{r\, q^n}$

$$V_a = \frac{7.000}{0{,}05} - (7.000 - 5.000) \frac{1{,}05^4 - 1}{0{,}05 \cdot 1{,}05^4} =$$

$= 140.000 - 2.000 \cdot 3{,}5460 = 140.000 - 7.092 =$

$= 132.908$ (valore attuale dell'immobile in euro)

b) $V_a = Bf_a \frac{q^n - 1}{r\, q^n} + \frac{Bf_p}{r} \frac{1}{q^n}$

$$V_a = 5.000 \frac{1{,}05^4 - 1}{0{,}05 \cdot 1{,}05^4} + \frac{7.000}{0{,}05} \frac{1}{1{,}05^4} =$$

$= 5.000 \cdot 3{,}5460 + 140.000 \cdot 0{,}8227 = 17.730 + 115.178 =$

$= 132.908$ (valore attuale dell'immobile in euro)

N.B. Come si è detto, con i due procedimenti impiegati si ottiene lo stesso valore; ciò dimostra ancora una volta, che il valore di un immobile, capace di generare un reddito, coincide sempre con la somma di tutti i suoi presunti o previsti redditi futuri scontati all'attualità ad un adeguato saggio di capitalizzazione.

7.12 Essenza della matematica finanziaria (Ricapitolazione generale)

Da quanto esposto nel presente capitolo, si può rilevare che per risolvere i problemi che comportino l'applicazione della matematica finanziaria, basterà ricordare, in sostanza, quanto di seguito viene qui esposto poiché, costituendone l'essenza, ogni altra formula o espressione, semplice o complessa, non può derivare che da questa e, comunque, sempre da un ragionamento logico, previa impostazione di opportuni grafici.

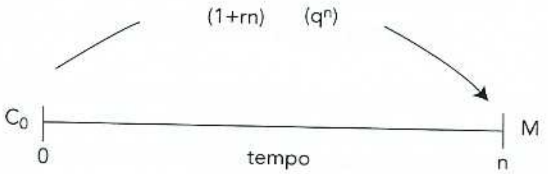
a) r = saggio unitario di interesse (per un euro in un anno).

b) $q = 1 + r$: montante unitario (capitale di un euro più gli interessi annui relativi).

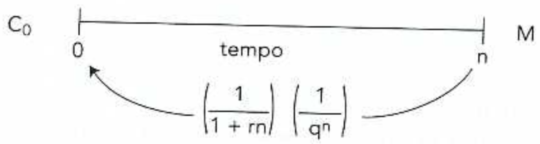
c) $I = C_0 \cdot r \cdot n$: formula dell'interesse semplice, applicabile normalmente per tempi inferiori ad un anno.

d) $In = C_0 (q^n - 1)$: formula dell'interesse composto, applicabile normalmente per tempi superiori ad un anno.

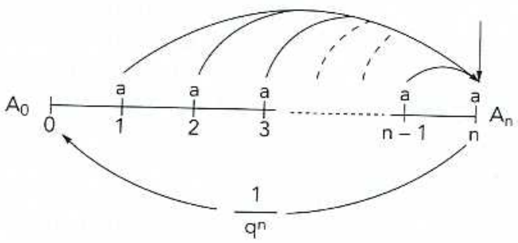
e) $(1 + r \cdot n)$ e (q^n): ***coefficienti di posticipazione*** di un capitale nel tempo rispettivamente ad interesse semplice e composto, per ottenere il corrispondente montante o capitale futuro (M).



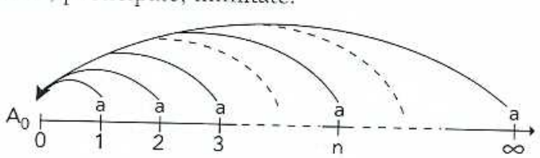
f) $\dfrac{1}{1 + rn}$ e $\dfrac{1}{q^n}$: ***coefficienti di anticipazione*** di un capitale nel tempo rispettivamente a sconto semplice e composto, per ottenere il corrispondente capitale presente o valore scontato (C_0).



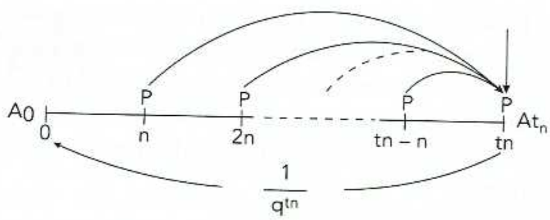
g) $A_n = a \dfrac{q^n - 1}{r}$: accumulazione finale di annualità costanti, posticipate, limitate.



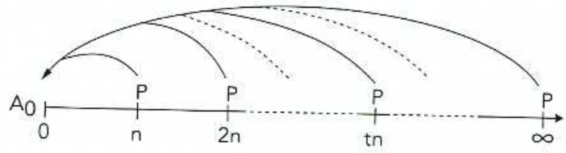
h) $A_0 = \dfrac{a}{r}$: accumulazione iniziale di annualità costanti, posticipate, illimitate.



i) $At_n = P \dfrac{q^{tn} - 1}{q^n - 1}$: accumulazione finale di periodicità costanti, posticipate, limitate.



l) $A_0 = P \dfrac{1}{q^n - 1}$: accumulazione iniziale di periodicità costanti, posticipate, illimitate.



m) $Q/re = A_n \dfrac{r}{q^n - 1} = a$: quota di reintegrazione o, meglio, per costituire un capitale (A_n) nel tempo di n anni, accantonando una somma annua posticipata (a) ad un dato saggio (r); oppure per determinare il valore medio annuo posticipato (a) di un capitale (A_n) riferito o verificabile alla fine di un dato periodo.

n) $Q/am = A_0 \dfrac{r\,q^n}{q^n - 1} = a$: quota di ammortamento per estinguere un debito in n rate annuali posticipate ad un dato saggio (r) in un determinato periodo di tempo; oppure per conoscere il valore medio annuo posticipato di un capitale (A_0) riferito o verificabile all'inizio di un dato periodo.

o) Nella risoluzione, infine, di ogni quesito estimativo che richieda l'applicazione della matematica finanziaria, si devono sempre tenere presenti i seguenti principi fondamentali:

1) Ogni valore non può essere spostato nel tempo senza tener conto del relativo interesse o sconto.
2) L'interesse (e lo sconto) semplice, con i problemi relativi, non si calcola *mai*, per un tempo superiore ad un anno, se non nei casi esplicitamente dichiarati; diversamente, e cioè per tempi maggiori di un anno, si tratterà *sempre* di applicare i problemi dell'interesse composto discontinuo-annuo, salvo eccezioni per disposizione di legge.
3) Non si possono eseguire addizioni, sottrazioni e confronti fra valori riferiti ad epoche diverse: per poterlo fare i valori devono dapprima essere sempre resi omogenei e cioè, con altri termini, riportati allo stesso momento con l'impiego dei coefficienti di cui alle lettere e) ed f).
4) Il più probabile valore di mercato di un immobile capace di fornire un reddito – sia esso annuo o

periodico, limitato o illimitato, costante o variabile – corrisponde, o dovrebbe corrispondere, all'accumulazione iniziale dei suoi redditi futuri mediante l'impiego di un opportuno e adeguato saggio di capitalizzazione, e cioè di effettivo rendimento.

Si ribadisce ancora una volta che il reddito di un immobile produttivo, qualunque esso sia, *si calcola con esclusivo riferimento alla persona economica del "puro proprietario dell'immobile stesso"*.
Si osserva però che in assenza di mercato, o anche per esigenze del committente, l'accumulazione iniziale dei prevedibili redditi futuri di un immobile corrisponderà, invece, all'aspetto economico del "*valore di capitalizzazione*".