Appunti per il corso di

Geometria

Gianfranco Niesi
niesi@dima.unige.it

Corso di Laurea in Informatica
Corso di Diploma in Informatica
a.a. 1999-2000

Indice

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Geometria analitica e algebra lineare

Uno degli obiettivi di questo corso è l'introduzione allo studio della geometria del *piano* e dello *spazio euclideo* col metodo delle coordinate (*geometria analitica*) adottando il linguaggio dei vettori. Alla base di tale metodo è il concetto di *sistema di riferimento* che consente di associare ad enti geometrici (punto, retta, piano,...) degli enti algebrici (n-uple di numeri reali ed equazioni) riducendo quindi i problemi geometrici a problemi algebrici.

Questa impostazione porta, in modo naturale, ad affrontare tale studio in un contesto più generale: da una parte anzicché fare riferimento ai numeri reali, si può considerare un corpo qualunque; d'altra parte si può studiare sistematicamente gli oggetti algebrici di cui sopra, indipendentemente dalla loro interpretazione geometrica. Tale studio è argomento della teoria degli spazi vettoriali o, più in generale, dell'*algebra lineare* ed è l'altro obiettivo del corso.

Procederemo quindi nel modo seguente: dopo aver introdotto il concetto di sistema di riferimento per i punti di una retta, di un piano e dello spazio, svilupperemo alcuni strumenti algebrici necessari in seguito, soffermandoci sulle matrici e sistemi di equazioni lineari; in particolare vedremo un criterio per stabilire se un sistema lineare ha soluzioni (teorema di Rouché-Capelli) e, nel caso ne abbia, un algoritmo per determinare tutte le sue soluzioni (algoritmo di Gauss).

Il capitolo 3 è dedicato ai vettori geometrici (segmenti orientati), strumento molto importante nello studio della geometria delle rette nel piano e delle rette e dei piani nello spazio, argomento del capitolo 4. Vedremo in particolare i vari modi di rappresentare rette e piani e come utilizzare tali rappresentazioni in alcuni tipici problemi (parallelismo, ortogonalità, proiezioni, simmetrie, distanze).

Le n-uple di elementi di un corpo, le matrici, le soluzioni di un sistema lineare omogeneo, i vettori geometrici hanno una comune struttura algebrica, detta struttura di spazio vettoriale. La seconda parte del corso è dedicata allo studio degli spazi vettoriali in astratto: introdurremo varie nozioni che generalizzano alcuni fatti geometrici trattati nella prima parte nel caso del piano e dello spazio; ad esempio al concetto di "sistema di riferimento" e di "trasformazione coordinate" corrispondono rispettivamente la nozione di "base di uno spazio vettoriale" e di "cambio di base"' o più in generale di "isomorfismo".

L'ultima parte del corso è dedicata al problema di "trovare dei buoni sistemi di riferimento per semplificare la rappresentazione di un oggetto" . Tratteremo il problema per gli omomorfismi di uno spazio vettoriale in sè stesso (diagonalizzazione). Una applicazione interessante si ha nello studio delle coniche, cioè delle curve del piano che possono essere rappresentate mediante un'equazione di secondo grado: mostreremo che vi sono tre tipi di coniche (iperboli, parabole, ellissi) e che, data una conica, è sempre possibile, a partire dalla sua equazione, determinare un cambiamento di coordinate che trasforma l'equazione della conica in "forma canonica".

Prima di affrontare gli argomenti veri e propri del corso, è opportuno vedere come il programma delineato sopra si raccordi con la Geometria studiata nelle scuole medie superiori e accennare a che cosa intendiamo oggi per Geometria.

1.2 Il metodo assiomatico di Euclide

Nella scuola media superiore si studia la geometria euclidea del piano e dello spazio col metodo assiomatico deduttivo introdotto dai Greci. Il primo studioso che trattò la Geometria come una struttura logica fu Talete (640-546 a.C.). Successivamente Euclide (300 a.C.) raccolse e riorganizzò nei suoi *Elementi* la maggior parte delle conoscenze geometriche di quel tempo. Il metodo adottato da Euclide consiste nel

- definire tutti gli oggetti da studiare quali ad esempio i punti e le rette ("il punto è ciò che non ha parti" oppure "una linea è un lunghezza senza larghezza");
- individuare un insieme finito di assiomi o postulati, ovvero proprietà di tali oggetti autoevidenti – che non necessitano quindi di dimostrazione – ad es. "si può tracciare una retta da un qualunque punto ad un qualunque punto";
- dedurre con le regole logiche i teoremi (ovvero altre affermazioni *vere*).

Da allora, per circa 2000 anni, lo sviluppo della Geometria è consistito principalmente nell'ampliare e migliorare la costruzione di Euclide; infatti non sempre tutte le ipotesi usate nelle dimostrazioni erano esplicitamente formulate e non tutti gli assiomi erano considerati abbastanza *autoevidenti*. In particolare il quinto postulato che asserisce:

> *se una retta r taglia altre due rette s e t formando dalla stessa parte due angoli interni minori di due angoli retti, le due rette s e t si incontrano in un punto che sta dalla parte dei due angoli interni che sono minori di due angoli retti*

non fu considerato semplice e ovvio come i primi 4. Lo stesso Euclide dimostrò le prime 28 proposizioni senza usarlo.

Per circa 20 secoli ci fu quindi un enorme sforzo da parte dei matematici per tentare di dedurre questo assioma dai primi 4 e dalle prime 28 proposizioni, cercando anche proposizioni equivalenti ad esso, quali ad es.

> *date due rette parallele, se una retta interseca una di esse allora interseca anche l'altra* (Proclo, 400 d.C.)

oppure

> *per un punto non appartenente ad una retta data si può condurre una sola retta parallela alla retta data* (Playfair, 1748-1819).

Queste due proposizioni possono essere dedotte dai postulati di Euclide e il quinto postulato può essere dedotto come teorema se ai primi 4 si aggiunge come assioma una di queste due affermazioni.

Solo nel 1800 si giunse alla conclusione che non solo il quinto postulato non può essere dimostrato, ma anzi si può costruire una geometria (come sistema logico) senza usarlo. Questo passo fondamentale segna la nascita delle geometrie non euclidee (1830) ed è dovuto a Gauss (1777-1855), Lobachevsky (1793-1856), Bolyai (1802-1860) (geometria iperbolica) Riemann (1826-1866) (geometrie ellittiche) .

La scoperta delle geometrie non euclidee ebbe notevole impatto sul pensiero filosofico dando nuovo significato al concetto di verità. Fino a quel tempo i postulati di Euclide erano considerati come verità assolute e non come pure ipotesi non più *vere* di altre ipotesi che potevano contraddirle. Da quel momento non ci fu più *la vera geometria* ma fu chiaro che tutto ciò che si può dire sulla verità di *una geometria* considerata come sistema matematico è che se i postulati sono assunti come veri, allora i teoremi che ne conseguono sono necessariamente veri.

La questione ha un aspetto diverso quando la geometria è considerata come una descrizione dell'universo fisico. Allora la questione è vedere quale geometria si accorda meglio con l'evidenza sperimentale. In altre parole per le applicazioni al mondo fisico scegliamo il sistema matematico più conveniente. Così la fisica classica usa la geometria euclidea ma, ad esempio, Einstein nei suoi studi sulla relatività usò una geometria ellittica, più recentemente in questioni di astronomia è stata usata la geometria iperbolica.

La scoperta delle geometrie non euclidee e il conseguente moltiplicarsi delle teorie geometriche portò da una parte a chiedersi cosa debba intendersi per geometria e dall'altra a uno studio critico dei fondamenti della geometria euclidea e della natura dei sistemi di assiomi in generale. Alla prima questione un'importante risposta fu data da F. Klein nel 1872 il quale propose la seguente definizione di Geometria.

> *Una Geometria di un insieme S è lo studio delle proprietà di S (e dei suoi sottoinsiemi) che sono invarianti quando gli elementi di S sono soggetti alle trasformazioni di un gruppo fissato.*

La prima e più importante risposta all'altra questione fu data nel 1898-99 da David Hilbert (1862-1943), il quale propose un sistema di assiomi per la geometria euclidea. Allo stesso tempo Hilbert mise in evidenza il fatto che una teoria assiomatica deve avere dei *termini indefiniti* e delle *relazioni tra i termini* definite da un numero finito di assiomi. Così la geometria euclidea del piano nell'impostazione di Hilbert consiste dei termini *punto, retta, piano*, delle relazioni *incidenza, stare tra, congruenza, separazione* e da cinque gruppi di assiomi che sono riportati nell'Appendice A. Riportiamo qui solo il primo gruppo di assiomi (*assiomi di incidenza*) che riguardano la relazione di incidenza tra un punto e una retta e tra una retta e un punto.

- I-1 Dati due punti distinti, esiste una retta incidente con entrambi i punti.
- I-2 Dati due punti distinti, esiste al più una retta incidente con entrambi i punti.
- I-3 Ogni retta è incidente con almeno due punti ed esistono almeno tre punti che non sono incidenti con la stessa retta.
- I-4 Tre punti non incidenti con la stessa retta determinano uno ed uno solo piano.

Vediamo un esempio di teorema, ovvero una affermazione che è conseguenza logica degli assiomi di incidenza.

Teorema *Date due rette distinte, esiste al più un punto incidente con entrambe le rette.*
Dim. Siano r ed s due rette e siano A e B due punti incidenti con entrambe le rette. Esiste una retta t incidente con A e B. (Assioma I-1)
La retta t è unica. (Assioma I-2)
Quindi $r = t = s$. □

Per semplificare alcuni enunciati si usa introdurre delle *definizioni.* Ad esempio: se un punto e una retta sono incidenti si usa dire che *il punto sta sulla retta* oppure che *la retta passa per il punto*; il primo assioma si può così riformulare: *Per due punti distinti passa una retta.*

Concludiamo questa parte accennando ai *Sistemi di Assiomi Astratti* di cui il sistema di assiomi di Hilbert per la geometria euclidea costituisce un notevole esempio.
Una teoria deduttiva astratta si costruisce scegliendo un sistema di assiomi, ovvero

- un insieme di termini indefiniti;
- un insieme di relazioni tra termini;
- un insieme di assiomi che li contiene.

La teoria è allora sviluppata deducendo i teoremi da questi assiomi o da teoremi precedentemente provati mediante la logica scelta.
Il sistema di assiomi come tale è senza significato e la questione della *verità* degli assiomi è irrilevante.
Se possiamo assegnare un significato ai termini indefiniti e alle relazioni in modo tale che gli assiomi siano giudicati "veri" si dice che abbiamo un *modello* del sistema di assiomi astratto. Allora tutti i teoremi sono "veri" nel senso del modello accettato.

Esempio. Consideriamo l'insieme di elementi indefiniti $a, b, c, \ldots$ e una relazione binaria $\mathcal{R}$ che soddisfa gli assiomi
(A1) Se $a \,\mathcal{R}\, b$, allora $a \neq b$;
(A2) Se $a \,\mathcal{R}\, b$ e $b \,\mathcal{R}\, c$, allora $a \,\mathcal{R}\, c$;
Un modello per questo sistema di assiomi astratto si ottiene interpretando i termini come numeri interi positivi e interpretando la relazione $\mathcal{R}$ come a *minore di* b.

Un altro modello si ottiene se si considerano come termini le persone e si interpreta $a\,\mathcal{R}\,b$ come *a è antenato di b*.

Un sistema di assiomi per avere un qualche interesse deve essere *consistente*, cioè deve essere tale che non sia possibile dedurre dagli assiomi un teorema che contraddice un assioma o un teorema già provato. In generale non possiamo provare la consistenza di una teoria, ma possiamo provare la *consistenza relativa* esibendo un modello, cioè assegnando significato ai termini e alle relazioni in modo tale da considerare validi gli assiomi. In tal modo si mostra che il nostro sistema di assiomi è consistente se il modello è consistente.

Nel seguito vedremo che introducendo il concetto di sistema di riferimento in un piano euclideo si può identificare un punto del piano con una coppia di numeri reali, una retta con un'equazione del tipo $ax + by + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$; l'appartenenza di un punto ad una retta corrisponde allora al fatto che la coppia corrispondente al punto verifica l'equazione corrispondente alla retta, ecc. Questa interpretazione di 'punto', 'retta' e delle relazioni tra essi dà luogo a un modello della geometria euclidea nell'ambito dei numeri reali. Pertanto se la teoria dei numeri reali è consistente, anche la geometria euclidea lo è.

1.3 Coordinate cartesiane

In questo numero introdurremo la nozione di sistema di riferimento o sistema di coordinate per i punti di una retta, di un piano e dello spazio. Ovunque sarà necessario faremo uso delle proprietà del corpo dei numeri reali $\mathbb{R}$. Ricordiamo che $\mathbb{R}$ è un corpo commutativo, ordinato e completo[1]; queste proprietà individuano univocamente $\mathbb{R}$ a meno di isomorfismi.

1.3.1 Coordinate ascisse su una retta

Un *sistema di ascisse* su una retta r è determinato da due suoi punti distinti: un punto O detto *origine* e un punto U detto *punto unità.* Se P è un punto della retta r, poniamo $P \geq O$ se P appartiene alla semiretta di origine O che contiene U altrimenti poniamo $P < O$. Questo equivale a fissare su r uno dei due versi, che chiamiamo *verso positivo* (retta orientata) e un'unità di misura (il segmento OU) per i segmenti di r.

Nel seguito denotiamo con $\overline{OP}$ il segmento di estremi O, P.

L'*ascissa* di un punto P della retta r rispetto al sistema di riferimento $\{O, U\}$ è il numero reale $x(P)$ così definito:

$$x(P) = \begin{cases} \frac{\overline{OP}}{\overline{OU}} & \text{se} \quad P \geq O \\ \\ -\frac{\overline{OP}}{\overline{OU}} & \text{se} \quad P < O \end{cases}$$

Si ha quindi $x(O) = 0$ e $x(U) = 1$. Una retta dotata di un sistema di ascisse si dice *retta affine.*

Una retta affine è quindi orientata, il verso positivo essendo quello della semiretta di origine O che contiene U.

La *distanza* tra due punti P e Q di una retta affine è

$$d(P, Q) = |x(P) - x(Q)| \ .$$

Dicesi *segmento orientato* di estremi P e Q la coppia ordinata (P, Q). La *misura algebrica* del segmento orientato (P, Q) è

[1] $\mathbb{R}$ completo significa che dati comunque due sottoinsiemi non vuoti A e B di numeri reali, tali che ogni elemento di A sia minore di ogni elemento di B, esiste almeno un numero reale x che separa debolmente A e B, cioè $\forall a \in A, a \leq x$ e $\forall b \in B, b \geq x$.

$$PQ = x(Q) - x(P) \ .$$

Si ha allora

$$x(P) = \frac{OP}{OU} \ .$$

Sia $\{O', U'\}$ un secondo sistema di ascisse su r, e denotiamo con $x'(P)$ l'ascissa di P rispetto a $\{O', U'\}$. Si ha allora

$$x'(P) = \frac{O'P}{O'U'} = \frac{O'O}{O'U'} + \frac{OP}{O'U'} = \frac{O'O}{O'U'} + \frac{OU}{O'U'} \cdot \frac{OP}{OU} = \alpha x + \beta \tag{1.1}$$

che esprime la formula di cambiamento delle ascisse.

Siano r ed r' due rette con ascissa rispettivamente x e x'. Una *trasformazione affine* o *affinità* tra r ed r' è un'applicazione bigettiva $T : r \to r'$ data da

$$x' = T(x) = ax + b \qquad (a \neq 0) \tag{1.2}$$

Oss. Formalmente la (1.1) e la (1.2) sono simili, ma il loro significato è assai diverso, infatti un cambiamento di coordinate esprime la relazione che intercorre tra le ascisse di uno stesso punto rispetto a due diversi sistemi di riferimento, mentre un'affinità dà la relazione tra le ascisse di due punti corrispondenti.

1.3.2 Coordinate cartesiane nel piano

Un *sistema di coordinate cartesiane* in un piano π è dato quando siano fissate due rette non parallele, incidenti in un punto O, dotate di un sistema di ascisse con origine in O. Chiameremo il punto O *origine delle coordinate* e le due rette *assi cartesiani* e, per distinguerle *asse* x e *asse* y.

Se gli assi sono perpendicolari si ha un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Se l'unità di misura per i segmenti sui due assi è la stessa diremo che il sistema di coordinate è *monometrico.*

Se P è un punto del piano π, indichiamo con P_x il punto di intersezione dell'asse x con la retta passante per P e parallela all'asse y e con P_y il punto di intersezione dell'asse y con la retta passante per P e parallela all'asse x. Le ascisse x, y di P_x e P_y rispettivamente sull'asse x e sull'asse y si dicono *coordinate cartesiane* di P nel sistema di riferimento $\sigma(O; x, y)$. Diremo che x è l'*ascissa* di P e che y è l'*ordinata* di P.

Un punto di π determina le sue coordinate cartesiane e viceversa se (x, y) è una coppia ordinata di numeri reali, allora esiste un unico punto P di cui x e y sono l'ascissa e l'ordinata. Per indicare che x, y sono le coordinate del punto P scriveremo $P(x, y)$.

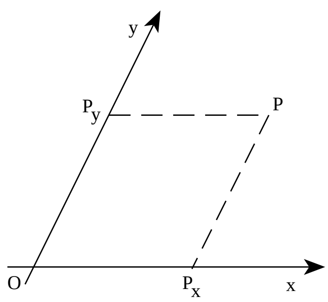


Figura 1.1: Assi cartesiani nel piano

Le coordinate dell'origine O sono $(0, 0)$. I punti dell'asse x hanno ordinata 0 e, viceversa, i punti che hanno ordinata nulla stanno sull'asse x. Quindi i punti dell'asse x sono tutti e soli i punti $P(x, y)$ le cui coordinate cartesiane verificano l'equazione $y = 0$; per brevità diremo che $y = 0$ è un'equazione[2] dell'asse x. Analogamente $x = 0$ è un'equazione dell'asse y.

La corrispondenza biunivoca così ottenuta tra i punti del piano π e le coppie di numeri reali, consente di riguardare l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie di numeri reali come un piano chiamando "punto" una coppia ordinata di numeri reali. Come vedremo più avanti le rette corrispondono alle equazioni lineari in due variabili del tipo $ax + by + c = 0$ e le relazioni tra punti e rette si interpretano facilmente in termini algebrici, ad es. l'incidenza tra un punto e una retta significa che le coordinate del punto verificano l'equazione della retta. Si costruisce così all'interno della teoria dei numeri reali un modello del piano euclideo. Lo studio di tale modello è l'argomento della Geometria Analitica.

[2] Si osservi che anche le equazioni $2y = 0$ e $y^2 = 0$ hanno come luogo degli zeri (soluzioni) i punti dell'asse x

Il problema di descrivere un generico cambiamento di coordinate sarà affrontato più avanti. Per ora esaminiamo il caso molto semplice ma importante delle traslazioni.

Sia $O'(a,b)$ un punto di un piano π dotato di un sistema di coordinate cartesiane $\sigma(O;x,y)$. Consideriamo in π un nuovo sistema di coordinate σ' che ha come origine O' e come assi le rette per O' parallele agli assi originari e con lo stesso orientamento. Sia $P \in \pi$ e siano (x,y) le sue coordinate rispetto a σ e (x',y') le sue coordinate rispetto a σ'. Si ha allora

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}$$

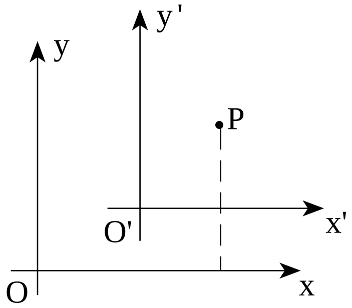


Figura 1.2: Traslazione

1.3.3 Coordinate cartesiane nello spazio

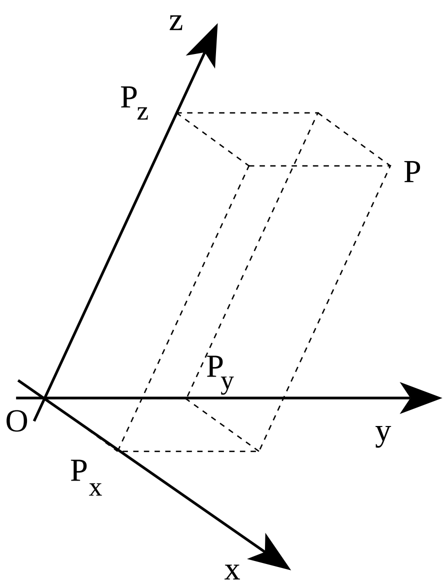


Figura 1.3: Assi cartesiani nello spazio

Anche per lo spazio si può introdurre il concetto di sistema di coordinate in modo analogo a quanto fatto per il piano.

Se P è un punto dello spazio, indichiamo con P_x il punto di intersezione dell'asse x con il piano passante per P e parallelo al piano yz, con P_y il punto di intersezione dell'asse y con il piano passante per P e parallelo al piano xz e con P_z il punto di intersezione dell'asse z con il piano passante per P e parallelo al piano xy. Consideriamo tre rette non complanari, incidenti in un punto O che chiamiamo origine delle coordinate; indichiamo le rette con *asse* x, *asse* y, *asse* z e su ciascuna di esse consideriamo un sistema di ascisse con origine in O. Chiamiamo *piano* xy il piano individuato dagli assi x e y e analogamente *piano* xz e *piano* yz quelli individuati rispettivamente dagli assi x e z e dagli assi y e z. Questi piani sono detti *piani coordinati.*

Le ascisse x, y, z di P_x, P_y e P_z rispettivamente sull'asse x, sull'asse y e sull'asse z si dicono *coordinate cartesiane* di P nel sistema di riferimento $\sigma(O;x,y,z)$.

Un punto dello spazio determina le sue coordinate cartesiane e viceversa se (x,y,z) è una terna ordinata di numeri reali, allora esiste un unico punto P di cui x, y e z sono le coordinate cartesiane rispetto al sistema di coordinate fissato. Per indicare che x,y,z sono le coordinate del punto P scriveremo $P(x,y,z)$.

In particolare le coordinate dell'origine O sono $(0,0,0)$. Se gli assi sono a due a due ortogonali si ha un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Se l'unità di misura per i segmenti sui tre assi è la stessa diremo che il sistema di coordinate è *monometrico*.

La corrispondenza biunivoca così ottenuta tra i punti dello spazio e le terne di numeri reali, consente di riguardare l'insieme $\mathbb{R}^3$ come un modello dello spazio euclideo.

1.4 Orientazione dei sistemi di coordinate

Usualmente gli assi di un sistema di coordinate cartesiane del piano sono orientati come in Figura 1.1, ovvero in modo che si veda percorrere in senso antiorario l'angolo ϑ $(0 < \vartheta < \pi)$ che porta il semiasse positivo dell'asse x a sovrapporsi al semiasse positivo dell'asse y. Siccome, per convenzione, il senso antiorario è quello positivo delle rotazioni, si potrebbe dire che un tale sistema di coordinate nel piano è orientato positivamente. La proprietà "di essere orientato positivamente" nel modo in cui è stata formulata non è però intrinseca del sistema di coordinate, ma dipende dal punto di osservazione. Infatti il sistema della figura 1.1, che noi vediamo orientato positivamente, diventa orientato negativamente se guardiamo il foglio dall'altra parte (in controluce).

Per superare queste difficoltà è quindi necessario pensare il piano immerso nello spazio e alla coppia di assi x e y aggiungerne un altro, z, che indichi "la posizione da cui guardare gli assi.

Definizione 1.1 Dato un sistema di coordinate cartesiane (non necessariamente ortogonali) nello spazio $\sigma(O;x,y,z)$, diciamo che il sistema è *orientato positivamente*, se un osservatore orientato come l'asse z vede percorrere l'angolo ϑ $(0 < \vartheta \leq \pi)$ che porta il semiasse positivo dell'asse x a sovrapporsi al semiasse positivo dell'asse y in senso antiorario. Altrimenti diciamo che $\sigma(O;x,y,z)$ è *orientato negativamente*.

Definizione 1.2 Dato un sistema di coordinate cartesiane $\sigma(O;x,y)$ in un piano e una retta z orientata (passante per O) non giacente nel piano, diciamo che $\sigma(O;x,y)$ è *orientato positivamente rispetto ad* z se il sistema di coordinate cartesiane $\sigma(O;x,y,z)$ è orientato positivamente.

Quindi dicendo che nella figura 1.1 il sistema di coordinate è orientato positivamente, sottointendiamo il fatto di aver fissato un retta orientata rivolta verso chi guarda.

Vedremo più avanti una caratterizzazione in termini puramente algebrici dell'orientazione dei sistemi di riferimento.

1.5 Spazi $\mathbb{R}^n$

Nelle sezioni precedenti abbiamo visto che i punti di una retta sono in corrispondenza biunivoca con i numeri reali, i punti di un piano con le coppie ordinate di numeri reali e i punti dello spazio con le terne ordinate di numeri reali. Astraendo allora da significato geometrico è interessante considerare gli insiemi delle n-uple di numeri reali.

Definizione 1.3 Sia n un numero naturale positivo. Poniamo

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \ / \ x_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \ldots, n\}$$

Gli elementi di $\mathbb{R}^n$ sono detti *vettori*, i numeri reali $x_1, \ldots, x_n$ sono detti *componenti* del vettore $(x_1, \ldots, x_n)$.

Siano $u = (x_1, \ldots, x_n)$ e $v = (y_1, \ldots, y_n)$ due vettori in $\mathbb{R}^n$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Si dice che u e v sono uguali se sono uguali le loro corrispondenti componenti. Quindi l'uguaglianza vettoriale $u = v$ equivale alle n uguaglianze di numeri reali $x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$. Poniamo inoltre:

$$u + v = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \qquad \text{e} \qquad \lambda\, u = (\lambda\, x_1, \ldots, \lambda\, x_n)$$

Posto $0 = (0, \ldots, 0)$ e $-u = (-x_1, \ldots, -x_n)$, è immediato provare la seguente

Proposizione 1.4 *Per ogni $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ si ha:*

A1. $(u + v) + w = u + (v + w)$.

A2. $u + v = v + u$.

A3. $u + 0 = u$.

A4. $u + (-u) = 0$.

A5. $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

A6. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

A7. $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

A8. $1\, u = u$.

La proposizione seguente mette in evidenza dei particolari vettori che hanno un ruolo fondamentale nello studio di $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 1.5 *Siano $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$,..., $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$. Per ogni vettore $u = (x_1, \ldots, x_n)$ in $\mathbb{R}^n$ si ha:*

$$u = x_1\, e_1 + \ldots + x_x\, e_n$$

Quando $n = 2$ talvolta si scrive i, j al posto di e_1 e e_2; quando $n = 3$ talvolta si scrive i, j, k invece di e_1, e_2, e_3.

1.6 Esercizi

Es. 1. Su una retta affine sia P il punto di ascissa -3 e sia Q il punto di ascissa 7. Determinare un punto R equidistante da P e da Q e calcolare PQ, PR, QR.

Es. 2. Calcolare l'ascissa del punto medio del segmento AB in funzione delle ascisse dei punti A e B.

Es. 3. Sia r una retta con un sistema di ascisse. Determinare su r un altro sistema di ascisse tale che per ogni punto P di r si abbia $x'(P) = 3x(P)$, dove x denota l'ascissa di P rispetto al primo sistema e x' rispetto al secondo.

Es. 4. Sia M il punto medio del segmento AB, provare che per ogni punto P della retta AB si ha

$$PA \cdot PB = PM^2 - MA^2$$

[Si scelga un sistema di ascisse con origine M e tale che il punto A abbia ascissa a. Allora B ha ascissa $-a$ e se x è l'ascissa di P si ha ...]

Es. 5. Mostrare che la definizione di trasformazione affine è indipendente dai sistemi di ascisse scelti sulle due rette.

Es. 6. Provare che le affinità di una retta in sè formano un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni e che le affinità del tipo $x' = x + a$, dette traslazioni, formano un sottogruppo.

Es. 7. Mostrare che "essere punto medio" è una proprietà invariante per affinità, cioè se $T : r \to s$ è un'affinità, P, Q due punti di r ed M il punto medio di PQ, allora $T(M)$ è il punto medio di $T(P)T(Q)$.

Es. 8. Provare che la distanza di due punti non è invariante per affinità.

Es. 9. Determinare le affinità di una retta in sè che conservano la distanza.

Es. 10. Dato un punto $P(a, b)$ determinare le coordinate del simmetrico di P rispetto all'asse x, rispetto all'asse y, rispetto all'origine e disegnare tali punti.

Es. 11. Dato un punto $P(a, b, c)$ determinare le coordinate del simmetrico di P rispetto all'origine, rispetto a ciascun asse coordinato e rispetto a ciascun piano coordinato. Disegnare tali punti.

Capitolo 2

Matrici e Sistemi Lineari

In questo capitolo studieremo i sistemi di equazioni lineari su un corpo mediante opportune matrici associate ad essi. In particolare mostreremo un criterio per stabilire se un tale sistema ha soluzioni e un metodo per trovare le tutte le sue soluzioni. Per tutto questo capitolo indicheremo con K un corpo.

2.1 Matrici

Definizione 2.1 Siano m, n due interi positivi. Una *matrice* $m \times n$, o di tipo (m,n), ad elementi in K è una tabella[1]

$$A = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \dots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \dots & a_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m\,1} & a_{m\,2} & \dots & a_{m\,n} \end{pmatrix}$$

di $m\,n$ elementi di K. Le righe della tabella sono numerate dall'alto verso il basso e le colonne da sinistra a destra. Si usa scrivere $A = (a_{i\,j})$ intendendo che $a_{i\,j}$ è l'elemento della matrice A di *posto* (i,j), cioè l'elemento che si trova sulla riga i e sulla colonna j. L'insieme delle matrici $m \times n$ ad elementi in K si indica con $M_{m,n}(K)$.

Gli elementi $a_{1\,1}, a_{2\,2}, \dots, a_{r\,r}$ dove $r = \min\{m,n\}$, formano la *diagonale principale* di A. Se $a_{i\,j} = 0$ per ogni $i > j$ si dice che la matrice è *triangolare superiore*; analogamente se sono nulli tutti gli elementi $a_{i\,j}$ con $i < j$, si dice che la matrice è *triangolare inferiore.*.

Una matrice si dice *quadrata di ordine* n se il numero m delle righe è uguale al numero n delle colonne; l'insieme delle matrici quadrate di ordine n si indica con $M_n(K)$.

Una matrice *diagonale* è una matrice quadrata $(a_{i\,j})$ tale che $a_{i\,j} = 0$ se $i \neq j$. La matrice diagonale di ordine n

$$I_n = (\delta_{i\,j}) \quad \text{dove} \quad \delta_{i\,j} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases} \qquad \text{(simbolo di Kronecker)}$$

è detta *matrice identità*.

Una matrice $1 \times n$ si dice *matrice riga* o *vettore riga*, mentre una matrice $n \times 1$ si dice *matrice colonna* o *vettore colonna*. Spesso è conveniente identificare un elemento di K^n con un vettore colonna.

[1] Una matrice $m \times n$ ad elementi in K può essere vista come un'applicazione A dall'insieme $\{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}$ in K. In tal caso l'elemento $A(i,j)$ usualmente si denota con $a_{i\,j}$

Definizione 2.2 La *trasposta* della matrice $A = (a_{i\,j})$ di tipo (m, n) è la matrice di tipo (n, m), denotata con ${}^tA$ oppure con A_{-1}, che si ottiene da A scambiando le righe con le colonne. Se $A = {}^tA$, allora $m = n$, $a_{i\,j} = a_{j\,i}$ per ogni i, j e A si dice *simmetrica.*

Esempio 1 Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \in M_{2\,3}(\mathbb{R})$, allora ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \in M_{3\,2}(\mathbb{R})$. La matrice A è triangolare superiore, ${}^tA$ è triangolare inferiore. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ è diagonale.

Introduciamo ora alcune operazioni sulle matrici.

Definizione 2.3 Siano $A, B \in M_{m,n}(K)$ e sia $\lambda \in K$. La somma $A + B$ delle matrici A e B e il prodotto (esterno) $\lambda\,A$ della matrice A per lo scalare λ si definiscono ponendo:

$$A + B = (a_{i\,j} + b_{i\,j}) \qquad \text{e} \qquad \lambda\,A = (\lambda\,a_{i\,j})$$

Ciò significa che la matrice $A + B$ è ottenuta dalle matrici A e B sommando gli elementi di posto corrispondente e che la matrice $\lambda\,A$ è ottenuta moltiplicando ogni elemento di A per λ.

Esempio 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \;; \qquad -2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

La *matrice nulla*, denotata con $\mathbf{0}$, è la matrice i cui elementi sono tutti nulli. Se $A = (a_{i\,j})$, l'*opposta* di A, denotata con $-A$, è la matrice $(-a_{i\,j})$. E' immediato provare:

Proposizione 2.4 *Se $A, B, C \in M_{m,n}(K)$ e $\lambda, \mu \in K$, si ha:*

A1. $(A + B) + C = A + (B + C)$;	*A2.* $A + B = B + A$;
A3. $A + \mathbf{0} = A$;	*A4.* $A + (-A) = \mathbf{0}$;
A5. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$;	*A6.* $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
A7. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;	*A8.* $1\,A = A$.

Le prime quattro proprietà esprimono il fatto che $M_{m,n}(K)$ è un gruppo commutativo rispetto alla somma.

Si osservi che come caso particolare delle matrici ($m = 1$) si ha l'insieme K^n con le operazioni definite componente per componente. Vedremo in seguito altri insiemi che, come le matrici, sono dotati di una 'somma' e di un 'prodotto esterno' verificanti le proprietà A1–A8.

E' allora conveniente assumere A1–A8 come assiomi per definire il concetto astratto di spazio vettoriale, del quale le matrici e altri insiemi vedremo in seguito costituiscono esempi assai significativi.

2.2 Digressione sugli spazi vettoriali

Definizione 2.5 Uno *spazio vettoriale sul corpo* K, o K-spazio vettoriale, è un insieme non vuoto V dotato di una "somma", cioè una legge che ad ogni coppia (u, v) di elementi di V fa corrispondere un'unico elemento di V denotato con $u+v$, e un "prodotto esterno", cioè una legge che ad ogni coppia (λ, u) con $\lambda \in K$ e $u \in V$ fa corrispondere un unico elemento di V, denotato con $\lambda\, u$, che soddisfano le seguenti condizioni:

A1. *Associatività della somma:*
$(u+v)+w = u+(v+w)$ per ogni $u, v, w \in V$.

A2. *Commutatività della somma:*
$u+v = v+u$ per ogni$u, v \in V$.

A3. *Esistenza elemento neutro:*
Esiste $e \in V$ tale che $u+e = u$ per ogni $u \in V$.

A4. *Esistenza dell'opposto:*
Per ogni $u \in V$ esiste $v \in V$ tale che $u+v = e$.

A5. *Associatività del prodotto:*
$(\lambda\mu)u = \lambda(\mu\, u)$ per ogni $u \in V$ e per ogni $\lambda, \mu \in K$.

A6. *Distributività rispetto alla somma di vettori:*
$\lambda(u+v) = \lambda\, u + \lambda\, v$ per ogni $u, v \in V$ e per ogni $\lambda \in K$.

A7. *Distributività rispetto alla somma di scalari:*
$(\lambda+\mu)u = \lambda\, u + \mu\, u$ per ogni $u \in V$ e per ogni $\lambda, \mu \in K$.

A8. *Unitarietà:*
$1\, u = u$ per ogni $u \in V$.

Gli elementi di V sono detti *vettori*, mentre gli elementi di K sono detti *scalari*.

Dagli assiomi A1,...,A8 si deducono facilmente l'unicità dell'elemento neutro e l'unicità dell'opposto di un elemento. Usualmente l'elemento neutro si indica con 0, l'opposto dell'elemento u si indica con $-u$ e si scrive $u-v$ invece di $u+(-v)$.

Approfondiremo in seguito le proprietà degli spazi vettoriali in generale; diamo per ora solo alcune definizioni e un lemma utili in questo capitolo.

Definizione 2.6 Dato un K-spazio vettoriale V, siano $v_1, \ldots, v_r \in V$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$. Il vettore di V

$$\lambda_1\, v_1 + \ldots + \lambda_r\, v_r$$

è detto *combinazione lineare* dei vettori $v_1, \ldots, v_r$ con coefficienti $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$.

Si dice che $\{v_1, \ldots, v_r\}$ è un *sistema di generatori* di V se ogni vettore di V si può scrivere come loro combinazione lineare, cioè se per ogni $u \in V$ esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ tali che $u = \lambda_1\, v_1 + \ldots + \lambda_r\, v_r$.

Esempio 3 Nell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ è combinazione lineare delle tre matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con coefficienti rispettivamente $1, 2, 3$. Invece la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ non è combinazione lineare delle matrici A, B, C.

Esempio 4 Nell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si ha $(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$ quindi i vettori $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ sono un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$.

I vettori $e_1 = (1,0,\ldots,0)$, $e_2 = (0,1,\ldots,0)$, $\ldots$, $e_n = (0,0,\ldots,1)$ sono un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 2.7 In un K-spazio vettoriale si dice che $v_1,\ldots,v_r$ sono *linearmente dipendenti* se esistono $\lambda_1,\ldots,\lambda_r \in K$ *non tutti nulli* tali che

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r = 0 \ .$$

In caso contrario $v_1,\ldots,v_r$ si dicono *linearmente indipendenti.*

Esempio 5 In $\mathbb{R}^3$ i vettori $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ sono linearmente indipendenti, infatti se $\lambda_1(1,0,0)+\lambda_2(0,1,0) = (0,0,0)$ uguagliando le corrispondenti componenti del primo e del secondo membro si ha $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 0$. Invece i vettori $(-1,2,0)$ e $(2,-4,0)$ sono linearmente dipendenti essendo $2\,(-1,2,0) + 1\,(2,-4,0) = (0,0,0)$.

Oss. Se i vettori $v_1,\ldots,v_r$ sono linearmente dipendenti, allora ce n'è almeno uno di essi che è combinazione lineare degli altri. Se il vettore v è combinazione lineare di $v_1,\ldots,v_r$, allora $v, v_1,\ldots,v_r$ sono linearmente dipendenti.

Concludiamo questa sezione col seguente lemma che mette in relazione il concetto di sistema di generatori con quello di dipendenza lineare.

Lemma 2.8 (Steinitz) *Siano $\{e_1,\ldots,e_n\}$ un sistema di generatori di uno spazio vettoriale V e siano $v_1,\ldots,v_m \in V$. Se $m > n$, allora $v_1,\ldots,v_m$ sono linearmente dipendenti.*

Dim. Se $v_1,\ldots,v_n$ sono linearmente dipendenti, allora, a maggior ragione, lo sono $v_1,\ldots,v_m$; quindi non è restrittivo supporre che $v_1,\ldots,v_n$ siano linearmente indipendenti. Basta allora provare che $v_1,\ldots,v_n$ sono un sistema di generatori di V, perché da ciò seguirà che v_m è una loro combinazione lineare.

Poiché $e_1,\ldots,e_n$ generano V, esistono $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in K$ tali che $v_1 = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$. Poiché $v_1,\ldots,v_n$ sono linearmente indipendenti, $v_1 \neq 0$ e quindi almeno un coefficiente λ_i è non nullo. Possiamo supporre $\lambda_1 \neq 0$. Allora

$$e_1 = \lambda_1^{-1}(v_1 - \lambda_2 e_2 - \ldots - \lambda_n e_n)$$

e quindi $v_1, e_2,\ldots,e_n$ generano V.

Supponiamo ora che esista un intero s, $1 \leq s \leq n-1$ tale che $v_1,\ldots,v_s, e_{s+1},\ldots,e_n$ generano V e proviamo che anche $v_1,\ldots,v_{s+1}, e_{s+2},\ldots,e_n$ generano V.

Per ipotesi esistono $\alpha_1,\ldots,\alpha_s,\beta_{s+1},\ldots,\beta_n$ tali che

$$v_{s+1} = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_s v_s + \beta_{s+1} e_{s+1} + \ldots + \beta_n e_n \ .$$

Poiché $v_1,\ldots,v_{s+1}$ sono linearmente indipendenti, almeno un coefficiente β_i è non nullo; supponiamo sia $\beta_{s+1} \neq 0$. Allora

$$e_{s+1} = -\beta_{s+1}^{-1}(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_s v_s - v_{s+1} + \beta_{s+2} e_{s+2} + \ldots - \beta_n e_n)$$

e quindi $v_1,\ldots,v_{s+1}, e_{s+2},\ldots,e_n$ generano V. $\square$

Se $r > 0$, dal lemma 2.8 segue che $n + r$ vettori in $\mathbb{R}^n$ sono linearmente dipendenti.

2.3 Il prodotto righe per colonne

Definizione 2.9 Siano A e B due matrici ad elementi in K tali che il numero delle colonne di A è uguale al numero delle righe di B, cioè $A = (a_{i\,j}) \in M_{m,n}(K)$ e $B = (b_{i\,j}) \in M_{n,p}(K)$. In queste ipotesi il *prodotto righe per colonne* di A e B è definito ed è la matrice $A\,B \in M_{m,p}(K)$ il cui elemento di posto (i,j) si ottiene moltiplicando la i-esima riga di A per la j-esima colonna di B, in formula:

$$A\,B = (c_{i\,j}) \quad \text{dove} \quad c_{i\,j} = \sum_{h=1}^{n} a_{i\,h} b_{h\,j} \;.$$

Oss. Se A è di tipo $m \times n$ e B è di tipo $n \times m$, allora i prodotti AB e BA sono entrambi definiti e sono di tipo rispettivamente $m \times m$ e $n \times n$. Se $m = n$, allora il prodotto righe per colonne è un'operazione interna a $M_n(K)$, non commutativa se $n > 1$.

Esempio 6 Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Allora si ha:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad BA = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposizione 2.10 *Siano* $A, B \in M_{m,n}(K)$, $C, D \in M_{n,p}(K)$, $E \in M_{p,q}$, I_n *la matrice identità di ordine* n, $\lambda \in K$. *Allora:*

a) $(AC)E = A(CE)$;

b) $AI_n = A, \quad I_nC = C$;

c) $(A + B)C = AC + BC$;

d) $A(C + D) = AC + AD$;

e) $A(\lambda C) = \lambda(AC) = (\lambda A)C$;

f) ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$;

g) ${}^t(AC) = {}^tC\,{}^tA$.

Dim. Si dimostrano tutte confrontando l'elemento di posto (i,j) del primo e del secondo membro. Ad esempio la (a). Siano $A = (a_{i\,j})$, $C = (c_{i\,j})$, $E = (e_{i\,j})$. Posto $AC = F = (f_{i\,j})$, l'elemento di posto (i,r) della matrice F è $f_{i\,r} = \sum_{s=1}^{n} a_{i\,s} c_{s\,r}$ e quindi l'elemento di posto (i,j) nella matrice a primo membro è

$$\sum_{r=1}^{p} f_{i\,r} e_{r\,j} = \sum_{r=1}^{p} \sum_{s=1}^{n} a_{i\,s} c_{s\,r} e_{r\,j} \;.$$

Sia ora $G = CE$. L'elemento di posto (s,j) in G è $g_{sj} = \sum_{r=1}^{p} c_{s\,r} e_{r\,j}$, e quindi l'elemento di posto (i,j) del secondo membro è

$$\sum_{s=1}^{n} a_{i\,s} g_{s\,j} = \sum_{s=1}^{n} \sum_{r=1}^{p} a_{i\,s} c_{s\,r} e_{r\,j} \;.$$

Ciò prova che per ogni coppia (i,j) gli elementi di posto (i,j) del primo e del secondo membro della (a) coincidono.

Nella (c) l'elemento di posto (i,j) del primo membro è:

$$\sum_{r=1}^{n} (a_{i\,r} + b_{i\,r}) c_{r\,j} = \sum_{r=1}^{n} a_{i\,r} c_{r\,j} + \sum_{r=1}^{n} b_{i\,r} c_{r\,j}$$

che è appunto l'elemento di posto (i,j) del secondo membro. □

Dalle Proposizioni 2.4 e 2.10 segue che $M_n(K)$ con la somma e il prodotto righe per colonne è un anello con identità, non commutativo se $n > 2$.

2.4 Sistemi di equazioni lineari

Un'*equazione lineare* nelle incognite $X_1, \ldots, X_n$ con coefficienti in K è un'equazione del tipo

$$a_1X_1 + \ldots + a_nX_n = b \tag{2.1}$$

dove $a_1, \ldots, a_n, b \in K$. L'elemento b è detto *termine noto* dell'equazione. Se $b = 0$ l'equazione si dice *omogenea*.

Una *soluzione* dell'equazione (2.1) è un elemento $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ tale che sostituendo x_i al posto di X_i nella (2.1) si ottiene una identità. Ad esempio la terna $(1, -1, 1)$ è una soluzione dell'equazione lineare $5X_1 + X_2 - 3X_3 = 1$.

Consideriamo ora un *sistema lineare* cioè un sistema di m equazioni lineari nelle n incognite $X_1, \ldots, X_n$.

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n & = & b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n & = & b_2 \\ \quad \vdots & & \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n & = & b_m \end{cases} \tag{2.2}$$

Se $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, il sistema si dice *omogeneo* altrimenti si dice *non omogeneo*. Una *soluzione del sistema* è un elemento $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ che è soluzione di tutte le m equazioni. Il sistema si dice *compatibile* se possiede almeno una soluzione.

Ogni sistema omogeneo ammette almeno la soluzione $(0, \ldots, 0)$, detta *soluzione banale*, e quindi è compatibile; ogni altra sua soluzione si dice *non banale*. Viceversa se un sistema ammette la soluzione $(0, \ldots, 0)$, allora è omogeneo. Risolvere un sistema significa trovare tutte le sue soluzioni.

Il sistema

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n & = & 0 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n & = & 0 \\ \quad \vdots & & \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n & = & 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

si dice *sistema omogeneo associato al sistema* (2.2).

Proposizione 2.11 *Se il sistema lineare (2.2) è compatibile, tutte le sue soluzioni si ottengono sommando ad una sua qualunque soluzione le soluzioni del sistema lineare omogeneo associato (2.3).*

Dim. Siano V e V_0 i due sottoinsiemi di K^n i cui elementi sono rispettivamente le soluzioni del sistema (2.2) e (2.3). Se $(y_1, \ldots, y_n) \in V$ e $(x_1, \ldots, x_n) \in V_0$ si ha

$$(y_1, \ldots, y_n) + (x_1, \ldots, x_n) = (y_1 + x_1, \ldots, y_n + x_n) \in V$$

Infatti per ogni $j = 1, \ldots, m$ si ha:
$a_{j1}(y_1 + x_1) + \ldots + a_{jn}(y_n + x_n) = (a_{j1}y_1 + \ldots + a_{jn}y_n) + (a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n) = b_j + 0 = b_j$

Viceversa se $(y_1, \ldots, y_n)$, $(z_1, \ldots, z_n) \in V$, allora $(z_1 - y_1, \ldots, z_n - y_n) \in V_0$ perché per ogni $j = 1, \ldots, m$ si ha
$a_{j1}(z_1 - y_1) + \ldots + a_{jn}(z_n - y_n) = a_{j1}z_1 + \ldots + a_{jn}z_n - (a_{j1}y_1 + \ldots + a_{jn}y_n) = 0$.
Poiché $(z_1, \ldots, z_n) = (y_1, \ldots, y_n) + (z_1 - y_1, \ldots, z_n - y_n)$ si ha la tesi. □

Definizione 2.12 Dato il sistema (2.2), la matrice $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ formata dai coefficienti delle incognite delle m equazioni del sistema, è detta *matrice dei coefficienti* o *matrice incompleta*. La matrice con m righe e $n + 1$ colonne

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

ottenuta da A aggiungendo i termini noti come $(n+1)$-esima colonna, è detta *matrice completa* del sistema.

Indicando con $\mathbf{b}$ la matrice colonna i cui elementi sono $b_1, \ldots, b_m$ e con $\mathbf{X}$ la matrice colonna i cui elementi sono $X_1, \ldots, X_n$, il sistema (2.2) si può scrivere in forma matriciale come

$$A\,\mathbf{X} = \mathbf{b} \tag{2.4}$$

Viceversa per ogni matrice con m righe e $n+1$ colonne esiste un sistema di m equazioni lineari nelle incognite $X_1, \ldots, X_n$ di cui essa è la matrice completa.

Considerando le colonne della matrice A e la colonna dei termini noti $\mathbf{b}$ come vettori di $\mathbb{R}^m$, il sistema (2.4) si può interpretare come un modo di esprimere il vettore dei termini noti come combinazione lineare delle colonne di A. Quindi dire che il sistema è compatibile significa che il vettore $\mathbf{b}$ è combinazione lineare delle colonne di A, risolvere il sistema significa trovare tutti i possibili modi di esprimere $\mathbf{b}$ come combinazione lineare delle colonne di A. Infine dire che un sistema lineare omogeneo ha soluzioni non banali equivale a dire che le colonne di A sono linearmente dipendenti.

Definizione 2.13 Due sistemi lineari si dicono *equivalenti* se hanno le stesse soluzioni.

Due sistemi equivalenti non hanno necessariamente lo stesso numero di equazioni.

Per *operazione elementare* sulle equazioni di un sistema si intende una delle seguenti operazioni: a) scambiare due equazioni del sistema; b) moltiplicare un'equazione per uno scalare non nullo; c) sostituire un'equazione con quella ottenuta sommando ad essa un multiplo di un'altra equazione.

Proposizione 2.14 *Ogni operazione elementare sulle equazioni di un sistema lineare lo trasforma in un sistema equivalente.*

Dim. E' evidente che un'operazione del primo o del secondo tipo trasformano il sistema in uno equivalente. Per le trasformazioni del terzo tipo è un facile esercizio. $\square$

2.5 Risoluzione di un sistema lineare

In questo numero ci occuperemo del problema di determinare esplicitamente tutte le soluzioni di un sistema lineare. Tratteremo prima una classe particolare di sistemi, detti sistemi lineari a scalini. Successivamente mostreremo come ricondurre il caso generale al caso dei sistemi a scalini utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss.

2.5.1 Sistemi lineari a scalini

Consideriamo dapprima il caso in cui $m = n$, cioè il caso in cui il numero delle equazioni è uguale al numero delle incognite. Supponiamo inoltre che la matrice dei coefficienti sia triangolare superiore con tutti gli elementi sulla diagonale principale diversi da zero. In tal caso *il sistema ha una ed una sola soluzione.* Infatti l'ultima equazione ($a_{n\,n}x_n = b_n$) è soddisfatta dall'unico valore $x_n = b_n\,a_{nn}^{-1}$, che sostituito nella penultima equazione dà un unico valore x_{n-1} che la soddisfa. Questi valori x_n, x_{n-1} sostituiti nella terz'ultima equazione, danno luogo ad un unico valore x_{n-2} che la soddisfa. Procedendo in questo modo si arriva a ottenere un'unica soluzione del sistema.

Supponiamo ora $m < n$ e consideriamo un *sistema lineare a scalini* cioè un sistema lineare tale che la prima incognita che compare in ogni equazione ha indice maggiore di quello della prima incognita che compare nell'equazione precedente. Ad esempio:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 2 \\ x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_4 + x_5 &= -1 \end{cases}$$

In generale un tale sistema si può scrivere nella forma

$$\begin{cases} \sum_{i=k_1}^{n} a_{1\,i}\, X_i &= b_1 \\ \sum_{i=k_2}^{n} a_{2\,i}\, X_i &= b_2 \\ \quad\vdots & \\ \sum_{i=k_m}^{n} a_{m\,i}\, X_i &= b_m \end{cases} \tag{2.5}$$

con $k_1 < k_2 < \ldots < k_m$ e con $a_{j\,k_j} \neq 0$ per ogni $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Anche in questo caso è facile trovare per sostituzione le soluzioni del sistema, estendendo il caso precedentemente considerato. Ma essendo ora $n > m$, la soluzione del sistema non è più unica, ma il valore di X_{k_m} dipende dai valori arbitrari che possono assumere le variabili X_i $(k_m < i \leq n)$ e lo stesso vale per $X_{k_{m-1}}$, $X_{k_{m-2}}$, ecc.

Le soluzioni di (2.5) dipendono quindi dai valori $t_1, \ldots, t_{n-m}$ assunti dalle incognite X_i con $i \notin \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$ e sono funzioni lineari di $n - m$ parametri che possono assumere qualunque valore nel corpo K. Questo fatto si esprime dicendo che il sistema (2.5) *possiede* ∞^{n-m} *soluzioni.* Nel caso $n = m$ questo significa che il sistema ha una sola soluzione.

Una singola equazione lineare (2.1) in cui $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ si può considerare come un particolare sistema a gradini; pertanto possiede ∞^{n-1} soluzioni.

Esempio 7 Il sistema

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 &= 1 \\ \qquad X_2 - 2X_3 &= 3 \end{cases}$$

è a scalini, si può riscrivere nella forma

$$\begin{cases} X_1 + X_2 &= 1 - X_3 \\ \qquad X_2 &= 3 + 2X_3 \end{cases}$$

e ha come soluzione generale

$$(-2 - 3t, 3 + 2t, t)\ .$$

Si osservi che $(-2, 3, 0)$ è una soluzione particolare del sistema e che la terna $(-3t, 2t, t)$ è la soluzione generale del sistema lineare omogeneo associato.

2.5.2 Algoritmo di eliminazione di Gauss

L'algoritmo di eliminazione di Gauss consente di stabilire in modo effettivo ed efficiente se un sistema è compatibile e in caso affermativo di trovare tutte le soluzioni. A partire da un sistema lineare l'algoritmo costruisce, mediante un numero finito di operazioni elementari sulle equazioni, un sistema a scalini equivalente a quello dato.

Conviene lavorare anziché sulle equazioni del sistema sulle righe della matrice associata al sistema. Alle operazioni sulle equazioni corrispondono le seguenti *operazioni elementari sulle righe* della matrice completa.

- $E_{(i,j)}$: scambio della i-esima riga con la j-esima;
- $E_{(i)}(c)$: moltiplicazione della i-esima riga per $c \in K$ $(c \neq 0)$;
- $E_{(i,j)}(c)$: sostituzione della i-esima riga con quella ottenuta sommando ad essa la j-esima riga moltiplicata per $c \in K$.

Daremo ora una descrizione informale dell'algoritmo che mediante operazioni elementari sulle righe trasforma una qualunque matrice in una *matrice a scalini* cioè una matrice in cui il primo elemento non nullo di ogni riga compaia più a destra del primo elemento non nullo della riga precedente. Le matrici a scalini sono anche dette *matrici echelon.*

Effettuando scambi di righe si può operare in modo che eventuali righe tutte nulle compaiano in fondo alla matrice. Da un punto di vista computazionale può anche essere utile effettuare un'operazione $E_{(i)}(c)$ in modo che il primo elemento non nullo di ogni riga sia 1.

Per arrivare ad avere una matrice echelon occorre trasformare la matrice B in una matrice in cui siano nulli tutti gli elementi al di sotto del primo elemento non nullo di ogni riga. Cominciamo a considerare la prima riga. Se $a_{1\,1} \neq 0$, per ogni $i = 2, \ldots, m$ operiamo con $E_{(i,1)}(c)$ cioè sommiamo alla riga i-esima la prima riga moltiplicata per

$$c = -\frac{a_{i\,1}}{a_{1\,1}}$$

Supponiamo che $a_{1\,1} = 0$, e che esista un indice j tale che $a_{j\,1} \neq 0$. Tale elemento è detto *pivot.*[2] In tal caso effettuiamo prima l'operazione $E_{(1,j)}$, cioè scambiamo la riga j con la prima riga e procediamo come detto sopra.

Una volta azzerati tutti gli elementi sotto a_{11}, ci spostiamo in basso di una riga e a destra di una colonna, e ripetiamo l'algoritmo. Il procedimento ha termine quando si raggiunge l'ultima riga o l'ultima colonna.

Resta da trattare il caso in cui $a_{j\,1} = 0$ per ogni j. In questo caso nessuna trasformazione è necessaria. Occorre però ripetere l'algoritmo dopo essersi spostati a destra di una colonna, ma **senza** spostarsi in basso di una riga.

Esempio 8 Sia B la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Dopo aver effettuato le operazioni $E_{(2,1)}(-2)$, $E_{(3,1)}(-1)$ e $E_{(4,1)}(-3)$ si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Tutti gli elementi $a_{i\,2}$ con $i \geq 2$ sono nulli. Occorre quindi spostarsi a destra di una colonna, senza abbassarsi di riga. Altrimenti il primo elemento non nullo della terza riga, $a_{3\,3}$, non avrebbe indice (di colonna) maggiore del primo elemento non nullo della seconda riga, $a_{3\,2}$.

Effettuiamo ora le operazioni $E_{(3,2)}(1)$ e $E_{(4,2)}(-1)$ e otteniamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Infine lo scambio $E_{(3,4)}$ porta alla matrice echelon

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[2] Durante l'algoritmo si devono eseguire delle divisioni per il pivot, pertanto conviene scegliere il pivot in modo opportuno: ad esempio, quando si esegue l'algoritmo a mano, conviene scegliere, se possibile, come pivot il coefficiente 1. Se invece si opera con un calcolatore in aritmetica floating point conviene scegliere come pivot il coefficiente maggiore in valore assoluto per minimizzare gli errori da arrotondamento.

Alla matrice B è associato il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases} \tag{2.6}$$

Alla matrice B' è associato il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \qquad\quad - x_3 - x_4 = 0 \\ \qquad\qquad\quad x_4 = 2 \\ \qquad\qquad\quad 0 = 1 \end{cases} \tag{2.7}$$

L'ultima equazione è evidentemente contraddittoria; infatti nessuna quaterna (x_1, x_2, x_3, x_4) può soddisfare il sistema 2.7. Quindi il sistema 2.7 e quello equivalente 2.6 sono entrambi incompatibili.

In generale se un sistema è associato ad una matrice echelon B', con matrice dei coefficienti A', allora esso ha soluzioni se e solo se non vi compaiono equazioni del tipo $0 = 1$, cioè se e solo se il numero di righe non nulle di A' e di B' è uguale. In questo caso le soluzioni, che si ottengono col metodo esposto sopra, dipendono da $n - r$ parametri, dove r è il numero di righe non nulle di B' (e di A').

Da quanto detto segue subito che ogni sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite, con $m \leq n$, possiede ∞^N soluzioni per qualche $N \geq n - m$. Infatti un tale sistema è compatibile perché omogeneo e, con l'algoritmo di Gauss, si può trasformare in un sistema equivalente a scalini di p equazioni, con $p \leq m$. Quindi ha ∞^{n-p} soluzioni. Vedremo più avanti come calcolare p senza trasformare il sistema in un sistema a scalini equivalente.

Esempio 9 Sul corpo $K = \mathbb{R}$ consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 1 \\ 2X_1 + X_2 + 4X_3 = 2 \\ 3X_1 - 3X_2 + X_3 = 1 \end{cases}$$

Sulle righe della matrice completa eseguiamo le operazioni elementari
$E_{(2,1)}(-2)$, $E_{(3,1)}(-3)$, $E_{(3,2)}(-3)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -9 & -8 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Il sistema ridotto a scalini è

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 1 \\ \quad -3X_2 - 2X_3 = 0 \\ \qquad\quad -2X_3 = -2 \end{cases}$$

la sua unica soluzione è $(-2/3, -2/3, 1)$.

Esempio 10 Sul corpo $K = \mathbb{R}$ consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} X_3 + 2X_4 = 3 \\ 2X_1 + 4X_2 - 2X_3 = 4 \\ 2X_1 + 4X_2 - X_3 + 2X_4 = 7 \end{cases}$$

Effettuando sulle righe della matrice completa le operazioni elementari $E_{(1,2)}$, $E_{(3,1)}(-1)$, $E_{(3,2)}(-1)$ si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema corrispondente è

$$\begin{cases} 2X_1 + 4X_2 - 2X_3 & = & 4 \\ X_3 + 2X_4 & = & 3 \end{cases}$$

la cui soluzione generale è

$$(X_1, X_3, X_2, X_4) = (5 - 2t - 2u, t, 3 - 2u, u), \quad t, u \in \mathbb{R}$$

Il sistema ha quindi ∞^2 soluzioni.

Esempio 11 Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} X_2 - X_3 & = & -1 \\ X_1 + X_3 & = & 1 \\ 2X_1 + X_2 + X_3 & = & 2 \end{cases}$$

Effettuando sulle righe della matrice completa le operazioni elementari $E_{(1,2)}$, $E_{(3,1)}(-2)$, $E_{(3,2)}(-1)$ si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La terza riga corrisponde all'equazione incompatibile $0 = 1$, pertanto il sistema non ha soluzioni.

Esempio 12 Consideriamo il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 & = & 0 \\ X_1 + X_2 + X_3 + 2X_4 - X_5 & = & 0 \\ X_1 + X_2 + 3X_4 - 2X_5 & = & 0 \\ X_1 + X_2 + 3X_3 + X_5 & = & 0 \end{cases}$$

Eseguendo operazioni elementari sulle righe della matrice dei coefficienti ed eliminando le righe nulle si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice corrisponde al sistema

$$\begin{cases} X_1 + 2X_3 + X_2 + X_4 & = & 0 \\ X_3 - X_4 + X_5 & = & 0 \end{cases}$$

che ha ∞^3 soluzioni. La soluzione generale del sistema dato è quindi

$$(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = (-t - 3u + 2v, t, u - v, u, v), \quad t, u, v \in \mathbb{R} \ .$$

2.6 Matrici invertibili

Definizione 2.15 Sia $A \in M_n(K)$ e sia $I \in M_n(K)$ la matrice identità. Si dice che A è una *matrice invertibile* se esiste una matrice $B \in M_n(K)$ tale che $A \cdot B = B \cdot A = I$.

L'inversa di una matrice, quando esiste, è unica e si denota con A^{-1}. L'insieme delle matrici invertibili di $M_n(K)$ è un gruppo rispetto alla moltiplicazione righe per colonne, detto *gruppo lineare* di ordine n e denotato con $GL_n(K)$.

Esempio 13 La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ è invertibile e ha inversa $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non è invertibile, infatti essendo nulla la seconda riga di A, la matrice $A \cdot B$ ha l'ultima riga nulla, qualunque sia B, per cui $A \cdot B$ non può essere I.

Proposizione 2.16 *Se A è una matrice invertibile, il corrispondente sistema lineare omogeneo $A\,X = 0$ ha solo la soluzione banale.*

Dim. Se x è una soluzione, cioè $A\,x = 0$, moltiplicando a sinistra per A^{-1} troviamo $x = A^{-1}\,0 = 0$; □

Mostreremo ora che l'inversa di una matrice può essere calcolata mediante operazioni elementari sulle righe.

Definizione 2.17 Una *matrice elementare* di ordine n è una matrice in $M_n(K)$ ottenibile dalla matrice identità mediante un'operazione elementare sulle righe.

Esempio 14 Le seguenti sono matrici elementari reali di ordine 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Indicheremo una matrice elementare con

$E_{i\,j}$ se è ottenuta da I_n scambiando le righe i e j.

$E_i(\lambda)$ se è ottenuta da I_n moltiplicando per $\lambda \in K$ la riga i $(\lambda \neq 0)$.

$E_{i\,j}(\lambda)$ se è ottenuta da I_n sommando alla riga i la riga j moltiplicata per $\lambda \in K$.

E' immediato provare le seguenti proposizioni.

Proposizione 2.18 *Se $A \in M_{m,n}(K)$, ogni operazione elementare sulle righe di A si ottiene moltiplicando a sinistra A per la corrispondente matrice elementare.*

Proposizione 2.19 *Valgono le seguenti identità:*

1. $E_{i\,j}^{-1} = E_{j\,i}$.
2. $E_i(\lambda)^{-1} = E_i(\lambda^{-1})$.
3. $E_{i\,j}(\lambda)^{-1} = E_{i\,j}(-\lambda)$.

Si osservi che una matrice elementare è quindi invertibile e ha per inversa una matrice elementare dello stesso tipo.

Teorema 2.20 *Sia $A \in M_n(K)$. Allora A è invertibile se e solo se A si può esprimere come prodotto di matrici elementari.*

Dim. Se A è prodotto di matrici elementari, allora A è invertibile perché prodotto di matrici invertibili.

Viceversa supponiamo A invertibile. Per la Proposizione 2.16 il sistema omogeneo $AX = 0$ ha solo la soluzione $X = 0$. Utilizzando allora il metodo di Gauss, con operazioni elementari questo sistema lineare può essere trasformato in un sistema a scalini di n equazioni omogenee in n incognite, cioè della forma

$$\begin{cases} X_1 + a'_{12}X_2 + \ldots\ldots + a'_{1n}X_n & = & 0 \\ \qquad X_2 + \ldots\ldots + a'_{2n}X_n & = & 0 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots & & \vdots \\ \qquad X_{n-1} + a'_{n-1\,n}X_n & = & 0 \\ \qquad\qquad\qquad X_n & = & 0 \end{cases}$$

Con ulteriori operazioni elementari del tipo $E_{ij}(\lambda)$ è possibile ridurre questo sistema nella forma $X = 0$, cioè

$$\begin{cases} X_1 & & & & = & 0 \\ & X_2 & & & = & 0 \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & X_n & = & 0 \end{cases}$$

Tale trasformazione corrisponde alla moltiplicazione a sinistra del primo membro del sistema $AX = 0$ per il prodotto di un numero finito di matrici elementari, cioè si ha

$$E^{(1)} \cdots E^{(s)} AX = X = I_n X$$

con $E^{(1)}, \ldots, E^{(s)}$ matrici elementari. Perciò $E^{(1)} \cdots E^{(s)} A = I_n$; per l'unicità di A^{-1} si ha

$$E^{(1)} \cdots E^{(s)} = A^{-1}$$

e quindi

$$A = (E^{(1)} \cdots E^{(s)})^{-1} = (E^{(s)})^{-1} \cdots (E^{(1)})^{-1}$$

è un prodotto di matrici elementari. □

Siano $A, B, M \in M_n(K)$. Denotiamo con $(A \,|\, B) \in M_{n,2n}$ la matrice le cui prime n colonne sono quelle di A e le ultime n quelle di B. Le matrici M e $(A \,|\, B)$ possono essere moltiplicate, e si ha

$$M(A \,|\, B) = (MA \,|\, MB) \ .$$

Supponiamo che la matrice A sia invertibile e consideriamo la matrice $(A \,|\, I_n) \in M_{n,2n}$. Moltiplicandola a sinistra per A^{-1} otteniamo

$$A^{-1}(A \,|\, I_n) = (I_n \,|\, A^{-1}) \ .$$

Poiché A^{-1} è esprimibile come prodotto di matrici elementari, vediamo che la matrice $(I_n \,|\, A^{-1})$ può essere ottenuta a partire da $(A \,|\, I_n)$ mediante operazioni elementari sulle righe.

Si ottiene così il seguente metodo pratico per stabilire se una matrice data $A \in M_n(K)$ è invertibile e, se lo è, per trovare A^{-1}.

Si considera la matrice $(A \,|\, I_n)$; se, effettuando operazioni elementari sulle righe, è possibile ottenere una matrice della forma $(I_n \,|\, B)$, allora A è invertibile e la matrice B così ottenuta necessariamente coincide con A^{-1}. Se invece ciò non è possibile, allora A non è invertibile.

Esempio 15 Consideriamo la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Quindi A è invertibile e $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$.

Invece la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$ non è invertibile. Infatti non può essere trasformata in una della forma $(I_2 \,|\, B)$ con operazioni elementari.

2.7 Caratteristica di una matrice

L'algoritmo di Gauss, molto utile in pratica per risolvere sistemi di equazioni lineari, non si presta troppo bene ad essere utilizzato in questioni teoriche, in cui è preferibile avere criteri generali di risolubilità espressi attraverso le matrici associate al sistema. Criteri di questo tipo si possono ottenere mediante la nozione di "caratteristica".

Definizione 2.21 Sia $A \in M_{m,n}(K)$. La *caratteristica per righe* di A è il massimo numero di righe linearmente indipendenti di A, considerate come vettori di K^n. Analogamente si definisce la *caratteristica per colonne* di A.

Teorema 2.22 *La caratteristica per righe e la caratteristica per colonne di una matrice* $A \in M_{m,n}(K)$ *coincidono.*

Dim. Siano r la caratteristica per righe e c la caratteristica per colonne di A. Se $r = 0$, allora A è la matrice nulla e quindi anche $c = 0$.

Supponiamo allora $r > 0$. Una relazione di dipendenza lineare tra le colonne di A è una soluzione non banale del sistema lineare omogeneo
$$A\,X = 0 \tag{2.8}$$
dove $X = {}^t(X_1, \dots, X_n)$. Perciò il rango per colonne di A è individuato dall'insieme delle soluzioni del sistema(2.8). Se le righe di A si dispongono in ordine diverso, c non cambia perché un cambiamento dell'ordine delle equazioni del sistema non influisce sull'insieme delle sue soluzioni. Neanche r cambia se si riordinano le righe di A. Quindi non è restrittivo supporre che le prime r righe di A siano linearmente indipendenti. La matrice
$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix}$$
ha caratteristica per righe uguale ad r.

Consideriamo il sistema
$$A^*\,X = 0 \tag{2.9}$$
e sia $(x_1, \dots, x_n)$ una sua soluzione. Se $r < m$, per ogni $i = r+1, \dots, m$, l'i-esima riga di A è combinazione lineare delle righe di A^*, e quindi si ha
$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = \lambda_1(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n) + \dots + \lambda_r(a_{r1}x_1 + \dots + a_{rn}x_n) = 0 + \dots + 0 \;= 0$$
per opportuni $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$. Quindi $(x_1, \dots, x_n)$ è anche soluzione del sistema (2.8). Viceversa è ovvio che ogni soluzione del sistema (2.8) è soluzione del sistema (2.9), che è suo sottosistema. In conclusione (2.8) e (2.9) sono due sistemi equivalenti, e quindi la caratteristica per colonne di A^* è uguale a c. Poiché le colonne di A^* sono vettori di K^r, per il Lemma 2.8 si ha $c \leq r$. Ragionando allo stesso modo su ${}^tA$ si deduce che anche $r \leq c$, e quindi la tesi è provata. $\square$

Definizione 2.23 Il valore comune della caratteristica per righe e della caratteristica per colonne della matrice A è detto *caratteristica* o *rango* di A e si denota con $\varrho(A)$.

E' chiaro che $\varrho(A) \leq \min(m,n)$, per ogni $A \in M_{m,n}(K)$. Il teorema seguente mostra che le operazioni elementari sulle righe di una matrice non modificano la caratteristica.

Teorema 2.24 *Sia $A \in M_{m,n}(K)$. Se $B \in M_{m,n}(K)$ è ottenuta da A mediante una successione di operazioni elementari sulle righe, allora*

$$\varrho(A) = \varrho(B) \ .$$

Dim. Basta provare la tesi nel caso in cui B è ottenuta da A con una sola operazione elementare sulle righe. E' evidente che scambiando due righe o moltiplicando una riga per una costante non nulla, la caratteristica non cambia.

Il caso in cui B è ottenuta da A sommando alla riga i un multiplo della riga j è un facile esercizio. $\square$

Proposizione 2.25 *1. Se $A \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{n,p}(K)$, allora*

$$\varrho(AB) \leq \min(\varrho(A), \varrho(B)) \ .$$

2. Se $A \in GL_m(K)$, $C \in GL_n(K)$ e $B \in M_{m,n}(K)$, allora

$$\varrho(AB) = \varrho(B) = \varrho(BC) \ .$$

Dim. Se $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jh})$ e $B^{(i)}$ è la i-esima riga di B, allora la i-esima riga di AB è

$$a_{i1}B^{(1)} + a_{i2}B^{(2)} + \ldots + a_{in}B^{(n)} \ .$$

Essendo ogni riga di AB combinazione lineare delle righe di B, per il Lemma 2.8 si ha $\varrho(AB) \leq \varrho(B)$. D'altra parte si ha anche $\varrho(AB) = \varrho({}^t(AB)) = \varrho({}^tB\,{}^tA) \leq \varrho({}^tA) = \varrho(A)$ e ciò prova la (1).

2) Per la (1) si ha $\quad \varrho(AB) \leq \varrho(B) = \varrho(A^{-1}(AB)) \leq \varrho(AB) \quad$ e quindi $\varrho(AB) = \varrho(B)$. La seconda uguaglianza si dimostra in modo simile. $\square$

Per le matrici quadrate si ha:

Teorema 2.26 *Sia $A \in M_n(K)$. Allora $A \in GL_n(K) \Leftrightarrow \varrho(A) = n$.*

Dim. Per la Proposizione 2.25 (2) una matrice invertibile ha la stessa caratteristica della matrice identità $I_n = A^{-1}A$ e la caratteristica di I_n è chiaramente n. Viceversa, se A ha caratteristica n, le sue righe $A^{(i)}$ costituiscono un sistema di generatori per K^n, quindi, se $E^{(i)}$ è la i-esima riga della matrice identità ($i = 1, \ldots, n$), esistono $b_{i1}, \ldots, b_{in} \in K$ tali che

$$E^{(i)} = b_{i\,1}A^{(1)} + \ldots + b_{i\,n}A^{(n)} \ .$$

Consideriamo la matrice $B = (b_{i\,j}) \in M_n(K)$; l'uguaglianza precedente equivale a $I_n = BA$ e quindi A è invertibile. $\square$

Definizione 2.27 Una *sottomatrice* $p \times q$ di una matrice $A \in M_{m,n}(K)$ è una matrice costituita dagli elementi di A comuni a p righe e a q colonne fissate in A. Fissati gli indici $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq m$ per le righe e $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_p \leq n$ per le colonne, la sottomatrice di A corrispondente si denota con $A(i_1, i_2, \ldots, i_p \mid j_1, j_2, \ldots, j_q)$.

Esempio 16 Se $\quad A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 8 & -3 & 0 \\ 8 & \pi & 1/2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 8 & 1/2 & 9 \\ 1/3 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{4,5}(\mathbb{R})$

allora

$$A(2\ 4 \mid 2\ 4\ 5) = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 3 & 1/2 & 9 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$$

Proposizione 2.28 *Per ogni sottomatrice* B *di una matrice* A *si ha:*

$$\varrho(B) \leq \varrho(A) \ .$$

Dim. Siano $A \in M_{m,n}(K)$, $B = A(i_1, i_2, \dots, i_p \mid j_1, j_2, \dots, j_q)$ e sia $C \in M_{p,n}(K)$ la sottomatrice $A(i_1, i_2, \dots, i_p \mid 1, 2, \dots, n)$ di A. E' ovvio che $\varrho(C) \leq \varrho(A)$. D'altra parte B è una sottomatrice di C, precisamente $B = C(1, 2, \dots, p \mid j_1, j_2, \dots, j_q)$ ed è ovvio che $\varrho(B) \leq \varrho(C)$. □

I risultati precedenti hanno come importante conseguenza il seguente

Teorema 2.29 *La caratteristica di una matrice* A *è uguale al massimo degli ordini delle sue sottomatrici quadrate invertibili.*

Dim. Sia r il massimo degli ordini delle sottomatrici quadrate invertibili di A. Dal Teorema 2.26 e dalla Proposizione 2.28 segue che $r \leq \varrho(A)$. D'altra parte, posto $\varrho = \varrho(A)$, se le righe di A di indici $i_1, \dots, i_\varrho$ sono linearmente indipendenti, la sottomatrice $B = A(i_1, \dots, i_\varrho \mid 1, \dots, n)$ ha caratteristica ϱ, e quindi ha ϱ colonne linearmente indipendenti in corrispondenza agli indici $j_1, \dots, j_\varrho$. La sottomatrice quadrata $B(1 \dots, \varrho \mid j_1, \dots, j_\varrho)$ di B ha caratteristica ϱ, cioè è invertibile.

Poiché $B(1 \dots, \varrho \mid j_1, \dots, j_\varrho) = A(i_1, \dots, i_\varrho \mid j_1, \dots, j_\varrho)$ è una sottomatrice di A, si ha anche $r \geq \varrho(A)$. □

Vedremo più avanti un metodo pratico per calcolare la caratteristica di una matrice servendoci del concetto di "determinante" di una matrice quadrata.

2.8 Il teorema di Rouché-Capelli

La nozione di caratteristica permette di dare il seguente criterio fondamentale di risolubilità di un sistema lineare.

Teorema 2.30 (Rouché-Capelli) *Siano* $A \in M_{m,n}(K)$, $b \in M_{m,1}(K)$ *e* $X = {}^t(X_1, \dots, X_n)$. *Allora il sistema lineare di* m *equazioni in* n *incognite* $AX = b$ *è compatibile se e solo se*

$$\varrho(A) = \varrho(A \mid b) \ .$$

In tal caso il sistema possiede $\infty^{n-\varrho}$ *soluzioni, dove* $\varrho = \varrho(A)$.

Dim. Sia $A = (a_{i\,j})$. Una n-upla $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ è soluzione del sistema dato se e solo se si ha

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{1\,1} \\ \vdots \\ a_{m\,1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1\,n} \\ \vdots \\ a_{m\,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

che esprime la condizione che il vettore b sia combinazione lineare delle colonne di A. Questa condizione è verificata se e solo se la matrice $(A \mid b)$ ha la stessa caratteristica per colonne della matrice A, cioè se e solo se $\varrho(A) = \varrho(A \mid b)$. E questo prova la prima parte del teorema.

Se il sistema dato è compatibile, e $\varrho = \varrho(A)$, possiamo supporre che le sue prime ϱ equazioni siano linearmente indipendenti e sostituire il sistema originario con il sistema equivalente:

$$\begin{cases} a_{1\,1}X_1 + \dots + a_{1\,n}X_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\varrho\,1}X_1 + \dots + a_{\varrho\,n}X_n & = & b_\varrho \end{cases}$$

Applicando a questo sistema il metodo di eliminazione di Gauss, nessuna delle equazioni si riduce a $0 = 0$, perché ciò implicherebbe che essa è linearmente dipendente da quelle che la precedono. Quindi questo sistema si può trasformare in un sistema a scalini di ϱ equazioni; ciò significa che questo sistema, e quindi anche il sistema dato, possiede $\infty^{n-\varrho}$ soluzioni. □

2.9 Determinante di una matrice quadrata

Ad ogni matrice quadrata A a elementi in K si può associare un elemento di K, detto "determinante di A". La definizione e lo studio delle principali proprietà di questo fondamentale concetto dell'algebra lineare sono l'argomento di questa sezione. Faremo uso di alcune nozioni relative alle permutazioni di un insieme finito di elementi, richiamate brevemente nell'Appendice B.

Sia n un intero positivo; denotiamo con S_n l'insieme delle permutazioni di $\{1,\ldots,n\}$. Se $\sigma \in S_n$, denotiamo con $\epsilon(\sigma)$ il segno di σ.

Definizione 2.31 Sia $A=(a_{ij})$ una matrice quadrata di ordine n ad elementi in un corpo[3] K. Data una permutazione $\sigma \in S_n$ si chiama *prodotto dedotto relativo a* σ l'elemento di K

$$\epsilon(\sigma)\cdot a_{1\,\sigma(1)}\cdot a_{2\,\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n\,\sigma(n)}$$

Il *determinante* della matrice quadrata A, denotato con $\det(A)$ oppure con $|A|$, è la somma degli $n!$ prodotti dedotti al variare di σ in S_n. In formula

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)\,a_{1\,\sigma(1)}a_{2\,\sigma(2)}\cdots a_{n\,\sigma(n)} \tag{2.10}$$

Esempio 17 Vediamo il segno di alcuni prodotti per $n=4$.

a) $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ ha il segno $+$ perché i secondi indici $(1\,3\,4\,2)$ si ottengono da $(1\,2\,3\,4)$ con due scambi successivi $(1\,2\,3\,4)\to(1\,2\,4\,3)\to(1\,3\,4\,2)$.

b) $a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$ ha il segno $-$ perché i secondi indici $(3\,1\,4\,2)$ si ottengono da $(1\,2\,3\,4)$ con tre scambi successivi $(1\,2\,3\,4)\to(1\,2\,4\,3)\to(1\,3\,4\,2)\to(3\,1\,4\,2)$.

c) $a_{13}a_{23}a_{31}a_{44}$ non è un prodotto da prendere in considerazione perché i secondi indici $(3\,3\,1\,4)$ non costituiscono una permutazione dei primi.

La (2.10) è una somma di $n!$ termini, che a meno del segno, sono tutti i possibili prodotti di n elementi di A appartenenti a righe e a colonne diverse.

Se $n=1$, allora $A=(a)$ e si ha $\det(A)=a$.

Se $n=2$ e $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ allora

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\;.$$

Se $n=3$ e $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ allora

$$\det(A)=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}\;.$$

Al crescere di n il determinante di una matrice $n\times n$ qualsiasi non è facile da calcolare direttamente a partire dalla definizione. Vedremo più avanti dei metodi di calcolo più efficienti che non la diretta applicazione della definizione 2.10.

La proposizione seguente mostra alcune proprietà dei determinanti che consentono di semplificarne il calcolo.

Proposizione 2.32 *Sia* $A=(a_{ij})\in M_n(K)$.

[3] La definizione di determinante si può dare più generale nel caso in cui K sia un anello.

1. *Se B è la matrice ottenuta da A scambiando due righe o due colonne, allora* $\det(B) = -\det(A)$.

2. *Se A ha due righe uguali, allora* $\det(A) = 0$.

3. *Se B è la matrice ottenuta da A moltiplicando una riga o una colonna per $\lambda \in K$, allora* $\det(B) = \lambda \det(A)$.

4. *Se una riga di A è somma di due elementi di K^n, il determinante di A è uguale alla somma dei determinanti delle due matrici ottenute da A sostituendo la riga in questione con ciascuno dei due addendi; in formula*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \\ a_{i1}+b_{i1} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

5. *Se B è la matrice ottenuta da A sommando a una riga (risp. colonna) un'altra riga (risp. colonna) moltiplicata per un elemento di K, allora* $\det(B) = \det(A)$.

6. $\det({}^tA) = \det(A)$.

7. *Se $A = (a_{ij})$ è una matrice triangolare (superiore o inferiore), allora*

$$\det(A) = a_{1\,1} \cdots a_{n\,n} \ .$$

In particolare $\det(I_n) = 1$.

Dim. (Cenno) Per la (1) si noti che scambiando due righe o due colonne, tutti i prodotti della definizione di determinante cambiano segno. La (2) segue dalla (1), infatti scambiando due righe o due colonne uguali si ha $\det A = -\det A$, da cui $\det A = 0$. La (3) e la (4) seguono subito dalla definizione. La (5) segue da (3), (4) e (2) con un semplice calcolo.

Per provare la (6), poniamo ${}^tA = (a'_{i\,j})$ dove $a'_{i\,j} = a_{j\,i}$. Allora

$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma)\, a'_{1\,\sigma(1)} \cdots a'_{n\,\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)\,1} \cdots a_{\sigma(n)\,n}$$

Poniamo $\tau = \sigma^{-1}$. Poiché $\epsilon(\sigma) = \epsilon(\sigma^{-1})$, e tenuto conto che quando σ varia in S_n anche τ varia descrivendo tutto S_n, si ha

$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)\,1} \cdots a_{\sigma(n)\,n} = \sum_{\tau \in S_n} \epsilon(\tau)\, a_{1\,\tau(1)} \cdots a_{n\,\tau(n)} = \det(A)$$

(7) Se A è triangolare superiore di ordine $n > 1$, cioè $a_{i\,j} = 0$ per ogni $i > j$, allora il prodotto dedotto relativo a una permutazione σ è non nullo se e solo se $\sigma(i) \geq i$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Ma l'unica permutazione che verifica questa condizione è quella identica che ha segno 1. Quindi $\det(A) = a_{1\,1} \cdots a_{n\,n}$. Se A è triangolare inferiore si procede in modo analogo. □

Oss. Poiché ogni matrice quadrata si può trasformare in una matrice triangolare mediante trasformazioni E_{ij} (che cambiano il segno del determinante) e $E_{ij}(\lambda)$ (che lasciano invariato il determinante), la riduzione gaussiana dà un metodo effettivo per calcolare il determinante.

Esempio 18 Nel calcolo sotto si effettuano le seguenti operazioni elementari sulle righe: $E_{(1,2)}$, $E_{(3,1)}(3)$, $E_{(3,2)}(-4)$, $E_{(4,2)}(-1)$, $E_{(4,3)}(-1/2)$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -(-1)\cdot(1)\cdot(-2)\cdot(3) = -6$$

Corollario 2.33 *Sia* $A \in M_n(K)$. *Allora* $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \varrho(A) = n$.

Vedremo ora che il calcolo del determinante di una matrice quadrata di ordine n si può ricondurre a quello di determinanti di matrici di ordine minore di n. Per enunciare questi teoremi occorre dare prima alcune definizioni.

Definizione 2.34 Sia A una matrice $m \times n$. Un *minore di ordine* p di A è il determinante di una sottomatrice $p \times p$.

Corollario 2.35 *Sia* $A \in M_{m,n}(K)$. *La caratteristica di* A *è uguale al massimo ordine dei minori non nulli di* A.

Esempio 19 I minori di ordine 1 di una matrice sono i suoi elementi.

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. I minori di ordine 2 sono

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1\ ; \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\ ; \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

Non ci sono minori di ordine > 2.

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ha un solo minore di ordine 3 cioè $\det A$ e 9 minori di ordine 2, ciascuno dei quali si ottiene cancellando una riga arbitraria e una colonna arbitraria di A.

Definizione 2.36 Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. Il *complemento algebrico* o *cofattore* $A_{i\,j}$ dell'elemento $a_{i\,j}$ è il minore ottenuto cancellando la riga e la colonna di $a_{i\,j}$ moltiplicato per $(-1)^{i+j}$.

Esempio 20 Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, si ha $A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot 3 = 3$; $A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot 1 = -1$.

Se $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, si ha $A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$; $A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$.

Teorema 2.37 (primo teorema di Laplace) *Sia* $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, *allora:*

$$\det(A) = a_{r\,1}A_{r\,1} + \ldots + a_{r\,n}A_{r\,n} \qquad \textit{(per ogni } r \textit{ fissato)} \tag{2.11}$$

$$\det(A) = a_{1\,s}A_{1\,s} + \ldots + a_{n\,s}A_{n\,s} \qquad \textit{(per ogni } s \textit{ fissato)} \tag{2.12}$$

Dim. (cenno) La dimostrazione piuttosto tecnica si basa sul fatto che raccogliendo il fattore $a_{r\,s}$ in tutti gli addendi di (2.10) che lo contengono, si ha $\det(A) = a_{r\,s}A_{r\,s} + B$, dove B è la somma dei prodotti dedotti che non contengono $a_{r\,s}$, mentre $A_{r\,s}$ è il complemento algebrico di a_{rs} in A. La tesi segue dal fatto che in ogni prodotto dedotto di A compare come fattore uno ed un solo elemento di ogni riga e uno ed uno solo elemento di ogni colonna. □

La (2.11) si dice *sviluppo del determinante secondo la r-esima riga*; La(2.12) si dice *sviluppo del determinante secondo la s-esima colonna* . Queste consentono di ridurre il calcolo di un determinante di ordine n a quello di n determinanti di ordine $n-1$. Ciascuno di questi, a sua volta, si calcola calcolando $n-1$ determinanti d'ordine $n-2$, ecc.

Esempio 21 (Sviluppo sulla prima riga)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 4 + 4(4-6) = -6$$

Teorema 2.38 (secondo teorema di Laplace) *Siano $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ e $i \neq j$, allora:*

$$\begin{aligned} a_{i\,1}A_{j\,1} + \ldots + a_{i\,n}A_{j\,n} &= 0 \\ a_{1\,i}A_{1\,j} + \ldots + a_{n\,i}A_{n\,j} &= 0 \end{aligned}$$

Cioè: moltiplicando gli elementi di una riga per i complementi algebrici di un'altra riga e sommando si ottiene zero. Analogamente per le colonne.

Dim. L'espressione $a_{i\,1}A_{j\,1} + \ldots + a_{i\,n}A_{j\,n}$ è lo sviluppo secondo la riga j-esima del determinante della matrice ottenuta da A sostituendo la j-esime riga con la i-esima riga. Ma la matrice così ottenuta, avendo due righe uguali, ha determinante nullo. La seconda uguaglianza si prova in modo analogo. □

La nozione di complemento algebrico si estende al caso di una sottomatrice quadrata nel modo seguente: siano $A \in M_n(K)$, $I = (i_1, \ldots, i_p)$ e $J = (j_1, \ldots, j_p)$ $(p < n)$.

Indichiamo con $a_{I,J}$ la sottomatrice $A(i_1, \ldots, i_p \mid j_1, \ldots, j_p)$. Il *complemento algebrico* di $a_{I,J}$, denotato con $A_{I,J}$ è il determinante della matrice che si ottiene da A cancellando le righe $i_1, \ldots, i_p$ e le colonne $j_1, \ldots, j_p$ con il segno $(-1)^{i_1+\ldots+i_p+j_1+\ldots+j_p}$.

Il seguente teorema, del quale omettiamo la dimostrazione, è una generalizzazione del primo teorema di Laplace.

Teorema 2.39 (terzo teorema di Laplace) *Sia $A \in M_n(K)$. Fissate p righe di indici $R = (r_1, \ldots, r_p)$ si ha:*

$$\det(A) = \sum_{J=(j_1<\ldots<j_p)} a_{R,J}\, A_{R,J} \tag{2.13}$$

Fissate p colonne di indici $S = (s_1, \ldots, s_p)$ si ha:

$$\det(A) = \sum_{I=(i_1<\ldots<i_p)} a_{I,S}\, A_{I,S} \tag{2.14}$$

Le sommatorie precedenti si intendono estese a tutte le $\binom{n}{p}$ combinazioni di classe p degli interi $1, 2, \ldots, n$. In base al teorema precedente si può quindi sviluppare un determinante secondo un insieme di righe (o di colonne) essendo il determinante di A è uguale alla somma dei prodotti di tutti i minori di ordine p $(1 \leq p < n)$ di A determinati da p righe (risp. colonne) prefissate di indice $i_1, \ldots, i_p$ $(1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n)$ per i rispettivi complementi algebrici.

Teorema 2.40 (Binet) [4]. *Siano* $A, B \in M_n(K)$. *Allora si ha*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \ .$$

Dim. Se E è una matrice elementare, per ogni matrice quadrata Q tale che EQ sia definita, si ha $|EQ| = |E|\,|Q|$ (Proposizione 2.32 1), 4), 5)). Poiché il determinante di una matrice elementare è diverso da zero, ciò implica che il determinante di un prodotto P di matrici elementari è diverso da zero.

Utilizzando l'algoritmo di Gauss, si vede che esiste una P come sopra tale che PA sia la matrice identità oppure abbia una riga nulla. Se $PA = I$ si ha

$$|P|\,|AB| = |P(AB)| = |(PA)B| = |B| \qquad 1 = |PA| = |P|\,|A|$$

da cui segue subito $|AB| = |A|\,|B|$.

Se PA ha una riga di zeri si ha: $|PA| = 0$ e quindi $|A| = 0$ essendo $|P| \neq 0$. Inoltre $(PA)B$ ha una riga di zeri, e quindi anche $|P(AB)| = 0$, da cui $|AB| = 0 = |A|\,|B|$.

Vediamo un'altra dimostrazione che utilizza il terzo teorema di Laplace.

Consideriamo la matrice a blocchi $C = \left(\begin{array}{c|c} \text{A} & 0 \\ \hline \text{-I} & \text{B} \end{array}\right)$. Applicando il terzo teorema di Laplace si ha $\det(C) = \det(A)\det(B)$. D'altra parte applicando operazioni elementari del tipo $E_{i,j}(\lambda)$ sulle ultime n colonne di C si ottiene una matrice $C' = \left(\begin{array}{c|c} \text{A} & \text{AB} \\ \hline \text{-I} & 0 \end{array}\right)$ che ha lo stesso determinante di C. Ma per il terzo teorema di Laplace si ha anche $\det(C') = \det(AB)$ e quindi $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. $\square$

Usando i determinanti si può stabilire se una matrice è invertibile e si può calcolarne l'inversa con un metodo alternativo a quello descritto nel numero 2.6. Il risultato così ottenuto si può applicare alla risoluzione dei sistemi lineari la cui matrice dei coefficienti è invertibile (regola di Cramer).

Corollario 2.41 *Sia* $A \in M_n(K)$. *Allora*

1. *A è invertibile se e solo se* $\det(A) \neq 0$.
2. *Se* $\det(A) \neq 0$ *l'inversa di* $A = (a_{i\,j})$ *è:*

$$A^{-1} = (\alpha_{i\,j}) \qquad \alpha_{i\,j} = \frac{1}{\det(A)}\,(A_{j\,i})$$

   dove $A_{j\,i}$ è il complemento algebrico di $a_{j\,i}$.

3. *Se A è invertibile si ha* $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

Si noti che per avere l'elemento di posto (i,j) in A^{-1} occorre considerare il complemento algebrico dell'elemento di posto (j,i) di A.

Dim. 1) segue dal Teorema 2.26 e dal Corollario 2.33.

2) L'elemento di posto (i,j) della matrice che si ottiene moltiplicando $A = (a_{ij})$ per la matrice (α_{ij}) è

$$\sum_k a_{i\,k}\,\alpha_{k\,j} = \sum_k a_{i\,k}\,\frac{A_{j\,k}}{\det(A)} = \frac{1}{\det(A)}\sum_k a_{i\,k}\,A_{j\,k} = I_n$$

Infatti se $i = j$ l'ultima sommatoria è $\det(A)$ per il primo teorema di Laplace, mentre per $i \neq j$ essa è 0 per il secondo teorema di Laplace.

3) segue dal teorema di Binet. $\square$

[4] Più in generale vale il seguente teorema noto come teorema di Binet: il prodotto di due matrici A di tipo (m,n) e B di tipo (n,m) è una matrice quadrata di ordine m il cui determinante è zero se $m > n$ ed è uguale alla somma dei prodotti sei minori d'ordine massimo "corrispondenti" (i.e. gli indici delle colonne del primo coincidono con gli indici delle righe dell'altro) di A e di B se $m \leq n$.

Esempio 22 Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Sviluppando rispetto alla seconda riga si ha

$$\det(A) = -2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 8 = -2 \ .$$

Quindi A è invertibile, e $A^{-1} = -\frac{1}{2}\,(A_{ji})$. Calcoliamo i complementi algebrici degli elementi di A. Si ha:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \ ; \ A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \ ; \ A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 \ ;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \ ; \ A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2 \ ; \ A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -8 \ ;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \ ; \ A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ; \ A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \ .$$

Abbiamo quindi

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 1/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} .$$

Applichiamo ora i risultati precedenti ai sistemi di equazioni con matrice dei coefficienti quadrata e invertibile.

Corollario 2.42 (Cramer) *Se $A \in GL_n(K)$ e $b = {}^t(b_1, \ldots, b_n)$, allora l'unica soluzione $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ del sistema lineare $AX = b$ è data dalla formula*

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\det(A)} \tag{2.15}$$

dove Δ_i è il determinante della matrice ottenuta da A sostituendo la i-esima colonna con il vettore colonna b.

Dim. Poiché $x = A^{-1}b$, basta sostituire la (2) al posto di A^{-1}. □

La formula 2.15 è nota come *regola di Cramer.*

Data una matrice $A \in M_{m,n}(K)$, supponiamo di voler calcolare la caratteristica utilizzando il Corollario 2.35. Se A non è la matrice nulla, e quindi la sua caratteristica è almeno 1, si devono calcolare i minori di ordine via via crescente, a partire dall'ordine 2. Quando per un certo r si sarà trovato un minore di ordine r non nullo, mentre tutti i minori di ordine $r+1$ si annullano (oppure non ce ne sono se $r = \min(m, n)$), si concluderà che $\varrho(A) = r$. Infatti dall'annullarsi di tutti i minori di ordine $r+1$ discende l'annullarsi dei minori di ordine superiore: ciò segue subito per induzione su s sviluppando ogni minore di ordine $s > r$ secondo una sua riga o una sua colonna.

Il calcolo della caratteristica può essere semplificato notevolmente utilizzando il seguente teorema di Kronecker. Premettiamo una definizione.

Sia A è una matrice e B una sua sottomatrice quadrata di ordine ρ. Si dice che un minore di ordine $\rho+1$ di A *è ottenuto orlando* il minore $|B|$ se esso è il determinante di una sottomatrice di A di ordine $\rho+1$ ottenuta aggiungendo una riga e una colonna a B.

Teorema 2.43 (Kronecker) *Sia A una matrice avente un minore non nullo di ordine ρ. Se tutti i minori di ordine $\rho+1$ ottenuti orlando questo minore sono nulli, allora la caratteristica di A è ρ.*

Dim. Sia $B = A(i_1,\dots,i_\rho \mid j_1,\dots,j_\rho)$ una sottomatrice quadrata di ordine ρ della matrice A, tale che $\det(B) \neq 0$. Supponiamo che ogni sottomatrice quadrata di ordine $\rho+1$ di A ottenuta aggiungendo a B una riga e una colonna di A abbia determinante nullo, cioè che i cosiddetti *minori orlati di B* siano tutti nulli. Dall'ipotesi $\det(B) \neq 0$ discende che le colonne j_1-esima, $\dots, j_\rho$-esima di A sono linearmente indipendenti, e pertanto la condizione la condizione sui minori orlati implica che ogni altra colonna di A è combinazione lineare delle colonne j_1-esima, $\dots, j_\rho$-esima. Quindi A ha caratteristica ρ. □

Esempio 23 La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ha caratteristica 2, come si può facilmente verificare mediante la riduzione a forma echelon. Tuttavia se vogliamo calcolare la caratteristica di A ricorrendo alla definizione in termini dei minori, la cosa diventa laboriosa. Si vede subito che $\det(A) = 0$, quindi $\varrho(A) < 4$. Un minore di ordine 2 non nullo si ottiene considerando le prime due righe e le prime due colonne; quindi $\varrho(A) \geq 2$. Per avere la certezza che $\varrho(A) = 2$ occorre controllare che tutti i 16 minori di ordine 3 sono nulli.

Per il teorema di Kronecker per avere la certezza che $\varrho(A) = 2$, basta controllare solo le 4 sottomatrici

$$A(1\,2\,3 \mid 1\,2\,3)\ ,\quad A(1\,2\,3 \mid 1\,2\,4)$$

$$A(1\,2\,4 \mid 1\,2\,3)\ ,\quad A(1\,2\,4 \mid 1\,2\,4)\ .$$

Dato che, come si verifica subito, i minori dati da queste quattro matrici sono tutti nulli, si conclude, per il teorema di Kronecker che sono tutti nulli anche gli altri 12 minori e che cioè $\varrho(A) = 2$.

Esempio 24 *Stabilire per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ il sistema*

$$\begin{cases} x - \lambda y + 3z &= 2 \\ x + y - \lambda z &= -1 \\ \lambda x - y + z &= 1 \end{cases}$$

ha una sola soluzione, per quali nessuna, per quali infinite.

Il determinante della matrice dei coefficienti A è $(\lambda+1)^2(\lambda-2)$; quindi se $\lambda \neq -1$ e $\lambda \neq 2$ il sistema ha una sola soluzione che si può determinare con la regola di Cramer.

Se $\lambda = -1$, si ha $\varrho(A) = 2$ perché $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, ma la matrice completa B ha caratteristica 3 perché $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Quindi per $\lambda = -1$ il sistema è incompatibile.

Se $\lambda = 2$, utilizzando il teorema di Kronecker si trova che $\varrho(A) = \varrho(B)$. Infatti il minore $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ è non nullo e i minori di B di ordine 3 che lo orlano sono $\det(A) = 0$ e $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Quindi per $\lambda = 2$ il sistema ha $\infty^{3-\varrho(A)}$, cioè ∞^1 soluzioni.

Esempio 25 *Dato il sistema lineare*

$$\begin{cases} x+\lambda\, y-z &= 1 \\ x-\lambda\, z &= 2 \\ \lambda\, x+2y-3z &= 3 \end{cases}$$

a) determinare, se esistono soluzioni per $\lambda=2$*;*

b) discuterne le soluzioni al variare di $\lambda\in\mathbb{R}$*.*

La matrice dei coefficienti e quella completa sono rispettivamente

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 0 & -\lambda \\ \lambda & 2 & -3 \end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 2 \\ \lambda & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Se $\lambda=2$, si ha $\varrho(A)=\varrho(B)$ perché le ultime due colonne di B sono una l'opposta dell'altra. Inoltre, $\det(A)=0$ (la terza riga di A è la somma delle prime due) e $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\neq 0$, quindi $\varrho(A)=2$ e il sistema ha ∞^1 soluzioni che sono $(2+2\,z,-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,z,z)$ al variare di $z\in\mathbb{R}$.

b) Dalla prima parte segue che 2 è una radice di $\det(A)=-\lambda^3+5\,\lambda-2$, quindi

$\det(A)=(2-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-1)=(2-\lambda)(\lambda+1-\sqrt{2})(\lambda+1+\sqrt{2})$.

Quindi se $\lambda\neq 2$, $\lambda\neq -1+\sqrt{2}$ e $\lambda\neq -1-\sqrt{2}$, si ha $\varrho(A)=\varrho(B)=3$ e il sistema ha un'unica soluzione. Il caso $\lambda=2$ è già stato trattato. Negli altri due casi si ha $\varrho(A)=2$ perché $\begin{vmatrix} 0 & -\lambda \\ 2 & -3 \end{vmatrix}\neq 0$, mentre $\varrho(B)=3$ perché

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3\lambda-2)\neq 0$$

se $\lambda=-1\pm\sqrt{2}$, quindi il sistema non ha soluzioni.

2.10 Esercizi

Es. 12. Calcolare i seguenti prodotti (righe per colonne)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$$

Es. 13. Siano $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Provare che $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ e che $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

Es. 14. Determinare tutte le matrici $A \in M_2(\mathbb{R})$ tali che $A^2 = I$.

Es. 15. Applicare il procedimento di eliminazione di Gauss a ciascuno dei seguenti sistemi. Se il sistema è compatibile determinare la soluzione generale.

$$\begin{cases} x + y + 3z = 5 \\ 2x - y + 4z = 11 \\ -y + z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 3x + 3y + 5z = 2 \\ x - y - z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ 7x + 4y + 5z = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ x - 2y + 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ y + z + t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3t = 1 \\ x + 2y + 3z + 3t = 3 \\ x + z + t = 3 \\ x + y + z + 2t = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + 2z + 3u + 4v = 0 \\ 2x + y + 2z + 3u + 4v = 0 \\ 3x + 3y + 6z + 10u + 15v = 0 \end{cases}$$

Es. 16. Dire per quali valori di λ hanno soluzioni diverse dalla soluzione banale i sistemi lineari omogenei seguenti

$$\begin{cases} x + \lambda y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ x + \lambda y - 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda x + y + z + t = 0 \\ x - y + t = 0 \\ 2x + z + t = 0 \\ \lambda x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Es. 17. Provare che se A e B sono matrici $n \times n$ invertibili, allora $A \cdot B$ è invertibile e la sua inversa è $B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Es. 18. Dire per quali valori di λ hanno soluzione i sistemi lineari seguenti e, in caso affermativo dire quante sono:

$$\begin{cases} \lambda x - y = 1 \\ x - 4\lambda y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda x + y - z = 1 \\ \lambda x - y + \lambda z = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda x + 2\lambda y = \lambda \\ \lambda x + y = 1 - \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = 2\lambda - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda x + y + z = 1 + \lambda \\ x + y - z = 2 - 2\lambda \\ y - z = -\lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ (\lambda - 1)y + z = 0 \\ (\lambda + 1)z = -1 \end{cases}$$

Es. 19. Calcolare l'inversa, se esiste, di ognuna delle seguenti matrici ad elementi rispettivamente nel corpo $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ 1 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2-i \\ 2+i & -2 \end{pmatrix}$$

Es. 20. Trovare la matrice inversa delle seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Es. 21. Calcolare i seguenti determinanti

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 12 & 12 & 13 & 96 \\ 0 & 12 & 12 & 13 & 87 \\ 3 & -3 & 9 & 0 & 81 \\ 7 & 8 & -2 & 9 & 65 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 9 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 2 & a & -2 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}.$$

Es. 22. Sapendo che $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, calcolare i seguenti determinanti

$$\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Es. 23. Calcolare il determinante di ciascuna delle seguenti matrici trasformandole in una matrice triangolare superiore

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & a & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a & 3 & 0 \\ 0 & a & 2 & a & 4 \\ 0 & a & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Es. 24. Per quali $h \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ è invertibile.

Es. 25. Usare il teorema di Kronecker per calcolare la caratteristica delle matrici

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Es. 26. Discutere la caratteristica delle seguenti matrici al variare di $h \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & h & h & 1 & h \\ -1 & 1 & 0 & 2h & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & h & 0 \\ 1 & 0 & -1 & h \\ 2 & h & h-1 & 1 \\ 1 & 3 & 3h+2 & -2h \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & h & -2 \\ 1 & h & -1 & -1 \\ -h & -2 & 4 & -2h \\ -1 & h & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & h+2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & h+1 \\ h+1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & h+1 & 2 \end{pmatrix}$$

Es. 27. Risolvere i seguenti sistemi con la regola di Cramer rispettivamente sul corpo $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{C}$.

$$\begin{cases} 2x - y = 2 - \sqrt{2} \\ -x + \sqrt{2}z = 1 \\ \sqrt{2}x + y = 2\sqrt{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x + 2z = 4 \\ -x + y = -1 \\ y + z = 2 \\ x + u = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x + i\,y + z = 1 - 2\,i \\ 2y - i\,z = -2 + 2\,i \\ i\,x + i\,y + i\,z = 1 + i \end{cases}$$

Es. 28. Sia $AX = 0$ un sistema lineare omogeneo di n equazioni in $n+1$ incognite tale che la matrice dei coefficienti abbia caratteristica n.

Provare che $(m_1, -m_2, m_3, \ldots, (-1)^{n+1} m_{n+1})$, dove m_i è il minore di A che si ottiene cancellando la colonna i-esima, è una soluzione del sistema.

Es. 29. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

a) Il prodotto di due matrici triangolari superiori è una matrice triangolare superiore;

b) Il prodotto di due matrici diagonali è una matrice diagonale;

c) Se $A \in M_n(\mathbb{Q})$ e $A^3 = I$, allora A è non singolare;

d) $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $A^2 = I$, allora $A = I$;

e) Se A, B, C sono matrici non nulle tali che $AC = BC$, allora $A = B$.

Es. 30. Ridurre a forma echelon e calcolare la caratteristica delle matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & 9 & 3 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 8 & 1 \\ 1 & 9 & 6 & 6 & 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 0 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Es. 31. Una matrice quadrata A si dice *antisimmetrica* se ${}^tA = -A$. Esprimere le seguenti matrici a elementi razionali come somma di una matrice simmetrica e una antisimmetrica.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ - & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es. 32. Sia $A \in M_n(K)$. Provare che $A + {}^tA$ è simmetrica e che $A - {}^tA$ è antisimmetrica. Dedurre che ogni matrice quadrata A si può esprimere come somma di una matrice simmetrica e di una antisimmetrica.

Es. 33. Sia $A \in M_n(K)$. Provare che ${}^tA\,A$ è simmetrica.

Es. 34. Una matrice $A \in M_n(K)$ si dice *nilpotente* se esiste un intero $n \geq 1$ tale che $A^n = 0$. Provare che per ogni $a, b, c \in K$, le matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sono nilpotenti.

Es. 35. Provare che una matrice nilpotente non è invertibile.

Capitolo 3

Vettori

3.1 Vettori applicati e vettori liberi

In questo numero introduciamo il concetto di vettore geometrico su una retta, nel piano e nello spazio che ci consentirà di sviluppare un linguaggio che semplifica notevolmente i concetti base della geometria analitica. L'insieme dei vettori geometrici dotato delle operazioni di somma e di prodotto per un numero reale, è un importante esempio di spazio vettoriale sul corpo dei numeri reali.

Definizione 3.1 Un *vettore applicato* (o *segmento orientato*) dello spazio ordinario è individuato da un *punto iniziale* o *punto di applicazione* A e da un *punto finale* o *secondo estremo* B e viene indicato col simbolo $B - A$.

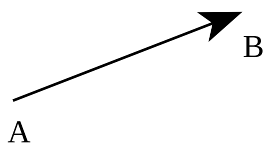


Figura 3.1: Il vettore $B - A$

Il vettore applicato $B - A$ con punto di applicazione A e punto finale B viene rappresentato con una freccia che congiunge i punti A e B come in Figura 3.1.

Se $A \neq B$ il vettore applicato $B - A$ è quindi individuato da

punto di applicazione A
la *direzione*, che è quella della retta AB;
il *verso* che è quello da A a B;
il *modulo*, ossia il *numero reale* che misura la lunghezza del segmento AB.

Se $A = B$, si dice che il vettore $B - A$ è un vettore nullo; esso ha modulo 0 mentre direzione e verso sono indeterminati.

Definizione 3.2 Due vettori applicati $B - A$ e $D - C$ si dicono *equipollenti* se il quadrilatero $ABDC$ è un parallelogramma (inclusi i casi degeneri) e si scrive

$$B - A \equiv D - C \ .$$

Nel caso non degenere, cioè $A \neq B$ e $C \neq D$, ciò significa che $B - A$ e $D - C$ hanno la stessa direzione, lo stesso verso e lo stesso modulo.

Due vettori applicati equipollenti giacciono su rette parallele (eventualmente coincidenti) e muovendo una delle due rette parallelamente a se stessa è possibile portare i due vettori a sovrapporsi in modo che i loro punti iniziali e finali coincidano.

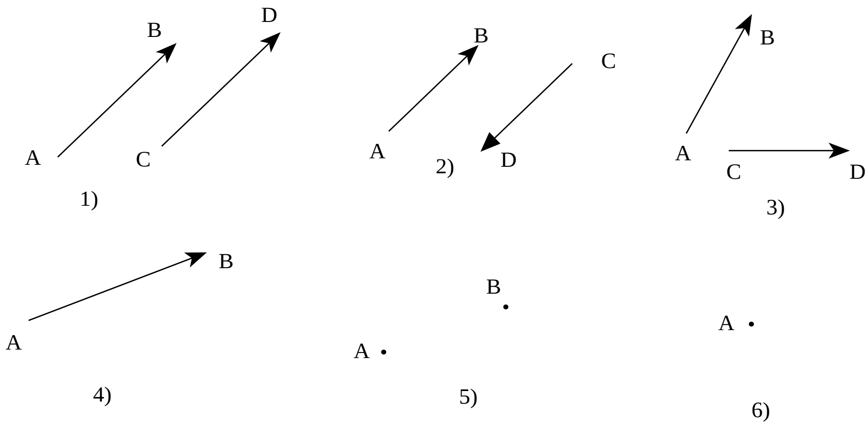


Figura 3.2: Coppie di vettori

La relazione di equipollenza tra vettori applicati è una relazione d'equivalenza.

Esempio. Nella Figura 3.2 sono rappresentate varie coppie di vettori.

Si ha nel caso 1) $B-A \equiv D-C$, nei casi 2) e 3) $B-A \not\equiv D-C$, nel caso 4) $B-A \equiv B-A$, nel caso 5) $A-A \equiv B-B$ e nel caso 6) $A-A \equiv A-A$.

Definizione 3.3 Un *vettore libero* (o semplicemente *vettore*) è una classe d'equipollenza di vettori applicati, cioè è l'insieme di tutti i segmenti orientati equipollenti a un segmento orientato assegnato.

Se $B-A$ è un vettore applicato ed u è il corrispondente vettore libero, useremo la notazione

$$u = B - A$$

per indicare che *u è la classe di equipollenza di $B-A$* ovvero che *$B-A$ è un rappresentante della classe u*.

Il vettore libero individuato da un qualunque vettore applicato nullo si chiama *vettore nullo* e si denota con 0: esso ha modulo nullo e direzione e verso indeterminati.

Per descrivere meglio le classi di equipollenza proviamo la seguente

Proposizione 3.4 *Dato un vettore applicato $B-A$ e un punto O esiste uno ed un solo vettore applicato $P-O$ tale che*

$$P - O \equiv B - A\ .$$

Dim. Supponiamo $B \neq A$ e O non appartenente alla retta AB. Allora si conduce da B la parallela alla retta AO e da O la parallela alla retta AB; detto P il punto comune alle due rette, si ha $P-O \equiv B-A$. Gli altri casi sono lasciati per esercizio. □

Corollario 3.5 *Fissato un punto O si consideri la corrispondenza che ad ogni vettore libero u associa l'unico rappresentante della classe di equipollenza u applicato in O. Tale corrispondenza è biunivoca.*

Dim. E' immediata conseguenza della Proposizione 3.4. □

3.2 Operazioni sui vettori

Definiamo ora la *somma di due vettori liberi* mediante loro rappresentanti nel modo seguente (regola del parallelogramma).

Definizione 3.6 Siano $u = B - A$ e $v = D - A$; allora $u + v = C - A$, dove C è il punto del piano tale che il quadrilatero $ABCD$ sia un parallelogramma.

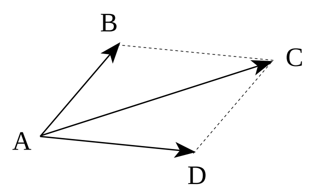


Figura 3.3: Somma di due vettori

Dalla definizione segue che evidentemente la somma di due vettori è un'operazione commutativa, cioè per ogni coppia di vettori u, v si ha

$$u + v = v + u \ .$$

Inoltre si osservi che il vettore nullo 0 soddisfa alla seguente

$$u + 0 = 0 + u = u$$

per ogni vettore u.

Se $u = B - A$, denotiamo con $-u$ il vettore rappresentato da $A - B$. Si ha allora l'identità

$$u + (-u) = 0 \ .$$

Inoltre l'operazione di somma di due vettori è associativa, cioè

$$u + (v + w) = (u + v) + w$$

per ogni terna di vettori u, v, w.

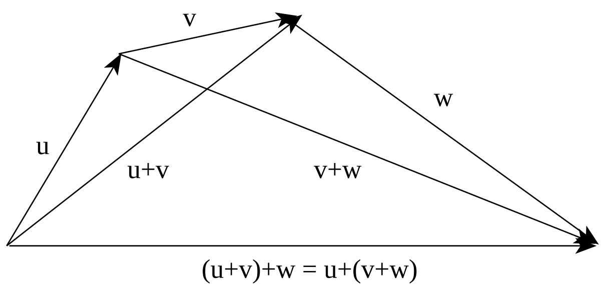


Figura 3.4: Associatività della somma di vettori

Definizione 3.7 Il *prodotto di un vettore u per un numero reale λ* è per definizione il vettore che ha la stessa direzione di u, modulo uguale a quello di u moltiplicato per $|\lambda|$ e verso concorde o discorde con quello di u a seconda che λ sia positivo o negativo; se $\lambda = 0$ oppure $u = 0$, si pone $\lambda u = 0$.

Questa operazione "esterna" di moltiplicazione di un vettore per uno scalare è compatibile con la somma di vettori e con le operazioni di somma e prodotto tra gli scalari, più precisamente se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e se u, v sono due vettori, si ha

$\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v;$ $\qquad (\lambda\mu)u = \lambda(\mu u);$
$(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u;$ $\qquad 1u = u.$

Quindi i vettori geometrici del piano (e dello spazio) con le operazioni definite sopra costituiscono uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

E' importante notare che, per definire i vettori liberi e le operazioni di somma di due vettori e prodotto di un vettore per uno scalare, abbiamo usato solo il concetto di parallelismo tra rette e la possibilità di confrontare le lunghezze di due segmenti situati su rette parallele (cioè la possibilità di trovare un numero reale λ che rappresenta la misura di uno di essi rispetto all'altro, e viceversa, di associare a un segmento e a uno scalare λ un secondo segmento che abbia misura λ rispetto al primo). Queste possibilità sono assicurate dagli assiomi della geometria euclidea.

Non abbiamo invece bisogno di confrontare due segmenti qualsiasi o misurare l'angolo di due semirette. In particolare non è necessario disporre di un'unità di misura assoluta delle distanze, né del concetto di perpendicolarità.

3.3 Vettori liberi e coordinate

Fissato nello spazio un sistema di coordinate cartesiane con origine O, associando ad ogni vettore libero u, l'unico vettore applicato nell'origine O e secondo estremo P tale che $u = P - O$ e ad ogni vettore $P-O$ applicato nell'origine le coordinate cartesiane del punto P, si ottiene una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei vettori liberi dello spazio e l'insieme $\mathbb{R}^3$ che consente di identificare i due insiemi. Se u è un vettore, scrivendo

$$u = (a, b, c)$$

intenderemo che è stato fissato un sistema di coordinate cartesiane con origine O e che il vettore libero u ha come rappresentante applicato nell'origine O un vettore il cui secondo estremo ha coordinate (a, b, c).

Con semplici considerazioni di geometria elementare (uguaglianze e similitudini di triangoli) è facile tradurre in termini di coordinate le definizioni "geometriche" di somma e prodotto date in (3.2). Precisamente, se $u = (a, b, c)$, $u' = (a', b', c')$, $\lambda \in \mathbb{R}$, allora

$$u + u' = (a + a', b + b', c + c')$$

$$\lambda u = (\lambda a, \lambda b, \lambda c) \ .$$

Corollario 3.8 *Siano $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ due punti dello spazio. Allora*

$$B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) \ .$$

Dim. Sia P il punto tale che $P-O$ sia equipollente a $B-A$; allora $OABP$ è un parallelogramma e se P ha coordinate (x, y, z), dato che $B-O = (P-O)+(A-O)$, si ha $(b_1, b_2, b_3) = (x, y, z)+(a_1, a_2, a_3)$, da cui

$$(x, y, z) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) \ .$$

Oss. Mentre le Definizioni 3.6 e 3.7 sono valide solo in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$, la loro riformulazione in termini di coordinate si estende banalmente a $\mathbb{R}^n$ (Sezione 1.5).

3.4 Modulo di un vettore

Alcune proprietà dei vettori applicati sono invarianti al variare di un vettore nella sua classe di equipollenza e quindi si possono considerare anche come proprietà dei corrispondenti vettori liberi. Fissato un sistema di coordinate, abbiamo visto che si ha una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei vettori liberi del piano (risp. dello spazio) e l'insieme $\mathbb{R}^2$ (risp. $\mathbb{R}^3$). Pertanto ogni proprietà di vettori liberi, si deve poter esprimere mediante le coordinate dei vettori stessi.

In questo numero e nel seguito di questo capitolo verranno introdotti concetti e proprietà dei vettori applicati invarianti per equipollenza. Per studiarli mediante le coordinate conviene usare un sistema di coordinate cartesiane *ortogonali*. Fissiamo dunque d'ora in poi, nel piano e nello spazio, dei sistemi di coordinate ortogonali come in Fig. 3.5.

E' ovvio che il modulo $|u|$ di un vettore u è invariante per equipollenza. La seguente proposizione è immediata conseguenza del Teorema di Pitagora.

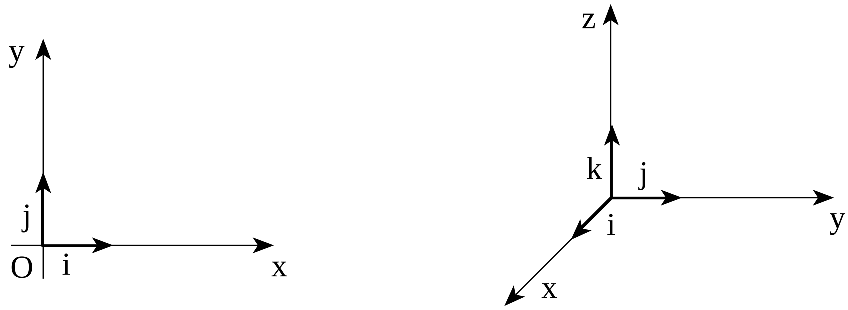


Figura 3.5: Assi ortogonali nel piano e nello spazio

Proposizione 3.9 *Dati nel piano il vettore* $u = (a, b)$ *e i punti* $A(a_1, a_2)$ *e* $B(b_1, b_2)$*, si ha:*

$$|u| = \sqrt{a^2 + b^2}; \qquad |B - A| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Dati nello spazio il vettore $u = (a, b, c)$ *e i punti* $A(a_1, a_2, a_3)$ *e* $B(b_1, b_2, b_3)$*, si ha:*

$$|u| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}; \qquad |B - A| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Definizione 3.10 Chiamiamo *versore* un vettore di modulo 1. Chiamiamo *versore associato* ad un vettore u e lo indichiamo con $\mathrm{vers}\,(u)$ il versore avente la stessa direzione e verso di u. Si ha

$$\mathrm{vers}\,(u) = \frac{u}{|u|}$$

Ad esempio $i = (1, 0)$ e $j = (0, 1)$ sono versori nel piano; $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ e $k = (0, 0, 1)$ sono versori nello spazio.

Corollario 3.11 *Se* $u = (a, b)$

$$\mathrm{vers}\,(u) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

Se $u = (a, b, c)$

$$\mathrm{vers}\,(u) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right)$$

3.5 Angolo formato da due vettori

Definizione 3.12 L'*angolo formato da due vettori applicati* è l'angolo compreso tra 0 e π formato da due semirette uscenti dallo stesso punto, parallele alle rette di applicazione dei vettori e aventi lo stesso verso dei vettori.

E' chiaro che l'angolo formato da due vettori applicati è invariante per equipollenza. Quindi si può definire l'*angolo* $\hat{uv}$ *formato da due vettori liberi* u e v come l'angolo formato da due qualsiasi rappresentanti di u.

Definizione 3.13 Sia $B - A$ un vettore applicato ed r una retta; si dice *vettore proiezione ortogonale* di $B - A$ su r il vettore applicato $B' - A'$ dove B' e A' sono le proiezioni ortogonali dei punti B e A su r.

Se $D-C$ è equipollente a $B-A$ e se D' e C' sono le proiezioni ortogonali di D e C su r allora $D'-C'$ è equipollente a $B'-A'$ e se s è una retta parallela ad r e $B"$ e $A"$ sono le proiezioni ortogonali dei punti B e A su s, allora $B"-A"$ è equipollente a $B'-A'$.

Definizione 3.14 Sia u un vettore libero ed r una retta; diciamo *vettore proiezione ortogonale* di u lungo la direzione di r il vettore libero rappresentato dalla proiezione ortogonale su r di un qualunque rappresentante di u.

Se r è una retta orientata ed ε il versore avente direzione e verso di r, diciamo *componente* di u lungo la direzione e il verso di r il numero reale λ tale che $\lambda\varepsilon$ è il vettore proiezione ortogonale di u lungo la direzione di r.

Se u e $v \neq 0$ sono due vettori liberi è quindi chiaro cosa si debba intendere per vettore proiezione ortogonale di u su v e per componente di u su v.

Proposizione 3.15 *Siano u e v due vettori liberi, allora il vettore proiezione ortogonale di u su v è*

$$(|u| \cos \hat{uv}) \operatorname{vers}(v)$$

e la componente di u su v è

$$|u| \cos \hat{uv}$$

Dim. Segue facilmente dalla definizione. □

3.6 Prodotto scalare

In questo numero introduciamo il concetto di prodotto scalare di due vettori che consente di caratterizzare l'ortogonalità di due vettori. Per motivare la definizione proviamo il seguente

Lemma 3.16 *a) Siano $u=(a_1,a_2)$, $v=(b_1,b_2)$ due vettori non nulli di $\mathbb{R}^2$. Allora u e v sono ortogonali ($u \perp v$) se e solo se*

$$a_1b_1 + a_2b_2 = 0$$

b) Siano $u=(a_1,a_2,a_3)$, $v=(b_1,b_2,b_3)$ due vettori non nulli di $\mathbb{R}^3$. Allora u e v sono ortogonali se e solo se

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

Dim. Siano $A-O=u$, $C-A=v$, $C-O=u+v$. Allora

$$u+v = (a_1+b_1, a_2+b_2)$$

e quindi si ha

$$|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2)$$

Ma $|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2$ (teorema di Pitagora) se e solo se l'angolo in A è retto se e solo se $u \perp v$.

Il caso $\mathbb{R}^3$ si prova con considerazioni analoghe. □

Definizione 3.17 Siano $u=(a_1,\ldots,a_n)$ e $v=(b_1,\ldots,b_n)$ due vettori di $\mathbb{R}^n$. Diciamo *prodotto scalare* di u e di v e lo indichiamo con $u \cdot v$ il numero reale

$$a_1b_1 + \ldots + a_nb_n \ .$$

La proposizione seguente mette in evidenza le proprietà fondamentali del prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 3.18 *Per ogni* $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ *e per ogni* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *si ha:*

1. *Simmetria:* $u \cdot v = v \cdot u\,.$

2. *Linearità:* $(\lambda u + \mu v) \cdot w = \lambda(u \cdot w) + \mu(v \cdot w)\,.$

3. *Positività:* $u \cdot u = |u|^2 \geq 0$ *e* $u \cdot u = 0 \Leftrightarrow u = 0\,.$

Dim. E' una facile verifica. □

Teorema 3.19 *Siano* u*,* v *due vettori non nulli di* $\mathbb{R}^2$ *o di* $\mathbb{R}^3$*. Allora*

$$u \cdot v = |u||v| \cos \hat{uv}$$

Dim. Consideriamo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali e siano $A - O$, $B - O$ i vettori applicati in O rappresentanti u e v.

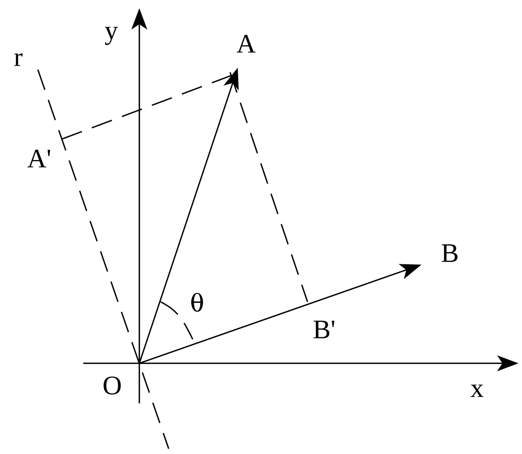


Figura 3.6:

Indichiamo con ϑ l'angolo $\hat{uv}$; consideriamo la retta r passante per O e ortogonale ad OB e conduciamo da A le parallele ad r e ad OB; si ottengono i punti A' e B' come in Figura 3.6. Per la Proposizione 3.15 si ha $B' - O = (|u| \cos \vartheta)\, \text{vers}\,(v)$; indicando con w il vettore libero associato ad $A' - O$ si ha

$$u = w + (|u| \cos \vartheta)\, \text{vers}\,(v)$$

Quindi $u \cdot v = w \cdot v + (|u| \cos \vartheta)\, \text{vers}\,(v) \cdot v$ per la Proposizione 3.18. Ma $w \cdot v = 0$ per il Lemma 3.16 e quindi $u \cdot v = (|u| \cos \vartheta)\, \text{vers}\,(v) \cdot v = (|u||v| \cos \vartheta)\, \text{vers}\,(v) \cdot \text{vers}\,(v)$; ma $\text{vers}\,(v) \cdot \text{vers}\,(v) = 1$ da cui la tesi. □

Corollario 3.20 *Siano* u*,* v *due vettori. Allora*

$$\frac{u \cdot v}{|v|} \qquad e \qquad \frac{u \cdot v}{|v|}\, \text{vers}\,(v)$$

sono rispettivamente la componente di u *su* v *e la proiezione ortogonale di* u *su* v*. In particolare se* v *è un versore, la componente di* u *su* v *è* $u \cdot v$ *mentre la proiezione ortogonale di* u *su* v *è* $(u \cdot v)\, v$

Dim. Segue dalla Proposizione 3.15 e dal Teorema 3.19.

Concludiamo questo numero con la seguente

Definizione 3.21 I *coseni direttori* di un vettore u sono i coseni degli angoli che u forma con i versori degli assi coordinati.

Proposizione 3.22 *Sia $u = (a,b,c)$ un vettore dello spazio (nel piano il discorso è analogo). Allora si ha :*

1. *Le coordinate di u sono le componenti di u sui versori degli assi.*

2. *I coseni direttori di u sono le coordinate di* $\mathrm{vers}\,(u)$.

3.7 Prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$

In questo numero definiamo prodotto vettoriale di due vettori dello spazio ordinario; esso consente di caratterizzare il parallelismo di due vettori. Tale operazione può essere definita in modo puramente geometrico e quindi ricavare le sue proprietà e, in particolare, la sua espressione in termini di coordinate, ma alcune verifiche diventano alquanto laboriose. Conviene allora dare una definizione analitica e ricavare da questa le proprietà geometriche.

Nel seguito salvo contrario avviso assumeremo che nello spazio sia fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali.

Definizione 3.23 Dati due vettori $u = (a_1, a_2, a_3)$, $v = (b_1, b_2, b_3)$ dello spazio, dicesi *prodotto vettoriale* di u e v, e lo si denota con $u \times v$, il vettore

$$(a_2b_3 - a_3b_2, -(a_1b_3 - a_3b_1), a_1b_2 - a_2b_1)$$

(In alcuni testi il prodotto vettoriale di u e v è denotato con $u \wedge v$).

Oss. Le coordinate di $u \times v$ sono i determinanti a segni alterni delle matrici che si ottengono dalla matrice

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

cancellando rispettivamente la prima, la seconda e la terza riga.

Lemma 3.24 *Il vettore $u \times v$ è ortogonale ad entrambi i vettori u e v.*

Dim. Le due matrici

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

avendo due colonne uguali hanno determinante nullo. Quindi, indicando con $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ le coordinate del vettore $u \times v$ e sviluppando entrambi i determinanti secondo la prima colonna si ottiene $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$ e $b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3 = 0$. □

Proposizione 3.25 *Per ogni $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, valgono le seguenti proprietà:*

1. $u \times v = -(v \times u) = (-v) \times u$ *(anticommutatività);*

2. $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$;

3. $(\lambda u) \times v = \lambda(u \times v)$

Dim. Sono facili verifiche. □

Oss. Si osservi che il prodotto vettoriale non è associativo, cioè in generale risulta

$$u \times (v \times w) \neq (u \times v) \times w$$

Un esempio si ottiene prendendo $u = i$, $v = i$ e $w = j$. In tal caso risulta $u \times (v \times w) = -j$ e $(u \times v) \times w = 0$.

Dopo aver osservato che due vettori sono paralleli se e solo se due qualsiasi vettori applicati in uno stesso punto e ad essi equivalenti, sono allineati, diamo la seguente

Definizione 3.26 Siano u, v vettori dello spazio e siano $P-O$, $Q-O$ i due rappresentanti applicati in un punto O; allora diciamo che u e v sono *paralleli* e scriviamo $u \parallel v$, se O, P, Q sono allineati.

Teorema 3.27 *Siano u, v vettori dello spazio; allora si ha:*

1. $|u \times v|^2 = |u|^2\,|v|^2 - (u \cdot v)^2$ *(identità di Lagrange).*
2. $|u \times v| = |u|\,|v| \sin \hat{uv}$*, ovvero il modulo di $u \times v$ è l'area del parallelogrammo di lati u e v.*
3. $u \times v = 0$ *se e solo se u e v sono paralleli.*

Dim. 1) Si ha
$|u \times v|^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (-a_1b_3 + a_3b_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$
e
$|u|^2\,|v|^2 - (u \cdot v)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\,(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$
e non c'è difficoltà a verificare l'uguaglianza dei due numeri.

2) Per il Teorema 3.19 si ha $(u \cdot v)^2 = |u|^2\,|v|^2 \cos^2 \hat{uv}$, quindi
$|u \times v|^2 = |u|^2\,|v|^2 (1 - \cos^2 \hat{uv}) = |u|^2\,|v|^2 \sin^2 \hat{uv}$;
ma $\sin \hat{uv} \geq 0$ perché per definizione è $0 \leq \hat{uv} \leq \pi$ e quindi $\sqrt{\sin^2 \hat{uv}} = \sin \hat{uv}$, da cui la tesi.

3) Segue dalla (2) e dalla Definizione 3.26. □

Corollario 3.28 *Siano A, B, C tre punti dello spazio. Allora l'area del triangolo da essi definito è*

$$S = \frac{1}{2}|(B - A) \times (C - A)| \ .$$

3.8 Prodotto misto

Definizione 3.29 Siano u, v, w tre vettori dello spazio e siano $P-O$, $Q-O$, $R-O$ i rappresentanti di u, v, w applicati in un punto O, rispettivamente. Si dice allora che u, v, w sono *complanari* se i punti O, P, Q ed R lo sono.

Si osservi che, se u, v, w sono complanari, essendo $v \times w$ ortogonale sia a v che a w, esso è ortogonale anche ad u, quindi il prodotto scalare di u e $v \times w$ è nullo; e vale anche il viceversa. Quindi l'annullarsi del numero reale $u \cdot (v \times w)$, che possiamo scrivere semplicemente $u \cdot v \times w$ non avendo senso la scrittura $(u \cdot v) \times w$, è condizione necessaria e sufficiente per la complanarità di u, v, w.

Definizione 3.30 Siano u, v, w tre vettori dello spazio. Chiamiamo *prodotto misto* di u, v, w e lo indichiamo con $u \cdot v \times w$ il numero reale che si ottiene facendo il prodotto scalare di u e $v \times w$.

Proposizione 3.31 *Siano* $u=(a_1,a_2,a_3)$, $v=(b_1,b_2,b_3)$, $w=(c_1,c_2,c_3)$. *Allora si ha:*

$$u \cdot v \times w = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} .$$

Dim. Dalla definizione di prodotto scalare e da quella di prodotto vettoriale si ha:

$$u \cdot v \times w = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \ .$$

3.9 Orientazione dei sistemi di coordinate

In questo numero utilizzeremo i vettori e le matrici per affrontare il problema dell'orientazione dei sistemi di coordinate già discusso nella sezione 1.4. Cominciamo con alcune notazioni.

Se u_1, u_2 sono due vettori non allineati del piano, denotiamo con $\sigma(u_1,u_2)$ il sistema di coordinate cartesiane che ha $\text{vers}\,(u_1)$, $\text{vers}\,(u_2)$ come versori rispettivamente dell'asse x e dell'asse y.

Se u_1, u_2, u_3 sono tre vettori non complanari dello spazio, denotiamo con $\sigma(u_1,u_2,u_3)$ il sistema di coordinate cartesiane che ha $\text{vers}\,(u_1)$, $\text{vers}\,(u_2)$, $\text{vers}\,(u_3)$ come versori rispettivamente dell'asse x, dell'asse y e dell'asse z.

Si ha $\sigma(u_1,u_2) \neq \sigma(u_2,u_1)$. La definizione 1.1 può essere così riformulata:

Definizione 3.32 Un sistema di coordinate cartesiane (non necessariamente ortogonali) $\sigma(u_1,u_2,u_3)$ si dice orientato positivamente, se un osservatore orientato come u_3 vede percorrere l'angolo $\widehat{u_1u_2}$ da u_1 a u_2 in senso antiorario. Altrimenti si dice che $\sigma(u_1,u_2,u_3)$ è orientato negativamente.

Nel caso di un piano, un sistema di coordinate cartesiane $\sigma(u_1,u_2)$ si dice orientato positivamente rispetto ad un vettore u_3 non giacente nel piano, se il sistema di coordinate cartesiane nello spazio $\sigma(u_1,u_2,u_3)$ è orientato positivamente.

Definizione 3.33 Due sistemi di coordinate cartesiane del piano (o dello spazio) si dicono *concordi* se hanno lo stesso tipo di orientazione (positivo o negativo).

La relazione di essere concordi è una relazione d'equivalenza nell'insieme dei sistemi di coordinate cartesiane del piano.

Proposizione 3.34 *Siano* $u_1 = (a_1,a_2)$, $u_2 = (b_1,b_2)$ *due vettori non allineati del piano in cui sia stato fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali orientato positivamente. Sia* $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ *la matrice ad essi associata. Allora il sistema di coordinate* $\sigma(u_1,u_2)$ *è orientato positivamente se e solo se* $\det(A) > 0$.

Dim. E' chiaro che $\sigma(u_1,u_2)$ è concorde con $\sigma(\text{vers}\,(u_1),\text{vers}\,(u_2))$ e che possiamo scrivere

$$\text{vers}\,(u_1) = (\cos\vartheta, \sin\vartheta) \qquad \text{vers}\,(u_2) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$$

Si ha

$$\det(A) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \cos\varphi \\ \sin\vartheta & \sin\varphi \end{pmatrix} = \cos\vartheta\ \sin\varphi - \cos\varphi\ \sin\vartheta = \sin(\varphi - \vartheta)$$

Ora è evidente che $\sigma(\text{vers}\,(u_1),\text{vers}\,(u_2))$ è orientato positivamente se e solo se $0 < \varphi - \vartheta < \pi$, il che avviene se e solo se $\sin(\varphi - \vartheta) > 0$. D'altra parte $\det(A) = |u_1|\,|u_2|\,det \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \cos\varphi \\ \sin\vartheta & \sin\varphi \end{pmatrix}$, e ciò conclude la dimostrazione. $\square$

Corollario 3.35 *Due sistemi* $\sigma(u_1, u_2)$ *e* $\sigma(u_1', u_2')$ *sono concordi se e solo se dette* A *ed* A' *le matrici associate rispettivamente a* u_1, u_2 *e* u_1', u_2', *si ha* $\det(A) \cdot \det(A') > 0$.

Corollario 3.36 *Sia* $\sigma(u_1, u_2)$ *un sistema di coordinate cartesiane. Allora*

1. $\sigma(u_1, u_2)$ *e* $\sigma(u_1 + \lambda u_2, u_2)$ *sono concordi per ogni* $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. $\sigma(u_1, u_2)$ *e* $\sigma(-u_1, u_2)$ *sono discordi.*

3. $\sigma(u_1, u_2)$ *e* $\sigma(u_2, u_1)$ *sono discordi.*

Utilizzando le proprietà dei determinanti si può dimostrare

Proposizione 3.37 *Siano* u_1, u_2, u_3 *vettori non complanari nello spazio e sia* A *la matrice associata. Allora* $\sigma(u_1, u_2, u_3)$ *è orientato positivamente se e solo se* $\det(A) > 0$.

Corollario 3.38 *Due sistemi* $\sigma(u_1, u_2, u_3)$ *e* $\sigma(u_1', u_2', u_3')$ *sono concordi se e solo se dette* A *ed* A' *le matrici associate rispettivamente a* u_1, u_2, u_3 *e* u_1', u_2', u_3', *si ha* $\det(A) \cdot \det(A') > 0$.

3.10 Esercizi

Es. 36. Determinare tutti i vettori di $\mathbb{R}^2$ ortogonali al vettore $(1, 1)$.

Es. 37. Determinare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ ortogonali al vettore $(1, 1, 1)$.

Es. 38. Per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ i vettori $(\lambda, -2, 1)$, $(2\lambda, \lambda, -4)$ sono ortogonali.

Es. 39. Calcolare l'angolo formato dai vettori $(2, -2, 1)$ e $(0, 1, -1)$.

Es. 40. Dati i vettori $A - O$ e $B - O$ provare che il parallelogramma da essi individuato è un rettangolo se e solo se ha le diagonali uguali.

Es. 41. Determinare un vettore di modulo 2 perpendicolare ai vettori $(1, 1, 1)$ e $(2, 1, 1)$. Trovare tutti i vettori di modulo 2 ortogonali a $u = (1, -1, 0)$ e a $(0, 0, 1)$.

Es. 42. Determinare un vettore v di $\mathbb{R}^4$ tale che $v \cdot u = 0$, $v \cdot w = 0$ e $|v| = 5$, dove $u = (0, 0, 0, 1)$ e $w = (1, 0, 1, -2)$.

Es. 43. Siano $u = (1, 2)$, $v = (-3, 4)$. Calcolare la componente e la proiezione ortogonale di u su v.

Es. 44. Siano u, v due vettori non nulli di $\mathbb{R}^3$, e sia w il vettore proiezione ortogonale di u su v. Provare che $u - w$ è ortogonale a v.

Es. 45. Siano $u = (0, -1, 1)$, $v = (1, 1, 0)$. Determinare due vettori v' e v'' tali che v' sia parallelo ad u, v'' sia ortogonale ad u e $v = v' + v''$.

Es. 46. Siano $\vec{i}$, $\vec{j}$ i versori dell'asse x e dell'asse y rispettivamente. Determinare un vettore w parallelo a $u = (1, -1, 0)$ tale che $w - \vec{i} + \vec{j}$ sia ortogonale a $(2, -3, 1)$. Può avere modulo 1?

Es. 47. Trovare tutti i vettori di modulo 3 paralleli a $(1,-1/2,1)$.

Es. 48. Dati tre vettori non nulli u, v, w e un numero reale $\lambda \neq 0$, è vero che se $u \perp v$ e $u \perp v+\lambda w$ allora $u \perp w$.

Es. 49. Siano $v=(2,-1,2)$ e $w=(3,4,-1)$. Determinare u tale che $v \times u = w$.

Es. 50. Determinare un vettore di modulo 4 che abbia la stessa direzione ma verso opposto a $(1,1,0)$.

Es. 51. Determinare un vettore non complanare con $(1,2,1)$ e $(2,0,-1)$.

Es. 52. Siano $A(1,0,2)$, $B(3,1,0)$. Determinare un punto dell'asse z tale che il triangolo ABC abbia area 10.

Es. 53. Siano u, v, w tre vettori dello spazio. Calcolare $(u+v-w)\cdot(u-v+w)\times(-u+v+w)$.

Capitolo 4

Geometria Analitica

In questo capitolo, sia trattando problemi del piano che dello spazio, supporremo fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali orientato positivamente. Parlando di prodotto vettoriale di vettori del piano, intenderemo il piano come piano xy nello spazio e quindi il vettore (x, y) lo penseremo come $(x, y, 0)$.

4.1 Allineamento e complanarità

In questo numero, utilizzando i concetti visti nel Capitolo 3, esporremo i vari modi di rappresentare le rette nel piano e nello spazio e i piani nello spazio.

Teorema 4.1 *Dati tre punti A, B, P (nel piano o nello spazio) le seguenti condizioni sono equivalenti:*

a) *A, B, P sono allineati*

b) $(P - A) \times (B - A) = 0$

Se $A \neq B$ le condizioni precedenti sono equivalenti a

c) $P - A = t(B - A)$ *per un opportuno valore reale t.*

Dim. $a) \Rightarrow c)$ Sia $A \neq B$ e sulla retta AB assumiamo A come origine delle coordinate, B come punto di ascissa 1. Allora P, appartenente alla retta AB, ha per ascissa un numero reale t; ciò significa che $P - A = t(B - A)$. $a) \Rightarrow b)$ E' una verifica immediata. $b) \Rightarrow a)$ Segue dal Teorema 3.27. $a) \Rightarrow b)$ Se $A \neq B$ segue dalle precedenti, se $A = B$ è ovvia. □

Teorema 4.2 *Dati nello spazio quattro punti A, B, C, P, le seguenti condizioni sono equivalenti:*

a) *A, B, C, P sono complanari*

b) $(P - A) \cdot (B - A) \times (C - A) = 0$

Se A, B, C non sono allineati, le condizioni precedenti sono equivalenti a

c) $P - A = s(B - A) + t(C - A)$ *per un'opportuna coppia di valori reali s, t.*

Dim. Se A, B, C sono allineati, A, B, C, P sono complanari qualunque sia P e anche $(P-A) \cdot (B-A) \times (C-A) = 0$ qualunque sia P, perché per il Teorema 4.1 si ha $(B-A) \times (C-A) = 0$.

Supponiamo quindi che A, B, C non siano allineati.

a) $\Rightarrow$ *c)* Dotiamo il piano ABC del sistema di coordinate che ha come origine A, come asse x la retta AB e come asse y la retta AC e tale che B abbia coordinate $(1,0)$ e C abbia coordinate $(0,1)$. Allora P, appartenente al piano ABC ha per coordinate una coppia di numeri reali (s,t); ciò significa che $P - A = s(B-A) + t(C-A)$.

c) $\Rightarrow$ *b)* Segue dal fatto che il determinante di una matrice quadrata in cui una colonna è combinazione lineare delle altre è nullo.

b) $\Rightarrow$ *a)* Segue dalle proprietà del prodotto misto. □

Corollario 4.3 *Nel piano, dato un punto P_0 e un vettore applicato in P_0 di corrispondente vettore libero u, la retta passante per P_0 e ortogonale ad u è il luogo dei punti P tali che*

$$u \cdot (P - P_0) = 0 \ .$$

Nello spazio, dato un punto P_0 e un vettore applicato in P_0 di corrispondente vettore libero u, il piano passante per P_0 e ortogonale ad u è il luogo dei punti P tali che

$$u \cdot (P - P_0) = 0 \ .$$

Dim. Nel piano, siano P_0, P_1 due punti distinti della retta. Allora per il Teorema 4.1 (b), P sta sulla retta se e solo se $(P-P_0) \times (P_1 - P_0) = 0$ se e solo se $P - P_0 \parallel P_1 - P_0$ se e solo se $P - P_0 \perp u$ se e solo se $u \cdot (P - P_0) = 0$.

Nello spazio, siano P_0, P_1, P_2 tre punti non allineati. Allora, per il Teorema 4.2, P sta sul piano $P_0P_1P_2$ se e solo se $(P-P_0) \cdot (P_1-P_0) \times (P_2-P_0) = 0$ se e solo se $P - P_0 \perp (P_1-P_0) \times (P_2-P_0)$ se e solo se $P - P_0 \perp u$ se e solo se $u \cdot (P - P_0) = 0$. □

4.2 La retta nel piano

Siano $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ due punti distinti del piano e sia r la retta individuata da A e B. Per la condizione (c) del Teorema 4.1, i punti della retta r sono tutti e soli i punti P per i quali

$$P - A = t(B - A) \qquad t \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

Se poniamo $P(x,y)$ e $(b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (l_1, l_2)$ ed esprimiamo l'uguaglianza di vettori applicati nello stesso punto mediante l'uguaglianza dei corrispondenti vettori liberi e, quindi, mediante l'uguaglianza delle rispettive componenti, si ha

$$\begin{cases} x = a_1 + l_1 t \\ y = a_2 + l_2 t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \qquad (l_1, l_2) \neq (0,0) \tag{4.2}$$

La (4.1) è detta *rappresentazione parametrica vettoriale* della retta r mentre la (4.2) è detta *rappresentazione parametrica scalare.* Al variare di $t \in \mathbb{R}$ si ottengono tutti e soli i punti di r. Talvolta la scrittura (4.2) verrà abbreviata con

$$r : (a_1 + l_1 t, a_2 + l_2 t)$$

intendendo che $(a_1 + l_1 t, a_2 + l_2 t)$ sono le coordinate del generico punto della retta r.

Dalla condizione (b) del Teorema 4.1 si ha che i punti di r sono anche tutti e soli i punti P per cui

$$(P - A) \times (B - A) = 0 \tag{4.3}$$

cioè

$$\varrho \begin{pmatrix} x - a_1 & l_1 \\ y - a_2 & l_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

equivalentemente

$$\det\begin{pmatrix} x-a_1 & l_1 \\ y-a_2 & l_2 \end{pmatrix} = 0$$

che è un'equazione lineare nelle incognite x, y, cioè del tipo

$$ax + by + c = 0 \qquad \text{con} \quad (a,b) \neq (0,0) \tag{4.4}$$

La (4.3) è detta *rappresentazione cartesiana vettoriale* della retta r mentre la (4.4) è detta *rappresentazione cartesiana scalare* o, semplicemente, *equazione* di r.

Teorema 4.4 *Nel piano ogni retta ha una rappresentazione parametrica del tipo (4.2) e una cartesiana del tipo (4.4). Viceversa ogni scrittura del tipo (4.2) e ogni equazione del tipo (4.4) rappresenta una retta.*

Dim. Abbiamo già provato la prima parte. Per quanto riguarda il viceversa, è ovvio che una scrittura del tipo (4.2) rappresenta la retta passante per $A(a_1, a_2)$ e $B(a_1 + l_1, a_2 + l_2)$. Sia ora data l'equazione $ax + by + c = 0$ e sia (x_0, y_0) una sua soluzione; l'equazione si può dunque scrivere $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$. Poniamo $u = (a, b)$, $P_0(x_0, y_0)$ e $P(x, y)$; l'equazione si può allora scrivere vettorialmente $u \cdot (P - P_0) = 0$ e quindi, per il Corollario 4.3, rappresenta la retta passante per P_0 e ortogonale ad u. □

Definizione 4.5 Data una retta r e due suoi punti distinti A e B, il vettore libero associato a $B - A$ si dice *vettore direzionale* di r e il suo versore si dice *versore direzionale* di r.

Se una retta è data parametricamente da (4.2), allora un suo vettore direzionale è (l_1, l_2); se una retta ha equazione cartesiana $ax + by + c = 0$, un suo vettore direzionale è $(b, -a)$.

Una retta è completamente determinata da un suo punto (a_1, a_2) e da un suo vettore direzionale (l_1, l_2). Una sua equazione cartesiana è infatti

$$l_2\,(x - a_1) - l_1\,(y - a_2) = 0 \ .$$

Se le componenti di (l_1, l_2) sono entrambe non nulle, un'equazione della retta è

$$\frac{x - a_1}{l_1} = \frac{y - a_2}{l_2}$$

Se $l_1 = 0$ oppure $l_2 = 0$ si può ugualmente dire che la precedente è un'equazione della retta; basta convenire che, se c'è 0 a denominatore, va inteso 0 anche il numeratore. Infatti, se $l_1 = 0$, un'equazione della retta è ovviamente $x - a_1 = 0$.

Ad ogni retta restano associati due versori direzionali, uno opposto dell'altro; fissarne uno equivale a fissare un verso sulla retta.

Definizione 4.6 Data una retta r, i coseni direttori di un suo vettore direzionale si dicono *coseni direttori* di r.

La coppia dei coseni direttori di una retta è la coppia delle coordinate di un suo versore direzionale e quindi è individuata a meno del segno. Vogliamo ora definire l'angolo formato da una retta e un vettore e quello formato da due rette.

Definizione 4.7 Siano r una retta, u_r e $-u_r$ i suoi versori direzionali e v un vettore. Definiamo come angolo $\hat{vr}$ il più piccolo dei due angoli $\widehat{u_r v}$ e $\widehat{-u_r v}$.

Siano r ed s due rette, u_r un vettore direzionale di r, u_s un vettore direzionale di s. Per angolo $\hat{rs}$ si intende l'angolo $r\hat{u}_s$ o, equivalentemente, l'angolo $u_r\hat{s}$ (che sono evidentemente uguali).

Da queste definizioni segue subito che se r è una retta con vettore direzionale u_r e v un vettore, allora

$$0 \leq \hat{rv} \leq \frac{\pi}{2} \qquad \text{e} \qquad \cos \hat{rv} = |\cos \hat{uv}| \quad . \tag{4.5}$$

Esempio 1 Date le due rette $r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$ e $s : 3x + 2y + 1 = 0$, calcoliamo l'angolo $\hat{rs}$.

Un vettore direzionale di r è $(-1, 3)$; un vettore direzionale di s è $(2, -3)$. Quindi

$$\hat{rs} = \arccos \left| \frac{2(-1) + (-3)3}{\sqrt{1+9}\,\sqrt{4+9}} \right| = \arccos \frac{11}{\sqrt{130}}$$

Esempio 2 Calcoliamo gli angoli formati dalla retta $r : x - y = 0$ e dalla retta $s : x + y = 0$ con i versori degli assi.

Un vettore direzionale di r è $u = (1, 1)$, un vettore direzionale di s è $v = (1, -1)$. Allora:

$\cos \hat{ir} = |\cos \hat{iu}| = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right| = \sqrt{2}$ quindi $\hat{ir} = \frac{\pi}{2}$

$\cos \hat{jr} = |\cos \hat{ju}| = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right| = \sqrt{2}$ quindi $\hat{jr} = \frac{\pi}{2}$

$\cos \hat{is} = |\cos \hat{iv}| = \left| \frac{-1}{\sqrt{2}} \right| = \sqrt{2}$ quindi $\hat{is} = \frac{\pi}{2}$

$\cos \hat{js} = |\cos \hat{jv}| = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right| = \sqrt{2}$ quindi $\hat{js} = \frac{\pi}{2}$

Abbiamo visto che i coseni direttori di una retta non sono univocamente determinati. D'altra parte, gli angoli che la retta forma con i versori degli assi sono univocamente determinati, ma succede che rette non parallele individuino gli stessi angoli (esempio 2). Per ovviare a questa situazione non soddisfacente, introdurremo nel prossimo numero il concetto di angolo orientato.

4.3 Angoli orientati

Ricordiamo che per convenzione il verso positivo delle rotazioni è quello antiorario.

Definizione 4.8 Siano u e v sono due vettori liberi, u' e v' i rispettivi versori e siano $A - O$ e $B - O$ i rappresentanti di u' e v' applicati in O. Si chiama *angolo orientato* uv, oppure *angolo che* v *forma con* u , e lo si indica con $\widehat{\vec{uv}}$, l'insieme degli angoli ϑ tali che una rotazione di ϑ porta A a sovrapporsi a B.

E' chiaro che se u e v sono due vettori e $\vartheta \in \widehat{\vec{uv}}$, allora

$$\widehat{\vec{uv}} = \{\vartheta + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$$

In altre parole un angolo orientato è una classe di equivalenza della relazione d'equivalenza nell'insieme degli angoli così definita: $\vartheta \simeq \varphi$ se $\vartheta - \varphi$ è un multiplo intero di 2π. Quindi ogni elemento di $\widehat{\vec{uv}}$ determina completamente l'insieme $\widehat{\vec{uv}}$; pertanto se $\vartheta \in \widehat{\vec{uv}}$, con abuso di notazione scriveremo $\widehat{\vec{uv}} = \vartheta$. Con questa convenzione sono ad esempio equivalenti le tre scritture

$$\widehat{\vec{uv}} = -\frac{\pi}{3}; \qquad \widehat{\vec{uv}} = \frac{5}{3}\pi; \qquad \widehat{\vec{uv}} = \{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$$

Esempio 1 Siano $u = (1, 2)$ e $v = (3, 1)$. Allora

$$\cos \widehat{uv} = \frac{u \cdot v}{|u|\,|v|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{e quindi} \qquad \widehat{uv} = \frac{\pi}{4}$$

Inoltre essendo $\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 6 < 0$, la rotazione di $\pi/4$ che porta u verso v è in senso orario (vedi 3.9). Quindi $\widehat{\vec{uv}} = -\frac{\pi}{4}$ (oppure si può dire $\widehat{\vec{uv}} = \frac{3}{4}\pi$ oppure $\widehat{\vec{uv}} = \{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$.

Esempio 2 Dato $u = (2, -1)$, determiniamo tutti i vettori non nulli v tali che $\widehat{\overrightarrow{uv}} = \frac{3}{4}\pi$.
Posto $v = (x, y)$ deve essere $\widehat{uv} = \frac{3}{4}\pi$ e quindi

$$\cos \widehat{uv} = \frac{u \cdot v}{|u|\,|v|} = \frac{2x - y}{\sqrt{5}\,\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

che equivale a

$$\begin{cases} 2x - y \; < \; 0 \\ 2(2x - y)^2 \; = \; 5(x^2 + y^2) \end{cases}$$

Risolviamo l'equazione $2(2x - y)^2 = 5(x^2 + y^2)$, cioè $3x^2 - 8xy - 3y^2 = 0$. Questa è un'equazione di secondo grado omogenea in x, y. Se $y = 0$ allora anche x deve essere 0 e questo porta al vettore nullo. Supponiamo allora che $y \neq 0$ e dividere per y^2; si ottiene così un'equazione di secondo grado in $t = \frac{x}{y}$ le cui soluzioni sono 3 e $-\frac{1}{3}$. Le soluzioni dell'equazione del sistema sono quindi tutte e sole le coppie

$$(3t, t) \qquad \text{e} \qquad (-t, 3t) \qquad\qquad t \in \mathbb{R}$$

Per vedere quali di queste coppie soddisfano la disequazione, le riscriviamo nella forma

$$(3t, t) \quad (-3t, -t) \quad (-t, 3t) \quad (t, -3t) \qquad\qquad t \in \mathbb{R},\ t > 0$$

e osserviamo che verificano la disequazione soltanto

$$(-3t, -t) \quad (-t, 3t) \qquad\qquad t \in \mathbb{R},\ t > 0$$

D'altra parte

$$\det\begin{pmatrix} 2 & -3t \\ -1 & -t \end{pmatrix} = -5t \qquad\qquad \det\begin{pmatrix} 2 & -t \\ -1 & 3t \end{pmatrix} = 5t$$

Quindi la soluzione del sistema è data da tutti e soli i vettori $(-t, 3t)$ con t reale positivo.

Siccome una retta individua due versori, uno opposto dell'altro, diamo la seguente

Definizione 4.9 Dati un vettore u e una retta r, si chiama *angolo orientato* ur, oppure angolo orientato che r forma con u, e si indica con $\widehat{\overrightarrow{ur}}$ l'unione degli angoli orientati che i due versori associati a r formano con u.

Date due rette r e s, si dice *angolo orientato* rs, oppure *angolo che* s *forma con* r, e lo si indica con $\widehat{\overrightarrow{rs}}$, l'angolo orientato che s forma con uno dei due versori di r.

Si ha evidentemente

Proposizione 4.10 *Siano u un vettore, r ed s due rette, $\vartheta \in \widehat{\overrightarrow{ur}}$ e $\varphi \in \widehat{\overrightarrow{rs}}$. Allora*

1. $\widehat{\overrightarrow{ur}} = \{\vartheta + k\pi \;/\; k \in \mathbb{Z}\}$;
2. $\widehat{\overrightarrow{ur}} = \widehat{\overrightarrow{(-u)r}}$;
3. $\widehat{\overrightarrow{rs}} = \{\varphi + k\pi \;/\; k \in \mathbb{Z}\}$.

Se r è una retta non parallela all'asse y, tutti gli angoli di $\widehat{\overrightarrow{ir}}$ hanno la stessa tangente trigonometrica. Viceversa ogni numero reale t determina un insieme di angoli del tipo $\{\vartheta + k\pi \;/\; k \in \mathbb{Z}\}$ che hanno t come tangente trigonometrica. Si può quindi parlare di $\tan \widehat{\overrightarrow{ir}}$ ed è un numero univocamente determinato da r; analogamente, date due rette r, s si può parlare di $\tan \widehat{\overrightarrow{rs}}$ ed è un numero univocamente determinato da r ed s.

Definizione 4.11 Sia r una retta non parallela all'asse y; si chiama *coefficiente angolare* di r il numero reale $m = \tan \widehat{\overrightarrow{ir}}$.

Proposizione 4.12 *Se r una retta non parallela all'asse y e $u = (l_1, l_2)$ è un suo vettore direzionale, allora*

$$m = \frac{l_2}{l_1}$$

In particolare se r ha equazione $a\,x + b\,y + c = 0$ con $b \neq 0$ allora

$$m = -\frac{a}{b}$$

Dim. Per ipotesi $l_1 \neq 0$. Sia $u' = \text{vers}\,(u) = (l'_1, l'_2)$, allora $l_2/l_1 = l'_2/l'_1$ e, se $\vartheta \in \widehat{\vec{i}\vec{u'}}$, si ha $l'_1 = \cos\vartheta$ e $l'_2 = \sin\vartheta$, da cui la tesi. □

Corollario 4.13 *Una retta r non parallela all'asse y si può rappresentare con un'equazione del tipo*

$$y = m\,x + q$$

dove m è il coefficiente angolare di r e q è l'ordinata del punto in cui r incontra l'asse y.

Dim. Un'equazione di r è del tipo $ax+by+c = 0$ con $b \neq 0$ e quindi anche $y = -\frac{a}{b}\,x - \frac{c}{b}$ è un'equazione di r. Ma $-\frac{a}{b} = m$ per la proposizione precedente e se poniamo $-\frac{c}{b} = q$, si verifica immediatamente che il punto $(0, q)$ sta su r. □

Corollario 4.14 *Siano r ed s due rette non parallele all'asse y con coefficienti angolari rispettivamente m ed m'. Allora*

1. *$r \perp s$ se e solo se $1 + m\,m' = 0$.*
2. *Se r ed s non sono ortogonali, si ha $\tan\widehat{\vec{r}\vec{s}} = \frac{m'-m}{1+m\,m'}$.*
3. *$r \parallel s$ se e solo se $m = m'$.*

Dim. a) Due rappresentazioni di r ed s sono $y = m\,x+q$ e $y = m'\,x+q'$, quindi due vettori direzionali di r ed s sono $(1, m)$ e $(1, m')$.

b) Se $\vartheta \in \widehat{\vec{i}\vec{r}}$ e $\vartheta' \in \widehat{\vec{i}\vec{s}}$, allora $\vartheta' - \vartheta = \widehat{\vec{r}\vec{s}}$ e, la tesi segue dalla formula

$$\tan(\vartheta' - \vartheta) = \frac{\tan\vartheta' - \tan\vartheta}{1 + \tan\vartheta\,\tan\vartheta'}$$

c) segue da b).

Esempio Sia $r : \begin{cases} x &= t \\ y &= 1 + 3t \end{cases}$, Determiniamo la retta s tale che $\widehat{\vec{r}\vec{s}} = -\frac{\pi}{4}$ e $r \cap s = \{(1, 4)\}$.

Il coefficiente angolare di r è 3; se m è il coefficiente angolare di s si deve avere

$$\frac{m-3}{1+3m} = \tan(-\frac{\pi}{4})$$

da cui $m = 1/2$. Quindi s è rappresentabile con un'equazione del tipo $y = \frac{1}{2}\,x + q$; imponendo il passaggio per $(1, 4)$ si determina $q = \frac{7}{2}$ e quindi la retta cercata ha equazione $x - 2y + 7 = 0$.

4.4 Fasci di rette

Consideriamo l'insieme $\mathcal{S} = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (a,b) \neq (0,0)\}$ e indichiamo con $\mathcal{R}$ l'insieme delle rette del piano.

Sia $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{R}$ l'applicazione che associa alla terna (a,b,c) la retta di equazione $ax+by+c=0$; essendo φ surgettiva, è interessante studiare le controimmagini degli elementi di $\mathcal{R}$.

Il teorema seguente è un caso particolare del teorema di Rouché-Capelli.

Teorema 4.15 *Siano date due rette r, r' di equazione rispettivamente $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$; indichiamo con*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

Allora $\varrho(A) \geq 1$ e più precisamente

a) $\varrho(A) = \varrho(B) = 2$ *se e solo se r, r' sono incidenti e distinte.*

b) $\varrho(A) = 1$, $\varrho(B) = 2$ *se e solo se r, r' sono parallele e distinte.*

c) $\varrho(A) = \varrho(B) = 1$ *se e solo se r, r' sono coincidenti.*

Corollario 4.16 *Con le notazioni precedenti, se in $\mathcal{S}$ si pone la relazione d'equivalenza $(a,b,c) \sim (a',b',c')$ se (a,b,c) e (a',b',c') sono proporzionali, allora φ induce*

$$\overline{\varphi} : \mathcal{S}/\!\sim\, \to \mathcal{R}$$

e $\overline{\varphi}$ è biunivoca. Questo fatto si esprime dicendo che una retta determina i suoi coefficienti a meno di un fattore di proporzionalità.

Dim. Segue dal Teorema precedente. □

Definizione 4.17 Dato un punto P, chiamiamo *fascio di rette di centro P* e lo indichiamo con Φ_P, l'insieme delle rette passanti per P.

Siano ora date due rette distinte r, r', incidenti in un punto P, di equazione $ax+by+c=0$ e $a'x+b'y+c'=0$ rispettivamente. Indichiamo con $\psi : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \Phi_P$ l'applicazione che associa ad ogni coppia non nulla (λ, μ) la retta di equazione

$$\lambda(ax+by+c) + \mu(a'x+b'y+c') = 0$$

che appartiene a Φ_P, come si vede subito.

Proposizione 4.18 *Con le notazioni precedenti si ha:*

a) ψ *è surgettiva.*

b) Se in $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ si pone la relazione d'equivalenza: $(\lambda,\mu) \sim (\lambda',\mu')$ se (λ,μ) e (λ',μ') sono proporzionali, allora ψ induce

$$\overline{\psi} : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}/\!/\!\sim\, \to \Phi_P$$

e $\overline{\psi}$ è biunivoca.

Questo fatto si esprime dicendo che, fissate due equazioni di rette di Φ_P, una retta di Φ_P individua i suoi coefficienti λ, μ a meno di un fattore di proporzionalità.

Dim. a) Sia $s \in \Phi_P$ e sia $A(x_0, y_0) \in s$, $A \neq P$. Essendo $A \neq P$, $\lambda(ax_0+by_0+c)+\mu(a'x_0+b'y_0+c') = 0$ è effettivamente un'equazione lineare omogenea in λ, μ e quindi ha soluzioni non banali. Se $(\overline{\lambda}, \overline{\mu})$ è una soluzione non banale, allora

$$\overline{\lambda}(ax + by + c) + \overline{\mu}(a'x + b'y + c') = 0$$

rappresenta una retta passante per P e A e quindi rappresenta s.

b) Siano (λ, μ) e (λ', μ') tali che $\psi(\lambda, \mu) = \psi(\lambda', \mu') = s$ e sia $A(x_0, y_0) \in s$, $A \neq P$. Si ha

$$\begin{aligned} \lambda(ax_0 + by_0 + c) + \mu(a'x_0 + b'y_0 + c') &= 0 \\ \lambda'(ax_0 + by_0 + c) + \mu'(a'x_0 + b'y_0 + c') &= 0 \end{aligned}$$

e quindi (λ, μ) e (λ', μ') essendo soluzioni di una stessa equazione lineare omogenea, sono proporzionali. Il viceversa è ovvio. □

Da quanto detto segue che *un fascio di rette di centro P può essere generato nel modo suddetto, da due qualsiasi rette che gli appartengono.*

Definizione 4.19 L'insieme di tutte le rette parallele ad una data retta si dice *fascio di rette parallele.*

Per i fasci di rette parallele si possono ripetere le stesse considerazioni fatte per i fasci di rette di centro un punto; il modo più semplice di rappresentare un fascio di rette parallele è quello espresso dalla seguente

Proposizione 4.20 *Data una retta r e una sua equazione $ax + by + c = 0$ il fascio di rette parallele ad r si può rappresentare così :*

$$ax + by + t = 0 \qquad t \in \mathbb{R} \ .$$

Esempio 1 *Trovare la retta per $A(1, 0)$ e per il punto comune a $r : 2x - y = 0$ e $r' : 3x + 2y - 1 = 0$.*

La retta cercata appartiene al fascio generato da r, r' e quindi si può rappresentare così :

$$\lambda(2x - y) + \mu(3x + 2y - 1) = 0$$

D'altra parte deve passare per $A(1, 0)$ quindi si deve avere $2\lambda+2\mu = 0$ da cui si ricava $\lambda = 1$, $\mu = -1$. Quindi la retta cercata ha equazione $x + 3y - 1 = 0$,

Esempio 2 *Trovare la retta parallela a $r : 2x + 5y - 7 = 0$ e passante per $A(2, 1)$.*

Il fascio di rette parallele ad r è dato da

$$2x + 5y + t = 0$$

il passaggio per A determina $t = -9$, quindi la retta cercata è $2x + 5y - 9 = 0$.

4.5 Il piano nello spazio

Siano $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$ tre punti non allineati dello spazio. Per il Teorema 4.2 (c) i punti del piano π individuato da A, B, C sono tutti e soli i punti P per cui

$$P - A = s(B - A) + t(C - A) \qquad (s, t) \in \mathbb{R}^2 \tag{4.6}$$

Se il punto P ha coordinate (x, y, z) e poniamo $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ e $(c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3) = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ si ha

$$\left\{ \begin{aligned} x &= a_1 + \beta_1 s + \gamma_1 t \\ y &= a_2 + \beta_2 s + \gamma_2 t \\ z &= a_3 + \beta_3 s + \gamma_3 t \end{aligned} \right. \qquad (s, t) \in \mathbb{R}^2 \quad \varrho \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} = 2 \tag{4.7}$$

Talvolta la scrittura precedente verrà abbreviata con

$$\pi : (a_1 + \beta_1 s + \gamma_1 t, a_2 + \beta_2 s + \gamma_2 t, a_3 + \beta_3 s + \gamma_3 t) \ .$$

La (4.6) (risp. (4.7)) si dice *rappresentazione parametrica* vettoriale (risp. scalare) del piano π; i punti di π si ottengono da queste formule al variare di $(s,t) \in \mathbb{R}^2$.

Per il Teorema 4.2 (b) i punti del piano π sono anche tutti e soli i punti P per cui

$$(P - A) \cdot (B - A) \times (C - A) = 0 \tag{4.8}$$

cioè

$$\det \begin{pmatrix} x - a_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ y - a_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ z - a_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} = 0$$

che è un'equazione lineare nelle incognite x, y, z, ossia del tipo

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad \text{con} \quad (a,b,c) \neq (0,0,0) \tag{4.9}$$

La (4.8) (risp. (4.9)) si dice *rappresentazione cartesiana* vettoriale (risp. scalare) del piano π.

Teorema 4.21 *Nello spazio ogni piano ha una rappresentazione parametrica del tipo (4.7) e una cartesiana del tipo (4.9). Viceversa ogni scrittura del tipo (4.7) e ogni equazione del tipo (4.9) rappresenta un piano.*

Dim. Abbiamo già visto la prima parte. Per quanto riguarda il viceversa, è ovvio che una scrittura del tipo (4.7) rappresenta il piano passante per i tre punti non allineati $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(a_1 + \beta_1, a_2 + \beta_2, a_3 + \beta_3)$, $C(a_1 + \gamma_1, a_2 + \gamma_2, a_3 + \gamma_3)$.

Sia ora data l'equazione $ax + by + cz + d = 0$ e sia (x_0, y_0, z_0) una sua soluzione; l'equazione si può dunque scrivere $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$. Siano u il vettore (a,b,c), P_0 il punto di coordinate (x_0, y_0, z_0) e P il punto di coordinate (x,y,z). L'equazione si può allora scrivere vettorialmente $u \cdot (P - P_0) = 0$ e quindi, per il Corollario 4.3, rappresenta il piano passante per P_0 e ortogonale a u. □

Definizione 4.22 Dato un piano π si dice *vettore direzionale* di π un vettore ad esso ortogonale; il suo versore si dice *versore direzionale* di π.

Si osservi che se il piano è dato nella forma (4.7), un vettore direzionale è per esempio $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \times (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Se invece il piano è dato mediante un'equazione lineare $ax+by+cz+d = 0$, un suo vettore direzionale è (a,b,c).

Ad ogni piano restano associati due versori direzionali, uno opposto dell'altro.

I concetti di angolo di due piani, parallelismo, perpendicolarità, si riconducono facilmente agli analoghi concetti riferiti ai vettori direzionali in modo analogo a come si è fatto per le rette nel piano.

Esempio 1 *Determinare una rappresentazione parametrica del piano passante per i punti $A(1,1,1)$, $B(1,1,2)$ e $C(2,0,1)$, un suo vettore direzionale e una sua rappresentazione cartesiana.*

Osserviamo che $(B - A) \times (C - A) = (1,1,0)$ quindi i tre punti determinano un unico piano che ha $(1,1,0)$ come vettore direzionale; il piano si può quindi rappresentare con

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + s \end{cases}$$

Il piano è determinato dalla condizione di passare per A e avere vettore direzionale $(1,1,0)$, una sua equazione è quindi

$$1(x - 1) + 1(y - 1) + 0(z - 1) = 0$$

ossia $x + y - 2 = 0$.

Esempio 2 *Provare che i due piani* $\pi_1 : 2x - 6y + 4z - 1 = 0$ *e* $\pi_2 : 3x - 9y + 6z + 5 = 0$ *sono paralleli.*

Un vettore direzionale di π_1 è $u = (2, -6, 4)$ e un vettore direzionale di π_2 è $v = (3, -9, 6)$. Si ha $u \parallel v$ perché $u \times v = 0$.

4.6 La retta nello spazio

Siano $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ due punti distinti dello spazio. Per il Teorema 4.1 (c), i punti della retta r individuata da A e B sono tutti e soli i punti P per cui

$$P - A = t(B - A) \qquad t \in \mathbb{R} \tag{4.10}$$

Si ha così una *rappresentazione parametrica vettoriale* della retta r. Se poniamo $P(x, y, z)$ e $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) = (l_1, l_2, l_3)$ ed esprimiamo l'uguaglianza dei vettori mediante l'uguaglianza delle rispettive componenti, si ottiene la *rappresentazione parametrica scalare* di r

$$\begin{cases} x = a_1 + l_1 t \\ y = a_2 + l_2 t \\ z = a_3 + l_3 t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \quad (l_1, l_2, l_3) \neq (0, 0, 0) \tag{4.11}$$

o, in breve, $r : (a_1 + l_1 t, a_2 + l_2 t, a_3 + l_3 t)$.

Per il Teorema 4.1 (b), i punti della retta r sono anche tutti e soli i punti P per cui

$$(P - A) \times (B - A) = 0 \qquad t \in \mathbb{R} \tag{4.12}$$

ovvero

$$\varrho \begin{pmatrix} x - a_1 & l_1 \\ y - a_2 & l_2 \\ z - a_3 & l_3 \end{pmatrix} = 1$$

che si può scrivere

$$\frac{x - a_1}{l_1} = \frac{y - a_2}{l_2} = \frac{z - a_3}{l_3} \qquad (l_1, l_2, l_3) \neq (0, 0, 0) \tag{4.13}$$

convenendo che, se c'è uno 0 a denominatore, va inteso 0 anche a numeratore.

La (4.13) è un sistema lineare di tre equazioni, ma una è conseguenza delle altre, quindi la (4.13) è equivalente a un sistema lineare del tipo

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \qquad \text{con} \quad \varrho \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2 \tag{4.14}$$

Teorema 4.23 *Nello spazio ogni retta ha una rappresentazione parametrica del tipo (4.11) e una cartesiana del tipo (4.14). Viceversa ogni scrittura del tipo (4.11) o del tipo (4.14) rappresenta una retta dello spazio.*

Dim. Abbiamo già provato la prima parte. Per quanto riguarda il viceversa, è ovvio che una scrittura del tipo (4.11) rappresenta la retta passante per $A(a_1, a_2, a_3)$ e per $B = (a_1 + l_1, a_2 + l_2, a_3 + l_3)$.

Sia dato ora un sistema del tipo (4.14). Esso rappresenta l'intersezione di due piani non paralleli e quindi una retta. □

Come nel caso del piano si può parlare di *vettori e versori direzionali* e di *coseni direttori.* Anche nello spazio la terna di coseni direttori di una retta è individuata a meno del segno.

Osserviamo che se la retta è rappresentata da

$$\begin{cases} ax+by+cz+d &= 0 \\ a'x+b'y+c'z+d' &= 0 \end{cases}$$

essa è ortogonale sia ad (a,b,c) che a $(a'.b',c')$, quindi come vettore direzionale di r si può assumere $(a,b,c)\times(a',b',c')$.

I concetti di angolo di due rette, parallelismo e perpendicolarità si riconducono facilmente agli analoghi concetti riferiti ai vettori direzionali come visto nel numero 4.2.

Esempio 1 *Dare una rappresentare parametrica e una cartesiana della retta passante per* $A(1,0,0)$ *e* $B(1,2,-1)$ *e determinarne un vettore direzionale.*

La retta AB si può rappresentare parametricamente così

$$\begin{cases} x &= 1 \\ y &= 2t \\ z &= -t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

Un vettore direzionale è $(0,2,-1)$.

Una rappresentazione cartesiana della stessa retta è:

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-0}{2}=\frac{z-0}{-1}$$

ossia

$$\begin{cases} x &= 1 \\ 1/2y &= -z \end{cases}$$

Esempio 2 *Mostrare che le due rette*

$$r:\begin{cases} x-2y+z &= 0 \\ 2x-2z+1 &= 0 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x &= 1+3t \\ y &= 2+3t \\ z &= 3t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

sono parallele.

Un vettore direzionale di r è $(1,-2,1)\times(2,0,-2)=(4,4,4)$. Un vettore direzionale di s è $(3,3,3)$ e ovviamente $(3,3,3)\parallel(4,4,4)$.

Esempio 3 *Calcolare l'angolo* $\hat{rs}$ *dove*

$$r:\begin{cases} x &= 1 \\ y-2z &= 0 \end{cases} \qquad s:\frac{x}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-2}$$

Consideriamo il vettore direzionale di r $(1,0,0)\times(0,1,-2)=(0,2,1)$ e il vettore direzionale di s $(3,1,-2)$. Allora

$$\cos\hat{rs}=\left|\frac{0\cdot3+2\cdot1+1\cdot(-2)}{\sqrt{5}\sqrt{14}}\right|=0$$

Quindi $r\perp s$.

4.7 Fasci di piani

Questo numero è del tutto simile ad numero 4.4, pertanto ci limiteremo a dare gli enunciati e gli esempi lasciando al lettore le facili verifiche.

Consideriamo l'insieme $\mathcal{S}=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4\ /\ (a,b,c)\neq(0,0,0)\}$ e indichiamo con $\mathcal{P}$ l'insieme dei piani dello spazio.

Sia $\varphi:\mathcal{S}\to\mathcal{P}$ l'applicazione che associa alla quaterna (a,b,c,d) il piano di equazione $ax+by+cx+d=0$; allora φ è surgettiva. Vogliamo studiare le controimmagini degli elementi di $\mathcal{P}$.

Premettiamo il seguente teorema che discende dal teorema di Rouché-Capelli.

Teorema 4.24 *Siano dati due piani* π, π' *di equazione rispettivamente* $ax+by+cz+d=0$, $a'x+b'y+c'z+d=0$*; indichiamo con*

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$$

Allora $\varrho(A)\geq 1$ *e più precisamente*

a) $\varrho(A)=\varrho(B)=2$ *se e solo se* π, π' *sono incidenti in una retta e distinti.*

b) $\varrho(A)=1$, $\varrho(B)=2$ *se e solo se* π, π' *sono paralleli e distinti.*

c) $\varrho(A)=\varrho(B)=1$ *se e solo se* π, π' *sono coincidenti.*

Corollario 4.25 *Con le notazioni precedenti, se in* $\mathcal{S}$ *si pone la relazione d'equivalenza* $(a,b,c,d)\sim(a',b',c',d')$ *se* (a,b,c,d) *e* (a',b',c',d') *sono proporzionali, allora* φ *induce*

$$\overline{\varphi}:\mathcal{S}/\!\sim\,\to\mathcal{P}$$

e $\overline{\varphi}$ *è biunivoca. Questo fatto si esprime dicendo che un piano determina i suoi coefficienti a meno di un fattore di proporzionalità.*

Definizione 4.26 Data una retta r, chiamiamo *fascio di piani di asse* r e lo indichiamo con Φ_r, l'insieme dei piani passanti per r.

Siano ora dati due piani distinti π, π' di equazione $ax+by+cz+d=0$ e $a'x+b'y+c'z+d'=0$ rispettivamente, incidenti in una retta r. Indichiamo con $\psi:\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\to\Phi_r$ l'applicazione che associa ad ogni coppia non nulla (λ,μ) il piano di equazione

$$\lambda(ax+by+cz+d)+\mu(a'x+b'y+c'z+d')=0$$

che appartiene a Φ_r, come si vede subito.

Proposizione 4.27 *Con le notazioni precedenti si ha:*

a) ψ *è surgettiva.*

b) Se in $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ *si pone la relazione d'equivalenza:* $(\lambda,\mu)\sim(\lambda',\mu')$ *se* (λ,μ) *e* (λ',μ') *sono proporzionali, allora* ψ *induce una corrispondenza biunivoca*

$$\overline{\psi}:\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}/\!\sim\,\to\Phi_r$$

Questo fatto si esprime dicendo che, fissate due equazioni di piani di Φ_r, *un piano di* Φ_r *individua i suoi coefficienti* λ,μ *a meno di un fattore di proporzionalità.*

Definizione 4.28 L'insieme di tutti i piani paralleli ad un dato piano si dice *fascio di piani paralleli.*

Proposizione 4.29 *Dato un piano* π *e una sua equazione* $ax+by+cz+d=0$ *il fascio di piani paralleli ad* π *si può rappresentare così :*

$$ax+by+cz+t=0 \qquad t\in\mathbb{R}\ .$$

Esempio 1 *Determinare il piano passante per* $A(1,1,2)$ *e per la retta* $r: x-2y = 2x+y-z = 0$.

Il piano cercato appartiene al fascio generato da $\pi: x-2y=0$ e da $\pi': 2x+y-z=0$, e quindi si può rappresentare così $\lambda(x-2y)+\mu(2x+y-z)=0$ ossia

$$(\lambda+2\mu)x-(2\lambda-\mu)y-\mu z=0$$

Imponendo il passaggio per A si ha $\lambda+2\mu-2\lambda+\mu-2\mu=0$ cioè $-\lambda+\mu=0$. Una soluzione non banale è $\lambda=\mu=1$. Il piano cercato ha quindi equazione $3x-y-z=0$.

Esempio 2 *Trovare il piano parallelo a* $\pi: x-3z+1=0$ *e passante per* $A(0,0,1)$.

Il fascio di piani paralleli a π è $x-3z+t=0$. Il passaggio per A determina $t=3$, quindi il piano cercato ha equazione $x-3z+3=0$.

4.8 Mutue posizioni di rette e piani

Proposizione 4.30 *Siano dati una retta* r *con vettore direzionale* u *e un piano* π *con vettore direzionale* v. *Allora*

1. $r \parallel \pi$ *se e solo se* $u \perp v$.
2. $r \perp \pi$ *se e solo se* $u \parallel v$.
3. $\widehat{r\pi} = \left|\frac{\pi}{2} - \widehat{uv}\right|$, *quindi* $\sin\widehat{r\pi} = |\cos\widehat{uv}|$.
4. *Se* $r \parallel \pi$, *allora* $r \subset \pi$ *oppure* $r \cap \pi = \emptyset$.
5. *Se* r *non è parallela a* π, *esiste un punto* A *tale che* $r \cap \pi = \{A\}$.

Dim. 1) e 2) sono ovvie; 3) e 4) sono note dalla geometria euclidea e, d'altra parte si possono verificare utilizzando le proprietà dei sistemi lineari. ☐

Esempio 1 *Siano* $r:(t,1-t,2t)$, $s: x+2y-z=2x-z=0$, $\pi: 2x-z+3=0$, $\pi': 2x+y+4z-7=0$. *Dimostrare che* $r \parallel \pi$ *e che* $s \perp \pi'$.

Un vettore direzionale di r è $(1,-1,2)$ e un vettore direzionale di π è $(2,0,-1)$. Poiché $(1,-1,2)\cdot(2,0,-1)=0$, si ha che $r \parallel \pi$.

Un vettore direzionale di s è $(1,2,-1)\times(2,0,-1)=(-2,-1,-4)$; un vettore direzionale di π' è $(2,1,4)$. Poiché $(-2,-1,-4)\parallel(2,1,4)$, si ha che $r \perp \pi$.

Esempio 2 *Siano* $r: x-2y+3=2x-y-z=0$, $\pi: 3y-z-6=0$. *Qual'è la mutua posizione di* r *e* π*?*

Un vettore direzionale di r è $(2,1,3)$ e un vettore direzionale di π è $(0,3,-1)$. Quindi $r \parallel \pi$. Per vedere se $r \subset \pi$, è sufficiente verificare se un punto di r appartiene a π. Un punto di r è ad esempio $(-3,0,-6)$ che appartiene a π, quindi $r \subset \pi$, ossia π appartiene al fascio di piani di centro r, infatti $\pi: -2(x-2y+3)+(2x-y-z)=0$.

Esempio 3 *Siano* $r: 3x+y-2z=x+y-z-2=0$, $\pi: x-2y-z-3=0$. *Determinare* $\widehat{r\pi}$.

Un vettore direzionale di π è $u=(1,-2,-1)$. Un vettore direzionale di r è $v=(3,1,-2)\times(1,1,-1)=((1,1,2)$. Allora $\sin\widehat{r\pi}=|\cos\widehat{uv}|=1/2$. Quindi $\widehat{r\pi}=\arcsin 1/2=\pi/6$.

Proposizione 4.31 *Siano* r, s *due rette nello spazio;* $A,B\in r$, $C,D\in s$, *con* $A\neq B$ *e* $C\neq D$. *Allora si ha:*

1. r,s *sono complanari o sghembe.*
2. r,s *sono complanari se e solo se sono coincidenti, parallele o incidenti.*
3. r,s *sono complanari se e solo se* $ABCD$ *sono complanari.*

Dim. 1) e 2) sono note dalla geometria euclidea. 3) discende dal fatto che condizione necessaria e sufficiente affinché un piano contenga una retta è che ne contenga due punti distinti. □

Esempio *Siano* $r_1 : x - 2y + 3z = 2x - z + 1 = 0$, $r_2 : x - y = x + y + z = 0$, $r_3 : (t, t, 2t)$. *Determinare le mutue posizioni delle tre rette.*

Consideriamo le seguenti coppie di punti su ciascuna retta: $A(0, 3/2, 1)$ e $B(-1/2, -1/4, 0)$ su r_1, $O(0,0,0)$ e $C(1,1,-2)$ su r_2, $O(0,0,0)$ e $D(1,1,2)$ su r_3.

Si ha $A - O = (0, 3/2, 1)$, $B - O = (-1/2, -1/4, 0)$, $C - O = (1, 1, -2)$ e

$$(A - O) \cdot (B - O) \times (C - O) = \begin{vmatrix} 0 & -1/2 & 1 \\ 3/2 & -1/4 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Quindi r_1 e r_2 sono sghembe. Analogamente r_1 e r_3 sono sghembe. Invece $O \in r_2 \cap r_3$, quindi r_2, r_3 sono incidenti e, come si vede subito, distinte.

4.9 Alcuni problemi notevoli

4.9.1 Passaggio da una rappresentazione parametrica a una cartesiana e viceversa

I metodi con cui abbiamo ricavato le rappresentazioni parametriche e cartesiane delle rette e dei piani ci permettono di passare dalle une alle altre. Ad esempio, se vogliamo rappresentare cartesianamente la retta $r : (t, 1-t, 2t)$ basta osservare che un punto di r è $(0,1,0)$ e un vettore direzionale è $(1,-1,2)$ e quindi si può scrivere

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2} \qquad \text{o anche} \qquad \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

Data la retta $\begin{cases} x - 4y + z - 2 = 0 \\ 2y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$, se la vogliamo rappresentare in forma parametrica, si può osservare che un punto di r è $(4, 1/2, 0)$ e un vettore direzionale è $(1,-4,1) \times (0,2,3) = (-14,-3,2)$ e quindi si ha

$$r : \begin{cases} x = 4 - 14t \\ y = 1/2 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$$

In pratica però generalmente si procede in modo diverso e cioè per via puramente algebrica. Più precisamente si osserva che passare da una rappresentazione parametrica a una cartesiana significa, nel caso di una retta nel piano e di un piano nello spazio, trovare un'equazione lineare e, nel caso di una retta nello spazio, trovare due equazioni lineari indipendenti soddisfatte dal *punto generico* ossia da tutti i punti dati dalla rappresentazione parametrica, al variare del parametro o dei parametri. Si compie quindi l'operazione algebrica di *eliminare il parametro o i parametri.*

Esempio 1 *Rappresentare cartesianamente la retta* $r : (1 - t, t, 1 + 2t)$.

Basta ricavare $t = y$ dalla seconda uguaglianza; sostituendo nelle altre due si ha

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

Esempio 2 *Rappresentare cartesianamente il piano* $\pi : (1 - s - t, 1 + s - t, 1 - t)$.

Si può ricavare $t = 1 - z$ dalla terza equazione, $s = z - x$ dalla prima e, sostituendo nella seconda, ottenere

$$\pi : x + y - 2z = 0 \ .$$

Viceversa, data una rappresentazione cartesiana, si può passare ad una parametrica assumendo come parametri il massimo numero possibile di incognite.

Esempio 3 *Rappresentare parametricamente il piano* $\pi : x - 2y + z - 3 = 0$.

Basta porre $y = s$, $z = t$ e si ottiene

$$\pi : \begin{cases} x &= 3 + 2s - t \\ y &= s \\ z &= t \end{cases}$$

Esempio 4 *Determinare una rappresentazione parametrica della retta* r *data da* $x - 2y + z = x - y - z + 1 = 0$.

Basta porre $y = t$ e si ottiene $x + z = 2t$ e $x - z = t - 1$, da cui

$$\begin{cases} x &= 3/2t - 1/2 \\ y &= t \\ z &= 1/2t + 1/2 \end{cases}$$

4.9.2 Il punto medio di un segmento

Il punto medio del segmento AB è il punto M tale che $B - M = M - A$. Se $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ sono due punti del piano, poniamo $M(x_M, y_M)$; esplicitando la relazione precedente mediante le coordinate si ha

$$\begin{cases} b_1 - x_M &= x_M - a_1 \\ b_2 - y_M &= y_M - a_2 \end{cases}$$

per cui le coordinate di M sono

$$(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}) \ .$$

Analogamente nello spazio dati $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$ il punto medio del segmento AB è

$$M(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2})$$

4.9.3 Proiezioni ortogonali

Ricordiamo che:

a) Nel piano, la proiezione ortogonale di un punto A su una retta r è il punto di intersezione di r con la retta passante per A e ortogonale ad r.

b) Nello spazio, la proiezione ortogonale di un punto A su una retta r è il punto di intersezione di r con il piano passante per A e ortogonale ad r.

c) La proiezione ortogonale di un punto A su un piano π è il punto di intersezione diπ con la retta passante per A e ortogonale ad π.

d) Se r è una retta non ortogonale al piano π, la proiezione ortogonale di r su π è la retta che si ottiene intersecando π con il piano passante per r e ortogonale a π.

Esempio *Trovare la proiezione ortogonale della retta* $r : (2t, 1-2t, t)$ *sul piano* $\pi : (1-s+t, 1-t, s-t)$.

Una rappresentazione cartesiana di r è $x + y - 1 = x - 2z = 0$. Il fascio di piani Φ_r è $\lambda(x + y - 1) + \mu(x - 2z) = 0$ ovvero $(\lambda + \mu)x + \lambda y - 2\mu z - \lambda = 0$.

Tra questi piani cerchiamo quello ortogonale a π. Poiché un vettore direzionale di π è $(-1, 0, 1) \times (1, -1, -1) = (1, 0, 1)$, bisogna porre $(\lambda + \mu, \lambda, -2\mu) \cdot (1, 0, 1) = \lambda + \mu - 2\mu = 0$. Una soluzione non banale è $\lambda = 1$, $\mu = 1$, quindi il piano cercato è $\pi' : 2x + y - 2z - 1 = 0$.

Poiché il piano π in forma cartesiana è dato da $x + z - 1 = 0$, la retta proiezione è

$$\begin{cases} x + z - 1 &= 0 \\ 2x + y - 2z - 1 &= 0 \end{cases}$$

4.9.4 Simmetrie

Ricordiamo che

a) Il simmetrico di un punto P rispetto ad un punto Q è il punto P' della retta PQ tale che Q sia il punto medio del segmento PP'.

b) Il simmetrico di un punto P rispetto ad una retta r è il punto P' tale che la proiezione ortogonale di P su r sia il punto medio del segmento PP'.

c) Il simmetrico di un punto P rispetto ad un piano π è il punto P' tale che la proiezione ortogonale di P su π sia il punto medio del segmento PP'.

Esempio *Trovare il simmetrico del piano $\pi : x - 2y + 1 = 0$ rispetto al piano $\pi' : 2x - z = 0$.*

L'intersezione dei due piani è la retta $r : x - 2y + 1 = 2x - z = 0$; poiché il piano cercato appartiene al fascio Φ_r, per determinarlo basta trovare un suo punto non appartenente ad r.

Il punto $A(-1, 0, 0) \in \pi$ e $A \notin r$. Determiniamo il suo simmetrico rispetto a π'. La retta per A e ortogonale a π' è $(-1+2t, 0, -t)$. L'intersezione di questa retta con π' è data da $2(-1+2t)-(-t) = 0$, ovvero $t = 2/5$, e quindi si ha il punto $M(-1/5, 0, -2/5)$. Imponendo che M sia il punto medio tra A e il simmetrico A', si trova $A'(3/5, 0, -4/5)$.

Per concludere basta trovare il piano di Φ_r passante per A'. Si ottiene il piano:

$$3x + 10y - 4z - 5 = 0 .$$

4.9.5 Comune perpendicolare a due rette sghembe

Ricordiamo che date due rette sghembe, esiste un'unica retta incidente e perpendicolare ad entrambe.

Esempio *Date le rette*

$$r : \begin{cases} x &= t \\ y &= 1 - t \\ z &= 1 + 2t \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x - 2y - 3z &= 0 \\ x + z + 1 &= 0 \end{cases}$$

dimostrare che sono sghembe e determinare la loro comune perpendicolare.

Siano $A(0, 1, 1), B(1, 0, 3) \in r$ e $C(-1, -1/2, 0), D(0, 3/2, -1 \in r'$. Siccome $(B - A) \cdot (C - A) \times (D - A) \neq 0$, le rette r, r' sono sghembe. Determiniamo ora la loro comune perpendicolare.

Primo metodo: Un vettore direzionale di r è $u = (1, -1, 2)$, un vettore direzionale di r' è $u' = (1, -2, -3) \times (1, 0, 1) = (-2, -4, 2)$.

Un vettore ortogonale ad entrambi è $u \times u' = (6, -6, -6)$, quindi un vettore ortogonale ad entrambi è anche $v = (1, -1, -1)$.

Il piano contenente r e parallelo a v è $\pi : (t + s, 1 - t - s, 1 + 2t - s)$. Il piano contenente r' e parallelo a v è, come si vede subito, $\pi' x + z + 1 = 0$. Quindi la retta cercata è

$$\begin{cases} x + y - 1 &= 0 \\ x + z + 1 &= 0 \end{cases}$$

Secondo metodo: In forma parametrica si ha $r' : (-1 - s, -1/2 - 2s, s)$. La generica retta incidente r, r' è dunque

$$\frac{x - t}{-1 - s - t} = \frac{y - 1 + t}{-1/2 - 2s - 1 + t} = \frac{z - 1 - 2t}{s - 1 - 2t}$$

Affinché sia ortogonale a r, r' si deve avere

$$\begin{cases} -1 - s - t + 1/2 + 2s + 1 - t + 2s - 2 - 4t &= 0 \\ 1 + s + t + 1 + 4s + 2 - 2t + s - 1 - 2t &= 0 \end{cases}$$

da cui si ricava $t = -2/3$ e $s = -5/6$. La retta cercata è dunque

$$\frac{x + 2/3}{1/2} = \frac{y - 5/3}{-1/2} = \frac{z + 1/3}{-1/2} \quad .$$

4.10 Distanze

4.10.1 Distanza di due punti

Ricordiamo che, usualmente, si definisce *distanza di due punti* la lunghezza del segmento che li unisce e quindi il modulo del vettore applicato in uno di essi e che ha l'altro come secondo estremo; le formule sono date quindi dalla Proposizione 3.9.

4.10.2 Distanza di un punto da una retta

Ricordiamo che si definisce *distanza di un punto da una retta* la distanza del punto dalla sua proiezione ortogonale sulla retta.

Data una retta r e su di essa due punti A, B distinti e dato un punto P, si vede facilmente che, detta $d(P, r)$ la distanza di P da r, si ha

$$d(P, r) = \frac{|(P - A) \times (B - A)|}{|B - A|}$$

Se A è un punto di r e $C - A$ è un vettore ortogonale ad r si ha anche

$$d(P, r) = \frac{|(P - A) \cdot (C - A)|}{|C - A|}$$

Nel caso si abbia $r : ax + by + c = 0$ e $P(x_0, y_0)$, essendo il vettore (a, b) ortogonale ad r, si ottiene

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Esempio *Dato il punto* $P(1, 2, 3)$ *e la retta* $r : x - 2y + z = 2x - y - z = 0$, *calcolare* $d(P, r)$.

Un punto di r è $A(-4, -2, 0)$ e un vettore direzionale di r è $(1, 1, 1)$. Quindi

$$d(P, r) = \frac{|(5, 4, 3) \times (1, 1, 1)|}{|(1, 1, 1)|} = \frac{|(1, -2, -1)|}{|(1, 1, 1)|} = \sqrt{2}$$

4.10.3 Distanza di un punto da un piano

Ricordiamo che si definisce *distanza di un punto da un piano* la distanza del punto dalla sua proiezione ortogonale sul piano.

Dati un punto P, un piano π, un punto $A \in \pi$ e un vettore $C - A$ ortogonale a π, si ha:

$$d(P, \pi) = \frac{|(P - A) \cdot (C - A)|}{|(C - A)|}$$

Nel caso si abbia $\pi : ax + by + cz + d = 0$ e $P(x_0, y_0, z_0)$, si ottiene quindi

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Esempio *Dato il punto* $P(-3, 0, 0)$ *e il piano* $\pi : (1 - s, 1 + t, s - 2t)$, *calcolare* $d(P, \pi)$.

Un punto di π è $A(1, 1, 0)$ e un vettore ortogonale a π è $(-1, 0, 1) \times (0, 1, -2) = (-1, -2, -1)$. Quindi

$$d(P, \pi) = \frac{|(-4, -1, 0) \cdot (-1, -2, -1)|}{|(-1, -2, -1)|} = \sqrt{6}\ .$$

4.10.4 Distanza di due rette sghembe

Ricordiamo che si definisce *distanza tra due rette sghembe* la distanza dei due punti di intersezione delle due rette con la comune perpendicolare. Quindi date due rette sghembe r ed r', la distanza $d(r,r')$ è la distanza di uno qualsiasi dei punti di r' dal piano passante per r e parallelo ad r'.

Un altro metodo è il seguente. Siano $A \in r$, $A' \in r'$, u un vettore direzionale di r, u' un vettore direzionale di r'; allora si vede facilmente che

$$d(r,r') = \frac{|(A-A') \cdot u \times u'|}{|u \times u'|}$$

Esempio *Calcolare la distanza* $d(r,r')$ *dove* $r:(t,1-t,1+2t)$ *e* $r':x-2y-3z=x+z+1=0$.

Un vettore direzionale di r è $(1,-1,2)$, un vettore direzionale di r' è $(-2,-4,2)$, un punto di r è $A(0,1,1)$, un punto di r' è $A'(0,3/2,-1)$. Quindi

$$d(r,r') = \frac{|(0,-1/2,2) \cdot (1,-1,2) \times (-2,-4,2)|}{|(1,-1,2) \times (-2,-4,2)|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

4.10.5 Asse di un segmento

Dati due punti A, B del piano (risp. dello spazio), il luogo dei punti del piano (risp. dello spazio) equidistanti da A e da B è una retta (risp. un piano). Tale luogo è detto *asse del segmento* AB (risp. *piano-asse del segmento* AB).

Esempio *Determinare il piano-asse del segmento* AB*, dove* $A(1,0,0)$ *e* $B(0,1,1)$.

Un punto P appartiene al piano cercato se e solo se

$$d(A,P) = d(B,P)$$

quindi, posto $P(x,y,z)$, si ha

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

da cui

$$2x - 2y - 2z + 1 = 0 \ .$$

4.10.6 Rette e piani bisettori

Nel piano date due rette distinte e incidenti, il luogo dei punti equidistanti da esse è una coppia di rette ortogonali tra di loro dette *rette bisettrici* degli angoli individuati dalle rette date.

Nello spazio dati due piani distinti e incidenti, il luogo dei punti equidistanti da essi è una coppia di piani ortogonali tra loro detti *piani bisettori* degli angoli diedri individuati dai piani dati.

Esempio *Dati i due piani* $\pi : x - 3y + 2 = 0$ *e* $\pi' 2x - z - 1 = 0$*, determinare i piani bisettori.*

Un punto $P(x,y,z)$ appartiene al luogo cercato se e solo se

$$d(P,\pi) = d(P,\pi')$$

quindi

$$\frac{|x-3y+2|}{\sqrt{1+9}} = \frac{|2x-z-1|}{\sqrt{4+1}}$$

I due piani bisettori si rappresentano dunque così :

$$\frac{x-3y+2}{\sqrt{10}} = \pm \frac{2x-z-1}{\sqrt{5}} \ .$$

4.11 Circonferenze e sfere

Definizione 4.32 Dato un punto C di un piano π e un numero reale positivo ρ, si dice *circonferenza* di centro C e raggio ρ il luogo dei punti di π che hanno distanza ρ da C.

Definizione 4.33 Dato un punto C nello spazio e un numero reale positivo ρ, si dice *sfera* di centro C e raggio ρ il luogo dei punti dello spazio che hanno distanza ρ da C.

Se il piano è dotato di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali in cui $C(\alpha, \beta)$, la circonferenza di centro C e raggio ρ è rappresentabile mediante l'equazione

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2$$

Analogamente nello spazio la sfera di centro$C(\alpha, \beta, \gamma)$ e raggio ρ è rappresentabile mediante l'equazione

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = \rho^2$$

Consideriamo ora il luogo dei punti del piano le cui coordinate soddisfano l'equazione

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \ . \tag{4.15}$$

Completando i quadrati, l'equazione precedente si può riscrivere

$$(x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c \ .$$

e quindi, posto $\sigma = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$, si ha:

1. se $\sigma > 0$ l'equazione (4.15) rappresenta una circonferenza di centro $C(-a/2, -b/2)$ e raggio $\sqrt{\sigma}$;
2. se $\sigma = 0$ l'equazione (4.15) rappresenta il solo punto C;
3. se $\sigma = 0$ l'equazione (4.15) rappresenta l'insieme vuoto.

Un discorso del tutto analogo si può fare nello spazio per un'equazione del tipo

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \ . \tag{4.16}$$

Definizione 4.34 Nel piano sia data una retta r e una circonferenza γ di centro C e raggio ρ. Allora si dice che

1. r è *esterna* a γ se $d(C, r) > \rho$, in tal caso $\gamma \cap r = \emptyset$.
2. r è *tangente* a γ se $d(C, r) = \rho$, in tal caso $\gamma \cap r$ è costituito da un solo punto.
3. r è *secante* a γ se $d(C, r) < \rho$, in tal caso $\gamma \cap r$ è costituito da due punti.

In modo analogo si definiscono le possibili mutue posizioni di una retta e una sfera nello spazio.

Definizione 4.35 Nello spazio sia dato un piano π e una sfera S di centro C e raggio ρ. Allora si dice che

1. π è *esterno* a S se $d(C, \pi) > \rho$, in tal caso $S \cap \pi = \emptyset$.
2. π è *tangente* a S se $d(C, \pi) = \rho$, in tal caso $S \cap r$ è costituito da un solo punto.

3. π è *secante* a S se $d(C,\pi) < \rho$, in tal caso $S \cap \pi$ è una circonferenza.

Oss. Nel piano, una retta r è tangente in un punto P ad una circonferenza di centro C se e solo se r passa per P ed è ortogonale a CP.

Analogamente nello spazio un piano π è tangente in un punto P ad una sfera di centro C se e solo se π passa per P ed è ortogonale a CP.

Esempio 1 *Siano $A(1,1,4)$, $B(1,3,2)$, $C(3,1,2)$. Rappresentare analiticamente la circonferenza passante per A, B, C.*

Come si vede subito A, B, C non sono allineati, dunque individuano un piano π che si può rappresentare con

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

ovvero $x+y+z-6=0$.

Perché una sfera intersechi π nella circonferenza cercata, deve avere il centro sul piano-asse di AB e sul piano-asse di AC. Il piano-asse di AB è $y-z+1=0$, mentre il piano-asse di AC è $x-z+1=0$.

Un punto comune ai due piani è $D(0,0,1)$ e si ha $d(A,D)=\sqrt{11}$. Quindi una sfera che interseca π lungo la circonferenza ha equazione $x^2+y^2+(z-1)^2=11$. La circonferenza cercata si può quindi rappresentare analiticamente con il sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2+(z-1)^2 & = & 11 \\ x+y+z-6 & = & 0 \end{cases}$$

Esempio 2 *Provare che il sistema*

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-4y-4 & = & 0 \\ 3x-4y+15 & = & 0 \end{cases}$$

rappresenta una circonferenza γ; determinare il centro e il raggio di γ.

Completando i quadrati, la prima equazione si può scrivere $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=9$ e quindi rappresenta una sfera di S di centro $C(1,2,0)$ e raggio $\rho=3$.

La distanza del piano $\pi : 3x-4y+15=0$ dal centro C è:

$$d(\pi, C) = \frac{|3\cdot 1 - 4\cdot 2 + 15|}{\sqrt{9+16}} = 2$$

quindi π è secante a S.

Applicando il teorema di Pitagora, si ha che il raggio della circonferenza è

$$\sqrt{\rho^2 - d(C,\pi)^2} = \sqrt{9-4} = 2.$$

Il centro della circonferenza è la proiezione ortogonale di C su π. La retta passante per C e ortogonale a π è $R : (1+3t, 2-4t, 0)$. L'intersezione di π con tale retta si ottiene risolvendo $3(1+3t)-4(2-4t)+15=0$ ovvero $25t+10=0$ da cui $t=-2/5$.

Il centro della circonferenza è quindi $(-1/5, 18/5, 0)$.

Esempio 3 *Determinare, se esistono, i piani che passano per la retta $r : (t,t,t-1)$ e sono tangenti alla sfera $S : x^2+y^2+z^2-2x=0$.*

Una rappresentazione cartesiana della retta r è $\begin{cases} x-y & = & 0 \\ x-z-1 & = & 0 \end{cases}$ quindi il fascio di piani di asse r è $\Phi_r : (\lambda+\mu)x - \lambda y - \mu z - \mu = 0$.

La sfera S ha equazione $(x-1)^2+y^2+z^2=1$ quindi ha centro $C(1,0,0)$ e raggio $\rho=1$.

Troviamo i piani di Φ_r che hanno distanza 1 da C; deve essere

$$\frac{|\lambda+\mu-\mu|}{\sqrt{(\lambda+\mu)^2+\lambda^2+\mu^2}} = 1$$

e quindi

$$\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2 = 0.$$

Poiché $\mu = 0$ non porta a nessuna soluzione del problema, assumiamo $\mu \neq 0$, dividiamo per μ^2 e poniamo $\lambda/\mu = t$. Si ha

$$t^2 + 2t + 2 = 0$$

che non ha soluzioni reali. Questo significa che non ci sono piani passanti per r e tangenti a S, dunque r è secante a S. Si può infatti verificare che $d(r, C) = \sqrt{2/3} < 3$ e che $r \cap S = \{A, B\}$ dove $A(1, 1, 0)$ e $B(1/3, 1/3, -2/3)$.

4.12 Curve e superfici

Nei numeri precedenti abbiamo studiato le rette, le circonferenze, i piani e le superfici sferiche. Le rette e le circonferenze sono esempi di curve, i piani e le superfici sferiche sono esempi di superfici.

Una definizione generale di curva o di superficie richiede nozioni che esulano dall'ambito di questo corso. In questo numero, considerando i concetti di curva e di superficie come intuitivi, accenneremo alla loro rappresentazione analitica con particolare riferimento ai coni, cilindri e superfici di rotazione e studieremo problemi di intersezione e di proiezione.

4.12.1 Rappresentazione parametrica di una curva e di una superficie

I punti descritti dalle equazioni

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

al variare di $t \in I$ (I intervallo di $\mathbb{R}$ o anche $I = \mathbb{R}$) costituiscono *in generale*[1] una curva $\mathcal{C}$ nello spazio. In tal caso le (4.12.1) si dicono *equazioni parametriche* di $\mathcal{C}$ e si scrive

$$\mathcal{C} : (x(t), y(t), z(t)) \ .$$

Nel piano la rappresentazione parametrica di una curva è

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

I punti descritti dalle equazioni

$$\begin{cases} x = x(t, u) \\ y = y(t, u) \\ z = z(t, u) \end{cases}$$

al variare di $(t, u) \in D$ (D dominio di $\mathbb{R}^2$ o anche $D = \mathbb{R}^2$) costituiscono *in generale* una superficie.

Le linee ottenute ponendo $t =$ costante oppure $u =$ costante sono le linee coordinate della superficie (relativamente alla rappresentazione parametrica data).

[1] Useremo la locuzione *in generale* per intendere *sotto opportune ipotesi*; in questo caso ci riferiamo alle funzioni $x(t), y(t), z(t)$.

4.12.2 Rappresentazione cartesiana di una curva e di una superficie

L'insieme dei punti dello spazio che soddisfano un'equazione

$$f(x, y, z) = 0$$

costituisce in generale una superficie.

L'intersezione di due superfici, cioè l'insieme dei punti che soddisfano un sistema

$$\begin{cases} f(x, y, z) & = & 0 \\ g(x, y, z) & = & 0 \end{cases}$$

costituisce in generale una curva nello spazio. Tuttavia non tutte le curve dello spazio possono essere rappresentate come intersezione di solo due superfici.

Passare da una rappresentazione parametrica di una curva o di una superficie a una cartesiana è di solito possibile, anche se non sempre in modo elementare, eliminando il parametro o i parametri.

Passare dalla rappresentazione cartesiana a quella parametrica è invece di solito più complicato se non impossibile.

4.12.3 Curve piane

Se $\mathcal{C} : (x(t), y(t), z(t))$ è una curva e $\mathcal{S} : f(x, y, z) = 0$ è una superficie, allora $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ se e solo se

$$f(x(t), y(t), z(t)) = 0$$

identicamente rispetto a t, cioè per ogni t.

Una curva $\mathcal{C}$ nello spazio si dice *piana* se esiste un piano che la contiene. Altrimenti $\mathcal{C}$ si dice *gobba*.

Quindi la curva $\mathcal{C} : (x(t), y(t), z(t))$ è piana se e solo se esistono a, b, c, d con a, b, c non tutti nulli, tali che

$$ax(t) + by(t) + cz(t) + d = 0$$

identicamente rispetto a t.

Per verificare se la curva $\mathcal{C}$ è piana si può procedere anche nel modo seguente:

- si prendono tre punti A, B, C su $\mathcal{C}$ non allineati;
- si trova il piano π passante per A, B, C;
- si verifica se $\mathcal{C}$ è contenuta in π.

Esempio 1. Le rette e le circonferenze sono curve piane.

Esempio 2. La curva $\mathcal{C} : (t^2 + 1, t^3 - t, 2t^2 + t - 1)$ è piana se e solo se esiste un piano $ax + by + cz + d = 0$ tale che per ogni $t \in \mathbb{R}$ si abbia $a(t^2 + 1) + b(t^3 - t) + c(2t^2 + t - 1) + d = 0$ se e solo se $bt^3 + (a + 2c)t^2 + (c - b)t + (a - c + d) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ se e solo se

$$\begin{cases} b & = & 0 \\ a + 2c & = & 0 \\ c - b & = & 0 \\ a - c + d & = & 0 \end{cases}$$

L'unica soluzione di questo sistema è $a = b = c = d = 0$, quindi non esiste alcun piano che contiene tutti i punti di $\mathcal{C}$.

Esempio 3. Sia $\mathcal{C} : (t^2 + t^3, t^3 - 1, t^2 + 3)$. Il polinomio in t che si ottiene sostituendo al posto di x, y, z le coordinate del generico punto di $\mathcal{C}$ nella equazione di un generico piano è $a(t^2 + t^3) + b(t^3 - 1) + c(t^2 + 3) + d = 0$ ed è identicamente nullo rispetto a t se e solo se $(a + b)t^3 + (a + c)t^2 + (3c - b + d) = 0$ identicamente rispetto a t se e solo se

$$\begin{cases} a + b & = & 0 \\ a + c & = & 0 \\ 3c - b + d & = & 0 \end{cases}$$

La soluzione generale di questo sistema è $(a,b,c,d) = (a,-a,-a,2a)$, quindi la curva data è contenuta nel piano $x-y-z+2=0$.

4.12.4 Superfici rigate

Una *superficie rigata* è una superficie tale che per ogni suo punto passa una retta interamente contenuta nella superficie. Una superficie rigata è quindi un luogo di rette.

Una superficie che ha una rappresentazione parametrica del tipo

$$\begin{cases} x = x_0(t) + ua(t) \\ y = y_0(t) + ub(t) \\ z = z_0(t) + uc(t) \end{cases}$$

è rigata. Infatti si vede subito che, per ogni t fissato, le equazioni precedenti danno una retta che sta sulla superficie e, se P è il punto della superficie che si ottiene per $t = \overline{t}$, $u = \overline{u}$, allora la retta $r_{\overline{t}}$ passa per P e sta sulla superficie.

4.12.5 Cilindri

Un *cilindro* è una superficie luogo di rette (*generatrici*) parallele a un vettore fissato. Una *direttrice* del cilindro è una curva che giace sul cilindro e interseca tutte le generatrici.

Se $\mathcal{C} : (x(t), y(t), z(t))$ è una curva, una rappresentazione parametrica del cilindro che ha $\mathcal{C}$ come direttrice e generatrici parallele al vettore $u = (l,m,n)$ è data da

$$\begin{cases} x = x(t) + lu \\ y = y(t) + mu \\ z = z(t) + nu \end{cases}$$

Per $t =$ costante si ottengono le generatrici, per $u =$ costante si ottengono delle curve direttrici tra cui $\mathcal{C}$.

Nello spazio, un'equazione indipendente da z

$$f(x,y) = 0$$

è in generale una rappresentazione cartesiana di un cilindro con generatrici parallele al vettore $(0,0,1)$. Infatti se $P(x_0, y_0, z_0)$ è un punto che verifica l'equazione precedente, allora i punti della retta per P parallela all'asse z hanno coordinate $(x_0, y_0, z_0 + t)$ e verificano tutti l'equazione precedente.

Analogamente $f(x,z) = 0$ e $f(y,z) = 0$ sono in generale rappresentazioni cartesiane di cilindri con generatrici parallele ai vettori $(0,1,0)$ e $(1,0,0)$ rispettivamente.

Più in generale se $u = (a,b,c)$ e $u' = (a',b',c')$ sono due vettori non paralleli, un'equazione del tipo

$$f(ax+by+cz, a'x+b'y+c'z) = 0$$

è di solito la rappresentazione cartesiana di un cilindro con generatrici parallele al vettore $v = u \times u'$.

Data una curva $\mathcal{C}$, un piano π e un vettore v non parallelo a π chiamiamo *proiezione di $\mathcal{C}$ su π lungo la direzione v* la curva intersezione di π con il cilindro che ha $\mathcal{C}$ come direttrice e generatrici parallele a v. Se v è perpendicolare a π si ha una *proiezione ortogonale*.

Se $\mathcal{C} : f(x,y,z) = g(x,y,z) = 0$, una rappresentazione cartesiana del cilindro che proietta $\mathcal{C}$ ortogonalmente sul piano xy si può ottenere eliminando la z dalle due equazioni.

Esempio. *Trovare la proiezione ortogonale della curva $\mathcal{C} : x+y-z = x^2+y^3+2xz = 0$ sul piano $\pi : y+2z = 0$.*

Un punto $P(a,b,c)$ sta su $\mathcal{C}$ se

$$\begin{cases} a+b-c = 0 \\ a^2+b^3+2ac = 0 \end{cases}$$

La retta passante per P e perpendicolare a π è

$$\begin{cases} x &= a \\ y-b &= 1/2(z-c) \end{cases}$$

Al variare di P su $\mathcal{C}$ queste rette descrivono il cilindro che ha $\mathcal{C}$ come direttrice e generatrici perpendicolari a π. Una sua equazione cartesiana si ottiene eliminando i parametri a, b, c tra le (4.12.5) e le (4.12.5) ed è $x^2 + (x+2y-z)^3 + 2x(2x+2y-z) = 0$, pertanto la proiezione ortogonale cercata è

$$\begin{cases} x^2 + (x+2y-z)^3 + 2x(2x+2y-z) &= 0 \\ y+2z &= 0 \end{cases}$$

4.12.6 Coni

Un *cono* è una superficie luogo di rette (*generatrici*) passanti per un punto V detto *vertice* del cono.

Una superficie $\mathcal{S}$ è quindi un cono se esiste un punto V su $\mathcal{S}$ tale che per ogni altro punto P di $\mathcal{S}$ la retta VP è contenuta in $\mathcal{S}$.

Se $\mathcal{C} : (x(t), y(t), z(t))$ è una curva, una rappresentazione parametrica del cono che ha $\mathcal{C}$ come direttrice e vertice $V(x_0, y_0, z_0)$ è

$$\begin{cases} x &= x_0 + (x(t)-x_0)u \\ y &= y_0 + (y(t)-y_0)u \\ z &= z_0 + (z(t)-z_0)u \end{cases}$$

Per $t =$ costante si ottengono le generatrici, per $u =$ costante ($\neq 0$) si ottengono le direttrici tra cui $\mathcal{C}$.

Esempio 1 Il cono con vertice $V(1, 2, -1)$ e direttrice $\mathcal{C} : (t^3, t^2, t)$ è

$$\begin{cases} x &= ut^3 - u + 1 \\ y &= ut^2 - 2u + 2 \\ z &= ut + u - 1 \end{cases} .$$

Una funzione $f(x, y, z)$ si *omogenea* si grado d ($d \neq 0$) se per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha

$$f(tx, ty, tz) = t^d f(x, y, z)$$

In particolare una funzione polinomiale è omogenea se tutti i monomi del polinomio hanno lo stesso grado.

Un'equazione $f(x, y, z) = 0$ con $f(x, y, z)$ funzione omogenea è in generale la rappresentazione cartesiana di un cono con vertice $O(0, 0, 0)$. Infatti se $P(x_0, y_0, z_0)$ è un punto della superficie $f(x, y, z) = 0$, allora la retta $OP : (tx_0, ty_0, tz_0)$ sta sulla superficie.

Esempio 2 La superficie $\mathcal{S} : x^4 + 2xy^3 + y^4 + x^2z^2 = 0$ è un cono con vertice nell'origine. Infatti

$$\begin{aligned} f(tx, ty, tz) &= (tx)^4 + 2(tx)(ty)^3 + (ty)^4 + 2(tx)^2(tz)^2 \\ &= t^4(x^4 + 2xy^3 + y^4 + x^2z^2) \\ &= t^4 f(x, y, z) \end{aligned}$$

quindi f è una funzione omogenea di grado 4, e quindi $\mathcal{S}$ è un cono con vertice $O(0, 0, 0)$.

Oss. Se f è una funzione omogenea nelle variabili $x-x_0, y-y_0, z-z_0$, allora l'equazione $f(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0$ rappresenta un cono con vertice $V(x_0, y_0, z_0)$.

Esempio 3 *Trovare la proiezione $\mathcal{C}'$ della curva $\mathcal{C} : (t, t^2, t^3)$ sul piano $\pi : x+y-z-1 = 0$ dall'origine.*

Il cono che proietta $\mathcal{C}$ dall'origine è $\mathcal{S} : (tu, t^2u, t^3u)$. Intersecando con il piano π si ha $tu + t^2u - t^3u - 1 = 0$, da cui $u = 1/(t + t^2 - t^3)$; sostituendo nelle equazioni del cono e semplificando si ha

$$\mathcal{C}' : \left(\frac{1}{1+t+t^2}, \frac{t}{1+t+t^2}, \frac{t^2}{1+t+t^2} \right)$$

4.12.7 Superfici di rotazione

Sia r una retta. Una *superfici di rotazione* di asse r è una superficie luogo di circonferenze che hanno il centro su r e sono contenute in piani ortogonali ad r.

Se $\mathcal{C} : (x(t), y(t), z(t))$ è una curva, le circonferenze della superficie generata dalla rotazione di $\mathcal{C}$ attorno alla retta r si possono determinare intersecando, per ogni t, il piano passante per $P(x(t), y(t), z(t))$ e ortogonale ad r con la sfera di centro C e raggio $d(C, P)$, dove C è un punto fissato su r. L'equazione cartesiana si ottiene eliminando t tra l'equazione del piano e quella della sfera.

Esempio. *Trovare un'equazione cartesiana della superficie ottenuta facendo ruotare la curva* $\mathcal{C} : z - y^2 = x + y = 0$ *attorno alla retta* $R : x + y = z = 0$.
Sia $P(a, b, c)$ un punto di $\mathcal{C}$, allora:

$$(1) \quad c - b^2 = 0 \qquad \text{e} \qquad (2) \quad a + b = 0 \ .$$

Il piano passante per P perpendicolare ad r è

$$(3) \quad (x - a) - (y - b) = 0 \ .$$

Fissiamo su r il punto $C(0, 0, 0)$ e consideriamo la sfera di centro C che passa per P:

$$(4) \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 \ .$$

Il sistema costituito da (3) e (4) rappresenta la circonferenza descritta dal punto P quando questo ruota attorno ad r. Al variare di P su $\mathcal{C}$ queste circonferenze descrivono la superficie di rotazione cercata. Per averne un'equazione cartesiana è sufficiente eliminare i parametri a, b, c tra le equazioni (1), (2), (3), (4). Dalle prime tre si ottiene

$$b = (y - x)/2 \qquad a = -(y - x)/2 \qquad c = (y - x)^2/4 \ .$$

e sostituendo nella (4) si ha:

$$1/16\,(y - x)^4 - 1/2\,x^2 - 1/2\,y^2 - xy + z^2 = 0 \ .$$

4.13 Coordinate polari nel piano

Un altro modo di associare ai punti di un piano π coppie ordinate di numeri reali si ottiene considerando nel piano un sistema di coordinate polari definito come segue. Fissata una semiretta orientata (*asse polare*) di origine O (*polo*), ogni punto $P \neq O$ è individuato dalla lunghezza ρ del raggio vettore $\overline{OP}$ e dall'angolo θ, $(0 \leq \theta < 2\pi)$, detto *anomalia* che il raggio vettore forma con l'asse polare. I due numeri ρ e θ si dicono *coordinate polari* di P.

Ad ogni sistema di coordinate polari si può associare canonicamente un sistema di coordinate cartesiane ortogonali orientato positivamente e viceversa. Come mostra la Figura 4.1 l'origine delle coordinate cartesiane coincide con il polo, l'asse delle ascisse contiene l'asse polare ed è orientato allo stesso modo, l'asse delle ordinate è la retta che passa per il polo, è perpendicolare all'asse polare ed è orientata in modo da avere un sistema di coordinate cartesiane orientato positivamente.

Le formule di passaggio da un sistema di coordinate all'altro sono:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho \in \theta \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\frac{x}{y} \end{cases}$$

Le condizioni analitiche che caratterizzano figure geometriche sono talvolta espresse in modo più semplice mediante le coordinate polari. Ad esempio l'equazione polare di un cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio R:

$$\rho = R$$

Mentre l'equazione polare di un cerchio di centro (ρ_0, θ_0) e raggio R si ottiene usando il teorema di Carnot ed è:

$$\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos(\theta - \theta_0) = R^2$$

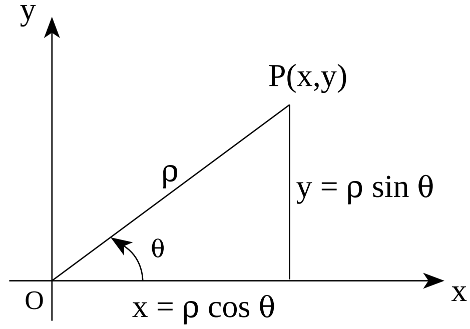


Figura 4.1: Coordinate cartesiane e coordinate polari

4.14 Esercizi

Es. 54. I punti $A(1,2)$, $B(3,0)$, $C(2,-1)$ sono allineati?

Es. 55. Ci sono terne di punti allineati nell'insieme dei quattro punti $A(1,1,1)$, $B(0,1,2)$, $C(0,0,0)$, $D(1,1,-1)$?

Es. 56. Provare che i tre punti $A(1,1,0)$, $B(1/2,2,1)$, $C(2,-1,-2)$ sono allineati e determinare il numero reale t tale che $C-A=t(B-A)$.

Es. 57. Date le rette $r:\begin{cases} x = 2t \\ y = 3-3t \end{cases}$ e $r':\begin{cases} x = 3-t \\ y = 2t-1 \end{cases}$

a) Determinare il punto P di intersezione di r con r';

b) Dare una rappresentazione parametrica della retta s passante per P e per il punto $Q(-2,6)$ in modo che il punto P si ottenga su s per il valore -3 del parametro.

Es. 58. Provare che le due rappresentazioni

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-2t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3-3t \\ y = -2+6t \end{cases}$$

sono rappresentazioni parametriche della stessa retta.

Es. 59. Le rette $x-2y+3=0$, $3x+y+2=0$, $x-6y+7=0$ hanno un punto comune?

Es. 60. a) Scrivere un'equazione della retta passante per $A(1,2)$ e $B(1,0)$.

b) Scrivere un'equazione della retta passante per $A(1,3)$ e avente vettore direzionale $(-3,4)$.

Es. 61. Tra le rette: $r_1: x-3y+1=0$, $r_2: 1/3(x-1)=y-2$, $r_3: x-1/2=0$, $r_4:\begin{cases} x=1-t \\ y=t \end{cases}$, $r_5: 2x-6y+1=0$ vi sono coppie di rette ortogonali?

Es. 62. Siano $u=(1,0)$ e $v=(-2,-2)$. Calcolare $\widehat{\vec{u}\vec{v}}$.

Es. 63. Siano $u=(1,1)$ e $r: 3x-y+1=0$. Calcolare $\widehat{\vec{r}\vec{u}}$.

Es. 64. Determinare un'equazione per i seguenti luoghi di punti del piano

a) I punti che hanno distanza 4 dal punto $A(2,3)$.

b) I punti equidistanti dai punti $A(1,3)$ e $B(2,-1)$.

c) I punti medi dei segmenti che hanno un estremo in $(3,0)$ e l'altro sull'asse Y.

Es. 65. Sia $r: (3-\sqrt{3}\,x + (1+3\sqrt{3})\,y - 2 = 0$. Determinare la retta s che passa per l'origine e tale che $\widehat{\vec{r}\vec{s}} = -\pi/3$.

Es. 66. I punti $A(1,1,0)$, $B(-1,-1,2)$, $C(1,1,3)$, $D(2,2,0)$ sono complanari?

Es. 67. Scrivere un'equazione cartesiana e una rappresentazione parametrica del piano passante per i punti $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$.

Es. 68. Determinare la reciproca posizione delle rette

$$\begin{cases} x-2y+3z &= 0 \\ 2x-z+1 &= 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y &= 0 \\ x+y+z &= 0 \end{cases}.$$

Es. 69. Quali particolarità presentano, rispetto al sistema di riferimento (origine, assi e piani coordinati) i piani seguenti: $3x+2=0$; $2x-5z=0$; $3x-y+13=0$; 4x+y-6z=0; $x-3z=0$; $2x+z=13$.

Es. 70. Trovare l'intersezione dei piani:

1. $x+y-z=0$, $x=1$, $y-z=0$;
2. $x+2y+3z=0$, $x+y+z=1$, $x+4z=2$;
3. $x+y-z=0$, $z-y=1$, $3x-2y-2z=1$;
4. $(1+s+t, s-2t, s-t)$, $x-2y-z+1=0$;
5. $(1+s+t, s-2t, s-t)$, $(s+3t, t, s-t+1)$.

Es. 71. Dato il piano $\pi: 2x-y+z=0$, determinare:

1. una retta r su π e un punto P su π non appartenente ad r.
2. una retta r' passante per P e parallela ad r.

Es. 72. Trovare due rette distinte passanti per $A(2,-1,1/2)$ e giacenti nel piano $x+2y=0$.

Es. 73. Calcolare i coseni direttori della retta $r:\ 3y=2z-3=x$. Dire quali degli angoli che essa forma con gli assi coordinati sono maggiori di $\pi/4$.

Es. 74. Determinare il piano passante per il punto $A(1,1,0)$ e parallelo alle rette $r:\ x-y+1 = x-z-2=0$ e $s:\ y=2z+x=0$.

Es. 75. Determinare il generico piano del fascio che ha come asse la retta $(3t, t, t+1)$.

Es. 76. Determinare una rappresentazione parametrica del generico piano del fascio che ha come asse la retta passante per l'origine e per il punto $(1,2,1)$.

Es. 77. Tra i piani del fascio generato dai due piani $x + 2y - z = 2$ e $x + 3y + z = 0$ determinare quelli:

1. paralleli al piano $x = 0$;
2. paralleli al piano $x = 0$;
3. che passano per il punto $(1, 2, 1)$;
4. che passano per i punti $(1, 0, -1)$ e $(6, -2, 0)$;
5. che passano per i punti $(1, 1, 1)$ e $(3, 0, 0)$;
6. che non intersecano la retta intersezione di $x + y = 0$ e $y - z = 0$;
7. paralleli alla retta (t, t, t);

Es. 78. Sulla retta $(5t - 1, t, 3t)$ determinare i punti la cui distanza da $A(-1, 0, 0)$ sia uguale a 1.

Es. 79. Si esamini al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ la posizione della retta $r_\lambda : x+\lambda y+z-1 = 2x+y+(11-\lambda^2)z = 0$ rispetto al piano $x - y + z - \lambda^2 = 0$.

Es. 80. Provare che la retta $x + y = x - 2y - z = 0$ appartiene al piano $x + 4y + z = 0$.

Es. 81. Date le rette $r_1 : (t, t, t)$ e $r_2 : (s, 1, 3s)$, provare che sono sghembe e determinarne la comune perpendicolare. Idem per le rette $s_1 : x - y = y - z = 0$, $s_2 : x + y + z = x - 2y + z = 0$.

Es. 82. Dire se esiste, e in caso affermativo determinare, un piano contenente le rette $(t+1, t-1, 2t)$, $x - 3y + 2z = 2x - z + 1 = 0$.

Es. 83. Determinare i piani passanti per la retta $10x - 8y - 15z + 56 = 4x + y + 3z - 1 = 0$ ed aventi distanza uguale a 7 dal punto $(3, -2, -3)$.

Es. 84. Siano $A(0, 0, -1)$ e $B(2, -1, -1)$. Trovare il luogo dei punti P del piano $x + 2y - z = 1$ tali che il triangolo di vertici A, B, P abbia area 3.

Es. 85. Determinare le proiezioni ortogonali del punto $A(-1, -2, 2)$ sui piani coordinati e sul piano $2x - 3y + z - 6 = 0$.

Es. 86. Determinare le proiezioni ortogonali del punto $A(-3, 7, 12)$ sui tre assi coordinati.

Es. 87. Determinare i punti simmetrici del punto $A(3, 2, 4)$ rispetto ai piano coordinati e agli assi coordinati.

Es. 88. Determinare la retta simmetrica di $r : (2t, t, 3t)$ rispetto al piano $\pi : 2x + 3y + z = 0$.

Es. 89. Determinare la proiezione ortogonale della retta $x + y - 3z = x - 2y + z = 0$ sul piano $x - 3y + z = 0$.

Es. 90. Determinare il piano simmetrico del piano $x + z = 1$ rispetto al punto $(1, 0, -2)$.

Es. 91. Dati i punti $A(1, 1, 2)$ e $B(3, 4, 5)$, trovare un'equazione del piano π tale che B sia il simmetrico di A rispetto a π.

Es. 92. Nel fascio di piani individuato dalla retta che passa per i punti $(1,0,-2)$ e $(2,1,-2)$ determinare:

a) i piani tangenti alla sfera $x^2+y^2+z^2+2y-z=3/4$;

b) i piani formanti un angolo di $\pi/3$ col piano xz.

Es. 93. Determinare la circonferenza passante per i punti $0(0,0)$, $A(1,2)$, $B(3,-1)$.

Es. 94. Determinare la circonferenza passante per i punti $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$.

Es. 95. Data una sfera di centro $C(1,2,1)$ e raggio 2, determinare un piano ortogonale alla retta $x-2z=y-z+1=0$ e che interseca la sfera in una circonferenza di raggio 1.

Es. 96. Determinare le coordinate del centro della circonferenza:
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x=8 \\ 2x+y=0 \end{cases}$$

Es. 97. Sia γ la circonferenza di centro $(1,1,0)$ e raggio 2 contenuta nel piano $x-y+z=0$. Determinare una sfera di raggio 5 contenente γ.

Es. 98. Sia S la sfera di centro $(2,3,4)$ e raggio 1. Determinare i piani passanti per l'asse z e tangenti a S.

Es. 99. La curva $(t,1-2t^2,t^2+1)$ è piana? e la curva $(t^3+t,t-2,t^2+1)$?

Es. 100. Trovare una superficie contenente la curva $(t,1-2t^3,t+1)$.

Es. 101. Data la curva $\mathcal{C}:(t^2-1,t,1-t-t^2)$, dire se è piana. Trovare i punti di intersezione col piano $x+2y-z=0$. Determinare una sua rappresentazione cartesiana. Trovare le sue proiezioni ortogonali sui piani coordinati. Trovare la sua simmetrica rispetto all'origine.

Es. 102. Provare che la superficie $\mathcal{S}:(u+v,u^2,uv)$ è rigata. Determinare la superficie $\mathcal{S}'$ simmetrica di $\mathcal{S}$ rispetto al piano $z=0$.

Es. 103. Trovare le proiezioni ortogonali della curva $\mathcal{C}:x^2+y^2-1=x^2+z^2-1=0$ sui piani coordinati e sul piano $y-2z+1=0$.

Es. 104. Data la curva $\mathcal{C}:(0,t,t^2)$, determinare una rappresentazione parametrica e una cartesiana del

a) cilindro che proietta $\mathcal{C}$ parallelamente alla retta $2x=y=-3z$.

b) cono che proietta $\mathcal{C}$ da $V(2,0,-1)$.

Es. 105. Trovare il cilindro che ha come direttrice la curva $\mathcal{C}:x+y+z=x^2+y^2+z^2-x=0$ e generatrici parallele a $r:x=y=z$.

Es. 106. Trovare una rappresentazione cartesiana per la superficie ottenuta ruotando la retta $r:(2t,t+1,t)$ intorno alla retta $s:(2t,-t,t)$.

Es. 107. Trovare una rappresentazione cartesiana per la superficie ottenuta facendo ruotare la retta $x-2z=y-z-1=0$ intorno alla retta $x-2z=y-z+1=0$.

Es. 108. Determinare la superficie ottenuta facendo ruotare la linea $\mathcal{L} : (t^2, 1-t, t^3)$ attorno all'asse y.

Es. 109. Siano $A(-2,0,3)$, $B(1,2,3)$. Determinare i punti della curva $\mathcal{L} : (t^2, t, t^4)$ le cui proiezioni ortogonali sul piano $2x - 3y + 4 = 0$ appartengono alla retta AB.

Es. 110. Determinare due rette distinte contenute nella superficie rigata $(u^2 + uv, u^3 + v, u - 2uv)$.

Es. 111. Provare che la superficie $\mathcal{S} : (u - v^2, uv - 1, 2v - v^2)$ è una rigata e determinare due diverse curve su $\mathcal{F}$ passanti per $P(-1,-1,1)$.

Es. 112. Determinare un cono che contenga tra le sue generatrici i tre assi cartesiani.

Es. 113. Trovare una curva la cui proiezione da $V \equiv (1,0,1)$ sul piano $z = 0$ sia la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$.

Es. 114. Sia $\mathcal{C}$ la curva di equazioni $x - 2y = x - y^3 + z = 0$. Determinare la proiezione ortogonale di $\mathcal{C}$ su $x - y + z = 0$. Trovare i punti di intersezione di $\mathcal{C}$ con la superficie $xy^2 - 2z = 0$.

Es. 115. Sia $\mathcal{C}$ la curva $(2-t, 1+t^2, t^2-2t)$. Stabilire se $\mathcal{C}$ é piana e, in caso affermativo, trovare il piano che la contiene. Determinare una rappresentazione cartesiana della superficie ottenuta facendo ruotare $\mathcal{C}$ attorno all'asse x.

Es. 116. Determinare una curva $\mathcal{C}$ che ha come proiezioni ortogonali sui piani $y = 0$ e $z = 0$ rispettivamente le curve $\mathcal{C}' = (t^2+1, 0, t)$ e $\mathcal{C}'' = (t-1, t^3, 0)$.

Capitolo 5

Spazi Vettoriali

5.1 Definizione di spazio vettoriale

Richiamiamo la definizione di spazio vettoriale già vista nella Sezione 2.2.

Definizione 5.1 Sia K un corpo commutativo. Un gruppo commutativo additivo V si dice *spazio vettoriale su* K, o K-spazio vettoriale, se è data un'applicazione detta "moltiplicazione esterna"

$$K \times V \longrightarrow V \qquad (\lambda, u) \mapsto \lambda u$$

che soddisfa le seguenti condizioni:

1. $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v, \quad \forall \lambda \in K,\ \forall u, v \in V$;

2. $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u, \quad \forall \lambda, \mu \in K,\ \forall u \in V$;

3. $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u), \quad \forall \lambda, \mu \in K,\ \forall u \in V$;

4. $1\, u = u, \quad \forall u \in V$.

Gli elementi del corpo K sono detti *scalari* mentre gli elementi di V sono detti *vettori*.

Prima di esaminare le conseguenze degli assiomi introdotti, vediamo alcuni esempi di spazi vettoriali

Esempio 1 L'esempio più semplice di K-spazio vettoriale è l'insieme K^n con le operazioni definite "componente per componente" (vedi Sezione 1.5.

Esempio 2 Lo spazio $M_{m,n}(K)$ delle matrici di tipo (m,n) ad elementi in un corpo K, dotato delle operazioni di somma e prodotto per uno scalare è, come abbiamo visto nel Capitolo 2, un K-spazio vettoriale.

Esempio 3 L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo a coefficienti in K è un K-spazio vettoriale: ciò segue dal fatto che ogni combinazione lineare di un numero finito di soluzioni del sistema è ancora una soluzione.

Esempio 4 I vettori geometrici (del piano o dello spazio) con le operazioni di somma e prodotto per un numero reale, introdotte nel Capitolo 3, costituiscono un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

Esempio 5 L'anello $K[X]$ dei polinomi in una variabile con coefficienti in un corpo K è uno spazio vettoriale su K rispetto alla moltiplicazione interna in $K[X]$ (K è un sottocorpo di $K[X]$).

Esempio 6 Il gruppo additivo P_n costituito da 0 e dai polinomi di grado $\leq n$ di $K[X]$ è uno spazio vettoriale su K.

Esempio 7 Lo spazio $\mathbb{C}^n$ è, come abbiamo detto, un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale in modo naturale. D'altra parte $\mathbb{C}^n$ può essere considerato come un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, visto che ogni vettore di $\mathbb{C}^n$ può essere moltiplicato per uno scalare reale. La differenza tra il $\mathbb{C}$-spazio $\mathbb{C}^n$ e l'$\mathbb{R}$-spazio $\mathbb{C}^n$ sta nel fatto che nel primo un vettore ha molti più multipli. Per esempio i vettori $(1, i)$ e $(i, -1)$ in $\mathbb{C}^2$ sono multipli se $\mathbb{C}^2$ è considerato come $\mathbb{C}$-spazio, ma non lo sono se $\mathbb{C}^2$ è considerato come $\mathbb{R}$-spazio.

Esempio 8 Sia $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ l'insieme di tutte le funzioni di variabile reale. Se $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, si definisce $f+g$ e λf ponendo:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

In tal modo $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ diviene un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

Molti sottoinsiemi di $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ costituiti da funzioni aventi determinate proprietà sono a loro volta $\mathbb{R}$-spazi vettoriali rispetto alle operazioni suddette. Alcuni esempi notevoli sono:
$\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ (funzioni continue);
$\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ (funzioni dotate di derivata prima continua);
$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ (funzioni dotate di derivate di qualunque ordine).

La proposizione seguente dà alcune semplici proprietà di uno spazio vettoriale che sono immediata conseguenza della struttura di gruppo commutativo e degli assiomi 1-4.

Proposizione 5.2 *Sia V uno spazio vettoriale sul corpo K. Denotiamo con 0_V l'identità del gruppo V. Allora:*

1. *Per ogni $u \in V$ si ha: $0_K \cdot u = 0_V$;*
2. *Per ogni $\lambda \in K$ si ha $\lambda \cdot 0_V = 0_V$;*
3. *Per ogni $u \in V$ si ha: $(-1)u$ è l'opposto di u;*
4. *Se $u \in V$, $\lambda \in K$ e $\lambda \cdot u = 0_V$, allora $\lambda = 0_K$ oppure $u = 0_V$.*

5.2 Sottospazi vettoriali

Definizione 5.3 Sia V uno spazio vettoriale sul corpo K. Un sottoinsieme (non vuoto) W di V si dice *sottospazio vettoriale* di V se W è un K-spazio vettoriale rispetto alle leggi di composizione di V.

Proposizione 5.4 *Sia W un sottoinsieme di un K-spazio vettoriale V. Allora sono equivalenti*

a) W è un sottospazio vettoriale;

b) Per ogni $v_1, v_2 \in W$ si ha $v_1 - v_2 \in W$ e per ogni $\lambda \in K$ e per ogni $v \in W$ si ha $\lambda v \in W$;

c) Per ogni $v_1, v_2 \in W$ e per ogni $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ si ha $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in W$.

Dim. $a) \Rightarrow b)$ ovvio. $b) \iff c)$ facile verifica.

$b) \Rightarrow a)$ se $v_1, v_2 \in W$, si ha $v_1 - v_2 \in W$, quindi W è un sottogruppo di V. Se $\lambda \in K$ e $v \in W$ si ha $\lambda v \in W$, quindi il prodotto di uno scalare per un vettore di W è un vettore di W. Inoltre le condizioni della Definizione 5.1 sono verificate in W perché le stesse sono verificate in V che è uno spazio vettoriale per ipotesi. □

Esempio 1 L'insieme delle matrici diagonali è un sottospazio del K-spazio vettoriale $M_n(K)$, mentre l'insieme delle matrici che hanno determinante nullo non lo è (la somma di due matrici con determinante nullo non ha in generale determinante nullo).

Esempio 2 L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite è un sottospazio di K^n. Mostreremo più avanti che ogni sottospazio di K^n è di questo tipo.

Esempio 3 L'insieme V dei numeri complessi immaginari puri, cioè dei numeri complessi che hanno parte reale nulla, è un sottogruppo additivo di $\mathbb{C}$, ma non è chiuso rispetto alla moltiplicazione per un numero complesso, infatti $i \cdot i = -1 \notin V$. Invece V è chiuso rispetto alla moltiplicazione per un numero reale. Quindi V non è un sottospazio del $\mathbb{C}$-spazio vettoriale $\mathbb{C}$ ma è un sottospazio dell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathbb{C}$.

5.3 Spazio vettoriale quoziente

Se W è un sottospazio del K-spazio vettoriale V, W è un sottogruppo del gruppo abeliano V; si può allora considerare il gruppo (abeliano) quoziente $Z = V/W$.

Si può dotare Z di una struttura naturale di K-spazio vettoriale. Se $v_1, v_2 \in V$ e $v_1 - v_2 \in W$, allora per ogni $\lambda \in K$ si ha anche $\lambda v_1 - \lambda v_2 \in W$ e quindi λv_1 e λv_2 hanno la stessa classe in Z. Quindi per ogni $\lambda \in K$ e per ogni $\overline{v} = v + W \in Z$ si può definire il prodotto $\lambda\,\overline{v}$ ponendo $\lambda\,\overline{v} = \lambda\, v + W$ ovvero $\lambda\,\overline{v} = \overline{\lambda\, v}$ e verificare facilmente la validità degli assiomi di spazio vettoriale.

Il gruppo Z con questa struttura di K-spazio vettoriale si dice *spazio quoziente di V rispetto al sottospazio W*.

5.4 Generatori

Definizione 5.5 Siano K un corpo, V uno spazio vettoriale su K, $v_1, \ldots, v_r \in V$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$. Allora chiamiamo *combinazione lineare* di $v_1, \ldots, v_r$ con coefficienti $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ il vettore

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r \quad .$$

Proposizione 5.6 *Siano K un corpo, V uno spazio vettoriale su K e S un sottoinsieme finito di V; se indichiamo con $\mathcal{L}(S)$ l'insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori in S, allora $\mathcal{L}(S)$ è un sottospazio vettoriale di V.*

Dim. E' una facile conseguenza della Proposizione 5.4. □

Definizione 5.7 Con le notazioni precedenti, $\mathcal{L}(S)$ si dice *sottospazio vettoriale generato da S* e che S è un *sistema di generatori* di $\mathcal{L}(S)$.

Esempio 1 Il vettore $(1, -1, 0)$ di $\mathbb{R}^3$ è combinazione lineare dei due vettori $(1, 1, 0)$, $(1, 2, 0)$, infatti $(1, -1, 0) = 3(1, 1, 0) - 2(1, 2, 0)$, mentre è evidente che $(0, 0, 1)$ non può essere una loro combinazione lineare.

Esempio 2 In $\mathbb{R}^2$ consideriamo $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$; allora si ha $\mathbb{R}^2 = \mathcal{L}(e_1, e_2)$. Infatti ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ è del tipo (a, b) con $a, b \in \mathbb{R}$ e quindi la conclusione segue dal fatto che $(a, b) = a(1, 0) + (b(0, 1)$.

Analogamente in $\mathbb{R}^n$ consideriamo
$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, \dots, 0, 1)$;
allora si ha $\mathbb{R}^n = \mathcal{L}(\{e_1, e_2, \dots, e_n\})$.

Esempio 3 Fissato nello spazio un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, dati tre numeri reali l_1, l_2, l_3 non tutti nulli, e posto $u = (l_1, l_2, l_3)$, il sottospazio $\mathcal{L}(\{u\})$ di $\mathbb{R}^3$ rappresenta la retta passante per l'origine e avente u come vettore direzionale. Infatti tutti e soli i vettori di $\mathcal{L}(\{u\})$ sono del tipo (tl_1, tl_2, tl_3) con $t \in \mathbb{R}$ e allora per concludere basta ricordare la rappresentazione parametrica di una retta nello spazio.

Esempio 4 Con le stesse ipotesi di prima, posto $u = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $v = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ e supposto $u \times v \neq 0$, allora $\mathcal{L}(u, v)$ rappresenta un piano passante per l'origine delle coordinate.

Esempio 5 Lo spazio vettoriale $K[X]$ non ha un insieme finito di generatori. Infatti supponiamo che $K[X] = \mathcal{L}(\{F_1, \dots, F_n\})$ e sia d il massimo tra i gradi dei polinomi $F_1, \dots, F_n$; allora è chiaro che $\mathcal{L}(\{F_1, \dots, F_n\})$ può contenere solo polinomi di grado non superiore a d, mentre $K[X]$ contiene polinomi di grado qualunque.

Definizione 5.8 Uno spazio vettoriale che ha un insieme finito di generatori si dice *di tipo finito*.

La nozione di sistema di generatori si estende a insiemi infiniti di vettori nel modo seguente:

Definizione 5.9 Si dice che un insieme di vettori $A = \{v_i\}_{i \in I}$ di un K-spazio vettoriale V è un *sistema di generatori* per V se ogni elemento di V si può scrivere come combinazione lineare di un numero finito di vettori di A.

Esempio L'insieme dei monomi $\{X^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un sistema di generatori di $K[X]$.

5.5 Indipendenza lineare

Insiemi diversi di vettori possono generare lo stesso sottospazio. Ad esempio se $u = (1, 1)$, $v = (2, 2)$, si vede subito che $\mathcal{L}(\{u\}) = \mathcal{L}(\{u, v\})$.

Per caratterizzare i sistemi minimali di generatori introdurremo in questa e nelle prossime sezioni, i concetti di dipendenza lineare, basi e dimensione.

Definizione 5.10 Siano K un corpo, V un K-spazio vettoriale, $S = \{v_1, \dots, v_s\}$ un sottoinsieme finito di V. Si dice che S è un sistema di vettori *linearmente indipendenti*, oppure che $v_1, \dots, v_s$ sono *linearmente indipendenti*, se non esiste nessun sottoinsieme proprio T di S tale che $\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(S)$. In caso contrario si dice che i vettori di S sono linearmente dipendenti.

Esempio Il vettore $u = (1, 1)$ è evidentemente linearmente indipendente, mentre i vettori $(1, 1), (2, 2)$ sono linearmente dipendenti.

La proposizione seguente fornisce un criterio per la dipendenza lineare e prova che la definizione precedente è equivalente alla definizione 2.7.

Proposizione 5.11 *Sia V un K-spazio vettoriale e sia $S = \{v_1, \dots, v_s\}$ un sottoinsieme finito di V. Allora S è un sistema di vettori linearmente indipendenti se e solo se l'equazione*

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_s v_s = 0_V$$

ha solo la soluzione $\lambda_1 = \ldots = \lambda_s = 0$.

Dim. Supponiamo per assurdo che esistano $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ non tutti nulli tali che $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_s v_s = 0_V$. Allora esiste $i \in \{1, \dots, s\}$ tale che $\lambda_i \neq 0$; supponiamo sia $\lambda_1 \neq 0$; poniamo allora $T = \{v_2, \dots, v_s\}$ e proviamo che $\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(S)$. Ovviamente $\mathcal{L}(T) \subset \mathcal{L}(S)$. Per l'inclusione opposta basta provare che $v_1 \in \mathcal{L}(T)$. Ma $v_1 = -\lambda_2/\lambda_1 v_2 - \dots - \lambda_s/\lambda_1 v_s$ e ciò conclude la prova.

Viceversa sia $T \subset S$ un sottoinsieme proprio tale che $\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(S)$; senza perdere in generalità possiamo supporre $T = \{v_2, \dots, v_s\}$. Poiché $S \subset \mathcal{L}(T)$, si ha $v_1 = \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_s v_s$ per opportuni valori $\lambda_2, \dots, \lambda_s \in K$, da cui si ottiene $1\, v_1 - \lambda_2 v_2 - \dots - \lambda_s v_s = 0$ e $(1, -\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ è una s-upla non nulla. □

Dalla definizione di dipendenza lineare segue subito che un singolo vettore in un K-spazio vettoriale V è linearmente indipendente se e solo se è non nullo. Due vettori non nulli di V sono linearmente dipendenti se e solo se uno di essi è multiplo dell'altro, cioè esiste $c \in K$ tale che $v_1 = c \cdot v_2$.

Si osservi inoltre che se S è un sistema di vettori linearmente indipendenti, allora ogni sottoinsieme di S lo è.

Esempio In $\mathbb{R}^3$ i vettori $(1, 2, 1)$, $(2,3,0)$, $(0, 1, -1)$ sono linearmente indipendenti, infatti da

$$\lambda_1(1, 2, 1) + \lambda_2(2, 3, 0) + \lambda_3(0, 1, -1) = (0, 0, 0)$$

si ottiene

$$(\lambda_1 + 2\lambda_2, 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_3) = (0, 0, 0)$$

e uguagliando le corrispondenti componenti si ha un sistema lineare in $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ che ha solo la soluzione nulla.

La nozione di indipendenza lineare può essere estesa a una successione anche infinita di vettori nel modo seguente:

Definizione 5.12 Un insieme di vettori $A = \{v_i\}_{i \in I}$ di un K-spazio vettoriale V, indiciati su un insieme I, si dice *libero* se ogni sottoinsieme *finito* di A è costituito da vettori linearmente indipendenti.

Nel seguito considereremo essenzialmente spazi vettoriali di tipo finito i quali, ovviamente, non possono avere insiemi liberi infiniti.

5.6 Basi e dimensione

Definizione 5.13 Sia V un K-spazio vettoriale (di tipo finito), $S = \{v_1, \dots, v_s\}$ un sottoinsieme finito di V. Si dice che S è una *base* di V, se sono verificate le due condizioni seguenti

1. $V = \mathcal{L}(S)$ cioè S è un sistema di generatori di V.

2. S è un sistema di vettori linearmente indipendenti.

Tenuto conto della Definizione 5.10 possiamo dire che S *è una base se e solo se è un sistema minimale di generatori di* V.

Corollario 5.14 *Se S è un sistema di vettori linearmente indipendenti, allora S è una base di $\mathcal{L}(S)$.*

Proposizione 5.15 *Sia V un K-spazio vettoriale, $S = \{v_1, \dots, v_s\}$ un sottoinsieme finito di V. Allora sono equivalenti:*

1. *S è una base di V.*

2. *Ogni vettore di V si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori di S.*

3. *S è un sistema massimale di vettori linearmente indipendenti (ovvero S non è contenuto propriamente in nessun sistema di vettori linearmente indipendenti di V).*

Dim. 1) $\Rightarrow$ 2) Se, per assurdo, esiste $v \in V$ tale che $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_s v_s = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_s v_s$ con $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \neq (\mu_1, \ldots, \mu_s)$, allora $(\lambda_1 - \mu_1)v_1 + \ldots + (\lambda_s - \mu_s)v_s = 0_V$ con almeno uno degli scalari $\lambda_i - \mu_i$ diverso da zero. Ciò è assurdo perché $v_1, \ldots, v_s$ sono linearmente indipendenti.

2) $\Rightarrow$ 3) L'insieme S è un sistema di vettori linearmente indipendenti perché 0_V si esprime in un unico modo come combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_s$. Consideriamo ora l'insieme $T = \{v_1, \ldots, v_s, v\}$ con $v \neq v_i$ per ogni i; allora $S \subset T$ e, per ipotesi, $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_s v_s$ per opportuni $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$. Quindi $1\, v - \lambda_1 v_1 - \ldots - \lambda_s v_s = 0_V$. da cui si ha che $v_1, \ldots, v_s, v$ sono linearmente dipendenti.

3) $\Rightarrow$ 1) Per assurdo supponiamo che S non sia un sistema di generatori, cioè che esista $v \in V - \mathcal{L}(S)$ e sia $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_s v_s + \lambda v = 0_V$. Si deduce che $\lambda = 0$ perché altrimenti si avrebbe $v = -\lambda_1/\lambda v_1 - \ldots - \lambda_s/\lambda v_s$ e quindi si deduce che $\lambda_1 = \ldots = \lambda_s = 0$ perché $v_1, \ldots, v_s$ sono linearmente indipendenti. $\square$

Teorema 5.16 *Due basi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi.*

Dim. Siano F e G due basi di uno spazio vettoriale V formate rispettivamente da n ed m vettori. Poiché F è un insieme di generatori di V e gli elementi di G sono linearmente indipendenti, dal lemma di Steinitz (2.8) si deduce che $n \geq m$. Ma essendo inoltre G è un insieme di generatori di V e gli elementi di F linearmente indipendenti, si ha anche la disuguaglianza opposta $n \leq m$, e quindi la tesi. $\square$

Definizione 5.17 Si chiama *dimensione* di uno spazio vettoriale V, e si indica con $\dim(V)$, il numero di vettori che costituiscono una qualunque base di V.

Oss. Per convenzione si pone $\dim\{0_{K^n}\} = 0$ e la cosa è comunque giustificata dal fatto che nello spazio nullo non c'è nessun vettore linearmente indipendente secondo la condizione (2) della Proposizione 5.11.

Esempio 1. E' immediato verificare che

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad e_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

è una base di K^n. Tale base è detta *base canonica* di K^n. Ne segue che

$$\dim(K^n) = n$$

Esempio 2. Sia V il K-spazio vettoriale $M_{m,n}(K)$ delle matrici $m \times n$ ad elementi in K. Per ogni $r \in \{1, \ldots, m\}$ e per ogni $s \in \{1, \ldots, n\}$ sia $E_{r,s} \in V$ la matrice che ha 1 al posto (r, s) e 0 altrove. Allora le $m\, n$ matrici $E_{r,s}$ formano una base di V, quindi

$$\dim(M_{m,n}(K)) = m\, n$$

Esempio 3. Sia $n \geq 0$ e sia P_n il K-spazio vettoriale costituito da 0 e da tutti i polinomi in $K[X]$ che hanno grado minore o uguale ad n. Allora $\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ è una base di P_n, quindi

$$\dim(P_n) = n + 1$$

5.7 Vettori e matrici associate

Sia $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ una base del K-spazio vettoriale V e sia $v \in V$; allora, per la Proposizione 5.15 (2), esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ univocamente determinati tali che

$$v = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n \quad .$$

Definizione 5.18 Si chiamano *coordinate di v rispetto alla base F* gli n scalari (univocamente determinati da v) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tali che $v = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n$.

Oss. Per un vettore v di K^n le componenti di v coincidono con le coordinate di v rispetto alla base canonica E_n.

Esempio Sia $F = \{(1,1),(2,-1)\}$. Si vede subito che F è una base di $\mathbb{R}^2$. Sia $u = (3,6)$. Allora le componenti di u, e quindi le coordinate di u rispetto alla base canonica, sono 3, 6, mentre le coordinate di u rispetto alla base F sono 5, -1 infatti $u = 5(1,1) - (2,-1)$.

Definizione 5.19 Sia V uno spazio vettoriale sul corpo K e sia $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ una sua base. Sia $S = (v_1, \ldots, v_s)$ una s-upla di vettori di V. Si chiama *matrice associata a* S *rispetto alla base* F, e si denota con M_S^F, la matrice di tipo (n,s) la cui i-esima colonna è costituita dalle coordinate del vettore v_i rispetto alla base F.

D'ora in poi, data una s-upla di vettori $S = (v_1, \ldots, v_s)$, conveniamo di pensare S come una matrice simbolica a una riga e s colonne.

Corollario 5.20 *Con le notazioni precedenti, se* $v \in V$ *si ha*

$$v = F \cdot M_v^F$$

dove $\cdot$ *indica il prodotto righe per colonne di matrici.*

Se $S = (v_1, \ldots, v_s)$ *si ha*

$$S = F \cdot M_S^F$$

con M_S^F *matrice di tipo* (n,s).

Dim. Sia $v = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n$, allora: $\quad v = (f_1, \ldots, f_n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

Sia $v_i = \lambda_{1i} f_1 + \ldots + \lambda_{ni} f_n$, allora:

$$S = (v_1, \ldots, v_s) = (f_1, \ldots, f_n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \ldots & \lambda_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \ldots & \lambda_{ns} \end{pmatrix}$$

□

Esempio 1. Sia $F = \{f_1, f_2\}$ con $f_1 = (1,1)$, $f_2 = (0,2)$ e sia $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ con $v_1 = (0,0)$, $v_2 = (1,3)$, $v_3 = (1,-1)$, $v_4 = (2,4)$. Mostriamo che F è una base di $\mathbb{R}^2$ e calcoliamo M_S^F.

F è una base di $\mathbb{R}^2$ perché f_1, f_2 non sono allineati o equivalentemente perché $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Inoltre, essendo $v_1 = 0\, f_1 + 0\, f_2$, $v_2 = 1\, f_1 + 1\, f_2$, $v_3 = 1\, f_1 - 1\, f_2$, $v_4 = 2\, f_1 + 1\, f_2$, si ha

$$M_S^F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio 2 Siano $v_1 = (a_{11}, \ldots, a_{n1})$, $\ldots$, $v_s = (a_{1s}, \ldots, a_{ns})$ s vettori in $\mathbb{R}^n$ e sia $S = \{v_1, \ldots, v_s\}$. Allora

$$M_S^{E_n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{ns} \end{pmatrix} .$$

Esempio 3 Sia V lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche reali di ordine 2. Siano

$$F = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\} \qquad S = \{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\}$$

Allora

$$M_S^F = \{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \}$$

Possiamo ora dimostrare il seguente fondamentale teorema che caratterizza le basi di K^n.

Teorema 5.21 *Sia $S = \{v_1, \ldots, v_s\} \subset K^n$ dove $v_i = (a_{1i}, \ldots, a_{ni})$ e sia E la base canonica di K^n. Allora si ha:*

1. *S è un sistema di generatori di K^n se e solo se $\varrho(M_S^E) = n$.*
2. *S è un sistema di vettori linearmente indipendenti se e solo se $\varrho(M_S^E) = s$.*
3. *S è una base di K^n se e solo se $s = n$ e $\det(M_S^E) \neq 0$.*

Dim. 1) Si ha che

$$M_S^E = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{ns} \end{pmatrix} .$$

Se $v = (b_1, \ldots, b_n) \in K^n$, dire che $v \in \mathcal{L}(S)$ equivale a dire che esistono s elementi $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ tali che $v = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_s f_s$, ossia esiste almeno una soluzione del sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1s}x_s & = & b_1 \\ & \ldots & \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{ns}x_s & = & b_s \end{cases} \tag{5.1}$$

La teoria dei sistemi lineari assicura che ciò avviene se e solo se le caratteristiche delle matrici incompleta e completa coincidono; ma dire che S è un sistema di generatori per K^n equivale a dire che il sistema (5.1) ha soluzioni qualunque siano $b_1, \ldots, b_s$ e ciò è possibile se e solo se la caratteristica della matrice dei coefficienti è uguale al numero delle equazioni.

2) Dire che $v_1, \ldots, v_s$ sono linearmente indipendenti equivale a dire che l'unica soluzione di $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_s v_s = 0_{K^n}$ è $(0, \ldots, 0)$ ovvero che l'unica soluzione del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1s}x_s & = & 0 \\ & \ldots & \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{ns}x_s & = & 0 \end{cases}$$

è $(0, \ldots, 0)$, il che avviene se e solo se $\varrho(M_S^E) = s$.

3) E' immediata conseguenza di (1) e (2). □

Corollario 5.22 *Sia $S = \{v_1, \ldots, v_s\} \subset K^n$ dove $v_i = (a_{1i}, \ldots, a_{ni})$. Allora si ha:*

1. *Il massimo numero di vettori linearmente indipendenti in S è $\varrho = \varrho(M_S^E)$.*
2. *Scelti in S ϱ vettori $v_{i_1}, \ldots, v_{i_\varrho}$ tali che, detto $S' = (v_{i_1}, \ldots, v_{i_\varrho})$, si abbia $\varrho(M_{S'}^E) = \varrho$, allora S' è base di $\mathcal{L}(S)$.*

Dim. 1) E' un'immediata conseguenza del Teorema 5.21 (2).

2) Basta provare che S' è un sistema di generatori di $\mathcal{L}(S)$ e quindi basta provare che per ogni $v \in S - S'$ si ha $v \in \mathcal{L}(S')$. Posto $v = (a_1, \ldots, a_n)$ basta provare che esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_\varrho$ tali che $v = \lambda_1 v_{i_1} + \ldots + \lambda_\varrho v_{i_\varrho}$, ovvero basta provare che il sistema lineare

$$\begin{cases} a_{1i_1}\lambda_1 + \ldots + a_{1i_\varrho}\lambda_\varrho & = & a_1 \\ & \ldots & \\ a_{ni_1}\lambda_1 + \ldots + a_{ni_\varrho}\lambda_\varrho & = & a_n \end{cases}$$

ha soluzione; ma ciò segue dal fatto che, per le ipotesi fatte, la caratteristica delle matrici incompleta e completa è ϱ. □

Corollario 5.23 *Sia W un sottospazio di K^n e sia $S = \{v_1, \dots, v_s\}$ una sua base. Allora in K^n esistono $n-s$ vettori $v_{s+1}, \dots, v_n$ tali che $\{v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n\}$ è una base di K^n. In particolare i vettori $v_{s+1}, \dots, v_n$ si possono scegliere tra i vettori della base canonica di E.* Si dice che $\{v_{s+1}, \dots, v_n\}$ completano S ad una base di K^n.

Dim. Siano $v_1 = (a_{11}, \dots, a_{n1}), \dots, v_s = (a_{1s}, \dots, a_{ns})$. Allora $v_1, \dots, v_s$ sono linearmente indipendenti, quindi per il Teorema 5.21 (2) si ha $\varrho(M_S^E) = s$. Supponiamo per semplicità che un minore di ordine s non nullo sia quello individuato dalle prime s righe. Allora la matrice quadrata

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & & \dots & \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{ns} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante diverso da 0. Si conclude quindi per il Teorema 5.21 (3). □

Esempio *Siano $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (2,1,0)$, $v_3 = (1,-1,-1)$ e sia $S = \{v_1, v_2, v_3\}$.*

a) Stabilire se S è un sistema di vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^3$.

b) Stabilire se S è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$.

c) Determinare una base di $\mathcal{L}(S)$ e dire cosa rappresenta $\mathcal{L}(S)$ nello spazio.

d) Completare la base di $\mathcal{L}(S)$ trovata in (c) ad una base di $\mathbb{R}^3$.

Si ha:

$$M_S^E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \varrho(M_S^E) = 2$$

quindi, per il Teorema 5.21, S non è un sistema di vettori linearmente indipendenti, e S non genera $\mathbb{R}^3$.

Un minore di ordine 2 non nullo è ad esempio quello formato dalle prime due righe e dalle prime due colonne. Quindi per il Corollario 5.22 si ha $\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(v_1, v_2)$ e $\{v_1, v_2\}$ è base di $\mathcal{L}(S)$.

A titolo di verifica vediamo che ogni vettore di $\mathcal{L}(S)$ si scrive in modo unico come combinazione lineare di v_1, v_2; incominciamo a vedere che esistono λ_1, λ_2 tali che $v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ ossia tali che

$$(1,-1,-1) = \lambda_1(1,2,1) + \lambda_2(2,1,0) \ .$$

Si deve risolvere

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 &= 1 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 &= -1 \\ \lambda_1 &= -1 \end{cases}$$

Si ottiene $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ cioè $v_3 = -v_1 + v_2$.

Il generico vettore di $\mathcal{L}(S)$ è $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$ e quindi è

$$\alpha v_1 + \beta v_2 - \gamma v_1 + \gamma v_2 = (\alpha - \gamma)v_1 + (\beta + \gamma)v_2 \ .$$

Quindi abbiamo verificato che $\{v_1, v_2\}$ genera $\mathcal{L}(S)$. Poiché v_1, v_2 non sono paralleli, essi sono linearmente indipendenti.

Geometricamente $\mathcal{L}(S)$ è il piano rappresentato parametricamente da

$$\begin{cases} x &= s + 2t \\ y &= 2s + t \\ z &= s \end{cases}$$

Infine per completare $\{v_1, v_2\}$ ad una base di $\mathbb{R}^3$ basta osservare che

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

quindi $\{v_1, v_2, e_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$. si osservi che anche $\{v_1, v_2, e_1\}$, $\{v_1, v_2, e_2\}$ sono basi di $\mathbb{R}^3$.

Concludiamo questo numero trattando il problema del cambio di base. Siano $F = \{f_1, \ldots, f_r\}$ e $G = \{g_1, \ldots, g_r\}$ due basi di uno spazio vettoriale V e sia $S = (v_1, \ldots, v_s)$ una s-upla di vettori di V. Allora as S restano associate due matrici M_S^F e M_S^G. La proposizione seguente esplicita il legame che intercorre tra queste due matrici, in particolare mostra come cambiano le coordinate di un vettore quando si cambia la base dello spazio vettoriale.

Proposizione 5.24 *Con le notazioni precedenti si ha:*

1. $M_S^G = M_F^G \cdot M_S^F$;
2. $M_G^F = (M_F^G)^{-1}$.
3. $\varrho(M_S^F) = \varrho(M_S^G)$.

Dim. 1) Dal Corollario 5.20 si ha:

$$S = G \cdot M_S^G \quad \text{e} \quad S = F \cdot M_S^F$$

Inoltre, sempre per il Corollario 5.20, $F = G \cdot M_F^G$, e quindi $S = G \cdot M_F^G \cdot M_S^F$.

Dall'uguaglianza $G \cdot M_S^G = G \cdot M_F^G \cdot M_S^F$, essendo F' una base, si deduce la tesi usando la Proposizione 5.15 (2).

2) Segue dalla formula provata in (1), ponendo $S = G$ e tenendo conto che M_G^G è la matrice identità di ordine r.

3) Segue dal fatto che la caratteristica di una matrice non cambia se essa viene moltiplicata per una matrice invertibile (Prop. 2.25). □

Corollario 5.25 *Nel Teorema 5.21 e nel Corollario 5.22 si può sostituire la base canonica E con una qualunque base di K^n.*

Corollario 5.26 *Se $S = (v_1, \ldots, v_s)$ è una s-upla di vettori di K^n, si ha*

$$\dim(\mathcal{L}(S)) = \varrho(M_S^E) \ .$$

Dim. Segue dal Corollario 5.22. □

Esempio. *Sia $E = \{e_1, e_2\}$, $F = \{f_1, f_2\}$ con $f_1 = (2, 1)$, $f_2 = (4, 3/2)$ e sia $S = \{u_1, u_2\}$ con $u_1 = (3, 3/2)$, $u_2 = (4, 2)$.*
a) Determinare M_S^E.
b) Provare che F è una base di $\mathbb{R}^2$ e determinare M_S^F.
c) Determinare la dimensione e una base di $\mathcal{L}(S)$.

a) Si ha $M_S^E = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3/2 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Poiché $M_F^E = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix}$ e $\varrho(M_F^E) = 2$, F è una base di $\mathbb{R}^2$.

Ponendo $u_1 = \lambda f_1 + \mu f_2$, ossia $(3, 3/2) = \lambda(2, 1) + \mu(4, 3/2)$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 2\lambda + 4\mu & = & 3 \\ \lambda + 3/2\mu & = & 3/2 \end{cases}$$

la cui soluzione è $\lambda = 3/2$ e $\mu = 0$.

Analogamente ponendo $u_2 = \lambda f_1 + \mu f_2$, si ottiene $\lambda = 2$ e $\mu = 0$. Quindi

$$M_F^E = \begin{pmatrix} 3/2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Un modo alternativo e più diretto di procedere è il seguente: poiché

$M_S^F = M_E^F \cdot M_S^E = (M_F^E)^{-1} \cdot M_S^E$

e si ha

$(M_F^E)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3/2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

risulta

$(M_F^E)^{-1} \cdot M_S^E = \begin{pmatrix} -3/2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3/2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

c) Essendo $\varrho(M_S^E) = \varrho(M_S^F) = 1$, si ha $\dim(\mathcal{L}(S)) = 1$ e una base di $\mathcal{L}(S)$ è ad esempio costituita dal vettore u_1. Osserviamo infatti che u_1, u_2 sono allineati e quindi $\mathcal{L}(S)$ rappresenta una retta nel piano.

5.8 Applicazioni lineari

In tutto questo numero denoteremo con V e V' due spazi vettoriali sullo stesso corpo K.

Definizione 5.27 Un'applicazione $\phi : V \to V'$ si dice *applicazione lineare* o *omomorfismo di spazi vettoriali* se per ogni $u, v \in V$ e per ogni $\lambda \in K$ si ha:

1. $\phi(u + v) = \phi(u) + \phi(v)$;

2. $\phi(\lambda v) = \lambda\phi(u)$.

Un'applicazione lineare $\phi : V \longrightarrow V'$ è quindi in particolare un omomorfismo di gruppi additivi, per cui $\phi(0_V) = 0_{V'}$.

Proposizione 5.28 *Un'applicazione $\phi : V \to V'$ è lineare se e solo se per ogni $u, v \in V$ e per ogni $\lambda, \mu \in K$ si ha: $\phi(\lambda u + \mu v) = \lambda\phi(u) + \mu\phi(v)$.*

Dim. E' una facile verifica. □

Vediamo alcuni esempi.

Esempio 1. L'applicazione che manda ogni vettore di V nel vettore nullo di V' è un omomorfismo di spazi vettoriali detto *omomorfismo nullo*.

Esempio 2. Se V è uno spazio vettoriale, l'applicazione $\phi : V \to V$ data da $\phi(v) = v$, per ogni $v \in V$ è un omomorfismo bigettivo di spazi vettoriali.

Esempio 3. Sia $\mathcal{C}^{(0)}$ lo spazio vettoriale reale delle funzioni reali $f(x)$ continue sull'intervallo $[a, b]$. L'applicazione $\phi : \mathcal{C}^{(0)} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$$

è un omomorfismo di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali.

Esempio 4. Sia dato il piano $\pi : (s - t, s, s + 2t)$. La rappresentazione parametrica scritta si può considerare come una funzione ϕ da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$ che associa ad una coppia (s, t) di numeri reali il punto di π di coordinate $(s-t, s, s+2t)$. Se consideriamo $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ come spazi vettoriali reali non c'è difficoltà a verificare che ϕ è un omomorfismo. Infatti

$\phi(\lambda(s_1, t_1) + \mu(s_2, t_2) = \phi((\lambda s_1 + \mu s_2, \lambda t_1 + \mu t_2)) = (\lambda s_1 + \mu s_2 - (\lambda t_1 + \mu t_2), \lambda s_1 + \mu s_2, \lambda s_1 + \mu s_2 + 2(\lambda t_1 + \mu t_2))$

e

$\lambda\phi((s_1, t_1)) + \mu\phi((s_2, t_2)) = \lambda(s_1 - t_1, s_1, s_1 + 2t_1) + \mu(s_2 - t_2, s_2, s_2 + 2t_2) = (\lambda s_1 - \lambda t_1 + \mu s_2 - \mu t_2, \lambda s_1 + \mu s_2, \lambda s_1 + 2\lambda t_1 + \mu s_2 + 2\mu t_2)$

e la conclusione è immediata.

Esempio 5. Sia dato il piano $\pi : (s, 1, t)$. Anche questa rappresentazione si può interpretare come funzione ϕ da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$ che associa ad una coppia (s, t) di numeri reali il punto di π di coordinate $(s, 1, t)$. Al contrario dell'esempio precedente, questa funzione non è un omomorfismo di spazi vettoriali, infatti se $u = (1, 1)$, si ha $\phi(2u) = \phi(2, 2) = (2, 1, 2)$ e $2\phi(u) = 2(1, 1, 1) = (2, 2, 2)$ quindi $\phi(2u) \neq 2\phi(u)$.

Esempio 6. Dato un piano dotato di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali orientato positivamente, consideriamo la funzione del piano in sé che associa ad ogni punto il suo simmetrico rispetto alla retta $x - y = 0$. Identificando il piano con $\mathbb{R}^2$, questa funzione si può descrivere algebricamente così

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x, y) \mapsto (y, x)$$

Utilizzando la descrizione algebrica o quella geometrica si verifica facilmente che ϕ è un omomorfismo di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali.

Esempio 7. Con le convenzioni dell'esempio precedente, consideriamo la funzione del piano in sé che associa ad ogni punto la sua proiezione ortogonale sulla retta $x - y = 0$. Algebricamente questa funzione si può descrivere così :

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x, y) \mapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$$

Anche in questo caso non c'è difficoltà a verificare che ϕ è un omomorfismo di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali.

Esempio 8. Fissato un angolo θ, consideriamo la funzione ϕ del piano in sé che associa ad ogni vettore v applicato nell'origine il vettore che si ottiene ruotando v di un angolo θ. E' chiaro che se v è un vettore e $\lambda \in \mathbb{R}$, ruotare v di un angolo θ e poi moltiplicare il vettore ottenuto per λ porta allo stesso risultato che moltiplicare v per λ e ruotare il vettore ottenuto di un angolo θ. Quindi $\phi(\lambda v) = \lambda\phi(v)$.

Inoltre, se v_1, v_2 sono vettori, altrettanto semplici considerazioni geometriche consentono di dire che $\phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2)$; pertanto ϕ è un omomorfismo.

Vediamo allora come il sapere che ϕ è un omomorfismo ci aiuta ad esplicitare la descrizione algebrica. Non è difficile calcolare $\phi(1, 0)$ e $\phi(0, 1)$ e si ha

$$\phi(1, 0) = (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$\phi(0, 1) = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

Poiché $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$ e ϕ è un omomorfismo, si ha

$$\phi(x, y) = \phi(x(1, 0) + y(0, 1)) = x(\cos\theta, \sin\theta) + y(-\sin\theta, \cos\theta)$$

Si ha quindi

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x, y) \mapsto (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) \ .$$

Esempio 9. L'applicazione $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che associa ad ogni vettore il suo versore non è un omomorfismo, infatti $\phi(1, 0) = (1, 0)$, $\phi(0, 1) = (0, 1)$, $\phi(1, 0) + \phi(0, 1) = (1, 1)$ ma $\phi((1, 0) + (0, 1)) = \phi(1, 1) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

Esempio 10. Consideriamo $\mathbb{C}$ come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Allora il coniugio $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$ è un omomorfismo. la stessa applicazione non è lineare se consideriamo $\mathbb{C}$ come $\mathbb{C}$-spazio vettoriale. Infatti, ad esempio, $\sigma(1) = 1$, ma $\sigma(i) = -i$, per cui $i\,\sigma(1) \neq \sigma(i\,1)$

Definizione 5.29 Siano V e V' due K-spazi vettoriali. Poniamo

$$\mathrm{Hom}_K(V, V') = \{\phi : V \longrightarrow V' \ / \ \phi \text{è un'applicazione lineare}\}$$

Se $\phi, \phi_1, \phi_2 \in \mathrm{Hom}_K(V, V')$ e se $\lambda \in K$, definiamo $\phi_1 + \phi_2$ e $\lambda\,\phi$ ponendo:

$$(\phi_1 + \phi_2)(v) = \phi_1(v) + \phi_2(v) \qquad (\lambda\,\phi)(v) = \lambda\,\phi(v)$$

Si verifica facilmente che con queste due operazioni $\mathrm{Hom}_K(V, V')$ è un K-spazio vettoriale.

5.9 Omomorfismi e matrici associate

D'ora in poi quando diremo spazio vettoriale intenderemo sempre un sottospazio vettoriale di K^n, in particolare K^n stesso.

Teorema 5.30 *Siano V e V' due spazi vettoriali sul corpo K di dimensione rispettivamente d e d'. Indichiamo con $(V')^d$ l'insieme delle d-uple di vettori di V'. Allora una base $F = \{f_1, \ldots, f_d\}$ di V induce una corrispondenza biunivoca tra $\mathrm{Hom}\,(V, V')$ e $(V')^d$.*

Dim. Definiamo un'applicazione

$$T : \mathrm{Hom}\,(V, V') \longrightarrow (V')^d$$

in questo modo: se $\phi \in \mathrm{Hom}\,(V, V')$, poniamo

$$T(\phi) = (\phi(f_1), \ldots, \phi(f_d))$$

Proviamo che T è bigettiva. L'iniettività segue dal fatto che un omomorfismo è determinato quando si conoscono i trasformati dei vettori di una base. Infatti se assumiamo che $T(\phi) = T(\psi)$, si ha: $\phi(f_1) = \psi(f_1), \ldots, \phi(f_d) = \psi(f_d)$. Se $v \in V$, allora $v = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_d f_d$ e quindi
$\phi(v) = \lambda_1\phi(f_1) + \ldots + \lambda_d\phi(f_d) = \lambda_1\psi(f_1) + \ldots + \lambda_d\psi(f_d) = \psi(v)$.
Quindi se $T(\phi) = T(\psi)$ allora $\phi = \psi$.

La surgettività segue dal fatto che la scelta dei vettori di V' da definire come i trasformati dei vettori di una base è libera. Infatti sia $(v'_1 \ldots, v'_d) \in (V')^d$ e poniamo $\phi(f_1) = v'_1, \ldots, \phi(f_d) = v'_d$. Se $v \in V$, allora $v = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_d f_d$ con $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ univocamente determinati e quindi, se vogliamo che ϕ sia un omomorfismo si deve avere $\phi(v) = \lambda_1 v'_1 + \ldots + \lambda_d v'_d$. D'altra parte, così definito, si vede facilmente che ϕ è un omomorfismo. $\square$

Il corollario seguente fornisce una descrizione completa degli omomorfismi di K^n in K^m in termini delle componenti dei vettori.

Corollario 5.31 *Sia $\phi : K^n \longrightarrow K^m$ un'applicazione data da*

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_m)$$

Allora ϕ è un omomorfismo se e solo se le y_i sono funzioni lineari omogenee delle x_i.

Dim. Sia $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonica di K^n e sia $\phi(e_i) = (a_{1i}, \ldots, a_{mi})$. Allora, utilizzando il teorema precedente, si ha che ϕ è un omomorfismo se e solo se $\phi(x_1, \ldots, x_n) = x_1\phi(e_1) + \ldots + x_n\phi(e_n) = (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n)$. $\square$

Se $\phi : V \longrightarrow V'$ è un omomorfismo di spazi vettoriali e $S = (v_1, \ldots, v_s)$ una s-upla di vettori di V, indichiamo con $\phi(S)$ la s-upla di vettori $(\phi(v_1), \ldots, \phi(v_s))$ di V'.

Corollario 5.32 *Siano V e V' due spazi vettoriali sul corpo K di dimensione rispettivamente d e d'. Siano $F = \{f_1, \ldots, f_d\}$ una base di V e $G = \{g_1, \ldots, g_{d'}\}$ una base di V'. Allora esiste una corrispondenza biunivoca tra $\mathrm{Hom}\,(V, V')$ e $M_{d',d}(K)$.*

Dim. Per il Teorema 5.30 la base F induce una corrispondenza biunivoca tra $\mathrm{Hom}\,(V, V')$ e $(V')^d$ così definita: $\phi \mapsto (\phi(f_1), \ldots, \phi(f_d))$. D'altra parte la base G induce una corrispondenza biunivoca tra $(V')^d$ e $M_{d',d}(K)$ così definita: $S' = (v'_1, \ldots, v'_d) \mapsto M^G_{S'}$. In conclusione ponendo

$$\phi \mapsto M^G_{\phi(F)}$$

si ha una corrispondenza biunivoca tra $\mathrm{Hom}\,(V, V')$ e $M_{d',d}(K)$. $\square$

Definizione 5.33 Nelle ipotesi del Corollario precedente diciamo $M^G_{\phi(F)}$ *matrice associata a ϕ relativamente alle basi F di V e G di V'.*

Corollario 5.34 *Nelle ipotesi del Corollario 5.32, se* $S = (v_1, \ldots, v_s)$ *una* s*-upla di vettori di* V *si ha:*

1. $\phi(S) = G \cdot M^G_{\phi(F)} \cdot M^F_S$;

2. $M^G_{\phi(S)} = M^G_{\phi(F)} \cdot M^F_S$;

Dim. Poiché $\phi(S) = G \cdot M^G_{\phi(S)}$, per il Corollario 5.20, la (2) segue dalla (1) e dal fatto che G è una base.

Per provare la (1) basta chiaramente provarla quando S è costituito da un solo vettore v. Sia dunque $v = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_d f_d = F \cdot M^F_v$. Allora $\phi(v) = \lambda_1\phi(f_1) + \ldots + \lambda_d\phi(f_d) = \phi(F) \cdot M^F_v$.

D'altra parte $\phi(F) = G \cdot M^G_{\phi(F)}$ e quindi si ha la tesi. $\square$

Corollario 5.35 *Siano* V, V', V'' *spazi vettoriali su uno stesso corpo* K, F, G, H *basi rispettivamente di* V, V', V'' *e siano* $\phi : V \to V'$ *e* $\psi : V' \to V''$ *due omomorfismi. Allora si ha*

1. $\psi \circ \phi : V \to V''$ *è un omomorfismo.*

2. $M^H_{(\psi\phi)(F)} = M^H_{\psi(G)} \cdot M^G_{\phi(F)}$.

Dim. La (1) è una facile verifica. Per la (2) si ha

$$M^H_{(\psi\phi)(F)} = M^H_{\psi(\phi(F))} = M^H_{\psi(G)} \cdot M^G_{\phi(F)}$$

L'ultima uguaglianza è conseguenza del Corollario 5.34 (2). $\square$

Esempio 1. *Sia* $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *l'omomorfismo definito da*

$$\phi(x, y, z) = (x + y, x - 2z, y, x + y - z) \ .$$

Determinare $M^{E_4}_{\phi(E_3)}$.

Poiché $\phi(e_1) = (1, 1, 0, 1)$, $\phi(e_2) = (1, 0, 1, 1)$, $\phi(e_3) = (0, -2, 0, -1)$ si ha

$$M^{E_4}_{\phi(E_3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

Esempio 2. *Trovare* $\phi(2, -2, 3)$ *dove* $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *è l'omomorfismo determinato da*

$$M^{E_2}_{\phi(E_3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

Dalla matrice $M^{E_2}_{\phi(E_3)}$ si ha che $\phi(e_1 = (1, 0)$, $\phi(e_2 = (2, 1)$, $\phi(e_3 = (3, -1)$. Siccome $(2, -2, 3) = 2\,e_1 - 2\,e_2 + 3\,e_3$, si ha

$$\begin{aligned} \phi(2, -2, 3) &= \phi(2\,e_1 - 2\,e_2 + 3\,e_3) \\ &= 2\,\phi(e_1 - 2\,\phi(e_2 + 3\,\phi(e_3 \\ &= 2\,(1, 0) - 2\,(2, 1) + 3\,(3, -1) \\ &= (7, -5) \end{aligned}$$

Lo stesso conto si può fare utilizzando le matrici associate. Posto $v = (2,2,5)$ si ha

$$\begin{aligned}\phi(v) &= E_2 \cdot M^{E_2}_{\phi(v)}\\ &= E_2 \cdot M^{E_2}_{\phi(E_3)} \cdot M^{E_3}_{v}\\ &= E_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\\ &= (7,-5)\end{aligned}$$

Esempio 3. *Consideriamo la seguente base di $\mathbb{R}^3$: $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ con $f_1 = (2,1,0)$, $f_2 = (2,0,0)$, $f_3 = (0,1,1)$. Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'omomorfismo individuato da*

$$\phi(f_1) = (1,0) \ , \quad \phi(f_2) = (0,0) \ , \quad \phi(f_3) = (2,4) \ .$$

Determinare $M^{E_2}_{\phi(E_3)}$ e $\phi(x,y,z)$.

$$\begin{aligned}M^{E_2}_{\phi(E_3)} &= M^{E_2}_{\phi(F)} \cdot (M^{E_3}_{F})^{-1}\\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Detto $v = (x,y,z)$ si ha

$$\begin{aligned}\phi(v) &= E_2 \cdot M^{E_2}_{\phi(v)} = E_2 \cdot M^{E_2}_{\phi(E_3)} \cdot M^{E_3}_{v}\\ &= E_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = E_2 \cdot \begin{pmatrix} y+z \\ 4z \end{pmatrix} = (y+z, 4z)\end{aligned}$$

5.10 Spazio vettoriale duale

Se V un K-spazio vettoriale, lo spazio vettoriale $V^* = \mathrm{Hom}_K(V,K)$ si dice *spazio vettoriale duale* di V.

Sia $F = \{f_1, \ldots, f_d\}$ una base di V. Per ogni $i = 1, \ldots, d$ consideriamo l'applicazione lineare

$$f_i^* : V \to K \quad \text{data da} \quad f_i^*(f_j) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

Quindi se $v = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_d f_d$, l'applicazione f_i^* associa a u la sua i-esima coordinata λ_i rispetto alla base F.

Proposizione 5.36 *L'insieme $F^* = \{f_1^*, \ldots, f_d^*\}$ è una base di V^**

Dim. Supponiamo che $\alpha_1 f_1^* + \ldots + \alpha_d f_d^* = \mathbf{0}$, dove $\mathbf{0}$ sta ad indicare l'omomorfismo nullo di V in K. Allora per ogni $i = 1, \ldots, d$ si ha

$$0 = \mathbf{0}(f_i) = (\alpha_1 f_1^* + \ldots + \alpha_d f_d^*)(f_i) = \alpha_i$$

e ciò mostra che F^* è un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Sia ora $\phi : V \to K$ un elemento di V^*, e proviamo che

$$\phi = \phi(f_1)\, f_1^* + \ldots + \phi(f_d)\, f_d^*$$

Basta provare che queste due applicazioni lineari assumono gli stessi valori sui vettori della base F. Tenuto conto di come è definita f_i^* si ha:

$$(\phi(f_1)\, f_1^* + \ldots + \phi(f_d)\, f_d^*)(f_i) = \phi(f_1)\, f_1^*(f_i) + \ldots + \phi(f_d)\, f_d^*(f_i) = \phi(f_i)$$

e quindi F^* è un sistema di generatori di V^*. □

La base F^* di V^* si dice *base duale* della base F di V.

Non è difficile provare che se F e G sono due basi di V e F^* e G^* sono le corrispondenti basi duali, posto $P = M_F^G$ si ha:

$$M_{F^*}^{G^*} = {}^t(P^{-1})$$

5.11 Nucleo e immagine di un omomorfismo

Definizione 5.37 Sia $\phi : V \longrightarrow V'$ un omomorfismo di spazi vettoriali. Il sottoinsieme di V':

$$\mathrm{Im}\ \phi = \{v' \in V' \ / \ \exists v \in V,\ \phi(v) = v'\}$$

si dice *immagine* di ϕ. Il sottoinsieme di V:

$$\mathrm{Ker}\ \phi = \{v \in V \ / \ \phi(v) = 0_{V'}\}$$

si dice *nucleo* di ϕ.

E' un facile esercizio verificare che Ker ϕ è un sottospazio di V e che Im ϕ è un sottospazio di V'. Ovviamente ϕ è surgettivo se e solo se Im $\phi = V'$. Si ha inoltre

Proposizione 5.38 *Un omomorfismo $\phi : V \longrightarrow V'$ è iniettivo se e solo se* Ker $\phi = 0_V$.

Dim. Se ϕ è iniettivo, allora Ker $\phi = \phi^{-1}(0_{V'}) = \{0_V\}$; viceversa se $\phi(v_1) = \phi(v_2)$ allora $\phi(v_1 - v_2) = 0_{V'}$, ossia $v_1 - v_2 \in$ Ker ϕ e quindi $v_1 - v_2 = 0_V$ cioè $v_1 = v_2$. □

Corollario 5.39 *Sia $\phi : V \longrightarrow V'$ un omomorfismo di spazi vettoriali. Allora*

1. *ϕ è surgettivo se e solo se* $\dim \mathrm{Im}\ \phi = \dim V'$.

2. *ϕ è iniettivo se e solo se* $\dim \mathrm{Ker}\ \phi = 0$.

Consideriamo ora gli omomorfismi di K^n in K^m. Per il Corollario 5.31 essi sono del tipo

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n)$$

e quindi

$$\mathrm{Ker}\ \phi = \{\ (x_1, \ldots, x_n) \ / \ \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \}$$

Si ha pertanto il seguente

Corollario 5.40 *Siano ϕ un'applicazione lineare da K^n in K^m e $A = M_{\phi(E_n)}^{E_m}$. Allora si ha:*

1. Ker ϕ *è l'insieme dei vettori di K^n che sono soluzioni del sistema lineare omogeneo avente A come matrice dei coefficienti.*

2. *Viceversa, l'insieme dei vettori che sono soluzione di un sistema lineare omogeneo di m equazioni e n incognite si può pensare come nucleo di un omomorfismo da K^n in K^m.*

In conclusione, studiare i nuclei delle applicazioni lineari di K^n in K^m è la stessa cosa che studiare gli spazi vettoriali delle soluzioni dei sistemi lineari omogenei. Al riguardo è fondamentale il seguente che è un caso particolare del teorema di Rouché-Capelli, ma la sua dimostrazione descrive il modo di costruire una base dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo.

Teorema 5.41 *Sia dato un sistema lineare omogeneo Σ avente come matrice dei coefficienti*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

detto V il sottospazio vettoriale di K^n costituito dalle soluzioni di Σ e detta ϱ la caratteristica della matrice A, si ha:

$$\dim(V) = n - \varrho \ .$$

Dim. Supponiamo, per comodità di notazione, che sia nullo il minore di ordine ϱ formato dalle prime ϱ righe e dalle prime ϱ colonne.

Se $\varrho = n$, l'unico vettore di V è $(0,\dots,0)$ e $\dim(V) = n - \varrho$.

Se $\varrho < n$, il sistema Σ è equivalente al sistema

$$\Sigma' : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1\varrho}x_\varrho & = & a_{1\varrho+1}x_{v+1} + \dots + a_{1n}x_n \\ \dots\dots & & \dots\dots \\ a_{\varrho 1}x_1 + \dots + a_{\varrho\varrho}x_\varrho & = & a_{\varrho\varrho+1}x_{v+1} + \dots + a_{\varrho n}x_n \end{cases}$$

Indichiamo con $\xi^{(1)},\dots,\xi^{(n-\varrho)}$ i vettori che si ottengono assegnando alle incognite $x_{\varrho+1},\dots,x_n$ rispettivamente i valori $(1,0,\dots,0)$, $(0,1,\dots,0)$l, $\dots$, $(0,0,\dots,1)$ e risolvendo poi i sistemi ottenuti.

Detta $\xi = (\xi^{(1)},\dots,\xi^{(n-\varrho)})$, la matrice M^E_ξ è del tipo $(n, n-\varrho)$ e il minore formato dalle ultime $n-\varrho$ righe e dalle ultime $n-\varrho$ colonne è evidentemente non nullo. Quindi ξ è un insieme di vettori linearmente indipendenti per il Teorema 5.21.

Sia ora $v = (\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_\varrho,\overline{x}_{\varrho+1},\dots\overline{x}_n) \in V$ e sia $v' = \overline{x}_{\varrho+1}\,\xi^{(1)}+\dots+\overline{x}_n\,\xi^{(n-\varrho)}$. Si osservi che $v' \in V$ perché combinazione lineare di vettori di V; anche $v-v'$ che è del tipo $(\alpha_1,\dots,\alpha_\varrho,0,\dots,0)$ appartiene a V, ma è chiaro che una soluzione del sistema Σ', che abbia nulle le coordinate dalla $\varrho+1$-esima alla n-esima, è necessariamente nulla. Quindi $v = v'$ e ξ è un sistema di generatori di V. □

Corollario 5.42 *Sia $\phi : K^n \to K^m$ un omomorfismo e sia ϱ la caratteristica della matrice $M^{E_m}_{\phi(E_n)}$. Allora*

a) $\dim(\text{Ker }\phi) = n - \varrho$.

b) $\dim(\text{Im }\phi) = \varrho$.

c) $\dim(\text{Ker }\phi) + \dim(\text{Im }\phi) = n$.

Dim. La a) segue subito dal Corollario 5.40 e dal Teorema 5.41. La b) segue dal Corollario 5.22 osservato che $\phi(e_1),\dots,\phi(e_n)$ sono generatori di Im ϕ. □

Esempio *Sia $\phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ l'omomorfismo individuato dalla matrice*

$$M^{E_4}_{\phi(E_5)} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 10 & 5 & 2 & 10 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Determinare una base e la dimensione di* Im ϕ.
2. *Determinare una base e la dimensione di* Ker ϕ.
3. ϕ *è iniettivo? è surgettivo?*
4. $(1,0,0,0) \in \text{Im } \phi$ *?*

1) L'insieme $\{\phi(e_1),\ldots,\phi(e_5)\}$ è un sistema di generatori di Im ϕ. Inoltre $\varrho(M^{E_4}_{\phi)E_5)}) = 2$, un minore di ordine 2 non nullo essendo ad esempio quello individuato dalla prima e dalla seconda riga e dalla seconda e terza colonna. Quindi una base di Im ϕ è data da $\{\phi(e_2),\phi(e_3)\}$ ossia $(2,1,5,1),(1,-1,2,0)\}$ e $\dim(\text{Im } \phi) = 2$.

2) Si ha che $v = (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \text{Ker } \phi$ se e solo se è soluzione del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = & 0 \\ 10x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 10x_4 + 7x_5 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 & = & 0 \end{cases}$$

che, per quanto visto prima, è equivalente a

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 & = & -4x_1 - 4x_4 - 3x_5 \\ x_2 - x_3 & = & -2x_1 - x_4 \end{cases}$$

Poniamo $x_1 = 1$, $x_4 = x_5 = 0$ e otteniamo la soluzione $\xi^{(1)} = (1,-2,0,0,0)$.
Poniamo $x_1 = x_5 = 0$, $x_4 = 1$ e otteniamo la soluzione $\xi^{(2)} = (0,-5/3,-2/3,1,0)$.
Poniamo $x_1 = x_4 = 0$, $x_5 = 1$ e otteniamo la soluzione $\xi^{(3)} = (0,-1,-1,0,1)$.

Una base del nucleo è $\{\xi^{(1)},\xi^{(2)},\xi^{(3)}\}$ e $\dim(\text{Ker } \phi) = 3$. Si noti che si poteva dire subito che $\dim(\text{Ker } \phi) = 5 - 2 = 3$.

3) Da 1) e 2) segue che ϕ non è né iniettivo né surgettivo.

4) Basta vedere se è risolubile il sistema

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 & = & 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = & 0 \\ 10x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 10x_4 + 7x_5 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 & = & 0 \end{cases}$$

Sappiamo già che la caratteristica della matrice dei coefficienti è 2; poiché si vede subito che la caratteristica della matrice completa è 3, il sistema non ha soluzioni e dunque $(1,0,0,0) \notin \text{Im } \phi$.

5.12 Isomorfismi ed endomorfismi

Un omomorfismo bigettivo si dice *isomorfismo.*

Proposizione 5.43 *Siano V, V' spazi vettoriali, $\phi : V \to V'$ un omomorfismo e sia $F = \{f_1,\ldots,f_r\}$ una base di V. Allora ϕ è un isomorfismo se e solo se $\phi(F)$ è base di V'.*

Dim. Abbiamo già visto in precedenza che $\phi(F)$ è un sistema di generatori di Im ϕ, ma ϕ è isomorfismo quindi $\phi(F)$ genera V'. Sia ora $\lambda_1\phi(f_1) + \ldots + \lambda_r\phi(f_r) = 0_{V'}$ ne segue che $\phi(\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_r f_r) = 0_{V'}$ ossia $\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_r f_r \in \text{Ker } \phi$, ma ϕ è un isomorfismo, quindi $\ker\phi = \{0_V\}$ ed essendo F una base, si ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$.

Sia $v' \in V'$; poiché $\phi(F)$è una base di V', si ha $v' = \lambda_1\phi(f_1)+\ldots+\lambda_r\phi(f_r) = \phi(\lambda_1 f_1+\ldots+\lambda_r f_r)$, quindi ϕ è surgettivo. Sia ora $v \in \text{Ker } \phi$; si ha $v = \lambda_1 f_1+\ldots+\lambda_r f_r$ e $\phi(v) = \lambda_1\phi(f_1)+\ldots+\lambda_r\phi(f_r) = 0_{V'}$, da cui $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$ e quindi $v = 0_V$. □

Proposizione 5.44 *Sia $\phi : V \to V'$ un isomorfismo, $\phi^{-1} : V' \to V$ l'applicazione inversa, F una base di V, G una base di V'. Allora si ha*

1. *ϕ^{-1} è un isomorfismo.*

2. $M^F_{\phi^{-1}(G)} = (M^G_{\phi(F)})^{-1}$.

Dim. Innanzitutto, dalla Proposizione 5.43 segue che $\dim V = \dim V'$, quindi $M^G_{\phi(F)}$ è una matrice quadrata invertibile. Indichiamo con $\psi : V' \to V$ l'omomorfismo individuato da

$$M^F_{\psi(G)} = (M^G_{\phi(F)})^{-1}$$

si ha

$$M^G_{\phi\psi(G)} = M^G_{\phi(F)} M^G_{\psi(G)} = I \qquad \text{e} \qquad M^F_{\psi\phi(F)} = M^F_{\psi(G)} M^F_{\phi(F)} = I$$

Ne segue facilmente che $\phi\psi = id_{V'}$ e $\psi\phi = id_V$ □

Definizione 5.45 Siano V, V' due spazi vettoriali sullo stesso corpo K. Diciamo che V è *isomorfo* a V' e scriviamo $V \simeq V'$, se esiste un isomorfismo $\phi : V \to V'$.

Corollario 5.46 *$V \simeq V'$ se e solo se $\dim V = \dim V'$.*

Dim. Sia $\phi : V \to V'$ un isomorfismo, F una base di V. Per la Proposizione 5.43, $\phi(F)$ è una base di V', quindi $\dim V = \dim V'$. Viceversa sia $F = \{f_1, \dots, f_r\}$ una base di V e $G = \{g_1, \dots, g_r\}$ una base di V'; l'omomorfismo $\phi : V \to V'$ definito da $\phi(f_i) = g_i$ è un isomorfismo per la Proposizione 5.43. □

Corollario 5.47 *Se V un K-spazio vettoriale di dimensione n, allora $V \simeq K^n$.*

Questo corollario è molto importante perché riconduce la teoria degli spazi vettoriali di dimensione finita a quella degli spazi K^n.

Definizione 5.48 Un omomorfismo da uno spazio vettoriale V in se stesso si dice *endomorfismo.* Un endomorfismo che sia un isomorfismo si dice *automorfismo.*

Corollario 5.49 *Sia V un spazio vettoriale, ϕ un endomorfismo, F una base di V. Allora*

1. *ϕ è un automorfismo se e solo se $\det M^F_{\phi(F)} \neq 0$.*

2. *Se ϕ è automorfismo, anche ϕ^{-1} lo è e si ha*

$$M^F_{\phi^{-1}(F)} = (M^F_{\phi(F)})^{-1}$$

Dim. Segue dalle Proposizioni 5.43 e 5.44. □

Concludiamo questo numero con un teorema che descrive il legame tra le matrici associate ad un endomorfismo rispetto a due basi diverse.

Teorema 5.50 *Sia V un spazio vettoriale, ϕ un endomorfismo, F, G basi di V. Allora*

$$M^G_{\phi(G)} = M^G_F \cdot M^F_{\phi(F)} \cdot M^F_G$$

Dim. Dal Corollario 5.34 segue che $M^G_{\phi(G)} = M^G_{\phi(F)} \cdot M^F_G$ e per la Proposizione 5.24, si ha $M^G_{\phi(F)} = M^G_F \cdot M^F_{\phi(F)}$. □

Esempio *Sia $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'omomorfismo individuato da $M^E_{\phi(E)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e sia $F = \{f_1, f_2\}$ con $f_1 = (2,1)$ e $f_2 = (3,1)$.*

1. *Dimostrare che ϕ è un automorfismo.*

2. *Determinare* ϕ^{-1}.

3. *Determinare* $M^F_{\phi(F)}$.

1) Basta osservare che $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \neq 0$.

2) Si ha $M^E_{\phi^{-1}(E)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$.

3) Siccome

$$M^F_{\phi(F)} = M^F_E \cdot M^E_{\phi(E)} \cdot M^E_F = (M^E_F)^{-1} \cdot M^E_{\phi(E)} \cdot M^E_F$$

si ha

$$M^F_{\phi(F)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$$

Infatti
$\phi(f_1) = 2\phi(e_1) + \phi(e_2) = 2(2,1) + (1,3) = (5,5)$
$\phi(f_2) = 3\phi(e_1) + \phi(e_2) = 3(2,1) + (1,3) = (7,6)$
e, d'altra parte,
$10f_1 - 5f_2 = 10(2,1) - 5(3,1) = (5,5)$
$11f_1 - 5f_2 = 11(2,1) - 5(3,1) = (7,6)$.

5.13 Intersezione, somme, somme dirette

Abbiamo già visto che il concetto di spazio vettoriale estende quello di retta, piano, spazio; più precisamente, nel contesto degli spazi vettoriali, la retta, il piano e lo spazio si rappresentano, introducendo l'uso dei sistemi di coordinate, con $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$. Vediamo ora come si estendono, nell'ambito degli spazi vettoriali che noi consideriamo (ossia spazi K^n e loro sottospazi) alcuni concetti, operazioni e problemi di tipo "geometrico".

Proposizione 5.51 *Siano $W_1, \dots, W_r$ sottospazi di uno spazio vettoriale V. Allora $W = W_1 \cap \dots \cap W_r$ è un sottospazio vettoriale di V.*

Dim. Siano $v_1, v_2 \in W$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in K$; allora $v_1, v_2 \in W_1$ che è un sottospazio , quindi $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in W_1$. Analogamente $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in W_2, \dots, W_r$ e quindi si ha la tesi per la Proposizione 5.4. □

Proposizione 5.52 *Siano $W_1, \dots, W_r$ sottospazi di uno spazio vettoriale V. Poniamo*

$$W = W_1 + \ldots + W_r = \{v \in V \ / \ v = v_1 + \ldots + v_r \quad v_i \in W_i\}$$

Allora W è un sottospazio vettoriale di V, detto somma *dei sottospazi $W_1, \dots, W_r$. Esso è il più piccolo sottospazio che contiene $W_1, \dots, W_r$.*

Dim. Siano $v = v_1 + \ldots + v_r$, $u = u_1 + \ldots + u_r$ due vettori di W, $\lambda, \mu \in K$. Allora $\lambda v + \mu u = (\lambda v_1 + \mu u_1, \dots, \lambda v_r + \mu u_r) \in W$ da cui la tesi. □

Il seguente teorema pone in relazione le dimensioni di $W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2$.

Teorema 5.53 (Grassmann) *Siano V uno spazio vettoriale e W_1, W_2 due suoi sottospazi. Allora*

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2) \ .$$

Dim. Siano $n = \dim(W_1)$, $m = dim(W_2)$, $d = \dim(W_1 \cap W_2)$ e sia $F = \{f_1, \ldots, f_d\}$ una base di $W_1 \cap W_2$.

Completiamo F a una base $G = \{f_1, \ldots, f_d, g_1, \ldots, g_{n-d}\}$ di W_1 ed anche a una base $H = \{f_1, \ldots, f_d, h_1, \ldots, h_{m-d}\}$ di W_2. Per provare il teorema basta provare che $G \cup H$ (che ha $m + n - d$ elementi) è una base di $W_1 + W_2$.

E' chiaro che $G \cup H$ è un sistema di generatori di $W_1 + W_2$. Consideriamo allora una relazione del tipo

$$\sum_{i=1}^{d} a_i\, f_i \;+\; \sum_{i=1}^{n-d} b_i\, g_i \;+\; \sum_{i=1}^{m-d} c_i\, h_i \;=\; 0$$

Allora

$$\sum_{i=1}^{d} a_i\, f_i \;+\; \sum_{i=1}^{n-d} b_i\, g_i \;=\; -\sum_{i=1}^{m-d} c_i\, h_i$$

Essendo il primo membro un elemento di W_1 e il secondo membro un elemento di W_2, significa che entrambi stanno in $W_1 \cap W_2$. Quindi si ha

$$\sum a_i\, f_i \;+\; \sum b_i\, g_i \;=\; \sum \lambda_i\, f_i; \quad \text{e} \quad -\sum c_i\, h_i \;=\; \sum \lambda_i\, f_i;$$

da cui si ricavano le due combinazioni lineari nulle $\sum \lambda_i\, f_i + \sum c_i\, h_i = 0$ e $\sum (a_i - \lambda_i)\, f_i + \sum b_i\, g_i = 0$.

Essendo H ed G basi, si ha che $\lambda_1 = \ldots = \lambda_d = c_1 = \ldots = c_{m-d} = 0$ e $a_1 - \lambda_1 = \ldots = a_d - \lambda_d = b_1 = \ldots = b_{n-d} = 0$ ovvero $G \cup H$ è un sistema di vettori linearmente indipendenti. □

Esempio In $\mathbb{R}^4$ due sottospazi di dimensione 3 hanno come intersezione uno spazio di dimensione almeno 2, perché usando la formula di Grassmann si ha

$$\dim(W_1 \cap W_2) = 6 - \dim(W_1 + W_2) \quad \text{e} \quad \dim(W_1 + W_2) \leq 4 \;.$$

Definizione 5.54 Siano $W_1, \ldots, W_r$ sottospazi di uno spazio vettoriale V e sia $W = W_1 + \ldots + W_r$. Si dice che W è *somma diretta* di $W_1, \ldots, W_r$, e si scrive $W = W_1 \oplus \ldots \oplus W_r$, se ogni vettore di W si può scrivere in modo unico come somma di vettori $v_1, \ldots, v_r$ con $v_i \in W_i$.

La seguente proposizione dà un criterio per stabilire se una somma è diretta.

Proposizione 5.55 *Siano $W_1, \ldots, W_r$ sottospazi di uno spazio vettoriale V. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti*

1. $W = W_1 \oplus \ldots \oplus W_r$*;*
2. $W = W_1 + \ldots + W_r$ *e se si ha la relazione* $0 = w_1 + \ldots + w_r$ *con* $w_i \in W_i$ *per ogni* i*, allora* $w_1 = \ldots = w_r = 0$*;*
3. $W = W_1 + \ldots + W_r$ *e* $W_i \cap (W_1 + \ldots + W_{i-1} + W_{i+1} + \ldots + W_r) = \{0_V\}$ *per ogni* $i = 1, \ldots, r$*;*
4. *Scelta una base* $F_i = \{w_{1,i}, \ldots, w_{n_i,i}\}$ *per ogni* i*, l'unione di tutti i vettori delle singole basi* $F_1, \ldots, F_r$ *è una base di* V*.*
5. $W = W_1 + \ldots + W_r$ *e* $\dim(W) = \dim(W_1) + \ldots + \dim(W_r)$*.*

Dim. 1) $\Rightarrow$ 2). Sia $0 = w_1 + \ldots + w_r$; dato che si ha anche $0 = 0 + \ldots + 0$, con $0 \in W_i$, per l'unicità della decomposizione, si deve avere $w_i = 0$ per ogni i.

2) $\Rightarrow$ 3). Sia $v \in W_i \cap (W_1 + \ldots + W_{i-1} + W_{i+1} + \ldots + W_r)$, allora $v = w_i = w_1 + \ldots + w_{i-1} + w_{i+1} + \ldots + w_r$ con $w_i \in W_i$ per ogni i, da cui $w_1 + \ldots - w_i + \ldots + w_r = 0$ e per la (2) ogni w_i è nullo, quindi $v = 0$.

3) $\Rightarrow$ 4). Sia F_i una base di W_i; allora $F = \cup F_i$ è un sistema di generatori di W, dato che $W = W_1 + \ldots + W_r$. Proviamo quindi che F è un insieme di vettori linearmente indipendenti. Supponiamo esista una relazione lineare non banale tra i vettori di F; scegliamo un coefficiente non nullo e sia W_i il sottospazio alla cui base appartiene il vettore che ha coefficiente non nullo. Allora il vettore che si ottiene considerando solo i coefficienti e i vettori relativi a questo W_i è un vettore non nullo che sta in W_i e anche in $W_1 + \ldots + W_{i-1} + W_{i+1} + \ldots + W_r$ contro l'ipotesi.

4) $\Leftrightarrow$ 5). E' evidente.

4) $\Rightarrow$ 1). E' chiaro dall'ipotesi che $W = W_1 + \ldots + W_r$. pertanto se $v \in W$, esistono $w_i \in W_i$ tali che $w = w_1 + \ldots + w_r$. Rimane da provare che la decomposizione è unica. Se non fosse, esisterebbero altri $w_i' \in W_i$, con almeno un w_i' diverso dal corrispondente w_i, tali che $w = w_1' + \ldots + w_r'$. Sottraendo membro a membro si ha: $(w_1 - w_1') + \ldots + (w_r - w_r') = 0$. Esprimendo ogni $w_i - w_i'$ come combinazione lineare dei vettori di F_i, si trova una combinazione lineare nulla tra i vettori di F con almeno un coefficiente non nullo (dato che esiste i per cui $w_i - w_i' \neq 0$) e questo contraddice la (4). $\square$

Corollario 5.56 *Siano W_1, W_2 due sottospazi di uno spazio vettoriale V. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti*

a) $W = W_1 \oplus W_2$;

b) $W = W_1 + W_2 \quad e \quad W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$;

c) $W = W_1 + W_2$ *e* $\dim(W) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$.

Esempio *Siano*

$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y - z = 0\}$,

$V_2 = \mathcal{L}(v_2, v_2')$, *dove* $v_2 = (1, 1, 1)$, $v_2' = (2, 1, 0)$,

$V_3 = \mathcal{L}(v_3)$, *dove* $v_3 = (-1, 1, 0)$.

Determinare $V_1 \cap V_2$, $V_1 \cap V_3$, $V_1 + V_2$, $V_1 + V_3$ e dire quale somma è diretta.

Il generico vettore di V_2 è $\lambda(1,1,1) + \mu(2,1,0) = (\lambda + 2\mu, \lambda + \mu, \lambda)$; imponendo l'appartenenza a V_1 si ha $(\lambda + 2\mu) - (\lambda + \mu) - \lambda = 0$ ossia $\mu - \lambda = 0$. Il generico vettore di $V_1 \cap V_2$ è dunque $\lambda(1,1,1) + \lambda(2,1,0) = \lambda(3,2,1)$ e quindi $\{(3,2,1)\}$ è una base di $V_1 \cap V_2$ e $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$, in accordo col fatto che V_1, V_2 rappresentano due piani distinti passanti per l'origine e quindi $V_1 \cap V_2$ rappresenta una retta.

Il generico vettore di V_3 è $\lambda(-1,1,0) = (-\lambda, \lambda, 0)$; imponendo l'appartenenza a V_1 si ha $-\lambda - \lambda = 0$ da cui $\lambda = 0$. Quindi $V_1 \cap V_3 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ e $\dim(V_1 \cap V_3) = 0$, in accordo col fatto che V_3 rappresenta una retta passante per l'origine e non contenuta nel piano rappresentato da V_1.

Determiniamo ora una base di V_1. Posto $y = 1$ e $z = 0$, si ha $v_1 = (1,1,0)$; posto $y = 0$ e $z = 1$, si ha $v_1' = (1,0,1)$. Una base di V_1 è $\{v_1, v_1'\}$ e quindi un sistema di generatori di $V_1 + V_2$ è $S = \{v_1, v_1', v_2, v_2'\}$.

Si ha

$$M_S^E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \varrho(M_S^E) = 3$$

quindi $\dim(V_1 + V_2) = 3$ e quindi $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$.

Analogamente si vede che $V_1 + V_3 = \mathbb{R}^3$, ma per quanto visto prima solo $V_1 + V_3$ è una somma diretta.

5.14 Prodotto scalare in uno spazio vettoriale reale

Nel Capitolo 3 abbiamo introdotto la nozione di prodotto scalare per i vettori del piano e dello spazio, nozione che riformulata in termini di coordinate si estende immediatamente ai vettori di $\mathbb{R}^n$. Nella Proposizione 3.18 abbiamo visto alcune fondamentali proprietà del prodotto scalare. Astraendo è possibile assumere tali proprietà come assiomi per definire una nozione più generale di prodotto scalare per gli spazi vettoriali sul corpo $\mathbb{R}$.

Definizione 5.57 Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Dicesi *prodotto scalare su* V un'applicazione $\cdot : V \times V \to \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto u \cdot v$ tale che per ogni $u, v, w \in V$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ si abbia:

1. (Simmetria) $\quad u \cdot v = v \cdot u$.
2. (Linearità) $\quad (\lambda u + \mu v) \cdot w = \lambda(u \cdot w) + \mu(v \cdot w)$.
3. (Positività) $\quad u \cdot u = |u|^2 \geq 0 \quad e \quad u \cdot u = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Oss. La simmetria e la linearità rispetto al primo fattore implicano la linearità anche rispetto al secondo fattore. L'ipotesi che il corpo base sia $\mathbb{R}$ è essenziale nella condizione (3).

Chiaramente in $\mathbb{R}^n$
$$(a_1, \ldots, a_n) \cdot (b_1, \ldots, b_n) = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$$
è un prodotto scalare secondo la definizione precedente, detto *prodotto scalare naturale* di $\mathbb{R}^n$.

In uno spazio vettoriale reale dotato di prodotto scalare, usando la positività si può definire il modulo di un vettore ponendo
$$|v| = \sqrt{v \cdot v}$$
e quindi la distanza di due vettori ponendo
$$d(u, v) = |u - v| \ .$$
Si dimostra inoltre che per ogni coppia di vettori vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz: $|u \cdot v| \leq |u|\,|v|$.

Ciò permette di definire l'angolo di due vettori e introdurre la nozione di ortogonalità ponendo
$$\cos \widehat{uv} = \frac{u \cdot v}{|u|\,|v|}$$
e
$$u \perp v \iff u \cdot v = 0 \ .$$

5.15 Ortogonalità e proiezioni

In questo numero assumiamo $K = \mathbb{R}$ e supponiamo che lo spazio vettoriale K^n sia dotato di un prodotto scalare denotato con $\cdot$.

Definizione 5.58 Siano $u = (a_1, \ldots, a_n)$ e $v = (b_1, \ldots, b_n) \in K^n$. Si dice che u e v sono *ortogonali*, e si scrive $u \perp v$, se $u \cdot v = 0$.

Se V è un sottospazio vettoriale di K^n si dice che u è *ortogonale* a V, e si scrive $u \perp V$, se u è ortogonale a tutti i vettori di V.

Definizione 5.59 Sia V è un sottospazio vettoriale di K^n. Si chiama *ortogonale* di V, e lo si indica con $V^\perp$, l'insieme
$$\{u \in K^n \ / \ u \perp V\}$$

Proposizione 5.60 *a) Sia $S = \{v_1, \ldots, v_s\}$ un insieme finito di vettori di K^n e sia v un vettore ortogonale a tutti i vettori in S. Allora $v \perp \mathcal{L}(S)$.*

b) Sia V un sottospazio vettoriale di K^n. Allora $V^\perp$ è un sottospazio vettoriale di K^n.

Dim. $a)$ Segue dalle proprietà del prodotto scalare. $b)$ segue da $a)$. □

Per studiare meglio le relazioni che sussistono tra V e $V^\perp$, introduciamo un nuovo concetto che generalizza quello geometrico di sistema di coordinate ortogonali.

Definizione 5.61 Sia $S = \{v_1, \ldots, v_s\}$ un insieme finito di vettori di K^n; si dice che S è *ortonormale* se

$$v_i \cdot v_j = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$$

Proposizione 5.62 *Sia S un insieme ortonormale, allora i vettori di S sono linearmente indipendenti.*

Dim. Sia $S = \{v_1, \ldots, v_s\}$ e sia $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_s v_s = 0$. Allora $(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_s v_s) \cdot v_i = \lambda_i = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, s$. □

Teorema 5.63 *Sia F una base di uno sottospazio vettoriale V di K^n. Allora F è ortonormale se e solo se*

$$(M_F^E)^{-1} = {}^t M_F^E$$

Dim. Sia $F = \{v_1, \ldots, v_r\}$ con $v_i = (a_{1i}, \ldots, a_{ni})$. Allora si ha $M_F^E = (a_{ij})$ e ${}^t M_F^E = (a_{ji})$ e se consideriamo il prodotto ${}^t M_F^E \cdot M_F^E$ si ottiene la matrice $(v_i \cdot v_j) = I$.

Il viceversa si dimostra con le stesse considerazioni. □

Ricordiamo ora che se v è un vettore di $\mathbb{R}^3$ e f un versore, allora la proiezione ortogonale di v su f è $(v \cdot f)f$ (Corollario 3.20). Si vede facilmente che $(v \cdot f)f$ è l'unico vettore dello spazio generato da f tale che sia componente di v, se v si scrive come somma di due componenti ortogonali; infatti

$$(v - (v \cdot f)f) \cdot f = (v \cdot f) - (v \cdot f) = 0$$

Più in generale si ha

Lemma 5.64 *Sia V un sottospazio vettoriale di K^n e $u \in K^n$; sia $F = \{f_1, \ldots, f_r\}$ una base ortonormale di V e sia $u = v + v'$ con $v \in V$ e $v' \in V^\perp$. Allora*

$$v = (u \cdot f_1)f_1 + \ldots + (u \cdot f_r)f_r$$

Dim. Se $v = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_r f_r$, si ha $v' = u - v = u - \lambda_1 f_1 - \ldots - \lambda_r f_r$.

Poiché $v' \in V^\perp$, si ha $(v' \cdot f_i) = 0$ per $i = 1, \ldots, r$ e quindi

$$(u \cdot f_i) - \lambda_i = 0 \qquad i = 1, \ldots, r \ .$$

□

Possiamo allora dare la seguente

Definizione 5.65 Siano V è un sottospazio vettoriale di K^n, $u \in K^n$ e $F = \{f_1, \ldots, f_r\}$ una base ortonormale di V. Si chiama *proiezione ortogonale* di u su V, e si indica con $\mathrm{pr}_V(u)$, il vettore

$$v = (u \cdot f_1)f_1 + \ldots + (u \cdot f_r)f_r \ .$$

Si ha allora

$$u - \text{pr}_{\,V}(u) \in V^{\perp}$$

Osserviamo che il lemma e la definizione precedenti hanno senso purché esiste una base ortonormale di V. Allo scopo si può dimostrare il seguente teorema noto come procedimento di *ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.*

Teorema 5.66 *Sia V uno spazio vettoriale e sia $F = \{f_1, \ldots, f_r\}$ una base di V. Poniamo:*

$$\begin{aligned} f_1' &= \text{vers}\,(f_1) \\ f_2' &= \text{vers}\,(f_2 - \text{pr}_{\,\mathcal{L}(f_1')}(f_2)) \\ \ldots \\ f_r' &= \text{vers}\,(f_r - \text{pr}_{\,\mathcal{L}(f_1',\ldots,f_{r-1}')}(f_r)) \end{aligned}$$

Allora $F' = \{f_1', \ldots, f_r'\}$ è una base ortonormale di V.

Dim. Per il Lemma 5.64 e dalla Definizione 5.65 si ha che $f_2' \perp f_1'$, $f_3' \perp f_1'$, $f_3' \perp f_2'$ e così via. Inoltre, per la Proposizione 5.62, $\{f_1', \ldots, f_r'\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti e quindi, essendo $\dim(V) = r$, esso è una base di V. □

Possiamo ora dimostrare il teorema fondamentale

Teorema 5.67 *Sia V un sottospazio vettoriale di K^n. Allora*

$$K^n = V \oplus V^{\perp}$$

Dim. Il fatto che $K^n = V + V^{\perp}$ segue dal Lemma 5.64, dalla Definizione 5.65 e dal fatto che V ammette basi ortonormali.

Il fatto che $V \cap V^{\perp} = \{0_{K^n}\}$ è ovvio. □

Corollario 5.68 *Siano dati un sottospazio vettoriale V di K^n, un vettore $u \in K^n$, una base $F = \{f_1, \ldots, f_r\}$ di V e una base $G = \{g_1, \ldots, g_{n-r}\}$ di $V^{\perp}$. Allora*

1. *$F \cup G$ è una base di K^n.*

2. *Se $u = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_r f_r + \mu_1 g_1 + \ldots + \mu_{n-r} g_{n-r}$, allora*

$$\text{pr}_{\,V}(u) = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_r f_r$$

3. $\dim(V) + \dim(V^{\perp}) = n$.

4. $(V^{\perp})^{\perp} = V$.

Dim. 1) E' ovvia conseguenza del Teorema 5.67.

2) La tesi segue dal fatto che $\text{pr}_{\,V}(u)$ è l'unico vettore di V che sia componente di u, se u si scrive come somma di due componenti ortogonali e dal fatto che $\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_r f_r$ verifica tale proprietà.

3) E' un'ovvia conseguenza del Teorema 5.67.

4) L'inclusione $V \subset (V^{\perp})^{\perp}$ è ovvia.

Per provare l'inclusione opposta basta osservare che $K^n = V^{\perp} \oplus (V^{\perp})^{\perp}$ e quindi $\dim((V^{\perp})^{\perp}) = n - (n - \dim(V) = \dim(V)$. □

Esempio *Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (1,0,0,1)$, $v_3 = (2,0,1,0)$ e sia $u = (1,0,0,0)$. Determinare la proiezione ortogonale di u su V.*

Primo metodo. Costruiamo una base ortonormale di V a partire da S (che è una base di V) mediante il metodo di Gram-Schmidt e otteniamo

$$\begin{aligned} f_1 &= \operatorname{vers}(v_1) = 1/\sqrt{2}(1,1,0,0); \\ f_2 &= \operatorname{vers}(v_2 - (v_2 \cdot f_1)f_1) = 1/\sqrt{6}(1,-1,0,2); \\ f_3 &= \operatorname{vers}(v_3 - (v_3 \cdot f_1)f_1 - (v_3 \cdot f_2)f_2) = 1/\sqrt{21}(2,-2,3,-2) \end{aligned}$$

quindi

$$\operatorname{pr}_V(u) = (u \cdot f_1)f_1 + (u \cdot f_2)f_2 + (u \cdot f_2)f_2 = (6/7, 1/7, 2/7, 1/7)$$

Secondo metodo. Si ha

$$V^\perp = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \ / \ x_1 + x_2 = x_1 + x_4 = 2x_1 + x_3 = 0\}$$

Una base di $V^\perp$ è $\{v_4 = (1,-1,-2,-1)\}$. Allora $F = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ e, se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sono le coordinate di u rispetto a F, $\operatorname{pr}_V(u) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$. Quindi basta determinare M_u^F.

Ma $M_u^F = (M_F^E)^{-1} \cdot M_u^E$ e si giunge quindi alla conclusione. In questo caso però conviene procedere per via diretta; infatti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 &= 1 \\ \lambda_1 - \lambda_4 &= 0 \\ \lambda_3 - 2\lambda_4 &= 0 \\ \lambda_2 - \lambda_4 &= 0 \end{cases}$$

Si ottiene $\lambda_1 = 1/7$, $\lambda_2 = 1/7$, $\lambda_3 = 2/7$, $\lambda_4 = 1/7$, e quindi

$$\operatorname{pr}_V(u) = 1/7 v_1 + 1/7 v_2 + 2/7 v_3 = (6/7, 1/7, 2/7, 1/7) \ .$$

Concludiamo questo capitolo con un'interessante applicazione del concetto di ortogonalità.

Definizione 5.69 Sia V un sottospazio vettoriale di K^n. Se V è dato mediante una sua base diremo che V è rappresentato in *forma parametrica*. Se V è rappresentato come spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo, diremo che V è rappresentato in *forma cartesiana*.

Osserviamo che il passaggio da una forma cartesiana a una parametrica si fa utilizzando il Teorema 5.41. Vediamo ora come si fa a passare da una forma parametrica a una cartesiana.

Sia $V = \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_s)$. Allora

$$V^\perp = \{u \ / \ u \cdot v_1 = \ldots = u \cdot v_s = 0\} \ .$$

e $u \cdot v_1 = \ldots = u \cdot v_s = 0$ è un sistema lineare omogeneo.

Sia $\{u_1, \ldots, u_t\}$ una base dello spazio delle soluzioni e quindi una base di $V^\perp$. Allora

$$V = (V^\perp)^\perp = \{u \ / \ u \cdot u_1 = \ldots = u \cdot u_t = 0\} \ .$$

Esempio *Rappresentare cartesianamente il sottospazio di* $\mathbb{R}^4$ *generato da* $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ *dove* $v_1 = (1,2,1,0)$, $v_2 = (2,6,1,4)$, $v_3 = (1,4,0,4)$.

Una base di $V = \mathcal{L}(S)$ è ad esempio $\{v_1, v_3\}$. Quindi

$$V^\perp = \{(x,y,z,t) \ / \ x + 2y + z = x + 4y + 4t = 0\}$$

Una base di $V^\perp$ è

$$\{(1,0,-1,-1/4), (0,1,-2,-1)\}$$

Quindi V è lo spazio delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x - z - 1/4t &= 0 \\ y - 2z - t &= 0 \ . \end{cases}$$

5.16 Esercizi

Es. 117. Quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi vettoriali:
a) $\{(x,y,z)\ /\ x+y-z+1=0\}$; b) $\{(x,y,z)\ /\ x+y-z=0\}$;
c) $\{(t,t,t)\ /\ t\in\mathbb{Q}\}$; d) $\{(x,y,z)\ /\ xy=0\}$;
e) $\{(t,0,t)\ /\ t\in\mathbb{R}\}$; f) $\{(t,t,t^2)\ /\ t\in\mathbb{R}\}$.

Es. 118. Provare che $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x+y+z=2y+z=0\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e trovarne una base.

Es. 119. Dato il sottospazio $W=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\ /\ x-y=z=0\}$ di $\mathbb{R}^4$, determinare due sue diverse basi che contengono il vettore $(2,2,0,-3)$.

Es. 120. In $\mathbb{R}^4$ sia V il sottospazio generato da $\{(3,0,2,1),(2,2,3,1)\}$ e W il sottospazio generato $\{(0,1,1,0),(1,1,1,1),(1,0,1,0)\}$. Dire se $V\subset W$.

Es. 121. Sia $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ |x|=|y|\}$. V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$? V contiene sottospazi vettoriali non nulli?

Es. 122. Provare che il sottoinsieme A dello spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ delle matrici quadrate di ordine 2 ad elementi reali costituito dalle matrici del tipo $\begin{pmatrix} x+y & 2x \\ z & 2y+z \end{pmatrix}$ con $x,y,z\in\mathbb{R}$ è un sottospazio e determinarne una base.

Es. 123. Provare che $GL_n(K)$ non è un sottospazio vettoriale di $M_n(K)$.

Es. 124. Provare che le seguenti matrici di $M_{2,3}(\mathbb{Q})$ sono linearmente indipendenti.
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Es. 125. Provare che nell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathcal{C}^{(0)}(\mathbb{R})$ la funzione $\sin(x+2)$ è combinazione lineare delle funzioni $\sin x$ e $\cos x$.

Es. 126. Provare che $\{1-i,3i\}$ è una base dello $\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathbb{C}$.

Es. 127. Dire se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ che contiene i due vettori $(1,-2,1)$ e $(-3,6,-3)$?

Es. 128. Sia π il piano $2x+3y-z=0$; provare che π rappresenta un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e determinarne una base. Determinare poi un sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^3$ strettamente contenuto in π.

Es. 129. Dato il vettore $v=(3,4)$ di $\mathbb{R}^2$, determinare una base F di $\mathbb{R}^2$ tale che: $M_v^F=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Es. 130. Provare che per ogni $\lambda\in\mathbb{R}$, l'insieme
$F=\{(\lambda,-4,\lambda-3),(-4,\lambda,1)\}$
si può completare a una base di $\mathbb{R}^3$

Es. 131. Sia $S=\{(1,1,1/2),(2,1/2,\sqrt{2})\}$ e sia $F=\{f_1,f_2,f_3\}$ dove $f_1=(1,0,0)$, $f_2=(1,0,1)$, $f_3=(0,1,1)$. Provare che F è una base di $\mathbb{R}^3$ e determinare la matrice M_S^F.

Es. 132. Sia P_3 lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ costituito da 0 e dai polinomi in $\mathbb{R}[X]$ che hanno grado ≤ 3. Sia $U = \{p(X) \in P_3 \ / \ p(-1) = 0\}$. Provare che U è un sottospazio di P_3 e determinare una sua base.

Es. 133. L'applicazione $\phi : M_{m,n}(K) \to M_{n,m}(K)$ che associa ad ogni matrice la sua trasposta è un omomorfismo di K-spazi vettoriali?

Es. 134. Sia $A \in GL_n(K)$ e sia $\phi : M_n(K) \to M_n(K)$ definita da $\phi(M) = A\,M\,A^{-1}$. Provare che ϕ è un isomorfismo di K-spazi vettoriali.

Es. 135. Sia V il K-spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n ad elementi nel corpo K. Determinare la dimensione dei sottospazi di $M_n(K)$ costituiti da:

a) le matrici simmetriche;

b) le matrici diagonali;

c) le matrici triangolari superiori.

Es. 136. Sia $F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Provare che F è una base di $M_2(\mathbb{C})$. Determinare M_S^F dove $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Es. 137. Sia V_α il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ costituito dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -x + \alpha y + 2\alpha z & = & 0 \\ x - \alpha y + 2\alpha z & = & 0 \\ 2x - 2y - z & = & 0 \end{cases}$$

Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la dimensione di V_α.

Es. 138. Sia V l'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $M_2(\mathbb{C})$ e sia

$$W = \{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ \overline{z_1} & \overline{z_2} \end{pmatrix} \ / \ z_1, z_2 \in \mathbb{C} \} \ .$$

Provare che W è un sottospazio di V e determinarne una base B. Completare B ad una base F di V. Sia $A = \begin{pmatrix} 3+i & 2i \\ 3-i & -2i \end{pmatrix}$, determinare $M^F_{\{A\}}$.

Es. 139. Una matrice quadrata $A = (a_{i\,j})$ di ordine n ad elementi in $\mathbb{C}$ si dice *hermitiana* se $a_{i\,j} = \overline{a_{j\,i}}$ per ogni $i, j = 1, \ldots, n$.

Provare che l'insieme H delle matrici hermitiane è un $\mathbb{R}$-sottospazio ma non un $\mathbb{C}$-sottospazio di $M_n(\mathbb{C})$. Determinare una base di H nel caso $n = 2$.

Es. 140. Sia $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'omomorfismo tale che $\phi(2,1) = (1,1,1)$ e $\phi(1,1) = (2,1,0)$. Determinare $\phi(0,1)$ e Ker ϕ.

Es. 141. Sia $\phi : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ l'applicazione definita come

$$\phi(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A$$

Provare che ϕ è lineare e determinare la matrice associata alla base "canonica" di $M_2(\mathbb{R})$.

Es. 142. Sia $\phi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ l'omomorfismo definito dalla matrice:

$$M^G_{\phi(F)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ i & i & 1+i \end{pmatrix}$$

rispetto alle basi $F = \{(1, i, i), (i, i, 1), (0, i, 0)\}$ e $G = \{(1, 1), (i, -i)\}$. Determinare la matrice che rappresenta ϕ rispetto alle basi canoniche.

Es. 143. Sia $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'omomorfismo definito da $\phi(x, y, z, t) = (x+y+z, y+z+t, 3x+y+z-t)$. Determinare una base di Ker ϕ e di Im ϕ.

Es. 144. Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'omomorfismo definito da $\phi(x, y, z) = (x - 2y, x + y + z)$. Determinare la dimensione di Ker ϕ e di Im ϕ.

Es. 145. Sia $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la simmetria rispetto alla retta $x + y = 0$. Esiste una base F di $\mathbb{R}^2$ tale che $M^F_{\phi(F)}$ sia del tipo $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

Es. 146. Esiste un omomorfismo $\phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\dim \mathrm{Ker}\, \phi = 1$?

Es. 147. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ costituito dalle soluzioni del sistema $x - 2y + z = x - z + t = 0$ e sia $W = V(S)$ dove $S = \{(1, 2, 1), (1, 0, 1)\}$. Determinare, se possibile, un omomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $V = \mathrm{Ker}\, \phi$ e $W = \mathrm{Im}\, \phi$.

Es. 148. Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'omomorfismo associato alla matrice

$$M^F_{\phi(F)} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

dove F è la base $\{(1, 1, 0), (3, 4, 1), (0, 0, 1)\}$ di $\mathbb{R}^3$. Determinare $M^{E_3}_{\phi(E_3)}$, Ker ϕ e di Im ϕ.

Es. 149. Sia $\phi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'omomorfismo definito dalla matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2i \\ 1+i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica. Determinare la matrice $M^G_{\phi(G)}$ dove G è la base:
$\{(i, 1, -1), (-2, i, 0), (2i, 1, i)\}$.

Es. 150. Determinare un omomorfismo $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che Ker $\phi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = 2s - 3t, y = s - t, z = s + 2t$ con $s, t \in \mathbb{R}\}$ e scrivere $M^{E_3}_{\phi(E_3)}$.

Es. 151. Sia $\phi_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'omomorfismo definito da $\phi(1, 1) = (1, k), \phi(1, 2) = (1, 1)$.

a) Per quali valori $k \in \mathbb{R}$ ϕ_k è un isomorfismo?

b) È possibile scegliere k in modo che $(0, 1) \in \mathrm{Ker}\, \phi_k$?

c) È possibile scegliere k in modo che $(2, -1) \in \mathrm{Ker}\, \phi_k$?

Es. 152. Sia $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ l'omomorfismo di $\mathbb{C}$-spazi vettoriali definito da $\phi(1+i, 1) = (1, i), \phi(0, i) = (i, -1)$.

a) Determinare $\phi(1, 0)$ e $\phi(0, 1)$.

b) Determinare una base di Ker ϕ e di Im ϕ.

Es. 153. Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'omomorfismo definito da $\phi(x, y, z) = (x + y, x + y + z, 0, z)$.

a) Determinare una base di $\mathrm{Im}\ \phi$ e una di $\mathrm{Ker}\ \phi$.

b) Scrivere la matrice associata a ϕ rispetto alle basi canoniche.

c) È possibile definire un'omomorfismo $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Ker}\,(\psi \circ \phi)$ sia il sottospazio generato da $(1, -1, 0), (1, 0, 0)$?

Es. 154. Siano $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | \quad x + y = z - 2t = 0\}$ e
$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | \quad x = -y + z - 2t\}$.

a) Determinare $V \cap W$.

b) Determinare $V + W$.

c) Esiste un omomorfismo surgettivo $V \to W$?

d) Esiste un omomorfismo surgettivo $W \to V$?

Es. 155. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $(1, -1, 1)$ e $(-1, 1, -1)$.
Calcolare $\dim V$ e dire quante sono le applicazioni lineari $\phi : \mathbb{R}^3 \to V$ tali che $\phi(1, 0, 0) = (1, -1, 1)$, $\phi(0, 1, 0) = (-1, 1, -1)$ e $\mathrm{Ker}\ \phi$ sia generato da $(1, 1, 0), (0, 0, 1)$?

Es. 156. Sia $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | \quad x + y = z + t\}$.

a) Determinare $\dim V$.

b) Dire se il vettore $(1, -1, -1, 1)$ può essere completato a una base di V.

c) Determinare un sottospazio proprio e non nullo di V.

d) Definire un'applicazione lineare $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Ker}\ \psi = V$.

Es. 157. In $\mathbb{R}^4$ sia V il sottospazio generato da $\{(1, 1, 0, 1), (-1, 0, 1, 1)\}$ e W il sottospazio generato da $\{(0, 1, 1, 1), (-1, 0, 1, -1)\}$.

a) Determinare una base di $V \cap W$.

b) Definire un'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\phi(V) \subseteq W$.

Es. 158. Sia $V = \{p(X) \in \mathbb{R}[X] \ / \ \text{grado } (p(X)) \le 2\}$.

a) Esiste una base di V contenente i vettori $X, X + 1$?

b) È vero che i vettori $2X, X^2 - 1$ sono linearmente indipendenti? Generano V?

c) Se $\phi : V \to V$ è l'omomorfismo associato alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $1, X + 1, X^2 + X$, determinare $\phi(2X^2 - X + 3)$.

d) ϕ è iniettivo? È surgettivo?

Es. 159. Siano V l'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\{p(X) \in \mathbb{R}[X] \ / \ \text{grado } (p(X)) \le 4\}$, W il sottospazio $\{p(X) \in \mathbb{R}[X] \ / \ p(1) = 0\}$ e $U = \mathcal{L}(1 + X^2 - X^3, X + X^3, X^2, 1 + X + X^2)$.

a) Determinare una base di U e completarla ad una base di V.

b) E' vero che U e W sono isomorfi?

c) Trovare una base di $U \cap W$.

d) E' vero che $U+W=V$?

e) Definire, se possibile, un omomorfismo $\phi : V \to \mathbb{R}^3$ tale che $U \subset \text{Ker}\,\phi$ e $\text{Im}\,\phi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y-z = y = 0\}$.

Es. 160. Esiste un'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$\phi(1,0,1) = (2,0,0)$, $\phi(0,1,0) = (1,1,1)$ e $\phi(1,1,1) = (3,1,1)$?

Esiste un'applicazione lineare $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$\psi(1,0,1) = (2,0,0)$, $\psi(0,1,0) = (1,1,1)$ e $\psi(1,1,1) = (0,0,0)$?

Es. 161. Sia $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'omomorfismo definito da $\phi(x,y) = (x+y, x+y, 2y)$

a) Determinare la dimensione e una base di $\text{Ker}\,\phi$.

b) Determinare $\phi^{-1}(1,1,1)$ e provare che non è sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

c) Scrivere la matrice associata a ϕ mediante la base $F = \{(1,1),(3,1)\}$ di $\mathbb{R}^2$ e la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Es. 162. Sia $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'omomorfismo associato alla matrice $M^F_{\phi(G)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dove $G = \{(1,-1),(1,1)\}$, $F = \{(0,1),(3,2)\}$.

a) È vero che $\phi = id_{\mathbb{R}^2}$?

b) Determinare la dimensione e una base di $\text{Im}\,\phi$ e di $\text{Ker}\,\phi$.

c) Scrivere la matrice $M^E_{\phi(E)}$ associata a ϕ mediante la base canonica E di $\mathbb{R}^2$.

Es. 163. Sia $V = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \quad | \quad A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{pmatrix}\}$.

a) Provare che V è sottospazio di $M_2(\mathbb{C})$.

b) Trovare una base B di V e completarla a una base F di $M_2(\mathbb{C})$.

c) Trovare un omomorfismo $\phi : V \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$\text{Ker}\,\phi \subseteq \{\begin{pmatrix} 0 & z \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{C}\} \qquad \text{e} \qquad (1,-1,2) \notin \text{Im}\,\phi$$

Es. 164. Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'omomorfismo definito dalla matrice

$$M^F_{\phi(F)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

dove F è la base $\{(2,1,0),(0,0,1),(1,0,1)\}$ di $\mathbb{R}^3$. Determinare:

a) la dimensione e una base di $\text{Im}\,\phi$;

b) la matrice associata a ϕ mediante la base canonica;

c) un omomorfismo $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\text{Im}\,\phi = \text{Ker}\,\psi$ e $(-3,2) \in \text{Im}\,\psi$.

Es. 165. Siano V e W due spazi vettoriali sul corpo k di dimensione rispettivamente m ed n. Provare che:

a) esiste un omomorfismo iniettivo $\phi : V \longrightarrow W \quad \Leftrightarrow \quad m \leq n$;

b) esiste un omomorfismo surgettivo $\phi : V \longrightarrow W \quad \Leftrightarrow \quad m \geq n$;

Es. 166. Provare che per ogni sottospazio V di $\mathbb{R}^n$ esiste un sottospazio W tale che $\mathbb{R}^n = V \oplus W$.

Es. 167. Siano V_1 e V_2 due sottospazi di $\mathbb{R}^n$. Provare che:

a) $V_1 = V_2 \Leftrightarrow V_1^\perp = V_2^\perp$;

b) $(V_1 + V_2)^\perp = V_1^\perp \cap V_2^\perp$;

c) $(V_1 \cap V_2)^\perp = V_1^\perp + V_2^\perp$.

Es. 168. Sia $\phi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'omomorfismo associato alla matrice

$$M^E_{\phi(E)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Provare che esistono due sottospazi V e W tali che $\phi(V) \subset V$, $\phi(W) \subset W$ e $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$.

Es. 169. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Siano W_1 e W_2 due sottospazi di V di dimensione rispettivamente 1 e $n-1$. Provare che se $W_1 \not\subset W_2$, allora $V = W_1 \oplus W_2$.

Es. 170. Sia $F = \{(1,1,0,0),(0,0,1,1),(0,1,1,0),(0,0,0,1)\}$ e sia $G = \{(1,0,0),(1,1,0),(0,1,1)\}$. Provare che F è una base di $\mathbb{R}^4$ e G una base $\mathbb{R}^3$. Sia $\phi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'omomorfismo di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali associato alla matrice

$$M^G_{\phi(F)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Determinare una base di Im ϕ e di Ker ϕ.

b) Determinare un sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2 tale che $\dim \phi(W) = 1$.

c) Determinare tutti i vettori u di $\mathbb{R}^4$ tali che $\phi(u) = (1,-1,0)$.

Es. 171. Sia $\phi_\lambda : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'omomorfismo di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali associato mediante le basi canoniche alla matrice

$$M^{E_3}_{\phi(E_3)} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Dire per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ l'omomorfismo ϕ_λ è un isomorfismo.

b) Determinare una base di Ker ϕ_λ e di Im ϕ_λ.

c) Per $\lambda = 1$ determinare un sottospazio V di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } \phi_\lambda \oplus V$.

Es. 172. Siano V e V' due K-spazi di dimensione finita. Provare che Hom $_K(V, V')$ ha dimensione finita e si ha

$$\dim(\text{Hom }_K(V,V')) = \dim(V) \cdot \dim(V') \ .$$

Es. 173. Provare o confutare le seguenti affermazioni:

a) Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e u è un vettore non nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $\{u + v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

b) La dimensione del sottospazio generato da un insieme finito F di vettori linearmente indipendenti è uguale al numero di vettori in F.

c) Il sottospazio $\{(x, x, x) \ / \ x \in \mathbb{R}\}$ di $\mathbb{R}^3$ ha dimensione 3.

d) Se $F \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme di vettori linearmente dipendenti, allora F contiene più di n vettori.

e) Sia $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'omomorfismo di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali dato da $\phi(x, y) = (y, x + y)$. Esiste una base F di $\mathbb{R}^2$ tale che $M^F_{\phi(F)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Es. 174. Siano $u = (1, -1, 2)$ ed $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da $f(v) = v \times u$, dove $\times$ indica il prodotto vettoriale. Provare che φ è un'applicazione lineare e determinarne il nucleo e l'immagine.

Es. 175. Siano $F = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da
$\varphi(e_1) = (\lambda - 1, \lambda(1 - \lambda), \lambda - 1), \ \varphi(e_2) = (1, 1 - \lambda, 2), \ \varphi(e_3) = (\lambda, -2\lambda^2, -2)$
Determinare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ l'immagine e il nucleo di φ.

Es. 176. Siano $\phi : V \to V'$ un'applicazione lineare e $S = \{v_1, \dots, v_s\} \subset V$. Provare o confutare le seguenti affermazioni:

a) $\phi(S)$ genera $V' \Rightarrow S$ genera V.

b) $\phi(S)$ sistema di vettori lin. indip. $\Rightarrow S$ sistema di vettori lin. indip.

c) S base di $V \Rightarrow \phi(S)$ base di V'.

d) ϕ iniettivo e $v_1, \dots, v_s$ lin. indip. $\Rightarrow \phi(v_1), \dots, \phi(v_s)$ lin. indip.

Es. 177. In $M_{2,3}(\mathbb{R})$ dire se $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix} \in S$ dove

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 5 & 8 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 9 & 3 \\ 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 8 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 5 & 8 & 8 \end{pmatrix} \right\}.$$

Es. 178. Provare che $\{ \ X, X - 2, X^2 - 1 \ \}$ è una base del sottospazio $\{ \ p(X) \in \mathbb{R}[X] \ / \ p(X) = 0 \ \text{ oppure } \ \deg p(X) \leq 2\}$ di $\mathbb{R}[X]$.

Es. 179. Sia V il sottospazio di $\mathbb{Q}[X]$ generato dai polinomi $X^3 + X^2 + 1, \ 2X^3 - X + 3, \ X - 1, \ X^3 + 2X^2 + X - 3, \ 5X^3 - X + 4, \ 2X^2 + X + 1$. Determinare una base di V.

Es. 180. Determinare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^7$ costituito dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x - y + z - t + 5u - v - w & = & 1 \\ 2x + y + 2z - 4t + u - 4v - w & = & 0 \\ -y + 4z - 3t = 2u - v + 2w & = & 2 \end{cases}$$

Es. 181. Sia V_λ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ costituito dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 \ = \ 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 \ = \ 0 \\ x_1 + 2x_2 + \lambda \, x_4 \ = \ 0 \end{cases} .$$

a) Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, la dimensione e una base di V_λ.

b) Sia V_0 il sottospazio corrispondente a $\lambda = 0$. Determinare una base del sottospazio $V_0^\perp$ e due diversi endomorfismi φ_1 e φ_2 di $\mathbb{R}^4$ tali che $\operatorname{Ker} \varphi_1 = \operatorname{Ker} \varphi_2 = V_0$ e $\operatorname{Im} \varphi_1 = \operatorname{Im} \varphi_2 = V_0^\perp$.

Es. 182. Determinare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^5$:

$$V_\lambda = \{ (x,y,z,t,u) \in \mathbb{R}^5 \ / \ \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x & + & \lambda y & & & - & t & + & \lambda u & = & 0 \\ & & \lambda y & + & z & + & \lambda t & & & = & 0 \\ \lambda x & + & y & + & \lambda z & + & t & - & \lambda u & = & 0 \end{array} \right. \}.$$

Fissato $\lambda = 0$, si determini una base ortonormale di V_0.

Es. 183. Si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$

$$F = \{(1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,0,1,1), (0,0,0,1)\} \ .$$

a) Verificare che F è una base di $\mathbb{R}^4$ e determinare le coordinate del vettore $u = (2,-1,0,3)$ rispetto ad F.

Sia E la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$M^E_{\varphi(F)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Determinare $\varphi(1,0,0,0)$.

c) Determinare una base di $\operatorname{Ker} \varphi$ e completarla ad una base di $\mathbb{R}^4$.

d) Determinare due diverse basi di $\operatorname{Im} \varphi$.

e) Determinare, se esiste, un'applicazione lineare $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\alpha \circ \varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sia l'identità.

Capitolo 6

Diagonalizzazione di Matrici

Questo capitolo è dedicato allo studio degli endomorfismi di uno spazio vettoriale.

6.1 Autovalori e autovettori

Definizione 6.1 Sia V uno spazio vettoriale su un corpo K e ϕ un endomorfismo di V. Un sottospazio W di V si dice *sottospazio invariante per* ϕ se $\phi(W) \subset W$.

Proposizione 6.2 *Dato un endomorfismo* ϕ *di* V*, sia* W *un sottospazio invariante per* ϕ*. Se* $\{f_1, \ldots, f_r\}$ *è una base di* W *e* $F = \{f_1, \ldots, f_r\, f_{r+1}, \ldots, f_n\}$ *è una base di* V*, allora la matrice* $M^F_{\phi(F)}$ *è del tipo*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1\,r} & a_{1\,r+1} & \ldots & a_{1\,n} \\ \\ a_{r1} & \ldots & a_{r\,r} & a_{r\,r+1} & \ldots & a_{r\,n} \\ 0 & \ldots & 0 & a_{r+1\,r+1} & \ldots & a_{r+1\,n} \\ \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n\,r+1} & \ldots & a_{n\,n} \end{pmatrix}$$

Dim. Poiché $\phi(f_1) \in W$ si ha $\phi(f_1) = a_{11}f_1 + \ldots + a_{r1}f_r + 0f_{r+1} + \ldots + 0f_n$ e così via. $\square$

Sia v un vettore non nullo di V; dire che $\mathcal{L}(v)$ è invariante per ϕ significa che esiste $\lambda \in k$ tale che $\phi(v) = \lambda v$. Da ciò seguono due importanti corollari

Corollario 6.3 *Sia* ϕ *un endomorfismo di* V *e sia* v *un vettore non nullo di* V *tale che* $\mathcal{L}(v)$ *sia invariante per* ϕ*. Se* $F = \{v, f_2, \ldots, f_n\}$ *è una base di* V*, allora la matrice* $M^F_{\phi(F)}$ *è del tipo*

$$\begin{pmatrix} \lambda & a_{1\,2} & \ldots & a_{1\,n} \\ 0 & a_{2\,2} & \ldots & a_{2\,n} \\ \\ 0 & a_{n\,2} & \ldots & a_{n\,n} \end{pmatrix}$$

Corollario 6.4 *Sia* ϕ *un endomorfismo di* V *e siano* $v_1, \ldots, v_r$ *vettori linearmente indipendenti, tali che* $\mathcal{L}(v_i)$ *è invariante per* ϕ *per ogni* $i = 1, \ldots, r$.

Se $F = \{v_1, \dots, v_r, f_{r+1}, \dots, f_n\}$ *è una base di* V, *allora la matrice* $M^F_{\phi(F)}$ *è del tipo*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & a_{1\,r+1} & \dots & a_{1\,n} \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & a_{2\,r+1} & \dots & a_{2\,n} \\ \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r & a_{r\,r+1} & \dots & a_{r\,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{r+1\,r+1} & \dots & a_{r+1\,n} \\ \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n\,r+1} & \dots & a_{n\,n} \end{pmatrix}$$

Definizione 6.5 Sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo e sia v un vettore *non nullo* tale che $\mathcal{L}(v)$ sia un sottospazio invariante per ϕ, cioè esiste $\lambda \in K$ tale che $\phi(v) = \lambda v$. Allora λ si dice *autovalore* di ϕ e v si dice *autovettore* associato a λ.

La ricerca di autospazi invarianti e in particolare di autovettori di un endomorfismo ϕ di V, ha quindi lo scopo di trovare una base di V rispetto alla quale la matrice associata a ϕ sia di tipo particolarmente semplice (cioè con molti zeri). La massima semplicità si ottiene con le matrici diagonali.

Definizione 6.6 Un endomorfismo ϕ di V si dice *semplice* se esiste una base F di V tale che $M^F_{\phi(F)}$ sia diagonale.

Da quanto precede si ha quindi:

Proposizione 6.7 *Sia* ϕ *un endomorfismo di* V. *Allora* ϕ *è semplice se e solo se esiste una base di* V *formata da autovettori di* ϕ.

Vediamo ora qualche esempio di endomorfismo e studiamo la sua semplicità.

Esempio 1. La simmetria rispetto alla retta $x-y=0$ lascia fissi tutti i vettori di tale retta e trasforma nei rispettivi opposti i vettori della retta $x+y=0$. Quindi, se poniamo ad esempio $f_1 = (1,1)$, $f_2 = (1,-1)$, allora $F = \{f_1, f_2\}$ è una base formata da autovettori, quindi ϕ è semplice. Infatti $M^F_{\phi(F)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Esempio 2. Sia $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito da $M^E_{\phi(E)} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

In questo caso la descrizione geometrica non è facile quindi, per decidere se ϕ è semplice conviene cercare una strada puramente algebrica.

6.2 Autospazi e polinomio caratteristico

In questo numero vogliamo cercare un metodo generale per la determinazione degli autovalori e degli autovettori di un endomorfismo.

Definizione 6.8 Sia ϕ un endomorfismo di V e sia λ un suo autovalore; definiamo *autospazio associato a* λ, e lo indichiamo con V_λ, il sottospazio costituito dal vettore nullo e da tutti gli autovettori associati a λ.

Ne segue che se $\lambda \in K$ è un autovalore di ϕ

$$V_\lambda = \{v \in V \;/\; \phi(v) = \lambda v\}$$

e la verifica che è un sottospazio è immediata.

L'insieme degli autovettori coincide quindi con l'unione degli autospazi associati agli autovalori, tolto il vettore nullo.

A questo punto è chiaro che se riusciamo a far vedere che un autovalore determina l'autospazio ad esso associato, il problema della ricerca degli autovettori si risolve trovando gli autovalori.

Lemma 6.9 *Sia ϕ un endomorfismo di V e sia $\lambda \in K$. Allora, detta $\lambda - \phi$ l'applicazione di V in sé così definita*

$$(\lambda - \phi)(v) = \lambda v - \phi(v)$$

si ha che $\lambda - \phi$ è un endomorfismo.

Dim. E' una verifica immediata. □

Lemma 6.10 *Sia ϕ un endomorfismo di V e sia λ un suo autovalore. Allora si ha*

$$V_\lambda = \operatorname{Ker}(\lambda - \phi)$$

Dim. Si ha infatti $V_\lambda = \{\phi(v) = \lambda v\} = \{v \in V \ / \ (\lambda - \phi)(v) = 0_V\} = \operatorname{Ker}(\lambda - \phi)$ □

Il Lemma 6.10 risolve dunque il problema di determinare l'autospazio associato ad un autovalore; il problema attuale è dunque quello di determinare gli autovalori.

Lemma 6.11 *Siano ϕ un endomorfismo di V, F una base di V, I la matrice identità di ordine uguale a* $\dim(V)$ *e $\lambda \in K$. Allora sono fatti equivalenti:*

1. *λ è un autovalore di ϕ;*
2. $\det(\lambda I - M^F_{\phi(F)}) = 0$.

Dim. Per definizione λ è un autovalore di ϕ se e solo se esiste $v \in V_\lambda$, $v \neq 0$. Per il Lemma 6.10 si ha $\operatorname{Ker}(\lambda - \phi) \neq \{0_V\}$ e quindi la matrice associata all'endomorfismo $\lambda - \phi$ ha determinante nullo. D'altra parte si vede subito che:

$$M^F_{(\lambda-\phi)(F)} = M^F_{\lambda(F)} - M^F_{\phi(F)} = \lambda I - M^F_{\phi(F)} \quad .$$

□

Definizione 6.12 Dicesi *polinomio caratteristico* di ϕ il polinomio

$$\det(TI - M^F_{\phi(F)})$$

dove T è un'indeterminata.

Si osservi che il polinomio caratteristico di ϕ ha grado $n = \dim(V)$. La proposizione seguente mostra che la definizione precedente non dipende dalla particolare base F di V fissata.

Proposizione 6.13 *Siano F e G due basi di V. Allora*

$$\det(TI - M^F_{\phi(F)}) = \det(TI - M^G_{\phi(G)}) \quad .$$

Dim. Poniamo $A = M^F_{\phi(F)}$, $B = M^G_{\phi(G)}$ e $C = M^F_G$. Allora

$$\begin{aligned}
\det(T\,I - B) \quad = \quad & \det(T\,I - (C^{-1}\,A\,C)) \\
& \det(T\,(C^{-1}\,C) - (C^{-1}\,A\,C)) \\
& \det(C^{-1}\,(T\,I - A)\,C) \\
& \det(C^{-1})\,\det(T\,I - A)\,\det(C) \\
& \det(T\,I - A) \quad .
\end{aligned}$$

□

Corollario 6.14 *Gli autovalori di ϕ sono le radici del polinomio caratteristico di ϕ appartenenti a K e il loro numero non supera* $\dim(V)$.

Dim. Segue dal Lemma 6.11 e dalla Proposizione 6.13. □

Esempio. Sia $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito da $M^E_{\phi(E)} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico è

$$f(T) = \det \begin{pmatrix} T-2 & -4 \\ -3 & T-1 \end{pmatrix} = T^2 - 3T - 10$$

Le radici di $f(T)$, e quindi gli autovalori di ϕ, sono 5 e -2. L'autospazio associato all'autovalore 5 è

$$V_5 = \{v \in \mathbb{R}^2 \ / \ \phi(v) = 5v\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 3x - 4y = 0\}$$

Una base di V_5 è ad esempio $\{v_1 = (4,3)\}$.

Analogamente una base di V_{-2} è $\{(1,-1)\}$. Allora posto $F = \{v_1, v_2\}$, F è una base di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori e si ha $M^F_{\phi(F)} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Quindi ϕ è semplice.

6.3 Endomorfismi semplici

In questo numero vogliamo cercare una caratterizzazione degli endomorfismi semplici in termini della molteplicità degli autovalori e della dimensione dei corrispondenti autospazi che sono facilmente calcolabili.

Siano quindi ϕ un endomorfismo di V, $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ gli autovalori di ϕ e $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_s}$ gli autospazi corrispondenti. Poniamo $V' = V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_s}$.

Nel numero precedente abbiamo visto che l'insieme degli autovettori coincide con l'unione degli autospazi associati agli autovalori, tolto il vettore nullo. E' allora chiaro che l'esistenza di una base di V formata da autovettori equivale al fatto che sia $V' = V$.

Sono dunque essenziali le due seguenti proposizioni.

Proposizione 6.15 *Con le notazioni precedenti*

$$V' = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_s} \ .$$

Dim. Poiché il caso generale presenta qualche complicazione tecnica, per dare un'idea più chiara facciamo la dimostrazione nel caso $s = 2$. Basta allora provare che $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

Sia $v \in V_1 \cap V_2$; allora $\phi(v) = \lambda_1 v = \lambda_2 v$ da cui $(\lambda_1 - \lambda_2)v = 0$ e quindi, essendo $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $v = 0$. □

Proposizione 6.16 *Sia V_λ l'autospazio associato all'autovalore λ di ϕ e sia $\mu(\lambda)$ la molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico di ϕ. Allora si ha:*

$$\dim(V_\lambda) \leq \mu(\lambda)$$

Dim. Sia $r = \dim V_\lambda$ e sia $G = \{f_1, \ldots, f_r\}$ una base di V; completiamo G a una base $F = \{f_1, \ldots, f_r, f_{r+1}, \ldots, f_n\}$ di V. Allora $M^F_{\phi(F)}$ è del tipo

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & a_{1\,r+1} & \ldots & a_{1\,n} \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 & a_{2\,r+1} & \ldots & a_{2\,n} \\ \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_r & a_{r\,r+1} & \ldots & a_{r\,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{r+1\,r+1} & \ldots & a_{r+1\,n} \\ \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n\,r+1} & \ldots & a_{n\,n} \end{pmatrix}$$

Detto $f(T)$ il polinomio caratteristico di ϕ, si ha
$f(T) = \det(TI - M^F_{\phi(F)}) = (T-\lambda)^r g(T)$, da cui $r \leq \mu(\lambda)$. □

Abbiamo ora tutti gli elementi per dimostrare il teorema fondamentale che caratterizza gli endomorfismi semplici.

Teorema 6.17 *Dato un endomorfismo ϕ di V, siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ i suoi autovalori e siano $\mu(\lambda_1), \ldots, \mu(\lambda_s)$ le loro rispettive molteplicità come radici del polinomio caratteristico e $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_s}$ i rispettivi autospazi. Sono fatti equivalenti*

1. *ϕ è semplice;*
2. *Esiste una base di V formata da autovettori di ϕ;*
3. *$V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_s}$;*
4. *Le radici del polinomio caratteristico sono tutte in K e si ha*

$$\dim(V_{\lambda_i}) = \mu(\lambda_i)$$

per ogni $i = 1, \ldots, s$.

Dim. 1) $\Leftrightarrow$ 2). Per la Proposizione 6.7.
2) $\Rightarrow$ 3). L'ipotesi implica che $V = V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_s}$ e allora si conclude usando la Proposizione 6.15.
3) $\Rightarrow$ 2). Basta scegliere una base in ciascuno dei V_{λ_i} e fare l'unione.
3) $\Rightarrow$ 4). Si ha

$$\begin{array}{rcl} n & = & \dim(V) \quad = \quad \dim(V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_s}) \\ & \leq & \mu(\lambda_1) + \ldots + \mu(\lambda_s) \\ & \leq & \deg f(T) \quad = \quad n \end{array}$$

Quindi si tratta di uguaglianze e allora per la Proposizione 6.16 si ha $\dim(V_{\lambda_i}) = \mu(\lambda_i)$ e il polinomio caratteristico non può avere altre radici, perché queste contribuirebbero ad aumentarne il grado. In conclusione le uniche radici di $f(T)$ sono gli autovalori e dunque sono tutte in K.

4) $\Rightarrow$ 3). Essendo in K, le radici di $f(T)$ sono tutti e soli gli autovalori, ossia $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ e quindi $n = \mu(\lambda_1) + \ldots + \mu(\lambda_s)$. Per ipotesi si ha $n = \dim(V_{\lambda_1} + + \ldots + \dim(V_{\lambda_s})$ e quindi si conclude usando la Proposizione 5.55. □

Corollario 6.18 *Se K è algebricamente chiuso (ad esempio $K = \mathbb{C}$), la condizione (4) del teorema precedente può essere sostituita da*

4'. $\dim(V_{\lambda_i}) = \mu(\lambda_i)$ *per ogni $i = 1, \ldots, s$.*

Esempio 1. *Studiare l'endomorfismo ϕ di $\mathbb{R}^3$ così definito $\phi(x,y,z) = (y,z,x)$.*

Si ha $M^E_{\phi(E)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e

$$f(T) = \begin{vmatrix} T & -1 & 0 \\ 0 & T & -1 \\ -1 & 0 & T \end{vmatrix} = T^3 - 1 = (T-1)(T-\epsilon_1)(T-\epsilon_2)$$

dove ϵ_1, ϵ_2 sono le due radici cubiche di 1 complesse non reali; quindi 1 è l'unico autovalore di ϕ e pertanto ϕ non è semplice.

Esempio 2. *Studiare l'endomorfismo ϕ di $\mathbb{R}^3$ così definito $\phi(x,y,z) = (x,y,-2y-z)$.*

Si ha $M^E_{\phi(E)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ e $f(T) = (T-1)^2(T+1)$. Inoltre

$$\dim(V_1) = 3 - \varrho \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 = \mu(1)$$

$$\dim(V_{-1}) = 3 - \varrho \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 1 = \mu(-1)$$

Quindi ϕ è semplice. Una base di V_1 è ad esempio $\{e_1 = (1,0,0), v = (0,1,-1)$. Una base di V_{-1} è ad esempio $\{e_3 = (0,0,1)\}$. Allora $F = \{e_1, v, e_3\}$ è una base di autovettori, quindi $M^F_{\phi(F)}$ è diagonale. Inoltre i rispettivi autovalori sono $1,\ 1,\ -1$, quindi

$$M^F_{\phi(F)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esempio 3. *Studiare l'endomorfismo ϕ di $\mathbb{R}^2$ definito da $M^E_{\phi(E)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.*

Si ha $f(T) = (T-2)^2$ e $\dim(V_2) = 1 < \mu(2) = 2$. Quindi ϕ non è semplice.

6.4 Matrici simili

Nei numeri precedenti abbiamo studiato il problema della semplicità degli endomorfismi. Per il seguito è utile svincolarsi per un momento dagli endomorfismi stessi e rivedere tutto in termini di teoria delle matrici.

Definizione 6.19 Siano K un corpo, $A, B \in M_n(K)$. Si dice che A è *simile* a B, e si scrive $A \sim B$, se esiste una matrice invertibile $P \in M_n(K)$ tale che

$$B = P^{-1}\, A\, P \ .$$

Si verifica facilmente che la relazione di similitudine è una relazione d'equivalenza in $M_n(K)$.

Definizione 6.20 Una matrice si dice *diagonalizzabile* se è simile ad una matrice diagonale.

Il collegamento con quanto detto nei numeri precedenti è dato dalla seguente

Proposizione 6.21 *Siano $A \in M_n(K)$ e ϕ l'endomorfismo di K^n definito da $M^E_{\phi(E)} = A$. Allora A è diagonalizzabile se e solo se ϕ è semplice.*

Dim. Se A è diagonalizzabile, sia P una matrice invertibile tale che $B = P^{-1}\, A\, P$ sia diagonale e sia F la base di K^n tale che $M^F_E = P$. Allora $B = M^F_E\, M^E_{\phi(E)}\, M^E_F = M^F_{\phi(F)}$ (Teorema 5.50), e poiché B è diagonale, ϕ è semplice.

Viceversa se ϕ è semplice, esiste una base F tale che $M^F_{\phi(F)}$ è diagonale; d'altra parte

$$M^F_{\phi(F)} = M^F_E\, M^E_{\phi(E)}\, M^E_F = (M^E_F)^{-1}\, M^E_{\phi(E)}\, M^E_F$$

quindi A è diagonalizzabile. □

Oss. La proposizione precedente fa capire che si può parlare di autovettori, autovalori, autospazi, polinomio caratteristico di una matrice A, perché in realtà ciò significa autovettori, autovalori, ecc. dell'endomorfismo ϕ di K^n tale che $M^E_{\phi(E)} = A$.

Proposizione 6.22 *Due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico (e quindi gli stessi autovalori).*

Dim. Si ha $P\,A\,P^{-1} - T\,I = P\,(A - T\,I)\,P^{-1}$, e quindi
$\det(P\,A\,P^{-1} - T\,I) = \det(P\,(A - T\,I)\,P^{-1} = \det(A - T\,I)$. □

Definizione 6.23 Sia $A \in M_n(K)$. Dicesi *traccia* di A, e si denota con $\mathrm{Tr}(A)$, l'elemento così definito

$$\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} \ .$$

Proposizione 6.24 *Sia* $A \in M_n(K)$ *e sia* $f(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \ldots + a_0$ *il suo polinomio caratteristico; allora*

$$\mathrm{Tr}(A) = -a_{n-1} \ , \qquad \det(A) = (-1)^n a_0$$

Dim. E' una facile verifica. □

Proposizione 6.25 *Sia* $A \in M_n(K)$*; siano* $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ *le radici del polinomio caratteristico di* A*,* $\mu_1, \ldots, \mu_s$ *le loro rispettive molteplicità. Allora si ha*

1. $\mathrm{Tr}(A) = \mu_1\lambda_1 + \ldots + \mu_s\lambda_s$*;*

2. $\det(A) = \lambda_1^{\mu_1} \cdots \lambda_s^{\mu_s}$

Dim. Basta osservare che

$$f(T) = (T - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (T - \lambda_s)^{\mu_s}$$

e utilizzare la proposizione precedente. □

6.5 Il teorema di Jordan

Abbiamo visto che la classe di similitudine di una matrice diagonalizzabile contiene una matrice diagonale, ma non tutte le matrici $A \in M_n(K)$ sono diagonalizzabili. Sorge allora il problema di trovare in generale dei buoni rappresentanti (forme canoniche) per le classi di similitudine in modo tale che quando A è diagonalizzabile la sua forma canonica sia una matrice diagonale. Tra tutte le soluzioni note di questo problema la più importante è la cosiddetta *forma canonica di Jordan*, a cui accenneremo brevemente. Per la dimostrazione si veda un qualunque testo di algebra lineare.

Definizione 6.26 Una *matrice ridotta o blocco di Jordan* di ordine n è un elemento di $M_n(K)$ del tipo

$$J_{n,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

per qualche $\lambda in K$.

Una matrice $A \in M_n(K)$ si dice in *forma canonica di Jordan* se è del tipo

$$\begin{pmatrix} J_{n_1,\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{n_2,\lambda_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & J_{n_s,\lambda_s} \end{pmatrix}$$

per opportuni interi positivi $n_1, \ldots, n_s$ tali che $\sum n_i = n$ e $\lambda_i \in K$.

Si dimostra facilmente che gli scalari λ_i sono gli autovalori di A. In particolare se $s = n$ e $n_i = 1$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, allora A è una matrice diagonale.

Teorema 6.27 (Jordan) *Se una matrice $A \in M_n(K)$ possiede tutti i suoi autovalori in K, allora esiste una matrice invertibile $P \in M_n(K)$ tale che $P\,A\,P^{-1}$ sia in forma canonica di Jordan.*

6.6 Matrici simmetriche

In questo capitolo abbiamo finora visto come affrontare il problema della diagonalizzazione delle matrici e abbiamo provato al riguardo un criterio fondamentale (Teorema 6.17). Adesso vogliamo mostrare che certe classi di matrici verificano le condizioni del suddetto teorema. Di particolare interesse per le sue applicazioni è il caso delle matrici simmetriche.

Definizione 6.28 Un endomorfismo ϕ di V si dice *autoaggiunto* se per ogni $v, v' \in V$ si ha

$$\phi(v) \cdot v' = v \cdot \phi(v')$$

Proposizione 6.29 *Sia $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ una base ortonormale di V. Allora ϕ è autoaggiunto se e solo se $M^F_{\phi(F)}$ è simmetrica.*

Dim. Supponiamo $M^F_{\phi(F)}$ simmetrica. Per la linearità di ϕ e del prodotto scalare, basta provare che $f_i \cdot \phi(f_j) = \phi(f_i) \cdot f_j$ per ogni i, j. Ma $\phi(f_i) = a_{1i} f_1 + \ldots + a_{ni} f_n$, $\phi(f_j) = a_{1j} f_1 + \ldots + a_{nj} f_n$, e quindi $f_i \cdot \phi(f_j) = a_{ij}$ e $\phi(f_i) \cdot f_j = a_{ji}$ e si conclude per la simmetria della matrice. L'implicazione inversa si prova invertendo il ragionamento. □

Per le matrici simmetriche reali abbiamo:

Proposizione 6.30 *Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica reale. Allora le radici del polinomio caratteristico di A sono reali.*

Dim. Consideriamo A come una matrice di numeri complessi e sia $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ il corrispondente omomorfismo. Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ una radice del polinomio caratteristico di A, e sia $u \in \mathbb{C}^n$ un corrispondente autovettore. Si ha

$$A\,u = \lambda\,u \ .$$

Prendendo i complessi coniugati del primo e del secondo membro, si ha anche

$$A\,\overline{u} = \overline{\lambda}\,\overline{u} \ .$$

Consideriamo lo scalare ${}^t\overline{u}Au$, e scriviamolo in due modi diversi utilizzando le due uguaglianze precedenti:

$$ {}^t\overline{u}\,A\,u = {}^t\overline{u}\,(A\,u) = {}^t\overline{u}\,\lambda u = \lambda\ {}^t\overline{u}\,u \tag{6.1}$$

$$ {}^t\overline{u}\,A\,u = (\,{}^t\overline{u}\,A)\,u = {}^t(A\,\overline{u})\,u = {}^t(\overline{\lambda}\,\overline{u})\,u = \overline{\lambda}\ {}^t\overline{u}\,u \tag{6.2}$$

Se $u = (x_1, \ldots, x_n)$, si ha che

$$ {}^t\overline{u}\,u = \overline{x_1}x_1 + \ldots + \overline{x_n}x_n $$

è un numero reale positivo perché $u \neq 0$ e dalle (6.1) e (6.2) si deduce che $\lambda = \overline{\lambda}$ cioè che λ è reale. □

Proposizione 6.31 *Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica reale e siano λ_1, λ_2 due autovalori distinti di A. Allora*

$$V_{\lambda_1} \perp V_{\lambda_2} \ .$$

Dim. Siano $v_1 \in V_{\lambda_1}$, $v_2 \in V_{\lambda_2}$. Allora si ha

$$\lambda_1(v_1 \cdot v_2) = (\lambda_1 v_1) \cdot v_2 = \phi(v_1) \cdot v_2 = v_1 \cdot \phi(v_2) = \lambda_2(v_1 \cdot v_2)$$

e quindi $v_1 \cdot v_2 = 0$. $\square$

Proposizione 6.32 *Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ gli autovalori di una matrice simmetrica reale A di ordine n. Allora*

$$\mathbb{R}^n = V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_r} \quad .$$

Dim. Poniamo $V = V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_r}$ e supponiamo per assurdo che $V \neq \mathbb{R}^n$, allora $V^\perp$ è un sottospazio non banale. Consideriamo l'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ tale che $M^E_{\phi(E)} = A$; ovviamente $\phi(V) \subset V$.

Siano $v \in V$, $v' \in V^\perp$. Si ha $\phi(v') \cdot v = v' \cdot \phi(v) = 0$ essendo $\phi(v) \in V$. Questo significa che anche $V^\perp$ è invariante per ϕ. Indicando con $\phi_{|V^\perp}$ l'endomorfismo di $V^\perp$ indotto da ϕ, ovviamente anche $\phi_{|V^\perp}$ è autoaggiunto e dunque le radici del suo polinomio caratteristico sono reali; ciò significa che $\phi_{|V^\perp}$ possiede degli autovalori. Sia λ uno di questi; λè ovviamente autovalore anche per ϕ e dunque λ coincide con uno dei λ_i; sia $\lambda = \lambda_{\bar{i}}$ e sia $0 \neq v \in V_\lambda$. Dunque $v \in V \cap V^\perp$ e ciò è assurdo. $\square$

Definizione 6.33 Sia $P \in M_n(\mathbb{R})$. Allora si dice che P è una *matrice ortogonale reale* se $P = M^E_F$ con F base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 6.34 *Sia $P \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice ortogonale reale. Allora* $\det(P) = \pm 1$.

Dim. Poiché $P^{-1} = {}^tP$ (Teorema 5.63) e $\det({}^tP) = \det(P)$, si ha $(\det(P))^2 = 1$ da cui la tesi. $\square$

Definizione 6.35 Una matrice ortogonale reale P si dice *speciale* se $\det(P) = 1$.

Teorema 6.36 *Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica reale. Allora esiste una matrice ortogonale speciale P e una matrice diagonale B tali che:*

$$B = {}^tP\,A\,P$$

Dim. Dalle Proposizioni 6.34 e 6.15 si ha $\mathbb{R}^n = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_r}$, dunque esiste una base di autovettori; ma di più $V_{\lambda_i} \perp V_{\lambda_j}$ se $i \neq j$ come visto nella Proposizione 6.31 e quindi se si sceglie una base ortonormale F_i in V_{λ_i}, la base $F = F_1 \cup \ldots \cup F_r$ è una base ortonormale di autovettori. Posto $A = M^E_{\phi(E)}$, $B = M^F_{\phi(F)}$, $P = M^E_F$ si ha che P è ortogonale e

$$B = M^F_{\phi(F)} = M^E_F\, M^E_{\phi(E)} M^E_F = P^{-1}\,A\,P$$

è diagonale. Inoltre $P^{-1} = {}^tP$ come risulta dal Teorema 5.63 e avendo la possibilità di scegliere al posto di un autovettore il suo opposto, P si può scegliere speciale. $\square$

6.7 Trasformazioni di coordinate cartesiane

In questo paragrafo ci riferiremo sempre al piano, ma tutto quanto verrà detto si potrà intendere, con le ovvie modifiche, anche per lo spazio.

Ricordiamo che un sistema di coordinate cartesiane nel piano è individuato dall'origine O e da due vettori non paralleli u_1, u_2 e si indica con $\sigma(O; u_1, u_2)$. Gli assi coordinati sono le rette individuate da O e dai vettori u_1, u_2 orientate come i due vettori e con le unità di misura date rispettivamente dai segmenti rappresentativi di u_1, u_2.

Definizione 6.37 Siano $\sigma(O; u_1, u_2)$ e $\sigma'(O'; u_1', u_2')$ due sistemi di coordinate nel piano. Di dice che:

σ' si ottiene per *traslazione* di σ se $u_1 = u_1'$ e $u_2 = u_2'$;

σ' si ottiene per *cambio di base* in σ se $O = O'$.

E' immediato provare la seguente

Proposizione 6.38 *Sia A un punto del piano e siano (x, y) le sue coordinate in un sistema $\sigma = \sigma(O; u_1, u_2)$ e (x', y') le sue coordinate in un sistema $\sigma' = \sigma'(O'; u_1', u_2')$. Se σ' si ottiene per traslazione di σ e se (a, b) sono le coordinate di O' in σ, allora si ha*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Proposizione 6.39 *Con le notazioni precedenti, siano $F = \{u_1, u_2\}$, $F' = \{u_1', u_2'\}$ le due basi di $\mathbb{R}^2$ individuate dai vettori u_1, u_2 e u_1', u_2' e indichiamo con P la matrice $M_{F'}^F$. Se σ' si ottiene per cambio di base in σ, allora si ha*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Dim. Posto infatti $u = P - O$, si ha

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M_u^F \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_u^{F'}$$

e allora la tesi segue dal fatto che $M_u^F = M_{F'}^F M_u^{F'}$. □

Teorema 6.40 *Sia A un punto del piano e siano (x, y) le sue coordinate in un sistema $\sigma = \sigma(O; u_1, u_2)$ e (X, Y) le sue coordinate in un sistema $\Sigma' = \Sigma'(O'; v_1, v_2)$. Siano poi (a, b) le coordinate di O' in σ, $F = \{u_1, u_2\}$, $G = \{v_1, v_2\}$, $P = M_G^F$. Allora*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Dim. Segue dalle Proposizioni 6.38 e 6.39. □

Corollario 6.41 *Ogni trasformazione di coordinate cartesiane si compone di una traslazione e di un cambio di base.*

Vediamo ora di studiare alcune particolari trasformazioni di coordinate; per fare ciò è utile la seguente

Proposizione 6.42 *Siano $P \in M_n(\mathbb{R})$ e $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'endomorfismo definito da $M_{\phi(E)}^E = P$. Allora sono fatti equivalenti*

1. *P è ortogonale;*
2. *$v_1 \cdot v_2 = \phi(v_1) \cdot \phi(v_2)$ per ogni $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$;*
3. *$|v| = |\phi(v)|$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$.*

Dim. 1) $\Rightarrow$ 2). Per la linearità di ϕ, basta provare che $e_i \cdot e_j = \phi(e_i) \cdot \phi(e_j)$ e questo segue subito dalla ortogonalità di P.

2) $\Rightarrow$ 3). Basta porre $v_1 = v_2 = v$.

3) $\Rightarrow$ 2). Si ha

$$2(v_1 \cdot v_2) = |v_1|^2 + |v_2|^2 - |v_1 - v_2|^2$$

$$2(\phi(v_1) \cdot \phi(v_2)) = |\phi(v_1)|^2 + |\phi(v_2)|^2 - |\phi(v_1 - v_2)|^2$$

e quindi la tesi.

2) $\Rightarrow$ 1). Poiché $\phi(e_i) \cdot \phi(e_j) = e_i \cdot e_j$, la matrice P è ortogonale. □

Corollario 6.43 *Un cambio di base mediante matrice ortogonale (speciali) lascia invariate le distanze e gli angoli (orientati).*

Dim. Siano A, B due punti del piano, σ il sistema di partenza, σ' il sistema di arrivo, $u = A - O$, $v = B - O$. Detta d la distanza di A da B calcolata in σ e d' la distanza di A da B calcolata in σ', si ha

$$d = |u - v| = |\phi(u - v)| = |\phi(u) - \phi(v)| = d'$$

Per gli angoli il ragionamento è analogo, basta applicare la condizione (b) della Proposizione 6.42. □

Definizione 6.44 Una trasformazione di coordinate cartesiane che lascia invariate distanze e gli angoli (orientati) si dice *movimento*.

I movimenti sono quindi tutte e sole le trasformazioni di coordinate cartesiane che si compongono di traslazioni e cambi di base mediante matrici ortogonali speciali.

6.8 Esercizi

Es. 184. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Provare che A è diagonalizzabile. Determinare tutte le matrici B diagonali simili alla matrice A e per ciascuna di esse si determini una matrice invertibile Q tale che $B = Q^{-1}AQ$.

Es. 185. Provare che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ ma non su $\mathbb{R}$.

Es. 186. Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo. provare che esiste un sottospazio V di $\mathbb{R}^3$, $V \neq \{0\}$, tale che $\phi(V) \subset V$.

Es. 187. Dire quali delle seguenti matrici sono diagonalizzabili su $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es. 188. Sia $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ dato da $\phi(z, w) = (z + 2w, w - z)$. Trovare gli autovalori di ϕ (su $\mathbb{C}$) e mostrare che esiste una base di $\mathbb{C}^2$ formata da autovettori di ϕ. Trovare una tale base e la matrice di ϕ rispetto a tale base.

Es. 189. Sia $\phi_a : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ l'omomorfismo definito da

$$\phi(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a-d \end{pmatrix}$$

è semplice?

Es. 190. Sia $\phi_a : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'omomorfismo definito da $\phi_a(x, y) = (ax + y, y)$. Per quali valori di a l'omomorfismo ϕ_a è semplice?

Es. 191. Sia $\phi_a : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'omomorfismo definito da $\phi_a(x, y, z) = (x + 3y, x - y, ax + az)$. Per quali valori di a l'omomorfismo ϕ_a è semplice?

Es. 192. Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Es. 193. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Determinare una base ortonormale F di $\mathbb{R}^3$ tale che posto $P = M_F^E$ la matrice ${}^tPAP$ sia diagonale.

Es. 194. E' vero che matrici $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ sono simili per ogni $a, b \in \mathbb{R}$?

Es. 195. Sia $\phi : V \to V$ un isomorfismo. Provare che λ è un autovalore di ϕ se e solo se $1/\lambda$ è un autovalore di ϕ^{-1}.

Es. 196. Sia V un K-spazio vettoriale e sia ϕ un endomorfismo di V. Se λ_1 e λ_2 sono due autovalori distinti di ϕ è possibile che $\lambda_1 + \lambda_2$ sia un autovalore di ϕ? E $\lambda_1 \cdot \lambda_2$?

Es. 197. Sia $V = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x = y, x + z - u = 0\}$;
a) Provare che V è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ e determinarne una base ortonormale.
b) Determinare $V^\perp$.
c) Determinare la proiezione ortogonale del sottospazio

$$W = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + u = 0, y - z - u = 0, x - 2y = 0\}$$

su $V^\perp$.
d) Trovare un endomorfismo semplice di $\mathbb{R}^4$ che abbia V come sottospazio invariante.

Es. 198. Provare che nello spazio la proiezione ortogonale su un piano passante per l'origine dà luogo a un endomorfismo semplice.

Es. 199. Provare che nello spazio la simmetria rispetto a una retta passante per l'origine dà luogo a un endomorfismo semplice.

Es. 200. Sia A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Determinare gli autovalori di A;

b) Determinare una matrice B avente gli stessi autovalori di A e avente come autospazi $V = \{(x,y,z) \;/\; x-y=0\}$ e $W = V((1,2,0))$.

Es. 201. Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo dato da

$$\phi(x,y,z) = (2x+y-z, -2x-y+3z, z)$$

Dire se ϕ è semplice.

Es. 202. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da $(0,3,1,0)$, $(0,0,0,1)$. Determinare un endomorfismo semplice $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che abbia W come autospazio associato all'autovalore -1.

Es. 203. Sia $W = \{x,y,z,u) \in \mathbb{R}^4 \;/\; x=y, x+z=u\}$.

a) Trovare una base ortonormale di W.

b) Trovare la proiezione ortogonale di $V = \{x,y,z,u) \in \mathbb{R}^4 \;/\; x+u=0, y-z-u=0x-2y=0\}$ su $V^{\perp}$.

Es. 204. Per ciascuna delle seguenti matrici reali determinare gli autovalori e la loro molteplicità e stabilire se è diagonalizzabile. Per le matrici A diagonalizzabili trovare una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

Es. 205. Determinare autovalori e autovettori della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

e mostrare che essa non è simile a una matrice diagonale.

Es. 206. Provare che gli autovalori delle matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

non sono distinti ma che esse sono diagonalizzabili; determinare per ognuna di esse una matrice non singolare che la diagonalizza.

Capitolo 7

Coniche

Queste curve furono studiate fin dal IV secolo a.C. da Menecmo, poi da Euclide (300 a.C.) e soprattutto da Apollonio (200 a.C.) il quale scrisse 8 libri di cui 7 sono pervenuti: distingue *iperboli*, *parabole* e *ellissi*. Apollonio studia le coniche come curve ottenute segando un cono (circolare retto) di vertice V con un piano π; se π non passa per V si ha un'iperbole se π è parallelo all'asse del cono, una parabola se π è parallelo ad una generatrice del cono e un'ellisse altrimenti. Se invece il piano passa per il vertice V si ha o un solo punto, o una retta (se π è tangente al cono lungo una generatrice) o due rette incidenti in V.

Dai risultati di Apollonio, in termini moderni, segue che i punti di una conica hanno coordinate che soddisfano un'equazione di secondo grado.

Nel 1600 Fermat e Cartesio (1637) mostrano che ogni curva del secondo ordine è una conica (nel senso precedente). Noi prendiamo come definizione la seguente:

Definizione 7.1 Una *conica* è il luogo dei punti $P(x, y)$ del piano (dotato di un sistema di coordinate cartesiane) le cui coordinate soddisfano una equazione di secondo grado in x e y.

Scrivendo

$$\gamma : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{7.1}$$

si intende che γ è la conica rappresentata dall'equazione di secondo grado in x e y data.

Definizione 7.2 La conica γ si dice *reale* se tutti i coefficienti dell'equazione (eventualmente moltiplicati per uno stesso numero complesso non nullo) sono reali. γ si dice *a punti reali* se ha almeno un punto con coordinate reali.

Esempio: $x^2 + y^2 = -1$ non ha punti reali; $x^2 + y^2 = 0$ ha un solo punto reale; $x^2 + y^2 = 1$ ha infiniti punti reali.

Affinché la conica γ di equazione 7.1 passi per il punto $P(\alpha, \beta)$, è necessario e sufficiente che $a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 + 2a_{13}\alpha + 2a_{23}\beta + a_{33} = 0$, e cioè che i coefficienti A_{ij} soddisfano un'equazione lineare omogenea. Tenendo conto che nell'equazione di γ compaiono sei coefficienti omogenei a_{ij}, si ha allora che per cinque punti generici e distinti A, B, C, D, E del piano passa una conica γ da essi individuata, che indicheremo con $ABCDE$. L'unico caso eccezionale è quello in cui quattro (almeno) dei cinque punti appartengono ad una retta r. In tal caso γ è l'unione di r e di una retta ulteriore.

Una retta che interseca γ in due punti coincidenti si dice *retta tangente* a γ.

Dati quattro punti generici A, B, C, D ed una retta a passante ad esempio per A, si vede subito che esiste una ed una sola conica passante per A, B, C, D e tangente in A alla retta a; denoteremo questa conica con $AABCD$ e scriveremo convenzionalmente $a = AA$. Analogamente per conica $AABBC$ intenderemo l'unica conica passante per tre punti dati genericamente A, B, C e tangente in A e in B a due rette date $a = AA$ e $b = BB$.

7.1 Classificazione delle coniche

Definizione 7.3 La funzione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ espressa mediante il polinomio omogeneo

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

si dice *forma quadratica* della conica.

L'equazione 7.1 è una generica equazione di secondo grado in x e y. Il modo in cui sono stati scritti i coefficienti è motivato dalla seguente proposizione.

Proposizione 7.4 *Consideriamo le matrici simmetriche*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad e \qquad A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Allora si ha:

a) $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$;

b) $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dim. E' una facile verifica. □

Definizione 7.5 La matrice simmetrica A_1 è detta *matrice della conica* (7.1 mentre la matrice A è detta *matrice della forma quadratica* della conica (7.1).

Proposizione 7.6 *Siano* λ_1, λ_2 *gli autovalori di* A *e sia* P *una matrice ortogonale speciale tale che* ${}^tP\,A\,P$ *sia diagonale. Allora dopo la trasformazione di coordinate cartesiane*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

la forma quadratica della conica (7.1) diventa

$$\lambda_1 x'^{\,2} + \lambda_2 y'^{\,2}$$

Dim. Si ha infatti

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} {}^tP$$

e quindi per la Proposizione 7.6 si ha:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} {}^tPAP \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 x'^{\,2} + \lambda_2 y'^{\,2} \end{aligned}$$

□

Proposizione 7.7 *Siano* $P_1 = \left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$ *e* $B_1 = {}^tP_1\,A\,P_1$. *Allora*

1. P_1 *è una matrice ortogonale speciale.*
2. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = P_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} B_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} B_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$ *è del tipo*

$$\lambda_1 x'^{\,2} + \lambda_2 y'^{\,2} + 2b_{13}x' + 2b_{23}y' + b_{33}$$

Dim. Sono tutte facili verifiche. □

Siamo quindi arrivati al punto in cui, se $F = \{u_1, u_2\}$ è tale che $P = M_F^E$, nel sistema di coordinate $\sigma' = \sigma(O; u_1, u_2)$, la conica (7.1) si rappresenta così:

$$\lambda_1 x'^{\,2} + \lambda_2 y'^{\,2} + 2b_{13}x' + 2b_{23}y' + b_{33} \tag{7.2}$$

Per procedere nella nostra analisi, cominceremo con l'osservare che λ_1 e λ_2 **non possono essere entrambi nulli** e distinguiamo due casi possibili:

I caso. Un autovalore nullo ad esempio $\lambda_2 = 0$.
Completando un quadrato e operando una traslazione, si ha un sistema di coordinate cartesiane ortogonali in cui l'equazione 7.2 diventa

$$\lambda_1 X^2 + aY + b = 0 \tag{7.3}$$

II caso. Due autovalori non nulli.
Completando i quadrati e operando una traslazione, si ha un sistema di coordinate cartesiane ortogonali in cui l'equazione 7.2 diventa

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + a = 0 \tag{7.4}$$

In entrambi i casi abbiamo effettuato una traslazione. Vediamo allora come si trasformano le matrici associate alla conica quando si opera una traslazione.

Proposizione 7.8 *Se si opera la traslazione data da*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

posto $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *si ha:*

1. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = Q_1 \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. L'equazione della conica (7.2) diventa

$$\begin{pmatrix} X & Y & 1 \end{pmatrix} Q_1^{-1} B_1 Q_1 \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dim. E' una verifica immediata. □

Definizione 7.9 Una conica la cui equazione è scritta nella forma 7.3 o nella forma 7.4 si dice *ridotta in forma canonica.*

Definizione 7.10 Dicesi *caratteristica della conica* (7.1) la caratteristica $\rho(A_1)$ della matrice A_1. La conica si dice *degenere* se $\rho(A_1) < 3$ e *non degenere* se $\rho(A_1) = 3$.

Corollario 7.11 *La caratteristica di una conica non dipende dal particolare sistema di coordinate cartesiane ortogonali scelto.*

Dim. Segue dal fatto che la matrice di una conica e la matrice della stessa conica ridotta in forma canonica sono simili. □

Prendendo in esame i casi precedenti possiamo ora classificare le coniche nei tre tipi seguenti.

Coniche di tipo parabolico

Sono quelle per cui uno degli autovalori della matrice della forma quadratica è nullo. Rientrano nel primo caso. Si ha

$$C_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a/2 \\ 0 & a/2 & b \end{pmatrix}$$

e quindi si hanno casi degeneri se e solo se $a = 0$.

$a = 0$ Se $b = 0$ si hanno *due rette reali coincidenti.*

Se b è concorde con λ_1 non si hanno punti reali, ma siccome si spezza in due fattori lineari a coefficienti complessi, diciamo che si tratta di due *rette complesse coniugate parallele.* Se b è discorde con λ_1 si hanno due *rette reali distinte parallele.*

$a \neq 0$ Si ha una conica non degenere detta *parabola*; con un'ulteriore traslazione si arriva alla forma

$$Y = \alpha X^2$$

Coniche di tipo iperbolico

Sono quelle per cui $\lambda_1\lambda_2 < 0$, ossia gli autovalori della matrice della forma quadratica sono discordi. Rientrano nel secondo caso. Si ha

$$C_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

e quindi si hanno casi degeneri se e solo se $a = 0$.

$a = 0$ Si hanno *due rette reali distinte.*

$a \neq 0$ Si arriva alla forma

$$\frac{X^2}{\alpha^2} - \frac{Y^2}{\beta^2} = 1 \qquad \text{oppure} \qquad \frac{Y^2}{\beta^2} - \frac{X^2}{\alpha^2} = 1$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Queste coniche sono dette *iperboli.*

Coniche di tipo ellittico

Sono quelle per cui $\lambda_1\lambda_2 > 0$, ossia gli autovalori della matrice della forma quadratica sono concordi. Rientrano nel secondo caso. Come prima si hanno casi degeneri se e solo se $a = 0$.

$a = 0$ Si ha *un solo punto reale*, ma siccome il polinomio che definisce la conica si spezza in due fattori lineari a coefficienti complessi, diciamo che si tratta di *due rette complesse coniugate non parallele.*

$a \neq 0$ Si arriva alla forma

$$\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} = 1 \qquad \text{oppure} \qquad \frac{Y^2}{\beta^2} - \frac{X^2}{\alpha^2} = -1$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nel primo caso si ha un'*ellisse a punti reali*, nel secondo un'*ellisse a punti immaginari.* Un'ellisse a punti reali con $\alpha = \beta$ è una *circonferenza.*

Abbiamo così ottenuto una classificazione completa delle coniche. Se si vuole classificare una conica non è necessario ridurla in forma canonica, ma è sufficiente determinare la caratteristica della matrice della conica e il segno degli autovalori della matrice della forma quadratica. Si tenga conto del fatto che per determinare il segno degli autovalori, basta applicare la regola di Cartesio al polinomio caratteristico.

Le coniche di tipo iperbolico o di tipo ellittico si dicono *coniche a centro* perché hanno un centro di simmetria, esiste cioè un punto rispetto al quale la conica è simmetrica.

Proposizione 7.12 *Se* $\gamma : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ *è una conica di tipo iperbolico o di tipo ellittico,* γ *ha un unico centro di simmetria* C *le cui coordinate* (x_C, y_C) *sono una soluzione del sistema lineare*

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} & = & 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} & = & 0 \end{cases} \tag{7.5}$$

Dim. Sia $P(x, y)$ il polinomio a primo membro nell'equazione di γ. Se in $P(x, y)$ si effettua la sostituzione $x = 2\,x_C - x'$, $y = 2\,y_C - y'$ si ottiene un polinomio che è uguale a $P(x', y')$ se e solo se (x_C, y_C) sono una soluzione del sistema (*). Ciò significa che (x, y) sta su γ se e solo se (x', y'), che è il simmetrico di (x, y) rispetto a (x_C, y_C), sta su γ.

L'unicità di C segue dal fatto che il sistema 7.5 ha un'unica soluzione: infatti, la matrice dei coefficienti è la matrice associata alla forma quadratica di γ, quindi per l'ipotesi fatta su γ, il suo determinante è non nullo. □

Le rette che passano per il centro di simmetria si dicono *diametri* della conica.

Esempio Sia γ la conica di equazione $2x^2 + 4xy + 5y^2 + 4x + 13y - 1/4 = 0$. Riduciamo γ in forma canonica.

Gli autovalori della forma quadratica sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 6$. I corrispondenti autospazi sono $V_1 = \{t\,(2, -1)\ /\ t \in \mathbb{R}\}$ e $V_2 = \{t\,(1, 2)\ /\ t \in \mathbb{R}\}$. Prendiamo per ciascuno di essi una base ortonormale $B_1 = \{1/\sqrt{5}\,(2, -1)\}$ e $B_2 = \{1/\sqrt{5}\,(1, 2)\}$.

Una matrice ortogonale diagonalizzante è $C = 1/\sqrt{5} \begin{pmatrix} 2 & \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; questa trasforma la forma quadratica in $x'^2 + 6y'^2$.

Per vedere come si trasforma la parte lineare, scriviamo l'equazione della rotazione

$$\begin{cases} x & = & \frac{1}{\sqrt{5}}\,(2x' + y') \\ y & = & \frac{1}{\sqrt{5}}\,(-x' + 2y') \end{cases}$$

La parte lineare $4x + 13y$ si trasforma in

$$\frac{4}{5}(2x' + y') + \frac{13}{\sqrt{5}}(-x' + 2y') = -\sqrt{5}x' + 6\sqrt{5}y'$$

L'equazione di γ nelle coordinate x', y' è quindi

$$x'^2 + 6y'^2 - \sqrt{5}x' + 6\sqrt{5}y' - \frac{1}{4} = 0$$

Completando i quadrati si può riscrivere come

$$(x' - \frac{1}{2}\sqrt{5})^2 + 6(y' + \frac{1}{2}\sqrt{5})^2 = 9$$

Questa è un'ellisse che ha centro nel punto di coordinate $(\frac{1}{2}\sqrt{5}, -\frac{1}{2}\sqrt{5})$ nel sistema di coordinate x', y'. Tale sistema risulta orientato positivamente essendo $\det(C) = 1$. Effettuando la traslazione

$$\begin{cases} X &= x' - \frac{1}{2}\sqrt{5} \\ Y &= y' + \frac{1}{2}\sqrt{5} \end{cases}$$

si perviene alla forma canonica di γ che è:

$$\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{\frac{3}{2}} = 1$$

7.2 Geometria delle coniche

In questo numero accenneremo brevemente allo studio di una conica in forma canonica, non degenere e a punti reali.

Ellisse

L'equazione di un'ellisse γ in forma canonica è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Supponiamo $a \geq b > 0$. Se $a = b$, γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio a.

Si vede subito che γ è simmetrica rispetto all'origine (centro di simmetria) e rispetto agli assi. I punti dell'ellisse sono contenuti nel rettangolo delimitato dalle rette $x = \pm a$, $y = \pm b$. L'ellisse interseca gli assi coordinati nei 4 punti $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$ che si dicono *vertici*. I 4 segmenti che hanno un estremo nell'origine e l'altro in uno dei vertici si dicono *semiassi*; a, b sono le lunghezze dei semiassi.

Per avere un'idea della forma di γ, esplicitiamo

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

e osserviamo che quando x varia tra $-a$ e 0 i corrispondenti valori di y variano tra 0 e $\pm b$ e quando x varia tra 0 e a, allora y varia tra $\pm b$ e 0. La forma dell'ellisse è quella mostrata nella figura 7.1.

Posto

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

i punti $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ sono i *fuochi* dell'ellisse, e il numero $e = c/a$ è la sua *eccentricità*. Si ha sempre $0 \leq e < 1$. γ è una circonferenza se e solo se $e = 0$, in tal caso i fuochi coincidono con il centro. Se $e \neq 0$, la retta $x = a/e$ (risp. $x = -a/e$) si dice *direttrice dell'ellisse* relativa al fuoco $(c, 0)$ (risp. $(-c, 0)$)

L'ellisse si può definire come il luogo dei punti per i quali la somma delle distanze dai fuochi è costante.

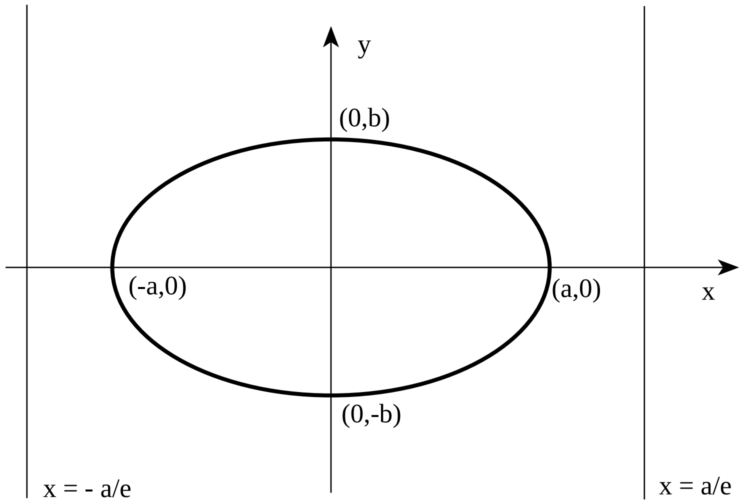


Figura 7.1: Ellisse

Iperbole

L'equazione di un'iperbole γ in forma canonica è

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Assumiamo che $a > 0$, $b > 0$. Se $a = b$, γ si dice *iperbole equilatera*.

Si vede subito che γ è simmetrica rispetto all'origine (centro di simmetria) e rispetto agli assi.

L'iperbole interseca l'asse x nei 2 punti $(\pm a, 0)$, detti *vertici*, mentre non interseca l'asse y.

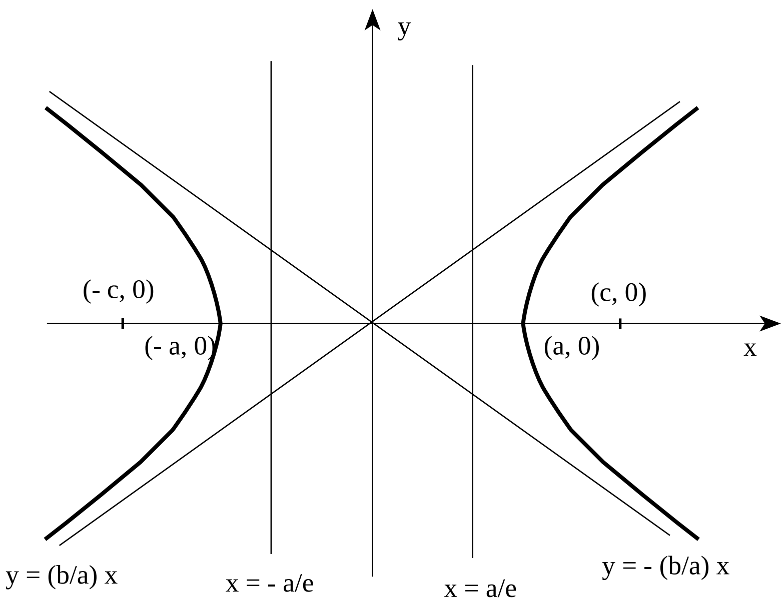


Figura 7.2: Iperbole

Risolvendo rispetto a y si ha

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \ .$$

Quindi i punti (x, y) per i quali $|x| < a$ non stanno sull'iperbole, mentre se $|x| \geq a$, risulta

$$\left| \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \right| < \left| \frac{bx}{a} \right| .$$

Perciò se (x, y) sta su γ deve essere

$$|y| \leq \left| \frac{bx}{a} \right| .$$

Le due rette

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

si dicono *asintoti* dell'iperbole. La forma dell'iperbole è quella mostrata nella figura 7.2.

Posto

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

i punti $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ sono i *fuochi* di γ, e il numero $e = c/a$ è la sua *eccentricità*. Si ha sempre $e > 1$. La retta $x = a/e$ (risp. $x = -a/e$) si dice *direttrice dell'iperbole* relativa al fuoco $(c, 0)$ (risp. $(-c, 0)$)

L'iperbole si può definire come il luogo dei punti per i quali il valore assoluto della differenza delle distanze dai fuochi è costante.

Parabola

Consideriamo la parabola γ di equazione

$$x^2 = 2py$$

e assumiamo che $p > 0$.

Si vede subito che γ è simmetrica rispetto all'asse x, che incontra nell'origine $O(0, 0)$ detto *vertice* della parabola.

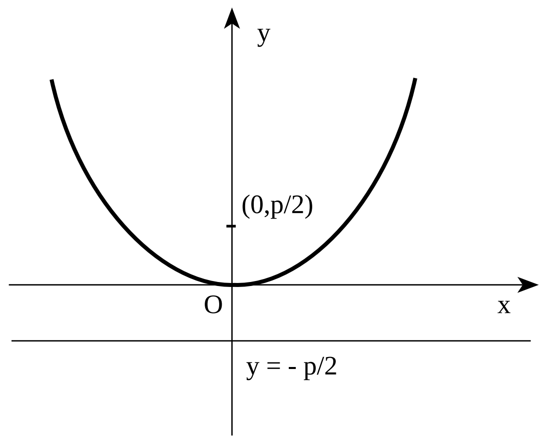


Figura 7.3: Parabola

E' chiaro che γ non ha punti con ordinata negativa. La forma della parabola è quella mostrata nella figura 7.3.

Il punto $F(0, p/2)$ è il *fuoco* di γ e la retta $y = -p/2$ è la sua direttrice. L'*eccentricità* è per definizione $e = 1$.

La parabola si può definire come il luogo dei punti per i quali la distanza da un punto fissato (fuoco) è uguale alla distanza da una retta fissata (direttrice).

7.3 Fasci di coniche

Il fatto che cinque punti del piano appartengono ad (almeno) una conica, assicura che per quattro punti A, B, C, D passano infinite coniche. Siano γ_1 e γ_2 due coniche distinte passanti per A, B, C, D e siano $f(x, y) = 0$ e $g(x, y) = 0$ le loro rispettive equazioni. Allora tutte le coniche che hanno equazione del tipo

$$\lambda f(x, y) + \mu g(x, y) = 0 \tag{7.6}$$

passano per i 4 punti dati, e si prova facilmente che ogni conica passante per A, B, C, D si può rappresentare con un'equazione del tipo (7.6).

La famiglia Φ di coniche che si ottengono dalla (7.6) al variare di λ, μ si dice *fascio di coniche* individuato da γ_1 e γ_2. Se γ_1' e γ_2' sono due altre coniche di Φ, il fascio Φ si può ottenere a partire da γ_1' e γ_2' anzichè da γ_1 e γ_2.

I punti comuni a tutte le coniche di Φ si dicono *punti base del fascio.* In generale si tratta di 4 punti distinti soluzioni del sistema $f(x, y) = g(x, y) = 0$ e Φ è costituito da tutte e sole le coniche passanti per essi. I punti base di un fascio possono tuttavia variamente coincidere e Φ può ad esempio essere costituito di tutte le coniche che passano per tre punti dati ed che hanno in uno di essi una tangente assegnata, oppure di tutte le coniche che passano per due punti assegnati e hanno in questi due punti tangenti assegnate, ecc. E' chiaro allora cosa si intende per fasci $ABCD$, oppure $AABC$, oppure $AABB$.

In generale un fascio contiene tre coniche degeneri (che possono variamente coincidere). Tuttavia può succedere che tutte le coniche del fascio siano degeneri; ciò accade, ad esempio, se le coniche di Φ sono coppie di rette di cui una fissa e l'altra variabile in un fascio di rette, oppure quando si considera una combinazione lineare di due coppie di rette di uno stesso fascio di rette Σ, e quindi le coniche di Φ sono coppie di rette di Σ.

Se Φ ha quattro punti base distinti A, B, C, D, tre a tre non allineati, le tre coniche degeneri di Φ sono le tre coppie di rette $AB - CD$, $AC - BD$ e $AD - BC$. Le coniche del fascio $AABC$ si riducono a due sole distinte: $AA - BC$ e $AB - AC$.; analogamente nel fascio $AABB$ ci sono solo due coniche degeneri distinte: $AA - BB$ e $AB^2 = AB - AB$.

7.4 Esercizi

Es. 207. Determinare la conica γ che passa per i punti $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, -3)$, $D(1, 1)$, $E(1, -1)$.

Es. 208. Scrivere l'equazione del fascio di coniche passanti per i punti $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, -3)$, $D(1, 1)$.

a) Determinare la conica del fascio tangente alla retta $2x - 3y + 1 = 0$;

b) Determinare tutte le coniche degeneri del fascio;

c) Dire se il fascio contiene circonferenze.

Es. 209. Determinare il fascio di coniche che hanno come tangente in $(0, 0)$ la retta $x = 0$ e in $(1, 1)$ la retta $x - y = 0$.

Es. 210. Scrivere l'equazione della parabola tangente agli assi nei punti $A(-1, 0)$ e $B(0, 3)$.

Es. 211. Trovare l'iperbole che ha come asintoti le rette $x - y = 0$ e $y = 0$ e passa per il punto $(2, 1)$.

Es. 212. Trovare la parabola tangente in $(0, 0)$ alle retta $x - 2y = 0$ e passante per il punto $(1, 0)$.

Es. 213. Studiare le seguenti famiglie di coniche: $\lambda(X^2 + 4Y^2 - 1) + \mu(2XY - 1) = 0$, $\quad aX^2 + bY^2 + c = 0$, $\quad aX^2 + 2bXY + cY^2 = 0$

Es. 214. Ridurre a forma canonica le coniche seguenti $X^2+2Y^2-3XY+8=0$, $4X^2-4XY+Y^2+2X+1=0$

Es. 215. Classificare le seguenti coniche e determinarne il centro nel caso in cui si tratti di una conica a centro:

a) $x^2-4xy-2y^2+3x-3y+5=0$;

b) $x^2+xy-y^2-1=0$;

c) $x^2-y^2+2x-2y=0$;

d) $x^2+2xy+y^2-4y+6=0$;

e) $x^2+y^2+2xy+3/2x+3/2y-1=0$;

f) $2x^2+2y^2+4xy=0$;

g) $13x^2-10xy+13y^2+36x-36y-36=0$.

Es. 216. Classificare e ridurre a forma canonica le coniche seguenti:

a) $x^2+y^2+xy+x+y-1=0$;

b) $5x^2-26xy+5y^2+72=0$;

c) $x^2+y^2-2xy-2y=0$;

d) $3x^2-8xy-3y^2+10=0$;

e) $2y^2+2\sqrt{3}xy-2\sqrt{3}x+2y-5=0$;

f) $2x^2+4xy+5y^2-12=0$;

g) $3x^2+2xy+3y^2+2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y=0$;

h) $xy-2x+3y=0$;

i) $2x^2-4xy-y^2-4x+10y-13=0$;

l) $9x^2+24xy+16y^2-20x-15y=0$.

Es. 217. Classificare al variare di $\lambda\in\mathbb{R}$ le coniche delle famiglie:

a) $2(\lambda-1)xy+4x+\lambda=0$;

b) $(x^2-y^2+2x-2y)+\lambda(xy-2x+3y)$;

Es. 218. Per quali valori di $\lambda\in\mathbb{R}$ l'equazione

$$x^2-\lambda xy+y^2+\lambda x+(\lambda+1)y+1=0$$

rappresenta un'ellisse?

Es. 219. Esistono valori $\lambda\in\mathbb{R}$ per i quali l'equazione

$$\lambda^2x^2-2\lambda xy+y^2-1=0$$

rappresenta una circonferenza? e una coppia di rette reali distinte?

Es. 220. Sia Φ il fascio di coniche che ha come punti base $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(0,-3)$, $D(1,1)$. Determinare tra le coniche di Φ:

a) quella che passa per il punto $(-1,1)$;

b) quelle degeneri;

c) quelle tangenti alla retta $2x-3y+1=0$;

d) eventuali circonferenze.

Es. 221. Disegnare la conica
$x^2+y^2+2xy-x-y=0$.

Es. 222. Determinare l'equazione della parabola tangente agli assi coordinati nei punti $A(-1,0)$ e $B(0,3)$.

Es. 223. Determinare l'equazione della parabola che ha l'origine come vertice, la retta $r: x+2y=0$ come asse e passa per il punto $A(1,1)$.

Es. 224. Determinare l'equazione dell'iperbole equilatera che ha come asintoti le rette $r_1: 2x-5y=0$ e $r_2: 5x+2y=0$ e passa per il punto $(1,1)$.

Es. 225. Scrivere l'equazione di una conica passante per i punti $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,3)$ ed è tangente alla retta $x-y=0$ nel punto $(0,0)$ e alla retta $x+y-1=0$ nel punto $(1,0)$.

Es. 226. Scrivere l'equazione dell'ellisse che ha come fuochi $(1,1)$ e $(3,1)$ e passa per il punto $(-1,1)$.

Appendice A

Gli assiomi di Hilbert per la geometria euclidea del piano

A.1 Assiomi di incidenza

Il primo gruppo di assiomi concerne la relazione di incidenza tra un punto e una retta.

I-1 Dati due punti distinti, esiste una retta incidente con entrambi i punti.

I-2 Dati due punti distinti, esiste al più una retta incidente con entrambi i punti.

I-3 Ogni retta è incidente con almeno due punti ed esistono almeno tre punti che non sono incidenti con la stessa retta.

I-4 Tre punti non incidenti con la stessa retta determinano uno ed uno solo piano.

A.2 Assiomi di ordinamento

Il secondo gruppo di assiomi concerne la relazione *stare tra* tra terne di punti.

1. Se il punto B sta tra i punti A e C, allora A, B, C sono tre punti distinti di una retta e B sta tra C ed A.

II-1 Se A e C sono due punti distinti di una retta r, esiste almeno un punto B su r tale che C sta tra A e B.

II-2 Dati tre punti distinti su una retta, allora uno e uno solo dei tre sta tra gli altri due.

II-3 (**assioma di Pasch**) Una retta r separa i punti del piano che non stanno su r in due sottoinsiemi in modo tale che se due A e B sono nello stesso sottoinsieme allora nessun punto che sta tra A e B sta su r, mentre se A e B stanno in sottoinsiemi distinti allora esiste un punto di r che sta tra A e B.

Per semplificare alcuni enunciati si usa introdurre delle *definizioni*. Ad esempio:

Definizione Dati due punti A e B, dicesi *segmento* AB l'insieme di tutti i punti che stanno tra A e B unitamente ai punti A e B.

Dati due punti distinti, la *semiretta uscente da A e contenente B* è l'insieme costituito dal punto A, i punti che stanno tra A e B, il punto B, e tutti i punti C tali che B sta tra A e C.

Dati tre punti A, B, C non sulla stessa retta, il sistema dei tre punti e dei tre segmenti AB, BC, CA si dice *triangolo*; i tre segmenti si dicono *lati* e i tre punti si dicono *vertici*.

Dicesi *angolo* un punto (detto *vertice* dell'angolo) e due semirette (dette *lati* dell'angolo) uscenti dal punto. Se il vertice dell'angolo è il punto$A$ e se B e C sono due punti distinti da A sui due lati dell'angolo, parleremo dell'angolo BAC oppure CAB o semplicemente dell'angolo A.

A.3 Assiomi di congruenza

Il terzo gruppo consiste degli assiomi di congruenza tra segmenti e tra angoli.

III-1 Dati due punti distinti A e B su una retta r un punto A', allora su ogni semiretta uscente da A' esiste uno ed un solo punto B' tale che il segmento $A'B'$ sia congruente al segmento AB.

III-2 Due segmenti entrambi congruenti ad un terzo, sono congruenti tra loro.

III-3 Se un punto C è tra A e B, un punto C' è tra A' e B', il segmento AC è congruente a $A'C'$ e il segmento CB è congruente a $C'B'$, allora il segmento AB è congruente al segmento $A'B'$.

III-4 Se BAC è un angolo i cui lati non stanno sulla stessa retta, data una semiretta $A'B'$ uscente da A' in ciascuno dei semipiani determinati dalla retta $A'B'$ esiste una e una sola semiretta $A'C'$ uscente da A' tale che $B'A'C' \equiv BAC$.

III-5 Se due lati e l'angolo compreso di un triangolo sono congruenti a due lati e l'angolo compreso di un altro triangolo, allora ciascuno dei rimanenti angoli del primo triangolo è congruente al corrispondente angolo del secondo triangolo.

A.4 Assioma delle parallele

IV-1 Per un dato punto A che non sta su una data retta R passa al più una retta che non interseca r.

A.5 Assioma di continuità

V-1 Per ogni partizione dei punti di una retta in due insiemi non vuoti tali che nessun punto di ciascun di essi sta tra due punti dell'altro insieme, esiste un punto di un insieme che sta tra un qualunque punto di questo insieme e un qualunque punto dell'altro insieme.

Questo assioma è equivalente ai due assiomi seguenti:

(**Assioma Archimedeo**) Se AB e CD sono segmenti arbitrari, allora esiste un numero naturale n e un punto E sulla semiretta AB tali che $n \cdot CD = AE$ e B sta tra A ed E

(**Assioma di completezza lineare**) Il sistema di punti di una retta con le relazioni di ordine e congruenza non può essere esteso in modo tale che le relazioni esistenti tra i suoi elementi, le proprietà dell'ordine lineare e la congruenza risultante dagli assiomi I-III e dall'assioma archimedeo rimangano validi.

Appendice B

Richiami e Complementi di Algebra

In questa appendice vengono richiamate alcune basilari nozioni di algebra utilizzate nel testo.

B.1 Insiemi

I concetti di insieme e di appartenenza di un elemento ad un insieme sono assunti come "primitivi". Per indicare che x è un elemento dell'insieme A si scrive $x \in A$, mentre si scrive $x \notin A$ per indicare che l'elemento x non appartiene all'insieme A.
Altre notazioni:

$\emptyset$ denota l'*insieme vuoto* cioè l'insieme privo di elementi;

$\mathbb{N}$ denota l'insieme dei numeri naturali $0, 1, 2, \ldots$;

$\mathbb{Z}$ denota l'insieme dei numeri interi;

$\mathbb{Q}$ denota l'insieme dei numeri razionali;

$\mathbb{R}$ denota l'insieme dei numeri reali.

Un insieme può essere *finito* (cioè avere un numero finito di elementi) oppure *infinito*. Per descrivere un insieme basta elencare tutti i suoi elementi tra parentesi graffe, per esempio $X = \{1, 2, 3\}$, oppure utilizzare una proprietà che caratterizza tutti e soli i suoi elementi. Ad esempio l'insieme dei numeri interi pari si può descrivere nel modo seguente: $\{x \in \mathbb{Z} \ / \ x = 2\,h \text{ con } h \in \mathbb{Z}\}$.

Si dice che l'insieme A è un *sottoinsieme* di B o che A è *contenuto* in B, e si scrive $A \subseteq B$, se ogni elemento di A è un elemento di B. Per ogni insieme A, risulta: $A \subseteq A$ e $\emptyset \subseteq A$. Se $A \subseteq B$ ma $A \neq B$, si dice che A è un sottoinsieme *proprio* di B e si scrive $A \subset B$ o anche $A \subsetneq B$.

Due insiemi A e B si dicono *uguali*, e si scrive $A = B$, se hanno gli stessi elementi, quindi:

$$\begin{aligned} A = B \quad &\Leftrightarrow \quad (A \subseteq B \quad \text{e} \quad B \subseteq A) \\ &\Leftrightarrow \quad (x \in A \Rightarrow x \in B \quad \text{e} \quad x \in B \Rightarrow x \in A) \end{aligned}$$

L'*insieme delle parti* di un insieme X, denotato con $\mathcal{P}(X)$, è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di X.

Se A è un sottoinsieme di X, l' *insieme complementare* di A in X, denotato con $\mathcal{C}_X(A)$ oppure con $X - A$, è l'insieme degli elementi di X che non stanno in A: $\mathcal{C}_X(A) = \{x \in X \ / \ x \notin A\}$
Se A e B sono due sottoinsiemi di X, allora si ha: $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{C}_X(A) \supseteq \mathcal{C}_X(B)$.
Se X e Y sono due insiemi, poniamo: $X - Y = \{x \in X \ / \ x \notin Y\}$.

Siano A e B due insiemi. L'*unione* $A \cup B$ di A e B è l'insieme degli elementi che appartengono ad A oppure a B:

$$A \cup B = \{x \in X \ / \ x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$

L'*intersezione* $A \cap B$ di A e B è l'insieme degli elementi che appartengono sia ad A che a B:

$$A \cap B = \{x \in X \ / \ x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Due insiemi A e B tali che $A \cap B = \emptyset$ si dicono *disgiunti*.

Unione e intersezione sono operazioni *commutative*, cioè se A e B sono insiemi, si ha:

$$A \cup B = B \cup A \qquad \text{e} \qquad A \cap B = B \cap A$$

associative, cioè se A, B e C sono insiemi, si ha:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad \text{e} \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

e *distributive*, cioè se A, B e C sono insiemi, si ha:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{e} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Se A e B sono due sottoinsiemi di X, allora si ha:

$$\mathcal{C}_X(A \cap B) = \mathcal{C}_X(A) \cup \mathcal{C}_X(B) \qquad \mathcal{C}_X(A \cup B) = \mathcal{C}_X(A) \cap \mathcal{C}_X(B)$$

Le definizioni di unione e intersezione di due insiemi si estendono facilmente al caso di un insieme (o famiglia) $\mathcal{F}$ di insiemi ponendo

$$\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A \;=\; \{x \;/\; x \in A \text{ per qualche } A \in \mathcal{F}\} \qquad \text{(unione)}$$

$$\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A \;=\; \{x \;/\; x \in A \text{ per ogni } A \in \mathcal{F}\} \qquad \text{(intersezione)}$$

Il *prodotto cartesiano* $A \times B$ degli insiemi A e B è l'insieme formato da tutte le coppie *ordinate* (x, y) la cui prima componente x è un elemento di A e la seconda y è un elemento di B: $A \times B = \{(x, y) \;/\; x \in A \text{ e } y \in B\}$. Due coppie ordinate (x, y) e (x', y') sono uguali se e solo se $x = x'$ e $y = y'$.

In generale se A_1, A_2, ..., A_n sono insiemi, indichiamo con $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ l'insieme delle n-uple ordinate $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la cui i-esima componente x_i è un elemento di A_i. Poniamo $A^n = A \times \ldots \times A$ (n volte).

B.2 Relazioni

Siano A e B due insiemi non vuoti. Una *relazione* o *corrispondenza* $\mathcal{R}$ tra A e B è data da un sottoinsieme $G \neq \emptyset$ del prodotto cartesiano $A \times B$ che si dice *grafico* della relazione. Se $(a, b) \in G$, si dice che a e b sono in relazione e si scrive $a\mathcal{R}b$. Se $B = A$ si dice che $\mathcal{R}$ è una relazione *in* A.

Se $G \subseteq A \times B$ è il grafico di una relazione $\mathcal{R}$, si dice *relazione inversa* di $\mathcal{R}$ la relazione associata a $G' = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in G\} \subseteq B \times A$ e si denota con $\mathcal{R}^{-1}$.

Una relazione $\mathcal{R}$ in A si dice:

riflessiva	se	$a\,\mathcal{R}\,a, \quad \forall a \in A$
antiriflessiva	se	$a\,\not\mathcal{R}\,a, \quad \forall a \in A$
simmetrica	se	$a\,\mathcal{R}\,b \;\Rightarrow\; b\,\mathcal{R}\,a$
antisimmetrica	se	$a\,\mathcal{R}\,b \text{ e } b\,\mathcal{R}\,a \quad \Rightarrow a = b$
transitiva	se	$a\,\mathcal{R}\,b \text{ e } b\,\mathcal{R}\,c \quad \Rightarrow a\,\mathcal{R}\,c$

Relazioni di equivalenza

Una *relazione di equivalenza* $\mathcal{R}$ in A è una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva.

L'esempio più semplice di relazione di equivalenza è l'uguaglianza (o relazione identica) il cui grafico $I_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ si dice "diagonale" di $A \times A$.

Data una relazione d'equivalenza $\mathcal{R}$ nell'insieme A e $x \in A$, si chiama *classe di equivalenza* di x il sottoinsieme $\bar{x} = \{y \in A \;/\; y\,\mathcal{R}\,\}$. L'elemento x è detto "rappresentante" della classe $\bar{x}$.

Le classi di equivalenza sono non vuote (perché $x \in \bar{x}$) e sono a due a due disgiunte (cioè $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$ se $x \not\mathcal{R} y$), e l'unione di tutte le classi di equivalenza è A. Ciò si esprime dicendo che le classi di equivalenza costituiscono una "partizione" di A.

L'insieme che ha come elementi le classi di equivalenza determinate da $\mathcal{R}$ si dice *insieme quoziente* di A modulo $\mathcal{R}$ e si denota $A/\mathcal{R}$. In simboli: $A/\mathcal{R} = \{\overline{x} \ / \ x \in A\}$. L'applicazione surgettiva $\pi : A \to A/\mathcal{R}$ definita da $\pi(x) = \overline{x}$ si dice *proiezione canonica*.

Relazioni d'ordine

Una relazione $\mathcal{R}$ in A si dice d'*ordine* se è riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Una relazione d'ordine $\preceq$ in A tale che $\forall \ a, b \in A$ si ha $a \preceq b$ oppure $b \preceq a$, si dice relazione d'*ordine totale* e l'insieme A si dice totalmente ordinato. In caso contrario si dice che $\preceq$ è una relazione d'*ordine parziale* e che A è parzialmente ordinato.

Sia $\preceq$ una relazione d'ordine in un insieme non vuoto A e sia S un sottoinsieme di A. Diremo che $x \in A$ è un

maggiorante di S se $s \preceq x \quad \forall s \in S$

minorante di S se $x \preceq s \quad \forall s \in S$

Se un insieme S ha maggioranti si dice che S è *superiormente limitato*, se S ha minoranti si dice che S è inferiormente limitato, se ci sono sia maggioranti sia minoranti si dice che S è *limitato*.

Per esempio in $\mathbb{R}$ il sottoinsieme $\mathbb{N}$ è inferiormente limitato (0 è un minorante), ma non superiormente limitato, $\mathbb{Z}$ non è inferiormente limitato né superiormente limitato, $S = \{1, 2, 3, 4\}$ è limitato.

Siano M_S l'insieme dei maggioranti di S e m_S l'insieme dei minoranti di S. Se $M_S \neq \emptyset$ e se $\exists x \in M_S$ tale che $x \preceq y \quad \forall \ y \in M_S$, allora x si dice *estremo superiore* di S e si scrive $x = \sup S$. Se $x = \sup S \in S$, allora x si dice *massimo* e si scrive $\max S$.

Analogamente se $m_S \neq \emptyset$ e se $\exists x \in m_S$ tale che $y \preceq x \quad \forall \ y \in M_S$, allora x si dice *estremo inferiore* di S e si scrive $x = \inf S$. Se $x = \inf S \in S$, allora x si dice *minimo* e si scrive $\min S$.

Per esempio $A = \{ \ \frac{1}{n} \quad | \quad n \in \mathbb{N} \ \} \subseteq \mathbb{R}$ ha massimo 1 , ma non ha minimo. Però 0 è l'estremo inferiore. Ogni sottoinsieme finito di un insieme totalmente ordinato ha massimo e minimo. Ogni sottoinsieme di $\mathbb{N}$ ha minimo, ma non sempre ha massimo (per esempio i numeri pari).

B.3 Applicazioni

Dati due insiemi A e B, si dice *applicazione* (o *funzione*) di A in B, e si denota con $f : A \to B$, una relazione che *ad ogni elemento* $a \in A$ *associa elemento* $b \in B$. Tale b si dice *immagine* di a mediante f e si scrive $b = f(a)$. Gli insiemi A e B si dicono rispettivamente *dominio* e *codominio* dell'applicazione f.

Allora $G \subseteq A \times B$ è il grafico di un'applicazione se e solo se per ogni $a \in A$ esiste un unico $b \in B$ tale che $(a, b) \in G$.

Per descrivere un'applicazione f è sufficiente specificare per ogni elemento $x \in A$ il corrispondente elemento $f(x) \in B$.

Siano $f : A \to B$ un'applicazione, S è un sottoinsieme di A e T un sottoinsieme di B. Si dice *immagine* di S mediante f l'insieme $f(S) = \{y \in B \ / \ \exists x \in A, f(x) = y\} = \{f(x) \ / \ x \in S\}$. In particolare $f(A)$ è detto immagine di f e si denota $\mathrm{Im}\,(f)$.

L'insieme $f^{-1}(T) = \{x \in A \ / \ f(x) \in T\}$ si dice *controimmagine* di T. Se $T = \{y\}$, si scrive $f^{-1}(y)$ invece di $f^{-1}(\{y\})$

Un'applicazione $f : A \to B$ si dice *iniettiva* se

$$\forall x, x' \in A \qquad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

Ciò equivale a: $\quad f(x) = f(x') \ \Rightarrow \ x = x'$

e anche a: $\forall b \in \mathrm{Im}(f)$ l'insieme $f^{-1}(b)$ è costituito da un solo elemento.

Un'applicazione $f : A \to B$ si dice *surgettiva* se

$$\mathrm{Im}(f) = B$$

Ciò equivale a: $\forall\, b \in B \quad \exists\, a \in A$ tale che $f(a) = b$ e anche a: $\forall\, b \in B$ si ha $f^{-1}(b) \neq \emptyset$.

Un'applicazione $f : A \to B$ si dice *bigettiva* se è iniettiva e surgettiva e in tal caso si chiama anche corrispondenza biunivoca.

Composizione di applicazioni

Date due applicazioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$ si dice *applicazione composta* di f e g l'applicazione $g \circ f : A \to C$ definita nel modo seguente: $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ per ogni $a \in A$.

Date due applicazioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$ valgono le seguenti proprietà:

1) f, g iniettive $\Rightarrow$ $g \circ f$ iniettiva;

2) f, g surgettive $\Rightarrow$ $g \circ f$ surgettiva;

3) $g \circ f$ iniettiva $\Rightarrow$ f iniettiva;

4) $g \circ f$ surgettiva $\Rightarrow$ g surgettiva;

5) $g \circ f = id_A$ $\Rightarrow$ f iniettiva e g surgettiva;

6) $f \circ g = id_B$ $\Rightarrow$ f surgettiva e g iniettiva.

Se $f : A \to B$ è un'applicazione bigettiva, la relazione inversa è ancora un'applicazione $g : B \to A$ definita nel modo seguente:
$\forall\, b \in B$ si pone $g(b) = a_b$ dove $\{a_b\} = f^{-1}(b)$.
Tale applicazione g si dice *inversa* di f e si denota con f^{-1}.
Provare che $f^{-1} : B \to A$ è l'unica applicazione tale che $f^{-1} \circ f = id_A$ e che si ha anche $f \circ f^{-1} = id_B$. Da questo segue che f^{-1} è bigettiva e la sua inversa è f.
Viceversa se $f : A \to B$ è un'applicazione ed esiste $g : B \to A$ tale che $g \circ f = f \circ g = id_A$ allora f è bigettiva e g è l'inversa di f.

B.4 Elementi di calcolo combinatorio

Permutazioni, disposizioni, combinazioni

Sia $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un insieme finito di n elementi.

Una *permutazione* di A è un'applicazione bigettiva di A in sé. Poiché l'applicazione $\{1, \ldots, n\} \to A$ data da $i \mapsto a_i$ è ovviamente bigettiva, si possono considerare le permutazioni come applicazioni bigettive da $\{1, \ldots, n\}$ in A.

Più in generale, se k è un intero positivo tale che $k \leq n$, un'applicazione iniettiva dell'insieme $\{1, \ldots, k\}$ nell'insieme $\{a_1, \ldots, a_n\}$ si dice *disposizione di classe* k (o disposizione k a k) degli n elementi $a_1, \ldots, a_n$; essa è individuata dalla k-upla $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$ dove $j \mapsto a_{i_j}$ $(1 \leq j \leq k)$.

Proposizione B.1 *Il numero $D_{n,k}$ delle disposizioni di classe k di n elementi è:*

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) \ .$$

Dim. Bisogna contare quante sono le k-uple distinte $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$ di elementi distinti scelti tra $a_1, \ldots, a_n$. Vi sono n possibilità di scelta per il primo elemento a_{i_1}, quindi $n-1$ possibilità per la scelta di a_{i_2}, $n-2$ per la scelta di a_{i_3}, ecc. □

Se $k = n$, il numero $D_{n,n}$ è il prodotto dei primi n numeri interi positivi; tale numero si dice *fattoriale* di n e si indica con $n\,!$. Per convenzione si pone $0\,! = 1$ e, per ogni $n \geq 1$ si ha $n\,! = (n-1)\,!\,n$.

Corollario B.2 *Il numero P_n delle permutazioni di n elementi è $n!$.*

Una *combinazione di classe k* degli n elementi $a_1, \ldots, a_n$ è un sottoinsieme $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$ di $\{a_1, \ldots, a_n\}$ costituito da k elementi.

Proposizione B.3 *Il numero $C_{n,k}$ delle combinazioni di classe k di n elementi è:*

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \quad .$$

Dim. Fissata una combinazione di classe k di n elementi, il numero delle permutazioni degli elementi della combinazione è, per quanto visto sopra, $k!$. Ne segue che il numero delle disposizioni di classe k degli n elementi è $C_{n,k}\, k!$. Allora da $C_{n,k} \cdot k! = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ segue la tesi. □

Il numero $C_{n,k}$ si indica anche con $\binom{n}{k}$ ed è detto *coefficiente binomiale*. Per convenzione si pone $\binom{n}{0} = 1$. Valgono le seguenti identità:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \ldots + \binom{k+1}{k} + \binom{k}{k}$$

Inoltre se R è un anello commutativo, $x, y \in R$ e n un intero non negativo, allora

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\, y^k \quad .$$

Disposizioni e combinazioni con ripetizione

Siano k, n due interi positivi, $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Un'applicazione $\sigma : \{1, \ldots, k\} \to A$ si dice *disposizione con ripetizione di classe k* degli elementi di $a_1, \ldots, a_n$. Se poniamo $\sigma(j) = a_{i_j}$ la disposizione σ è individuata dalla k-upla $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$ dove i k elementi a_{i_j} non sono necessariamente distinti.

Proposizione B.4 *Il numero $D^r_{n,k}$ delle disposizioni con ripetizione di classe k di n elementi è*

$$n^k \quad .$$

Dim. Per formare una disposizione con ripetizione $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$ ci sono n possibilità di scelta per ciascuno dei k simboli a_{i_j}, quindi in tutto vi sono n^k possibilità di scelta. □

Sia $B = A \times A \times \ldots \times A$ (k volte) il prodotto cartesiano di k copie di A. Sia C il sottoinsieme costituito dalle k-uple $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$ tali che $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k$. Gli elementi di C sono detti *combinazione con ripetizione di classe k* degli elementi $a_1, \ldots, a_n$. Non è difficile provare per induzione su k la seguente

Proposizione B.5 *Il numero $C^r_{n,k}$ delle combinazioni con ripetizione di classe k di n elementi è:*

$$\binom{n+k-1}{k} \quad .$$

Esempi. I monomi di grado 11 nelle indeterminate X, Y, Z si possono riguardare come le combinazioni con ripetizione di classe 11 dei tre elementi X, Y, Z, pertanto il loro numero è $\binom{3+11-1}{3} = 286$.

Le possibili colonne vincenti al totocalcio sono le disposizioni con ripetizione dei tre oggetti 1, X, 2 di classe 13 e quindi sono 3^{13}.

B.5 Complementi sulle permutazioni

Le permutazioni di $\{1,\dots,n\}$ sono $n!$ e formano un gruppo (non commutativo se $n>2$) rispetto alla composizione, denotato S_n. Un elemento di $p\in S_n$ viene spesso indicato con

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p(1) & p(2) & \dots & p(n) \end{pmatrix}$$

in cui sotto al numero i compare la sua immagine $p(i)$.

Siano $a_1,\dots,a_r$ elementi distinti di $\{1,\dots,n\}$. La permutazione k definita da

$$k(a_1)=a_2,\ \ k(a_2)=a_3,\ \ \dots,\ \ k(a_{r-1})=a_r,\ \ k(a_r)=a_1$$

$$k(b)=b \quad \forall b\notin\{a_1,\dots,a_r\}$$

si chiama *ciclo di lunghezza* r e si denota con $(a_1\ a_2\ \dots\ a_r)$.

Ad esempio $(1\ 3\ 2\ 6)\in S_6$ è la permutazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Ogni ciclo di lunghezza 1 è la permutazione identica. Un ciclo di lunghezza 2 si dice *trasposizione* o scambio perché scambia tra loro due elementi e lascia fissi gli altri. In particolare una trasposizione è inversa di sé stessa.

Due cicli $(a_1\ a_2\ \dots\ a_r)$ e $(b_1\ b_2\ \dots\ b_s)$ si dicono *disgiunti* se $\{a_1,a_2,\dots,a_r\}\cap\{b_1,b_2,\dots,b_s\}=\emptyset$.

Vale il seguente

Teorema B.6 *1. Ogni permutazione è prodotto di cicli due a due disgiunti.*

2. Ogni permutazione è prodotto di trasposizioni.

3. Se $p\in S_n$ e $p=T_1\circ\dots\circ T_h=T'_1\circ\dots\circ T'_{h'}$ dove $T_1,\dots,T_h,T'_1,\dots,T'_{h'}$ sono trasposizioni, allora $h\equiv h' \pmod 2$, cioè h e h' hanno la stessa parità.

Se $p\in S_n$ e $p=T_1\circ\dots\circ T_h$ dove $T_1,\dots,T_h$ sono trasposizioni, il *segno* di p è per definizione $\epsilon(p)=(-1)^h$. Dal teorema precedente segue che tale definizione è ben posta.

Proposizione B.7 *Valgono le seguenti uguaglianze:*

1. $\epsilon(1)=1$;
2. $\epsilon(T)=-1$ *per ogni trasposizione* $T\in S_n$;
3. $\epsilon(p\circ q)=\epsilon(p)\epsilon(q)$;
4. $\epsilon(p^{-1})=\epsilon(p)$ *per ogni* $p\in S_n$.

B.6 Prime nozioni sulla cardinalità

Ad ogni insieme finito A costituito da n elementi si può associare il numero naturale n e si dice che n è la *cardinalità* di A, oppure il *numero cardinale* di A, oppure la *potenza* di A.

E' chiaro che due insiemi finiti che hanno la stessa cardinalità se e solo se sono in corrispondenza biunivoca. In generale, anche nel caso di insiemi infiniti, si dà la seguente

Definizione B.8 Due insiemi A e B si dicono *equipotenti*, e si scrive $A \sim B$, se tra essi sussiste una corrispondenza biunivoca.

La relazione di equipotenza tra insiemi è riflessiva, simmetrica e transitiva. Se esistesse un insieme Ω i cui elementi fossero tutti gli insiemi, la relazione $\sim$ sarebbe un'equivalenza in Ω e si potrebbe considerare l'insieme quoziente $\Omega/\sim$; si potrebbe allora estendere la nozione di numero cardinale al caso di insiemi qualunque (anche infiniti) definendo cardinale di un insieme A la classe d'equivalenza di A in $\Omega/\sim$.

Purtroppo la "totalità" Ω di tutti gli insiemi non è un insieme. Infatti se lo fosse, potremmo considerare il suo sottoinsieme $F = \{X \in \Omega \ / \ X \notin X\}$ cioè l'insieme degli insiemi che non contengono se stesso come elemento. Ora, se $F \notin F$ dalla definizione di F segue che $F \in F$; mentre se $F \in F$ dalla definizione di F segue che $F \notin F$. Tale contraddizione è nota come *paradosso di Russell.*

Per poter definire la cardinalità di un insieme A qualunque, cioè associare ad A un oggetto matematico che risulti associato a tutti e soli gli insiemi equipotenti ad A, occorre uscire dall'ambito della teoria intuitiva degli insiemi. Ciò esula dagli obiettivi di questo corso. Si può tuttavia accennare ad alcuni importanti fatti della teoria dei numeri cardinali assumendo l'esistenza, per ogni insieme A, di un numero cardinale che indicheremo con $\overline{A}$. Quindi $\overline{A} = \overline{B}$ se e solo se esiste un'applicazione bigettiva $A \to B$.

Si osservi che 0 è la cardinalità dell'insieme vuoto. I numeri naturali $0, 1, 2, \ldots$ sono anche numeri cardinali che sono detti *cardinali finiti* ; gli altri cardinali sono detti *transfiniti* . L'insieme $\mathbb{N}$ di tutti i numeri naturali è infinito e la sua cardinalità si indica con $\aleph_0$ (*alef zero*). Un insieme equipotente a $\mathbb{N}$ è detto *numerabile.*

Tra numeri cardinali è possibile definire alcune operazioni quali somma e prodotto. Siano α e β due numeri cardinali e siano A e B due insiemi tali che $\overline{A} = \alpha$ e $\overline{B} = \beta$. La cardinalità di $A \times B$ dipende solo da α e β (e non dai particolari insiemi A e B); si definisce allora $\alpha\beta = \overline{A \times B}$.

Se A e B sono disgiunti, la cardinalità di $A \cup B$ dipende solo da α e β; si pone allora $\alpha + \beta = \overline{A \cup B}$.

Se A è un insieme non vuoto e B un insieme qualunque, indichiamo con B^A l'insieme delle applicazioni di A in B. Anche la cardinalità di B^A dipende solo da α e β e si pone $\beta^\alpha = \overline{B^A}$.

Nel caso in cui α e β sono cardinali finiti queste definizioni si accordano con le usuali operazioni per i numeri naturali.

A titolo d'esempio proviamo la seguente

Proposizione B.9 *Se n è un cardinale finito, si ha*

$$n + \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

Dim. Sia $A = \{x \in \mathbb{N} \ / \ x \geq n\}$. L'applicazione $\phi : \mathbb{N} \to A$ data da $\phi(x) = x + n$ è evidentemente bigettiva, quindi $\mathbb{N} \sim A$ e $\overline{A} = \aleph_0$. D'altra parte essendo $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots, n-1\} \cup A$ si ha $\aleph_0 = n + \aleph_0$. Siano ora P e D rispettivamente l'insieme dei numeri pari e l'insieme dei numeri dispari. Poiché $\overline{P} = \overline{D} = \aleph_0$, $\mathbb{N} = P \cup D$ e $P \cup D = \emptyset$ si ha $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. □

Corollario B.10 *Se $n \neq 0$ è un cardinale finito, allora $n\,\aleph_0 = \aleph_0$.*

Proposizione B.11 *1. L'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi relativi è numerabile.*

2. Un'unione numerabile di insiemi numerabili è numerabile.

3. L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è numerabile.

Tra i numeri cardinali si può definire una relazione d'ordine ponendo: $\alpha < \beta$ se $\alpha \neq \beta$ ed esistono due insiemi A e B tali che $\overline{A} = \alpha$, $\overline{B} = \beta$ e $A \subset B$.

Teorema B.12 *Siano α un numero cardinale, A un insieme di cardinalità α e $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti di A. Allora:*

1. la cardinalità di $\mathcal{P}(A)$ è 2^α;

2. $2^\alpha > \alpha$*;*

3. l'insieme $\mathbb{R}$ *dei numeri reali è equipotente a* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$*.*

Indicata con c la cardinalità di $\mathbb{R}$, detta *potenza del continuo*, per il teorema precedente si ha $c = 2^{\aleph_0}$. In particolare $\mathbb{R}$ non è numerabile.

Nota storica All'inizio di questo secolo si è cercato invano di dimostrare la seguente proprietà detta *ipotesi del continuo* :
non esistono numeri cardinali compresi tra $\aleph_0$ *e* c*, ovvero ogni sottoinsieme di* $\mathbb{R}$ *contenente un insieme numerabile è equipotente ad* $\mathbb{N}$ *oppure a* $\mathbb{R}$*.*
Solo nel 1962 Paul Cohen ha dimostrato che l'ipotesi del continuo è indecidibile cioè nè esso nè la sua negazione sono conseguenza dei precedenti assiomi relativi ai numeri cardinali. Si può allora, se si vuole, assumere l'ipotesi del continuo come assioma, ma, se si vuole, si può assumere come assioma la sua negazione, cioè l'esistenza di numeri cardinali α tali che $\aleph_0 < \alpha < c$.

Concludiamo questo paragrafo enunciando alcuni importanti risultati:

Teorema B.13 *1. Ogni insieme infinito contiene un sottoinsieme numerabile (in altre parole un cardinale* α *è transfinito se e solo se* $\alpha \geq \aleph_0$*).*

2. Ogni insieme infinito è equipotente ad un suo sottoinsieme proprio.

3. (teorema di Cantor-Bernstein) *Due insiemi, ciascuno dei quali è equipotente ad un sottoinsieme dell'altro, sono equipotenti.*

4. Se α *è un cardinale, allora* α *è finito se e solo se* $\alpha < \aleph_0$*.*

B.7 Strutture algebriche

Operazioni in un insieme

Se A è un insieme non vuoto, ogni funzione $f : A \times A \to A$ si dice *operazione binaria* (o semplicemente *operazione*), oppure *legge di composizione interna.*

Un'operazione $*$ associa quindi ad ogni coppia ordinata $(x, y) \in A \times A$ un elemento di A, che, per semplicità di notazione, si indica con $x * y$ invece di $*((x, y))$.

Un'operazione binaria $*$ è detta:
commutativa se $\quad x * y = y * x \quad \forall\, x, y \in A$
associativa se $\quad x * (y * z) = (x * y) * z \quad \forall\, x, y, z \in A$

ESEMPI. 1) L'addizione $+$ e la moltiplicazione $\cdot$ sono operazioni nell'insieme dei numeri interi associative e commutative.

2) Se X è un insieme e $A = \{f : A \to A\}$, la composizione di applicazioni $\circ$ è una operazione associativa in A.

3) La composizione di applicazioni $\circ$, nell'insieme delle applicazioni da $\mathbb{N}$ in se stesso, non è commutativa. Per esempio siano $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ così definite: $f(n) = n^2$, $\quad g(n) = n + 1$; allora $(f \circ g)(n) = (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 \neq (g \circ f)(n) = n^2 + 1$.

4) La sottrazione $-$ nell'insieme dei numeri interi non è associativa né commutativa, infatti per esempio $(5 - 3) - 1 = 1 \neq 5 - (3 - 1) = 3$ e $5 - 1 = 4 \neq 1 - 5 = -4$.

Sia $*$ un'operazione nell'insieme A. Un elemento $e \in A$ è detto *elemento neutro* o *identità* per $*$ se per ogni $x \in A$ si ha $e\, x = x\, e = x$. Se A possiede identità, questa è unica, infatti se e, e' sono due elementi neutri per $*$, allora $e = e\, e' = e'$.

Un insieme A nel quale siano definite una o più operazioni si dice struttura algebrica.

Gruppi

Un insieme G con una operazione $* : G \times G \to G$ è detto *gruppo* se:

G1) $*$ è associativa;

G2) esiste un elemento neutro e per $*$;

G3) ogni elemento di G ha *inverso* cioè $\forall g \in G \quad \exists g' \in G$ tale che $g * g' = g' * g = e$.

Un gruppo si dice *commutativo* se l'operazione è commutativa.

Proposizione B.14 *Sia G un gruppo con operazione $*$, allora:*

1) (legge di cancellazione) $\forall\, x, y, z \in G$ *si ha:*

$$x * y = x * z \Rightarrow y = z; \qquad e \qquad y * x = z * x \Rightarrow y = z$$

2) L'inverso di $x \in G$ è unico.

3) L'inverso dell'inverso di x è x.

Dim. 1) Sia x' l'inverso di x. Moltiplicando per x' si ha: $x' * (x * y) = x' * (x * z)$ e per la proprietà associativa si ha $(x' * x) * y = (x' * x) * z)$ e quindi $y = e * y = e * z = z$.

2) Se x' e $x'' \in G$ sono tali che $x * x' = x' * x = e$ e $x * x'' = x'' * x = e$, si ha $x'' = x'' * e = x'' * (x * x') = (x'' * x) * x' = e * x' = x'$.

3) Se x' è l'inverso di x, allora x è l'unico elemento tale che $x' * x = x * x' = e$. □

Usualmente l'inverso di x si indica con x^{-1}; se l'operazione è l'addizione l'inverso di un elemento è detto *opposto* e denotato con $-x$.

ESEMPI. 1. L'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ con l'addizione $+$ non è un gruppo, infatti $+$ è associativa (e commutativa), 0 è l'elemento neutro, ma non esiste l'opposto di 1. Analogamente $\mathbb{N}$ con la moltiplicazione non è un gruppo perché $\cdot$ è associativa (e commutativa), 1 è l'elemento neutro, ma 2 non ha inverso.

2. L'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ con l'addizione $+$ è un gruppo commutativo, infatti $+$ è associativa e commutativa, 0 è l'elemento neutro e per ogni $a \in \mathbb{Z}$ *esiste* $-a$ tale che $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Invece $\mathbb{Z}$ con la moltiplicazione non è un gruppo perché $\cdot$ è associativa e commutativa, 1 è l'elemento neutro, ma gli unici elementi che hanno inverso sono -1 e 1.

3. Sia $A = \{1, 2, 3\}$. L'insieme G delle applicazioni bigettive di A in A con la composizione di applicazioni è un gruppo con 6 elementi:

$$\begin{array}{rccc} f_1: & A & \longrightarrow & A \\ & 1 & \mapsto & 1 \\ & 2 & \mapsto & 2 \\ & 3 & \mapsto & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f_2: & A & \longrightarrow & A \\ & 1 & \mapsto & 1 \\ & 2 & \mapsto & 3 \\ & 3 & \mapsto & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f_3: & A & \longrightarrow & A \\ & 1 & \mapsto & 2 \\ & 2 & \mapsto & 1 \\ & 3 & \mapsto & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} f_4: & A & \longrightarrow & A \\ & 1 & \mapsto & 2 \\ & 2 & \mapsto & 3 \\ & 3 & \mapsto & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f_5: & A & \longrightarrow & A \\ & 1 & \mapsto & 3 \\ & 2 & \mapsto & 2 \\ & 3 & \mapsto & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f_6: & A & \longrightarrow & A \\ & 1 & \mapsto & 3 \\ & 2 & \mapsto & 1 \\ & 3 & \mapsto & 2 \end{array}$$

Infatti $\circ$ è associativa, l'elemento neutro è f_1, l'inversa di f_4 è f_6 e f_1, f_2, f_3, f_5 sono ognuna l'inversa di se stessa. G non è commutativo perché $f_2 \circ f_3 \neq f_3 \circ f_2$, infatti $f_2(f_3(1)) = f_2(2) = 3$, mentre $f_3(f_2(1)) = f_3(1) = 2$.

Anelli

Un *anello* è un insieme A dotato di due operazioni $+$ e $\cdot$ tali che:
1) A è un gruppo commutativo rispetto alla somma $+$;
2) Il prodotto $\cdot$ è associativo;
3) Vale la proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto, cioè
$(a+b)c = ac+bc \quad$ e $\quad a(b+c) = ab+ac$
Inoltre A si dice *anello commutativo* se il prodotto $\cdot$ è commutativo; A si dice *anello con identità* (o con 1) se in A c'è un'identità moltiplicativa, che denoteremo appunto 1 (o 1_A in caso di ambiguità).

Proposizione B.15 *Sia A un anello con identità e siano $a, b \in A$. Allora:*

1) $\quad a\,0 = 0\,b = 0$.

2) $\quad (-a)\,b = -a\,b = a\,(-b)$.

3) $\quad (-a)\,(-b) = ab$.

Dim. 1) Si ha $a + a\,0 = a(1+0) = a\,1 = a + 0$ e per la legge di cancellazione $a\,0 = 0$. Il caso $0\,b = 0$ è analogo.
2) Si ha $(-a)b + ab = (-a+a)b = 0b = 0 \quad$ e $\quad a(-b) + ab = a(b-b) = a0 = 0$.
3) Si ha $(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-ab) = ab$. □

Non è detto che se $ab = 0$ allora $a = 0$ oppure $b = 0$. Un anello A si dice *integro* se per ogni $a, b \in A$ tali che $a\,b = 0$ si ha $a = 0$ oppure $b = 0$.

Esempi:

1. L'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ con l'addizione e la moltiplicazione è un anello commutativo con identità, integro.

2. L'insieme $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ delle funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ con le operazioni $+$ e $\cdot$ così definite : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(fg)(x) = f(x)g(x)$ è un anello commutativo con identità, non integro.
Verificare che $\mathcal{F}$ con la somma definita sopra e con la composizione di funzioni come moltiplicazione non è un anello perché non vale la proprietà distributiva.

3. Se sull'insieme $\mathbb{Z}_n$ quoziente di $\mathbb{Z}$ modulo la relazione di equivalenza $\mathcal{R}_3$ definita da $a\,\mathcal{R}_3\,b \iff a - b = kn, \quad k \in \mathbb{Z}$ poniamo le operazioni $+$ e $\cdot$ così definite : $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$ e $\overline{a}\overline{b} = \overline{ab}$, $\mathbb{Z}_n$ risulta un anello commutativo con identità che è integro solo quando n è primo; infatti se $n = mr$ si ha $\overline{mr} = \overline{n} = \overline{0}$ mentre $\overline{m} \neq 0; \overline{r} \neq 0$.

4. Le matrici quadrate di ordine n con la somma e il prodotto righe per colonne costituiscono un anello non commutativo con identità, non integro.

Corpi

Un anello commutativo con identità K si dice *corpo* o *campo* se ogni elemento diverso da zero è invertibile, cioè se $K^* = K \backslash \{0\}$ con l'operazione $\cdot$ è un gruppo commutativo

Ogni corpo è integro.

Infatti se $ab = 0$ e $a = 0$ si ha la tesi, altrimenti $a \neq 0$ è invertibile e moltiplicando $ab = 0$ per a^{-1} si ha $a^{-1}(ab) = a^{-1}0 = 0$; allora $(a^{-1}a)b = 0$ e quindi $1b = b = 0$

Un corpo K si dice *totalmente ordinato* se in K è definita una relazione $\leq$ che soddisfa i seguenti assiomi: 1) Dicotomia: per ogni $x, y \in K$ si ha $x \leq y$ oppure $y \leq x$. 2) Proprietà antisimmetrica. 3)

$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \quad \forall\, z \in K$. 4) $0 \leq x,\ 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x + y,\ 0 \leq xy$.

Proposizione B.16 *Sia K un corpo totalmente ordinato e $x, y, z \in K$. Allora:*

a) $\quad x \leq y \iff x - y \leq 0$.

b) La relazione $\leq$ è riflessiva e transitiva.

c) Se $0 \leq x$, allora $-x \leq 0$.

d) Se $x \le y$ *e* $0 \le z$ *allora* $xz \le yz$.

e) Se $x \le y$ *e* $z \le 0$ *allora* $yz \le xz$.

f) $0 \le x^2$ *per ogni* $x \in K$.

g) Se $0 \le x$, *allora* $0 \le \frac{1}{x}$.

Dim. a) Segue dall'assioma (3). Infatti sommando $-y$ ad ambo i membri della disuguaglianza $x \le y$ si ha $x - y \le y - y = 0$. Viceversa se $x - y \le 0$ sommando y si ottiene $x = x - y + y \le 0 + y = y$.

b) La riflessività segue da $x - x = 0$, $\forall x \in K$. Se $x \le y$ e $y \le z$, allora $x - y \le 0$ e $y - z \le 0$, da cui $x - z = (x - y) + (y - z) \le 0 + (y - z) = y - z \le 0$. Quindi $\le$ è una relazione d'ordine e la dicotomia dice che l'ordine è totale.

c) Si ha $-x = 0 + (-x) \le x + (-x) = x - x = 0$. Viceversa $0 = x - x \le x + 0 = x$.

d) Se $x \le y$, allora $0 \le y - x$ e quindi $0 \le (y - x)z = yz - xz$. Ne segue $xz \le yz$.

e) Per ipotesi $0 \le y - x$ e $0 \le -z$, quindi $0 \le (y - x)(-z) = -yz + xz$, cioè $yz \le xz$.

f) Se $0 \le x$, si ha $0 = 0x \le xx = x^2$; se $x \le 0$ allora $0 = x0 \le xx = x^2$.

g) Se fosse $\frac{1}{x} \le 0$, avremmo la contraddizione $1 = x\frac{1}{x} \le 0$. □

Appendice C

Numeri complessi ed equazioni algebriche

E' ben noto che non esiste alcun numero reale x tale che $x^2 = -1$ o, equivalentemente, che l'equazione $x^2+1=0$ non ha soluzioni reali. In questo capitolo costruiremo un corpo, denotato con $\mathbb{C}$, che contiene il corpo dei numeri reali $\mathbb{R}$ come sottocorpo e nel quale ogni equazione algebrica ha soluzioni.

C.1 Costruzione dei numeri complessi

Definizione C.1 Nell'insieme $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ delle coppie ordinate di numeri reali definiamo una somma e un prodotto ponendo:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Teorema C.2 *L'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dotato delle operazioni definite sopra è un corpo commutativo, detto* corpo dei numeri complessi*, che contiene un sottocorpo isomorfo a $\mathbb{R}$.*

Dim. L'associatività e la commutatività delle due operazioni e la distributività del prodotto rispetto alla somma si verificano facilmente a partire dalla definizione. Poiché per ogni numero complesso (a, b) si ha:

$$(a, b) + (0, 0) = (a, b) \quad \text{e} \quad (a, b) \cdot (1, 0) = (a, b)$$

$(0, 0)$ è l'elemento neutro rispetto alla somma e $(1, 0)$ è l'elemento neutro rispetto al prodotto. Inoltre si verifica subito che $(-a, -b)$ è l'opposto di (a, b) e, se a e b non sono entrambi nulli,

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right) = (1, 0)$$

cioè $(a/(a^2 + b^2), -b/(a^2 + b^2))$ è l'inverso di (a, b).

Infine l'applicazione $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definita da $\sigma(x) = (x, 0)$ è chiaramente un omomorfismo di corpi iniettivo, quindi $\mathbb{R}$ è isomorfo a un sottocorpo di $\mathbb{C}$; identificando ogni elemento $x \in \mathbb{R}$ con la sua immagine $\sigma(x)$, $\mathbb{R}$ diventa un sottocorpo di $\mathbb{C}$. □

Introduciamo ora un'altra notazione per i numeri complessi che risulta particolarmente efficace per effettuare i calcoli. Siccome per ogni $(a, b) \in \mathbb{C}$ si ha:

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1)$$

identificando $(a, 0)$ con a, $(b, 0)$ con b e posto $i = (0, 1)$ possiamo esprimere un numero complesso nella forma

$$a + i\,b$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ ed $i \in \mathbb{C}$ è il numero complesso, detto *unità immaginaria*, tale che

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1 \ .$$

Ciò significa che in $\mathbb{C}$ il numero -1 è un quadrato. Più in generale si ha:

Proposizione C.3 *Ogni numero complesso è un quadrato.*

Dim. Segue dall'uguaglianza

$$\left(\sqrt{\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}+a}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}-a}{2}} \right)^2 = a + i\,b \ .$$

□

Definizione C.4 Dato un numero complesso $z = a + i\,b$, definiamo *parte reale* $\mathrm{Re}\,(z)$, *parte immaginaria* $\mathrm{Im}\,(z)$, *modulo* $|z|$ e *norma* $N(z)$ di z ponendo:

$$\mathrm{Re}\,(z) = a \qquad \mathrm{Im}\,(z) = b$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad N(z) = |z|^2 = a^2 + b^2$$

Il numero $\overline{z} = a - i\,b$ si dice *coniugato* di z e l'applicazione $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da $\sigma(z) = \overline{z}$ è detta *coniugio.*

Proposizione C.5 *Valgono le seguenti proprietà:*

1. $\overline{(\overline{z})} = z$*;*
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$*;*
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$*;*
4. $|\overline{z}| = |z|$*;*
5. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$*;*
6. $z \in \mathbb{R}$ *se e solo se* $z = \overline{z}$*;*
7. $|z| = 0$ *se e solo se* $z = 0$*.*

Dim. Sono facili verifiche. □

Proposizione C.6 *La somma e il prodotto di due numeri complessi coniugati sono due numeri reali.*

Dim. Se $z = a + i\,b$, si ha infatti: $z + \overline{z} = 2a$ e $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$. □

Proposizione C.7 *Dati due numeri complessi* z_1 *e* z_2 *si ha:*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \ .$$

Dim. Si ha: $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2$.

Poiché $z_1\overline{z_2}$ e $\overline{z_1}z_2$ sono coniugati, la loro somma è il numero reale $2\,\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2})$. Ma la parte reale di un numero complesso è minore o uguale al suo modulo, quindi

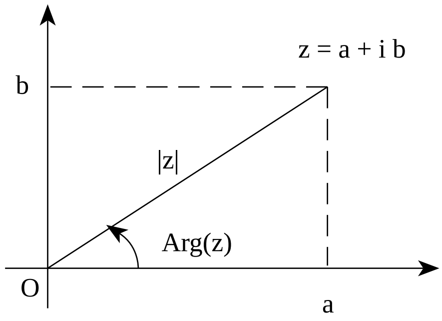
$z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 \leq 2|z_1 \cdot z_2| = 2|z_1| \cdot |z_2|$.

Ne segue $|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2$. □

C.2 Rappresentazione trigonometrica

Poiché un numero complesso è determinato da una coppia di numeri reali, possiamo rappresentare geometricamente un numero complesso con un punto di un piano dotato di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Più precisamente associando al numero complesso $a + i\,b$ il punto di coordinate (a, b) si ha una corrispondenza biunivoca tra numeri complessi e punti del piano. In questa situazione, quando cioè i punti sono identificati con numeri complessi il piano è detto *piano di Argand-Gauss* , l'asse x si dice *asse reale* e l'asse y *asse immaginario.*

Un numero complesso z è individuato nel piano di Argand-Gauss dal suo modulo ρ e, se $z \neq 0$, dalla rotazione antioraria ϑ che il semiasse positivo reale deve compiere per sovrapporsi alla semiretta uscente dall'origine e che contiene z. La rotazione ϑ, misurata in radianti, è definita a meno di multipli di 2π e si chiama *argomento* di z e si denota $\mathrm{Arg}\,(z)$.



Quindi l'argomento di z non è unico ma se $\vartheta = \mathrm{Arg}\,(z)$, ogni numero reale del tipo $\vartheta + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ è un argomento di z.

Se ρ e ϑ sono il modulo e l'argomento di un numero complesso $z = a + i\,b$ non nullo, si ha allora $a = \rho\cos\vartheta \qquad b = \rho\sin\vartheta$ ed anche

$$\cos\vartheta = \frac{a}{a^2+b^2} \qquad \sin\vartheta = \frac{b}{a^2+b^2}$$

Dalle formule precedenti si ottiene:

$$z = \rho(\cos\vartheta + i\,\sin\vartheta) \tag{C.1}$$

che è detta *forma trigonometrica* del numero complesso z.

Proposizione C.8 *Se z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, si ha*

$$\mathrm{Arg}\,(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}\,(z_1) + \mathrm{Arg}\,(z_2) \;\; .$$

Dim. Sia $z_1 = \rho_1(\cos\vartheta_1 + i\,\sin\vartheta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\vartheta_2 + i\,\sin\vartheta_2)$. Allora

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1\rho_2(\cos\vartheta_1 + i\,\sin\vartheta_1)(\cos\vartheta_2 + i\,\sin\vartheta_2) \\ &= \rho_1\rho_2(\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2) + i\,(\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2 + \sin\vartheta_1\cos\vartheta_2) \\ &= \rho_1\rho_2(\cos(\vartheta_1+\vartheta_2) + i\,\sin(\vartheta_1+\vartheta_2) \;\; . \end{aligned}$$

Corollario C.9 (Formula di de Moivre) *Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha*

$$[\rho(\cos\vartheta + i\,\sin\vartheta)]^n = \rho^n(\cos n\vartheta + i\,\sin n\vartheta) \;\; .$$

C.3 Rappresentazione esponenziale

In matematica una delle funzioni più importanti è senza dubbio la funzione esponenziale e^x. Tale funzione si può estendere al campo complesso utilizzando la *formula di Eulero*, una delle formule più curiose (e più utili) di tutta la matematica, che permette di definire le potenze con esponente immaginario. La formula è la seguente: se $\vartheta \in \mathbb{R}$,

$$e^{i\,\vartheta} = \cos\vartheta + i\,\sin\vartheta \tag{C.2}$$

Non riportiamo la dimostrazione di tale formula che richiederebbe alcune nozioni di teoria delle funzioni di variabile complessa.

Dalla formula di Eulero si ricava una scrittura più compatta della rappresentazione trigonometrica di un numero complesso.

$$z = \rho(\cos\vartheta + i\,\sin\vartheta) = \rho\, e^{i\vartheta}$$

Questa notazione risulta particolarmente comoda sia per la brevità sia per il fatto che, come si può dimostrare, le proprietà delle potenze valgono anche per l'esponenziale complesso. Accenniamo ad alcune conseguenze della formula (C.2).

Se $z = a + i\,b \in \mathbb{C}$ è un numero complesso, allora dalla (C.2) si ricava

$$e^z = e^{a+i\,b} = e^a \cdot e^{i\,b} = e^a \cdot (\cos b + i\,\sin b)$$

quindi si può definire l'esponenziale di un qualunque numero complesso.

La funzione di variabile complessa e^z è una funzione periodica di periodo immaginario $2\pi i$ per cui si ha

$$e^{z+2k\pi i} = e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Il fatto che e^z non è iniettiva pone problemi per la sua inversione. In effetti la definizione di una funzione logaritmo nel campo complesso, anche se possibile, non è unica e la sua introduzione pone parecchi problemi troppo delicati per essere affrontati in questa sede. E' invece facile estendere al campo complesso le funzioni trigonometriche in modo tale che la formula di Eulero valga in generale e non solo per un esponente puramente immaginario. Infatti dalle

$$e^{i\,z} = \cos z + i\,\sin z\ ; \qquad e^{-i\,z} = \cos z - i\,\sin z$$

si ricava

$$\sin z = \frac{e^{i\,z} - e^{-i\,z}}{2i}\ ; \qquad \cos z = \frac{e^{i\,z} + e^{-i\,z}}{2}\ .$$

Esempio Se $z = \rho e^{i\,\vartheta}$ e $n \in \mathbb{Z}$, usando la notazione esponenziale la formula di de Moivre si riscrive in modo più compatto

$$z^n = \rho^n e^{i\,n\vartheta}$$

Si voglia ad esempio calcolare $(1+i)^{100}$. Poiché $1 + i = \sqrt{2}e^{i\,\pi/4}$ si ha

$$(1+i)^{100} = (\sqrt{2})^{100} e^{i\,100\pi/4} = 2^{50} e^{i\,25\pi} = -2^{50}\ .$$

C.4 Radici di un numero complesso

Dato un numero complesso α e un intero positivo n, si dice che $z \in \mathbb{C}$ è una *radice* n*-esima* di α se $z^n = \alpha$.

Utilizzando la rappresentazione trigonometrica di un numero complesso si può provare il seguente teorema che generalizza la Proposizione C.3.

Teorema C.10 *Ogni numero complesso $\alpha \neq 0$ ha n radici n-esime distinte.*

Dim. Siano $r = |\alpha|$ e $\vartheta = \mathrm{Arg}\,(\alpha)$, allora il modulo ρ e l'argomento ϕ di una radice n-esima di α devono essere tali che $\rho^n = r$ e $n\,\phi \equiv \vartheta \pmod{2\pi}$. Quindi

$$\rho = \sqrt[n]{r} \qquad \text{e} \qquad \phi = \frac{\vartheta + 2k\pi}{n} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

qui $\sqrt[n]{r}$ significa *radice n-esima aritmetica* del numero reale positivo r. Viceversa si vede subito che ogni numero complesso della forma

$$\beta_k = \sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\vartheta + 2k\pi}{n} + i\,sen\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right) \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{C.3}$$

è una radice n-esima di α. E' chiaro che al variare di k in $\mathbb{Z}$ la (C.3) non fornisce numeri tutti distinti, anzi due diversi valori k_1 e k_2 di k forniscono lo stesso numero complesso se e solo se

$$\frac{\vartheta + 2k_1\pi}{n} \equiv \frac{\vartheta + 2k_2\pi}{n} \pmod{2\pi}$$

cioè se $k_1 - k_2 \equiv 0 \pmod{n}$. Per avere tutte le radici n-esime di α, e ciascuna una volta sola, basta dunque attribuire a k i valori $0, 1, \ldots, n-1$. □

Se $\alpha = 1$ la (C.3) fornisce le *n radici n-esime dell'unità*

$$\varepsilon_k = cos\frac{2k\pi}{n} + i\, sen\frac{2k\pi}{n} \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1 \ . \tag{C.4}$$

Le radici n-esime dell'unità costituiscono un gruppo ciclico (moltiplicativo) di ordine n e si ha $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$. I generatori di questo gruppo sono le *radici n-esime primitive dell'unità*; esse si ottengono dalla (C.4) quando k è primo con n. In particolare una radice primitiva è

$$\varepsilon_1 = cos\frac{2\pi}{n} + i\, sen\frac{2\pi}{n}$$

Si osservi che la (C.3) si può così riscrivere:

$$\beta_k = \beta_0\, \varepsilon_1^k$$

Rappresentando i numeri complessi nel piano di Argand-Gauss si vede subito che le radici dell'unità sono i vertici di un poligono regolare con n lati inscritto nel cerchio di centro l'origine e raggio 1 e che ha un vertice nel punto $(1,0)$.

C.5 Radici di un polinomio

Consideriamo l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, dove a, b, c sono numeri reali e $a \neq 0$. Tale equazione si può riscrivere nella forma

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0$$

Se $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, l'equazione ha le radici reali $(-b \pm \sqrt{\Delta})/(2a)$. Se $\Delta < 0$, l'equazione non ha radici reali ma esistono due radici complesse coniugate date da

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + i\,\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad \text{e} \qquad x_2 = -\frac{b}{2a} - i\,\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Questo fatto si esprime dicendo che ogni polinomio di secondo grado a coefficienti reali ha due radici complesse coniugate. Di fatto vale un risultato molto più generale noto come *teorema fondamentale dell'algebra* che afferma che ogni polinomio non costante in $\mathbb{C}[X]$ ha radici in $\mathbb{C}$. Vi sono molte dimostrazioni di questo teorema, ma anche le più semplici richiedono l'uso di strumenti che esulano dall'ambito di questo corso (funzioni di due variabili reali oppure funzioni di variabile complessa). Pertanto qui ci limiteremo a dare l'enunciato ed alcune importanti conseguenze.

Teorema C.11 (D'Alembert) *Ogni polinomio a coefficienti complessi di grado positivo possiede in $\mathbb{C}$ almeno una radice.*

E' noto che un polinomio $f(X) \in \mathbb{C}[X]$ ammette una radice $z \in \mathbb{C}$ se e solo se $f(X)$ è divisibile per $X - z$, cioè esiste un polinomio $g(X) \in \mathbb{C}[X]$ tale che $f(X) = (X - z)g(X)$. Ne segue

Corollario C.12 *I polinomi (non costanti) irriducibili in $\mathbb{C}[X]$ sono tutti e soli quelli di primo grado.*

Se $f(X)$ è un polinomio di grado $n > 0$, per il Teorema C.11 $f(X)$ ha almeno una radice z_1 e quindi $f(X) = (X - z_1)f_1(X)$ con f_1 polinomio di grado $n-1$. Se $n-1 > 0$ sia z_2 una radice di $f_1(X)$; allora $f(X) = (X - z_1)(X - z_2)f_2(X)$ con $f_2(X)$ polinomio di grado $n-2$. Proseguendo in questo modo si ottiene la decomposizione di f in fattori lineari

$$f(X) = a_0(X - z_1)(X - z_2)\dots(X - z_n)$$

dove $a_0, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$. I numeri z_i (che possono non essere tutti distinti) sono le *radici* di $f(X)$.

Se $f(X) = a_0(X - z_1)^{r_1}(X - z_2)^{r_2}\dots(X - z_s)^{r_s}$ con $z_i \neq z_j$ ed $r_1 + r_2 + \dots + r_s = n$ si dice che z_j è una radice r_j-esima dell'equazione $f = 0$ ed r_j si dice *molteplicità della radice* z_j. Se $r_j = 1$ si dice che z_j è una radice semplice.

Il teorema di D'Alembert può essere così riformulato

Teorema C.13 *Un'equazione algebrica di grado* n

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

con coefficienti complessi possiede esattamente n *radici in* $\mathbb{C}$ *purché ogni radice venga contata tante volte quanto è la sua molteplicità.*

Nel paragrafo precedente abbiamo dimostrato che questa proprietà nel caso particolare dell'equazione $X^n - \alpha = 0$ che ha radici tutte semplici.

C.6 Polinomi a coefficienti reali

La proposizione seguente generalizza l'osservazione fatta nel numero precedente riguardo le radici di un polinomio di secondo grado a coefficienti reali.

Proposizione C.14 *Sia* $f(X)$ *un polinomio a coefficienti reali e sia* $z \in \mathbb{C}$. *Allora* z *è radice di* $f(X)$ *se e solo se* $\overline{z}$ *è radice di* $f(X)$. *Inoltre le radici* z *e* $\overline{z}$ *hanno la stessa molteplicità.*

Dim. Sia $f(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ un polinomio reale di grado n. Allora utilizzando la Proposizione C.5 si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{f(z)} = \overline{a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n} \\ &= \overline{a_0} + \overline{a_1z} + \dots + \overline{a_n}\,\overline{z^n} = a_0 + a_1\overline{z} + \dots + a_n\overline{z^n} \\ &= f(\overline{z}) \end{aligned}$$

Se μ è la molteplicità della radice z e $f^{(r)}$ indica la derivata r-esima di f, allora $f^{(r)}(z) = 0$ per $r < \mu$ e $f^{(\mu)}(z) \neq 0$. Basta allora applicare la prima parte della Proposizione alle derivate del polinomio f. □

Corollario C.15 *In* $\mathbb{R}[X]$ *ogni polinomio si decompone nel prodotto di polinomi di grado minore o uguale a* 2.

C.7 Esercizi

Es. 227. Calcolare la parte reale e la parte immaginaria dei seguenti numeri complessi:

$$\frac{4+\sqrt{3}i}{5+\sqrt{3}i}; \quad (\sqrt{2}+i)^7; \quad \frac{1}{i(1-i)^5}; \quad \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad (i\sqrt{2}-i\sqrt{3})^3; \quad 2i-1.$$

Es. 228. Risolvere le equazioni:

$$(1+3i)z = 4; \qquad (2-3i)z = i; \qquad \frac{z-1}{z-i} = 2/3.$$

Es. 229. Determinare tutti i numeri complessi z di modulo 1 tali che $(1+3i)z \in \mathbb{R}$.

Es. 230. Scrivere in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi:
$2+2i$; $3-i$; -4; $-3i$; 1; $-3-2i$; $3+2i$;
$\cos\pi/3 - i\sin\pi/3$; $\sin\pi/4 + i\cos\pi/4$; $\cos 0 + i\sin\pi/2$;
$4(\cos\pi/4 - i\sin\pi/4)(\sin 3\pi/4 + i\cos 3\pi/4)$.

Es. 231. Calcolare il modulo dei numeri complessi:

$$(1+3i)(\cos 7 + i\sin 7); \qquad (4+3i)2(\cos 3 + i\sin 3)^{45}.$$

Es. 232. Rappresentare nel piano di Gauss gli insiemi:
$\{z \in \mathbb{C} \;/\; z \cdot \overline{z} = 1\}$, $\{z \in \mathbb{C} \;/\; z \cdot \overline{z} = 0\}$, $\{z \in \mathbb{C} \;/\; z + \overline{z} = 27\}$.

Es. 233. Provare che:
a) $x, y \in \mathbb{C}, x\overline{y} \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad y\overline{x} \in \mathbb{R}$;
b) $|z| = 1, Re(z) = 1/2 \quad \Rightarrow \quad z^3 = 1$.

Es. 234. Determinare: a) le radici seste di 1; b) le radici quarte di $-i$; c) le radici cubiche di $(\frac{1+i}{1-i})^3$

Es. 235. Determinare le radici dei seguenti polinomi:
$(X-i)^5 - \sqrt{2}$; $X^4 + 1$; $X^3 - 3X^2 + 7X - 5$; $X^6 + 12X^2$.

Es. 236. Determinare un polinomio a coefficienti reali e di grado minimo che abbia tra le sue radici 1, $1-3i$, $-2i$.

Es. 237. Esiste un polinomio di secondo grado a coefficienti reali che abbia come radici 3, $i-2$?

Es. 238. Siano e_1, e_2, $\ldots$, e_n le n radici n-esime (distinte) di 1. Provare che $e_1 + e_2 + \ldots + e_n = 0$.

Appendice D

Testi d'esame

15 Giugno 1993

1. Dati i tre punti $O(0,0,0)$, $A(1,1,2)$, $B(1,-1,0)$, sia r la retta OA; determinare:

a) I piani passanti per r che hanno distanza $\sqrt{2}$ dal punto B.

b) Una rappresentazione parametrica della retta passante per B, incidente e ortogonale alla retta OA tale che il punto B si ottenga per il valore 2 del parametro.

c) La circonferenza passante per i punti O, A, B.

2. Sia $\phi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'omomorfismo di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali associato mediante le basi canoniche alla matrice

$$M^{E_2}_{\phi(E_4)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determinare due basi distinte di $\mathrm{Im}\ \phi$.

b) Verificare che $\mathrm{Ker}\ \phi$ coincide con il sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^4$ generato da $w_1 = (0,0,0,1)$, $w_2 = (0,3,1,0)$.

c) Determinare una base e una rappresentazione parametrica di $W^\perp$.

d) Determinare $w \in W$ e $w' \in W^\perp$ tali che $w - w' = (1,2,2,2)$ e dire se w e w' sono univocamente determinati.

e) Determinare un automorfismo semplice $\psi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ che abbia -1 come autovalore e W come autospazio corrispondente.

3. Sia γ la conica di equazione $2xy + 2x + 2y = 1$.

a) Provare che γ è un'iperbole e determinarne il centro.

b) Determinare la trasformazione di coordinate che riduce γ in forma canonica.

4. Sia $\mathcal{F}$ la superficie rappresentata parametricamente da:

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = uv^4 - 1 \\ z = uv^2 \end{cases}$$

a) Perché $\mathcal{F}$ è una superficie rigata?

b) Determinare le rette giacenti su $\mathcal{F}$ e parallele al vettore $(1,1,1)$.

c) Detta $\mathcal{C}$ la curva su $\mathcal{F}$ ottenuta fissando $u=1$, si proietti ortogonalmente $\mathcal{C}$ sul piano xy.

Soluzioni

Esercizio 1

a) La retta OA è data da $x=y=z/2$, ovvero $\begin{cases} x &= y \\ 2x &= z \end{cases}$. Il fascio di piani Φ di asse OA è: $\lambda(x-y)+\mu(2x-z)=0$, ovvero $(\lambda+2\mu)x-\lambda y-\mu z=0$.

Un piano di Φ ha distanza $\sqrt{2}$ da B se e solo se

$$\frac{|(\lambda+2\mu)1-\lambda(-1)|}{\sqrt{(\lambda+2\mu)^2+\lambda^2+\mu^2}} = \sqrt{2}$$

Da ciò segue: $4(\lambda+\mu)^2 = 2((\lambda+2\mu)^2+\lambda^2+\mu^2)$ cioè $2\lambda^2+2\mu^2+4\lambda\mu-2\lambda^2-5\mu^2-4\lambda\mu=-3\mu^2=0$ quindi $\mu=0$ ed esiste un unico piano nel fascio Φ che soddisfa la condizione richiesta: $x-y=0$.

b) Poiché $B-O \perp A-O$, il punto O è la proiezione ortogonale di B sulla retta OA. Una rappresentazione della retta OB che soddisfa le condizioni richieste è: $P-O=\frac{1}{2}t(B-O)$ ovvero
$\begin{cases} x &= t/2 \\ y &= -t/2 \\ z &= 0 \end{cases}$

c) La circonferenza richiesta è data dall'intersezione del piano π passante per O, A, B e una sfera avente centro C equidistante dai tre punti dati e raggio CO.

Il piano π di Φ che passa per B è: $(\lambda+2\mu)(1)-\lambda(-1)=0$, cioè $\lambda+\mu=0$. Una soluzione non nulla è $\lambda=1$ e $\mu=-1$ e π ha equazione $x+y-z=0$.

Il generico punto di π è $P(\alpha,\beta,\alpha+\beta)$. Imponendo che $d(P,O)=d(P,A)$ si ha $\alpha+\beta-1=0$. Imponendo che $d(P,O)=d(P,B)$ si ha $\alpha-\beta-1=0$. Quindi il punto $C(1,0,1)$ è equidistante da O, A, B. La circonferenza richiesta è data quindi da
$\begin{cases} x+y-z=0 \\ (x-1)^2+y^2+(z-1)^2=2 \end{cases}$.

Esercizio 2

a) Si ha $\dim \operatorname{Im} \phi = \varrho(M^{E_2}_{\phi(E_4)})$. Inoltre essendo $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ l'insieme $\{\phi(e_1)=(1,2),\ \phi(e_2)=(-1,0)\}$ è una base di $\operatorname{Im}\phi$. Anche $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, quindi l'insieme $\{\phi(e_1)=(1,2),\ \phi(e_3)=(3,0)\}$ è un'altra base di $\operatorname{Im}\phi$.

b) Si ha $\dim \operatorname{Ker}\phi = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Im}\phi = 4-2=2$. Inoltre w_1 e w_2 sono due vettori linearmente indipendenti tali che $\phi(w_1)=(0,0)$ e $\phi(w_2)=3\phi(e_2)+\phi(e_3)=(-3,0)+(3,0)=(0,0)$. Allora $W=\mathcal{L}(\{w_1,w_2\})$ è un sottospazio di dimensione 2 contenuto in $\operatorname{Ker}\phi$; ne segue che $W=\operatorname{Ker}\phi$.

c) Essendo $W^\perp=\{v\in\mathbb{R}^4 \ / \ v\cdot w_1 = v\cdot w_2 = 0\}=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \ / \ t=3y+z=0\}$, una sua base è $\{w_3=(1,0,0,0),\ w_4=(0,1,-3,0)\}$ e una sua rappresentazione parametrica è $\{(\alpha,\beta,-3\beta,0) \ / \ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$.

d) Sia $w=w_1=(0,0,0,1)$ e $w'=w-(1,2,2,2)=(-1,-2,-2,-1)$. L'unicità di w e w' e l'appartenenza di w' a $W^\perp$ sono conseguenza del fatto che $\mathbb{R}^4=W\oplus W^\perp$.

e) Consideriamo la base $F = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ e definiamo un endomorfismo ϕ di $\mathbb{R}^4$ ponendo: $w_1 \mapsto -w_1,\ w_2 \mapsto -w_2,\ w_3 \mapsto w_3,\ w_4 \mapsto w_4$. Siccome F è una base formata da autovettori, ϕ è semplice e, chiaramente, W è l'autospazio associato all'autovalore 1.

Esercizio 3

a) La matrice associata a γ è $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ e ha determinante 3, quindi la conica è non degenere. Il determinante della matrice associata alla forma quadratica è -1, quindi γ è di tipo iperbolico. Il centro di γ si ottiene risolvendo il sistema: $\begin{cases} y+1=0 \\ x+1=0 \end{cases}$ quindi è $(-1,-1)$.

b) Determiniamo la matrice che diagonalizza la matrice associata alla forma quadratica. L'equazione caratteristica è:

$\begin{vmatrix} T & -1 \\ -1 & T \end{vmatrix} = T^2 - 1 = 0$; gli autovalori sono: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$; autospazi:

$V_1 = \{(x,y) \ / \ x - y = 0\}$ con base $F_1 = \{(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)\}$ e

$V_2 = \{(x,y) \ / \ x + y = 0\}$ con base $F_2 = \{(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)\}$

Poniamo $\alpha = \sqrt{2}/2$; allora la matrice $B = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$ è ortogonale speciale. La trasformazione di coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ trasforma l'equazione di γ nel modo seguente:

$2(\alpha x' - \alpha y')(\alpha x' + \alpha y') + 2(\alpha x' - \alpha y') + 2(\alpha x' + \alpha y') = 1$

$2(\alpha^2 x'^{\,2} - \alpha^2 y'^{\,2}) + 4\alpha x' = 1$

cioè

$x'^{\,2} - y'^{\,2} + 2\sqrt{2}\,x' = 1 \qquad$ quindi $\qquad (x' + \sqrt{2})^2 - y'^{\,2} = 3$

La traslazione $\quad x' = X - \sqrt{2}, \quad y' = Y \quad$ riduce γ in forma canonica. La trasformazione richiesta è quindi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} X - \sqrt{2} \\ Y \end{pmatrix} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} X - \frac{\sqrt{2}}{2} Y - 1 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} X + \frac{\sqrt{2}}{2} Y - 1 \end{cases}$$

Esercizio 4

a) La superficie $\mathcal{F}$ è rigata perché la rappresentazione parametrica data è lineare nel parametro u, quindi per ogni fissato valore di v si ottiene una retta r_v che ha $(1, v^4, v^2)$ come vettore direzionale e $\mathcal{F}$ è il luogo di tali rette.

b) La retta r_v è parallela al vettore $(1,1,1)$ se e solo se $(1, v^4, v^2) \times (1,1,1) = (0,0,0)$ se e solo se $v^2 = 1$. Vi sono quindi due rette su $\mathcal{F}$ parallele a $(1,1,1)$:

$$\begin{cases} x = u+1 \\ y = u-1 \\ z = u \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = u-1 \\ y = u-1 \\ z = u \end{cases}$$

c) Sia $P(1+v, v^4-1, v^2)$ un punto di $\mathcal{C}$. La retta per P perpendicolare al piano xy è $\quad x = 1+v,\ y = v^4-1,\ z = t$. La proiezione ortogonale di $\mathcal{C}$ sul piano xy è quindi $\quad x = 1+v,\ y = v^4-1,\ z = 0$. Una sua rappresentazione cartesiana si ottiene eliminando il parametro v ed è

$$\begin{cases} y = (x-1)^4 - 1 \\ z = 0 \end{cases} .$$

16 Luglio 1993

1. Sia A il punto $(1,1,0)$ e Φ il fascio di piani determinato dal piano $\pi_1 : x - 2z = 0$ e dal piano π_2 passante per l'origine e ortogonale al vettore $(1,1,0)$.

a) Trovare i piani del fascio che hanno distanza 1 dal punto A.

b) Provare che il luogo delle rette passanti per A e ortogonali ai piani del fascio Φ è un piano.

c) Determinare una circonferenza di raggio 1 contenuta nel piano π_1 tangente all'asse del fascio.

2. Sia $\phi_\lambda : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'omomorfismo di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali associato mediante le basi canoniche alla matrice

$$M^{E_3}_{\phi(E_3)} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Dire per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ l'omomorfismo ϕ_λ è un isomorfismo.

b) Determinare una base di Ker ϕ_λ e di Im ϕ_λ.

c) Per $\lambda = 1$ determinare un sottospazio V di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } \phi_\lambda \oplus V$.

3. Sia w un vettore non nullo di $\mathbb{R}^4$ e sia $\phi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'omomorfismo definito da $\phi(v) = (v \cdot w)\, w$.

a) Determinare Ker ϕ e Im ϕ.

b) Determinare autovalori e autovettori di ϕ e dire se ϕ è semplice.

4. Sia $\mathcal{L}$ la curva rappresentata parametricamente da:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 - 1 \\ z = t + 2t^2 \end{cases}$$

a) Dire se $\mathcal{L}$ è piana.

b) Determinare una rappresentazione cartesiana della proiezione ortogonale sul piano $z - 2y = 0$.

Soluzioni

Esercizio 1

Equazione cartesiana di $\pi_2 :\ x + y = 0$; equazione del fascio

$\Phi :\ \lambda(x - 2z) + \mu(x + y) = (\lambda + \mu)x + \mu y - 2\lambda z = 0$.

a) Per i piani di Φ che hanno distanza 1 da A deve essere:

$$\frac{|\lambda + 2\mu|}{\sqrt{(\lambda+\mu)^2 + \mu^2 + 4\lambda^2}} = 1$$

$$(\lambda + 2\mu)^2 = (\lambda+\mu)^2 + \mu^2 + 4\lambda^2$$

$$2\lambda^2 - \lambda\mu - \mu^2 = 0$$

I piani cercati corrispondono alle soluzioni non banali di questa equazione omogenea. Se $\mu = 0$, allora $\lambda = 0$. Assumiamo allora $\mu \neq 0$, dividiamo per μ^2. Risolvendo rispetto a λ/μ si ottengono i due valori 1 e $-1/2$. Vi sono quindi due piani in Φ a distanza 1 da A:

$\sigma_1 : \ (x-2z)+(x+y)=0$ e $\sigma_2 : \ (x-2z)-2(x+y)=0$.

b) Il generico piano di Φ ha vettore direzionale $(\lambda+\mu, \mu, -2\lambda)$. La retta passante per A e ortogonale al generico piano di Φ è

$$(*) \quad \begin{cases} x = 1+(\lambda+\mu)t \\ y = 1+\mu t \\ z = -2\lambda t \end{cases}$$

Al variare di λ, μ, t in $\mathbb{R}$ questa retta descrive il luogo dato. Posto $u = \lambda t$ e $v = \mu t$ il sistema diventa

$$\begin{cases} x = 1+u+v \\ y = 1+v \\ z = -2u \end{cases} \qquad (u, v \in \mathbb{R})$$

ed è immediato riconoscere la rappresentazione parametrica di un piano. Alternativamente si può eliminare i parametri λ, μ, t in (*) e ottenere una rappresentazione cartesiana del luogo dato: Poiché $\lambda t = -z/2$ e $\mu t = y-1$, sostituendo nella prima equazione si ha:

$x = 1 - z/2 + (y-1)$

che, essendo lineare in x, y, z, è l'equazione cartesiana di un piano.

c) La retta r asse di Φ passa per l'origine $O(0,0,0)$. Cerchiamo allora una circonferenza tangente a r in O. Consideriamo un generico punto $P(2t, s, t)$ di π_1 e imponiamo che P sia tale che $P - O$ risulti ortogonale ad r e che $d(P, O) = 1$.
Un vettore direzionale di r è $(2, -2, 1)$. Quindi deve essere

$(2t, s, t)\cdot(2, -2, 1) = 0$ e $\sqrt{4t^2+s^2+t^2} = 1$;

dalla prima equazione $s = \frac{5}{2}t$ e sostituendo nella seconda si ottiene $t = \pm\frac{2}{3\sqrt{5}}$.

La soluzione $t = \frac{2}{3\sqrt{5}}$, $s = \frac{\sqrt{5}}{3}$, fornisce il punto $C(\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3\sqrt{5}})$ e l'intersezione del piano π_1 con la sfera di centro C e raggio 1 dà la circonferenza richiesta

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ (x - \frac{4}{3\sqrt{5}})^2 + (y - \frac{\sqrt{5}}{3})^2 + (z - \frac{2}{3\sqrt{5}})^2 = 1 \end{cases} .$$

Esercizio 2

Poniamo $M = M^{E_3}_{\phi(E_3)}$.

a) ϕ_λ è un isomorfismo $\Leftrightarrow \det(M) \neq 0 \Leftrightarrow 1(-3+2) - \lambda(3\lambda-6) - 1(-\lambda+3) \neq 0 \Leftrightarrow 3\lambda^2 - 7\lambda + 4 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$ e $\lambda \neq 4/3$.

b) Se $\lambda \neq 1$ e $\lambda \neq 4/3$, allora $\dim \operatorname{Im} \phi_\lambda = \varrho(M) = 3$; in tal caso una base di $\operatorname{Im} \phi_\lambda$ è ad esempio la base canonica di $\mathbb{R}^3$, mentre una base per $\operatorname{Ker} \phi_\lambda$ è l'insieme vuoto.

Poiché $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall\lambda$, se $\lambda = 1$ oppure $\lambda = 4/3$, allora $\dim \operatorname{Im} \phi_\lambda = \varrho(M) = 2$ e una base di $\dim \operatorname{Im} \phi_\lambda$ è data da $\{\phi(e_2) = (\lambda, -1, 1),\ \phi(e_3) = (-1, 2, 3)\}$.

$\operatorname{Ker} \phi_\lambda = \{(x, y, z) \ / \ x\phi_\lambda(e_1) + y\phi_\lambda(e_2) + z\phi_\lambda(e_3) = (0,0,0)\}$.

Per $\lambda = 1$, il nucleo è l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+2z=0 \\ 3x-y+3z=0 \end{cases} \quad \text{che è equivalente a} \quad \begin{cases} x+y-z=0 \\ -2y+3z=0 \end{cases} .$$

Le soluzioni sono $(-\frac{1}{2}z, \frac{3}{2}z, z)$ con $z \in \mathbb{R}$. Pertanto una base di Ker ϕ_1 è $\{(-1,3,2)\}$.

Per $\lambda = 4/3$, Ker ϕ_λ consiste delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + \frac{4}{3}y - z = 0 \\ \frac{4}{3}x - y + 2z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \end{cases} \quad \text{che è equivalente a} \quad \begin{cases} x + \frac{4}{3}y - z = 0 \\ -5y + 6z = 0 \end{cases} .$$

Le soluzioni sono $(-\frac{3}{5}z, \frac{6}{5}z, z)$ con $z \in \mathbb{R}$. Pertanto una base di Ker $\phi_{4/3}$ è $\{(-3,6,5)\}$.

c) Può essere $V = (\text{Ker } \phi_1)^\perp$, cioè $V = \{(x,y,z) \ / \ -x + 3y + 2z = 0\}$.

Esercizio 3

a) Poiché ogni vettore ha come immagine un multiplo di w, Im ϕ è il sottospazio $\mathcal{L}(\{w\})$ generato da w. Inoltre $v \in \text{Ker } \phi \ \Leftrightarrow \ (v \cdot w)w = 0 \ \Leftrightarrow \ v \cdot w = 0$ (perché $w \neq 0$). Quindi Ker $\phi = \mathcal{L}(\{w\})^\perp$.

b) Abbiamo $\dim \mathcal{L}(\{w\}) = 1$ e $\dim \text{Ker } \phi = 3$. Quindi 0 è un autovalore e il corrispondente autospazio ha dimensione 3. D'altra parte $\phi(w) = (w \cdot w)w = |w|^2 w$. Quindi w è un autovettore associato all'autovalore $|w|^2$. Se $\{w_1, w_2, w_3\}$ è una base di Ker ϕ, allora $\{w_1, w_2, w_3, w\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di ϕ, quindi ϕ è semplice.

Esercizio 4

a) Prendiamo 3 punti non allineati su $\mathcal{L}$: $A(0,-1,0)$ $(t=0)$, $B(1,0,3)$ $(t=1)$ e $C(-1,0,1)$ $(t=-1)$ e verifichiamo se ogni altro punto della curva sta nel piano π passante A,B,C. Un vettore direzionale di π è $(B-A)\times(C-A)=(-2,-4,2)$; quindi anche $(1,2,-1)$. Un'equazione per π è perciò: $x+2(y+1)-z=0$. E siccome $t+2(t^2-1+1)-(t+2t^2)\equiv 0$, ogni punto di $\mathcal{L}$ sta su π e $\mathcal{L}$ è una curva piana.

b) La proiezione ortogonale $\mathcal{L}'$ si ottiene intersecando il piano $\sigma: z-2y=0$ con il cilindro $\mathcal{F}$ che ha $\mathcal{L}$ come direttrice e generatrici ortogonali a σ. Una rappresentazione parametrica di $\mathcal{F}$ è $(x=t,\ y=t^2-1-2s,\ z=t+2t^2+s)$. Intersecando con σ si ha: $t+2t^2+s-2t^2+2+4s=0$ da cui $s=-\frac{t+2}{5}$. La rappresentazione parametrica di $\mathcal{L}'$ è quindi

$$x=t, \quad y=t^2-1+2/5(t+2), \quad z=t+2t^2-1/5(t+2)$$

Una rappresentazione cartesiana si ottiene eliminando il parametro t:

$$\begin{cases} x^2-1+\frac{2}{5}(x+2)-y=0 \\ x+2x^2-\frac{1}{5}(x+2)-z=0 \end{cases} .$$

15 Settembre 1993

1. Discutere il seguente sistema nelle incognite reali x,y,z al variare del parametro reale λ :

$$\begin{cases} 2x+\lambda y+\lambda z &= 1 \\ \lambda x+2y+\lambda z &= 1 \\ \lambda x+\lambda y+2z &= 1 \end{cases}$$

2. (a) Provare che esiste un'unica retta passante per $Q=(1,2,3)$, contenuta nel piano $2x-y=0$ e incidente la retta

$$\begin{cases} x+z+1 &= 0 \\ 2x+2y-z-3 &= 0 \end{cases}$$

e determinare una sua rappresentazione cartesiana.

(b) Per quali valori del parametro reale k le rette

$$r: \begin{cases} x-ky+z+1 &= 0 \\ y-k &= 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x-kz+2 &= 0 \\ y &= 1 \end{cases}$$

sono complanari?

Per tali valori di k determinare un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

3. Provare che $F=\{(1,-1,0),(1,1,1),(-1,0,-1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Sia $\phi:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'omomorfismo definito da

$$M^F_{\phi(E_3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determinare Ker ϕ e Im ϕ.

b) E' vero o falso che $\mathbb{R}^3$ è somma diretta di Ker ϕ e Im ϕ?

c) L'omomorfismo ϕ è semplice?

Soluzioni

Esercizio 1

Sia A la matrice dei coefficienti, B la matrice completa e confrontiamo la caratteristica di A e B.

$\det(A) = 2(4-\lambda^2) - \lambda(2\lambda - \lambda^2) + \lambda(\lambda^2 - 2\lambda) = (2-\lambda)(4+2\lambda-2\lambda^2)$.

Se $\lambda \neq 2$ e $\lambda \neq -1$, allora $\det(A) \neq 0$, $\varrho(A) = \varrho(B) = 3$ e il sistema ha una sola soluzione.

Se $\lambda = 2$, il sistema equivale alla singola equazione $2x+2y+2z=1$, quindi ha ∞^2 soluzioni.

Se $\lambda = -1$, il minore formato dalle prime due righe e dalle prime due colonne di A è non nullo, quindi $\varrho(A) = 2$. Orlando questo minore con la terza riga e la colonna dei termini noti si ha:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(2+1) + (-1+1) + (1+2) = 9 \neq 0$$

quindi per $\lambda = -1$ $\varrho(B) = 3$ e il sistema è incompatibile.

Esercizio 2

Cerchiamo l'eventuale punto di intersezione P del piano dato con la retta data.

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z + 1 = 0 \\ 2x + 2y - z - 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2x \\ z = -x - 1 \\ 7x - 2 = 0 \end{cases}$$

quindi $P(\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, -\frac{9}{7})$. Allora la retta PQ è l'unica retta che soddisfa le condizioni richieste. Una sua rappresentazione cartesiana è:

$$\frac{x-1}{\frac{2}{7}-1} = \frac{y-2}{\frac{4}{7}-2} = \frac{z-3}{-\frac{9}{7}-3} \quad \text{ovvero} \quad \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{36} \ .$$

b) Un vettore direzionale di r è $(1,-k,1) \times (0,1,0) = (-1,0,1)$, un vettore direzionale di s è $(1,0,k) \times (0,1,0) = (-k,0,1)$. Pertanto $r \parallel s \Leftrightarrow k = 1$. In tal caso il piano $y = 1$ contiene entrambe le rette. Se $k \neq 1$, allora le due rette stanno su due piani paralleli distinti ($y = k$ e $y = 1$) quindi non sono incidenti. In conclusione r ed s sono complanari se e solo se $k = 1$.

Esercizio 3

Si ha: $\det(M_F^E) = -1 \neq 0$ quindi F è una base di $\mathbb{R}^3$.

a) La matrice $M^F_{\phi(E_3)}$ ha caratteristica 2, quindi $\dim \mathrm{Im}\ \phi = 2$ e $\dim \mathrm{Ker}\ \phi = 1$. Siano f_1, f_2, f_3 gli elementi di F nell'ordine dato e siano e_1, e_2, e_3 gli elementi della base canonica. Allora:

$\phi(e_1) = f_2, \quad \phi(e_2) = f_1 + f_3, \quad \phi(e_3) = f_1 + f_2 + f_3$.

Siccome f_2 e f_1+f_3 sono due vettori di $\mathrm{Im}\ \phi$ linearmente indipendenti, l'insieme $\{f_2 = (1,1,1),\ f_1 + f_3 = (0,-1,-1)\}$ è una base di $\mathrm{Im}\ \phi$.

Essendo poi $\phi(e_3) = \phi(e_1 + \phi(e_2)$, si ha $\phi(e_1 + e_2 - e_3) = (0,0,0)$ e quindi $\{e_1 + e_2 - e_3 = (1,1,-1)\}$ è una base di $\mathrm{Ker}\ \phi$.

b) Calcoliamo $\mathrm{Ker}\ \phi \cap \mathrm{Im}\ \phi$. Si ha:

$a(1,1,-1) = b(1,1,1) + c(0,-1,-1) \Leftrightarrow a = b, a = b - c, -a = -c \Leftrightarrow a = b = c = 0$.

Pertanto $\mathrm{Ker}\ \phi \cap \mathrm{Im}\ \phi = \{(0,0,0)\}$. Essendo inoltre $\dim \mathrm{Ker}\ \phi + \dim \mathrm{Im}\ \phi = 3$, si conclude che $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\ \phi \oplus \mathrm{Im}\ \phi$.

c) Per studiare la semplicità di ϕ occorre rappresentare ϕ mediante la stessa base nel dominio e nel codominio. Fissata allora la base canonica E, si ha: $M^E_{\phi(E)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. L'equazione caratteristica è allora $T(T^2-2)=0$. Vi sono quindi 3 autovalori distinti di molteplicità 1 e pertanto ϕ è un endomorfismo semplice.

11 Ottobre 1993

1. Date le rette

$$r:\begin{cases} x &= 1+t \\ y &= 1+t \\ z &= t \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x-z &= 0 \\ x &= 0 \end{cases}$$

a) Esiste un piano passante per r che contiene s?

b) Siano $O=(0,0,0)$ e $A=(1,1,0)$. Determinare un punto P su r e un punto Q su s tali che i triangoli OAP e OAQ abbiano la stessa area.

c) Determinare una rappresentazione cartesiana della superficie ottenuta ruotando la retta r attorno alla retta s.

d) Provare che tra le circonferenze descritte dalla rotazione dei punti di r attorno ad s, ne esiste una ed una sola di raggio minimo.

2. Siano F la base $\mathbb{R}^4$ data da

$$\{(1,1,0,0),(0,0,1,1),(0,1,1,0),(0,0,0,1)\}$$

e G la base $\mathbb{R}^3$ data da

$$\{(1,0,0),(1,1,0),(0,1,1)\}$$

e sia $\phi:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^3$ l'omomorfismo di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali associato alla matrice

$$M^G_{\phi(F)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Determinare una base di Im ϕ e di Ker ϕ.

b) Determinare un sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2 tale che $\dim\phi(W)=1$.

c) Determinare tutti i vettori u di $\mathbb{R}^4$ tali che $\phi(u)=(1,-1,0)$.

3. Per quali valori di $\alpha\in\mathbb{R}$ l'omomorfismo $\phi:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ dato da $\phi(x,y,z)=(x-2z,2x+\alpha y-z,-x)$ è semplice? per quali è iniettivo?

4. Determinare una rappresentazione cartesiana della conica passante per i punti $O(0,0)$, $A(0,4)$, $B(-1,1)$ e tangente alla retta $x-y-1=0$ nel punto $C(2,1)$.

Soluzioni

Esercizio 1

a) Le due rette hanno vettore direzionale $v_r = (1,1,1)$ e $v_s = (0,1,0)$ rispettivamente; chiaramente non sono parallele. Inoltre nessun punto di r verifica la prima equazione di s $(1+t-t=0)$, quindi r ed s non sono incidenti e quindi non sono complanari.

b) Se $P(1+t, 1+t, t) \in r$, l'area del triangolo OAP è

$\frac{1}{2}|(A-O)\times(P-O)| = \frac{1}{2}|(t,-t,0)| = \frac{1}{2}\sqrt{2t^2}$

Se $Q(0,u,0) \in s$, l'area del triangolo OAQ è

$\frac{1}{2}|(A-O)\times(Q-O)| = \frac{1}{2}|(0,0,u)| = \frac{1}{2}|u|$

Se si fissa $t=1$, si ha il punto $P(2,2,1)$ su r e deve essere $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}|u|$, quindi basta prendere $u=\sqrt{2}$ e $Q(0,\sqrt{2},0)$.

c) Il piano per $P(1+t,1+t,t)$ ortogonale ad s è: $\pi_t : y = 1+t$; la sfera di centro $O(0,0,0) \in s$ e raggio OP è: $\Sigma_t : x^2+y^2+z^2 = 2(1+t^2)+t^2$. La circonferenza γ_t descritta dalla rotazione di P attorno ad s è data dall'intersezione di π_t e Σ_t. La superficie richiesta è il luogo di queste circonferenze (al variare di $t \in \mathbb{R}$). Una sua rappresentazione cartesiana si ottiene eliminando il parametro t tra le equazioni di π_t e di Σ_t. Si ha $t = y-1$ e quindi si ottiene

$$x^2+y^2+z^2 = 2(1+(y-1)^2)+(y-1)^2$$

d) Il piano π_t ha distanza $d = |1+t|$ dall'origine; se $R = \overline{OP}$, usando il teorema di Pitagora si ha che il raggio di γ_t è $\sqrt{R^2-d^2} = \sqrt{1+2t^2}$. Tale quantità è ≥ 1 per ogni $t \in \mathbb{R}$ ed è uguale ad 1 solo per $t=0$.

Esercizio 2

Poniamo $f_1=(1,1,0,0), f_2=(0,0,1,1), f_3=(0,1,1,0), f_4=(0,0,0,1)$ e sia $M = M^G_{\phi(F)}$.

a) Calcoliamo $\dim \mathrm{Im}\,\phi = \varrho(M)$. Poiché $A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, si ha $\varrho(M) \geq 2$. Esaminiamo i minori di ordine 3 ottenuti orlando A.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-4=0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2+2=0$$

Quindi $\varrho(M)=2$ e $\dim \mathrm{Ker}\,\phi = 4-\varrho(M) = 2$. Il fatto che $A \neq 0$ assicura che

$\phi(f_1) = 2(1,0,0)-1(1,1,0) = (1,-1,0)$

$\phi(f_2) = -(1,0,0)+(1,1,0)+(0,1,1) = (0,2,1)$

sono 2 vettori linearmente indipendenti e quindi formano una base di $\mathrm{Im}\,\phi$.

Per determinare $\mathrm{Ker}\,\phi$ esprimiamo il vettore (x,y,z,t) come combinazione lineare dei vettori in F: $\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 + \delta f_4$.

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha+\gamma \\ z = \beta+\gamma \\ t = \beta+\delta \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} \alpha = x \\ \gamma = y-x \\ \beta = z-y+x \\ \delta = t-z+y-x \end{cases}$$

Si ha inoltre $\phi(f_3) = 2(1,0,0) + 2(0,1,1) = (2,2,2)$ e
$\phi(f_4) = -(1,1,0) - 2(0,1,1) = (-1,-3,-2)$. E quindi

$\phi(x,y,z,t) =$

$x\phi(f_1) + (z-y+x)\phi(f_2) + (y-x)\phi(f_3) + (t-z+y-x)\phi(f_4) =$

$= (y+z-t, 2x-3y+5z-3t, x-y+3z-2t)$

quindi $(x,y,z,t) \in \text{Ker}\ \phi$ se e solo se $\begin{cases} y+z-t=0 \\ 2x-3y+5z-3t=0 \\ x-y+3z-2t=0 \end{cases}$

Ma il nucleo ha dimensione 2, quindi questo sistema è equivalente al sistema formato da due sue equazioni indipendenti.

$$\begin{cases} t &= y+z \\ x &= 3y-z \end{cases}$$

Una base del nucleo è allora $\{g_1 = (3,1,0,1),\ g_2 = (-1,0,1,1)\}$.

b) Sia $W = \mathcal{L}(\{f_1, g_1\})$. Allora $\dim W = 2$ e $\phi(W)$ è generato da $\phi(f_1) = (1,-1,0)$ perché $g_1 \in \text{Ker}\ \phi$. Quindi $\dim \phi(W) = 1$.

c) I vettori $u \in \mathbb{R}^4$ tali che $\phi(u) = (1,-1,0)$ sono le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} y+z-t=1 \\ 2x-3y+5z-3t=-1 \\ x-y+3z-2t=0 \end{cases}$$

Una soluzione particolare è $f_1 = (1,1,0,0)$. Le altre soluzioni si ottengono sommando a questa le soluzioni del sistema omogeneo associato, che sono gli elementi di $\ker \phi$. Quindi

$$\phi^{-1}(u) = \{(1+3\alpha-\beta, 1+\alpha, \beta, \alpha+\beta)\ /\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$$

Esercizio 3

Sia E la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Allora $M^E_{\phi(E)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & \alpha & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico è:

$$\begin{vmatrix} T-1 & 0 & 2 \\ -2 & T-\alpha & 1 \\ 1 & 0 & T \end{vmatrix} = (T-\alpha)(T^2-T-2)$$

Gli autovalori sono: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = \alpha$. Se $\alpha \neq -1$ e $\alpha \neq 2$ si hanno 3 autovalori distinti e quindi ϕ è semplice.

Se $\alpha = -1$ oppure $\alpha = 2$, si ha un autovalore con molteplicità 2 e occorre calcolare la dimensione del corrispondente autospazio.

Supponiamo $\alpha = -1$; allora

$$\dim V_\alpha = 3 - \varrho \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 \ < \ \mu(-1) = 2$$

e quindi ϕ non è semplice.

Supponiamo ora $\alpha = 2$; allora

$$\dim V_\alpha = 3 - \varrho \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 1 \ < \ \mu(-1) = 2$$

e quindi ϕ non è semplice.

ϕ è iniettivo se e solo se 0 non è un autovalore per ϕ se e solo se $\alpha \neq 0$.

Esercizio 4

Retta OA: $x=0$; retta OC: $x-2y=0$; retta AC: $3x+2y-8=0$. Il fascio di coniche passanti per O, A e tangenti in C alla retta data ha equazione

$\lambda\, x(x-y-1)+\mu\,(x-2y)(3x+2y-8))=0$

Imponendo il passaggio per B si ha: $\lambda\,(3)+\mu\,(27)=0$

Una soluzione non banale è $\lambda=9$ e $\mu=-1$; la conica cercata è quindi

$$9\,(x^2-xy-x)-(x-2y)(3x+2y-8)=0\ .$$

5 Gennaio 1994

1. Date le rette

$$r:\begin{cases} x+2y+z-1 & = & 0 \\ x-3z & = & 0 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x & = & 2t \\ y & = & 1+3t \\ z & = & 2 \end{cases}$$

a) Determinare, se esiste, un piano passante per r parallelo ad s.

b) Determinare una rappresentazione parametrica della retta r tale che il punto $(0,1/2,0)$ si ottenga per il valore 3 del parametro.

c) Determinare una rappresentazione parametrica della retta s' simmetrica alla retta s rispetto alla retta r.

2. Siano $A(1,0)$ e $B(0,-1)$ due punti del piano. Per ogni punto P siano P' e P'' le proiezioni ortogonali di P rispettivamente sull'asse x e sull'asse y. Provare che al variare di P sulla retta AB il punto di intersezione delle rette AP'' e BP' descrive una conica γ.

Classificare γ e determinare una matrice ortogonale speciale che diagonalizza la forma quadratica di γ.

3. Dire per quali $\lambda\in\mathbb{R}$ il seguente sistema lineare ha soluzioni e, in caso affermativo dire quante sono e determinarle.

$$\begin{cases} x+\lambda y+3z & = & 3 \\ x+(\lambda+1)y+2z & = & 1 \\ \lambda x+2y+2z & = & \lambda \end{cases}$$

4. Sia $V=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\ /\ x-2y+z+3t=0\}$ e sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $(0,-1,1,-1)$, $(1,-1,1,0)$ e $(2,-1,1,1)$.

a) Determinare una base di $V\cap W$ e di $V+W$.

b) Esiste un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ che abbia W come nucleo e V come immagine?

c) Esiste un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ che abbia come autospazi V e W?

d) Determinare, se esiste, un endomorfismo semplice $\phi:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ non nullo e tale che $\phi(W)\subset V$.

Soluzioni

Esercizio 1

a) Un vettore direzionale di s è $v_s = (2, 3, 0)$. Il fascio di piani di asse r è:

$\Phi_r : \lambda(x + 2y + z - 1) + \mu(x - 3z) = 0$.

Il generico piano π di Φ_r ha vettore direzionale $V_\pi = (\lambda + \mu, 2\lambda, \lambda - 3\mu)$ e $\pi \parallel r \Leftrightarrow v_\pi \cdot v_r = 0 \Leftrightarrow 2(\lambda + \mu) + 6\lambda = 0$. Una soluzione non banale è $\lambda = 1$ e $\mu = -4$, quindi il piano cercato è $(x + 2y + z - 1) - 4(x - 3z) = 0$ ovvero

$3x - 2y + 13z + 1 = 0$.

b) Un vettore direzionale di r è $(1, 2, 1) \times (1, 0, -3) = (-6, 4, -2)$ e quindi anche $v_r = (3, -2, 1)$. Una rappresentazione parametrica di r è $(3t, 1/2 - 2t, t), \quad t \in \mathbb{R}$, nella quale il punto dato si ottiene per $t = 0$. Effettuando la sostituzione lineare $t \mapsto t - 3$ si ottiene la parametrizzazione $(3(t - 3), 1/2 - 2(t - 3), t - 3)$ di r che soddisfa la condizione richiesta.

c) Il simmetrico P' del punto $P(2t, 1 + 3t, 2)$ rispetto ad r si ottiene imponendo che il punto medio di PP' sia la proiezione ortogonale di P su r.

Il piano $\perp r$ passante per P è: $\sigma : 3(x - 2t) - 2(y - 1 - 3t) + (z - 2) = 3x - 2y + z = 0$. (L'equazione di σ non dipende da t perché $r \perp s$). La proiezione ortogonale di P su r è l'intersezione di σ con r ed è: $Q(3/14, 5/14, 1/14)$. Sia $P'(x, y, z)$, imponendo che

$$\frac{x + 2t}{2} = \frac{3}{14}, \quad \frac{y + 1 + 3t}{2} = \frac{5}{14}, \quad \frac{z + 2}{2} = \frac{31}{14}$$

si ottiene la rappresentazione parametrica di s'

$x = 3/7 - 2t, \quad y = -2/7 - 3t, \quad z = -13/7$.

Esercizio 2

Il generico punto della retta AB è $P(t, t - 1)$. Quindi $P'(t, 0)$ e $P''(0, t - 1)$. Retta AP'': $y = (1 - t)(x - 1)$. Retta BP': $x = t(y + 1)$. Eliminando il parametro t tra queste due equazioni si ottiene la rappresentazione cartesiana del luogo; essendo $t = x/(y + 1)$ si ottiene:

$x^2 + y^2 - xy - 2x + 2y + 1 = 0$.

Questa è un'equazione di secondo grado in x, y, il luogo dato è una conica γ. La matrice associata a γ è $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e ha determinante $-1/4$; quindi γ è non degenere. Inoltre il determinante della matrice associata alla forma quadratica è positivo, quindi γ è un'ellisse.

Costruiamo ora la matrice ortogonale speciale, determinando una base o.n. per ogni autospazio. L'equazione caratteristica è:

$\begin{vmatrix} T - 1 & 1/2 \\ 1/2 & T - 1 \end{vmatrix} = (T - 1)^2 - 1/4 = T^2 - 2T + 3/4 = 0$

Autovalori: $\quad \lambda_1 = 1/2$ e $\lambda_2 = 3/2$.

L'autospazio $V_{1/2} = \{(x, y) \ / \ x + y = 0\}$ ha come base ortonormale $\{(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)\}$, mentre l'autospazio $V_{3/2} = \{(x, y) \ / \ x - y = 0\}$ ha come base ortonormale $\{(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)\}$.

La matrice richiesta è quindi

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3

Siano A la matrice dei coefficienti e B la matrice completa associata al sistema:

$$B\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 3 & 3 \\ 1 & \lambda+1 & 2 & 1 \\ \lambda & 2 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$$

Operiamo le seguenti operazioni elementari sulle righe di B: sottraiamo alla seconda riga la prima riga e alla terza la prima moltiplicata per λ:

$$B\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2-\lambda^2 & 2-3\lambda & -2\lambda \end{pmatrix}$$

sottraiamo alla terza riga la seconda riga moltiplicata per $2-\lambda^2$:

$$B\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-3\lambda+4 & -2\lambda^2-2\lambda+4 \end{pmatrix}$$

Se $-\lambda^2-3\lambda+4 \neq 0$ cioè $\lambda \neq 1$ e $\lambda \neq -4$, allora $\varrho(A)=\varrho(B)=3$ e il sistema ha una sola soluzione che è, posto $k_1=-\lambda^2-3\lambda+4$ e $k_2=-2\lambda^2-2\lambda+4$,

$$z=\frac{k_2}{k_1}, \quad y=-2+z=-2+\frac{k_2}{k_1}, \quad x=3-3z-\lambda y=3-3\frac{k_2}{k_1}-\lambda\frac{k_2}{k_1}$$

Se $\lambda=1$, la terza equazione si riduce all'identità $0=0$, $\varrho(A)=\varrho(B)=2$ e il sistema ha ∞^1 soluzioni:

$y=-2+z, \quad x=3-3z-y=3-3z+2-z=5-4z, \quad z\in\mathbb{R}$.

Infine se $\lambda=-4$, la terza equazione diventa $\quad 0=-20, \quad$ quindi il sistema è incompatibile.

Esercizio 4

a) I tre generatori di W non sono lin. indip.: infatti $w_3=2w_2-w_1$; mentre $F=\{w_1,w_2\}$ è una base di W. Il generico vettore di W è allora $aw_1+bw_2=(b,-a-b,a+b,-a)$ e sta in V se e solo se si ha $b-2(-a-b)+(a+b)+3(-a)=0$ se e solo se $b=0$. Ne segue che $\{w_1\}$ è una base di $V\cap W$.

Una base di V è: $G=\{v_1=(1,0,-1,0), v_2=(0,1,2,0), v_3=(0,0,-3,1)$. Allora $F\cup G$ è un insieme di generatori di $V+W$. Ma abbiamo visto che $w_1\in V$, quindi anche $\{v_1,v_2,v_3,w_2\}$ è un insieme di generatori di $V+W$; questi vettori sono necessariamente linearmente indipendenti (e quindi una base di $V+W$): infatti se $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\lambda_3v_3+\lambda_4w_2=0$ con i λ_i non tutti nulli, allora deve essere $\lambda_4\neq 0$ perché altrimenti v_1,v_2,v_3 non sarebbero lin. dipendenti; ma allora $w_2=-1/\lambda_4(\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\lambda_3v_3)\in V$ e questo è in contraddizione con quanto visto prima.

b) Si ha $\dim V=3$ e $\dim W=2$; poiché per ogni endomorfismo ϕ di $\mathbb{R}^4$ si ha $\dim \mathrm{Ker}\ \phi+\dim \mathrm{Im}\ \phi=4$, non esiste alcun endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ per cui $\mathrm{Ker}\ \phi=W$ e $\mathrm{Im}\ \phi=V$.

c) Due autospazi distinti hanno in comune solo il vettore nullo, mentre V e W hanno intersezione non banale; quindi non esiste un siffatto endomorfismo.

d) Completiamo la base F di W a una base di $\mathbb{R}^4$ aggiungendo i vettori e_3,e_4 della base canonica. Definiamo allora un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ ponendo:

$w_1\mapsto w_1, \quad w_2\mapsto 0, \quad e_3\mapsto 2e_3, \quad e_4\mapsto 3e_4$.

E' chiaro che $\phi(W)\subset V$, inoltre ϕ, avendo 4 autovalori distinti, è semplice.

16 Febbraio 1994

1. Determinare il luogo γ dei centri delle circonferenze tangenti alle due rette:

$$r:\ x+2y=0, \qquad r':\ 2x+y=0$$

Provare che tale luogo è una conica e classificarla.

2. Dati i 3 piani $\pi_1 : 5x - y + \lambda z = 1\,,\ \pi_2 : \lambda x + y - z = 1\,,\ \pi_3 : -x + y - 2z = 0\,,$

a) dire se esistono valori $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali $\pi_1 \perp \pi_2$;

b) dire se esistono valori $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali i tre piani appartengono ad un fascio;

c) dire per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ l'intersezione dei tre piani è vuota, è un punto, è una retta e, se non vuota, determinarla.

3. Sia $F = \{f_1, f_2, f_3\} \subset \mathbb{R}^3$ dove $f_1 = (1,1,1)\,,\ f_2 = (1,0,1)\,,\ f_3 = (0,0,1)\,.$

a) Provare che F è una base di $\mathbb{R}^3$ e determinare M_S^F dove $S = \{(1,0,1),(1,0,0)\,.$

b) Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dato da $\phi(f_1) = (1,1,2)\,,\ \phi(f_2) = (0,1,0)\,,\ \phi(f_3) = (0,0,1)\,.$ Dire se l'endomorfismo ϕ è semplice.

4. Sia $\mathcal{L} : \begin{cases} x = t^4 + t \\ y = t^3 \\ z = 1 + t \end{cases}$

1. Dire se $\mathcal{L}$ è una curva piana.
2. Determinare una circonferenza passante per tre punti di $\mathcal{L}$.
3. Determinare la superficie di rotazione attorno all'asse z.

Soluzioni

Esercizio 1

$P(x,y) \in \gamma \Leftrightarrow d(P,r) = d(P,r') \Leftrightarrow \frac{|x+2y|}{\sqrt{5}} = \frac{|2x+y|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow (x+2y) = \pm(2x+y)\,.$

Il luogo γ è quindi l'unione delle due rette distinte $x - y = 0$ e $x + y = 0$. Tali rette si intersecano nell'origine, quindi γ è una conica degenere di tipo iperbolico.

Esercizio 2

a) $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow (5,-1,\lambda)\cdot(\lambda,1,-1) = 4\lambda - 1 = 0\,.$ Quindi per $\lambda = 1/4$ i due piani sono ortogonali.

b) I tre piani appartengono ad un fascio se e solo se passano per una stessa retta se e solo se il sistema lineare $\mathcal{S}$ costituito dalle equazioni dei tre piani ha ∞^1 soluzioni se e solo se $\varrho(A) = \varrho(B) = 2$, dove A e B sono rispettivamente la matrice dei coefficienti e la matrice completa di $\mathcal{S}$.

$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Il minore $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$ è non nullo; basta allora imporre che siano nulli i due minori di ordine 3 che si ottengono orlando questo minore.

$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & -1 & \lambda \\ \lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 5(-1) + (-2\lambda - 1) + \lambda(\lambda+1) = \lambda^2 - \lambda - 6$ si annulla per $\lambda = -2$ e per $\lambda = 3$.

$\begin{vmatrix} -1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -(\lambda - 1 - 2(\lambda - 2)) = \lambda - 3$ si annulla per $\lambda = 3$.

Quindi i 3 piani appartengono a un fascio se e solo se $\lambda = 3$.

c) Da quanto visto nel punto b) segue che per $\lambda \neq -2$ e $\lambda \neq 3$ i 3 piani si intersecano in un unico punto le cui coordinate sono

$$\left(\frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & \lambda \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\lambda^2-\lambda-6}, \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{\lambda^2-\lambda-6}, \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\lambda^2-\lambda-6} \right) =$$

$$\left(\frac{1}{\lambda+2}, \frac{3}{\lambda+2}, \frac{1}{\lambda+2} \right)$$

Esercizio 3

a) La matrice $\quad M_F^E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo quindi F è una base di $\mathbb{R}^3$. Si ha: $(1,0,1) = f_2$ e $(1,0,0) = f_2 - f_3$. Quindi $\quad M_S^F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Si ha $\phi(f_1) = (1,1,2) = f_1 + f_3$, $\phi(f_2) = (0,1,0) = f_1 - f_2$, $\phi(f_3) = (0,0,1) = f_3$. Perciò $M_{\phi(F)}^F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Il polinomio caratteristico è $(T-1)^3$, quindi ϕ ha un unico autovalore 1 con molteplicità 3. Se ϕ fosse semplice, l'autospazio corrispondente all'autovalore 1 dovrebbe avere dimensione 3 e quindi ϕ dovrebbe essere l'endomorfismo identico. Ma questo è assurdo perché $\phi(f_1) \neq f_1$.

Esercizio 4

a) Prendiamo 3 punti su $\mathcal{L}$: $A(0,0,1)$, $B(2,1,2)$, $C(0,-1,0)$ corrispondenti rispettivamente a $t = 0, t = 1, t = -1$. La retta AC ha equazioni $\quad x = y - z + 1 = 0 \quad$ e non passa per B. Il piano π che contiene AC e passa per B è $\quad y - z + 1 = 0$.

La curva $\mathcal{L}$ è piana se e solo se ogni suo punto sta nel piano ABC. Ma l'equazione $t^3-(1+t)+1 = 0$ ha esattamente tre radici ($t = 0, 1, -1$, ciò significa che l'intersezione di $\mathcal{L}$ con il piano π consiste di soli tre punti, e quindi $\mathcal{L}$ non è piana.

b) Cerchiamo un punto sul piano π equidistante da A, B, C. Un generico punto di π ha coordinate $(a, b, b+1)$. Si ha: $d(P,A)^2 = a^2 + 2b^2$, $d(P,C)^2 = a^2 + 2(b+1)^2$, $d(P,B)^2 = (a-2)^2 + 2(b-1)^2$, $d(P,C)^2 = a^2 + 2(b+1)^2$.

Imponendo che $d(P,A)^2 = d(P,C)^2$ si ha $b = -1/2$. E imponendo $d(P,A)^2 = d(P,B)^2$ si ottiene che $a = 2$. La circonferenza richiesta è quindi

$$\begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ (x-2)^2 + (y+1/2)^2 + (z-1/2)^2 = 9/2 \end{cases}$$

c) Sia $P(t^4+t, t^3, 1+t) \in \mathcal{L}$. Il piano per P e $\perp$ all'asse z è: $\quad$ (*) $\quad z = 1 + t$. $\quad$ La sfera di centro $O(0,0,0)$ e raggio OP è: $\quad$ (**) $\quad x^2 + y^2 + z^2 = (t^4+t)^2 + t^6 + (1+t)^2$. Eliminando t tra (*) e (**) si ottiene una rappresentazione cartesiana della superficie di rotazione richiesta:

$$x^2 + y^2 + z^2 = ((z-1)^4 + (z-1))^2 + (z-1)^6 + z^2.$$

9 Giugno 1994

1. Scrivere in forma algebrica il seguente numero complesso $(1-\sqrt{3}\,i)^9-(1+i)^6$.

2. Determinare, al variare di $\lambda\in\mathbb{R}$, la dimensione e una base del sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$W_\lambda=\{\ (x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x+\lambda y-z &= 0\\ \lambda x-y+2z+\lambda t &= 0\\ 2x+\lambda z+t &= 0\end{cases}\ \}$$

Sia $W=W_1$. Determinare, se esiste, un'applicazione lineare $\phi:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^4$ che abbia come immagine W e come nucleo il sottospazio generato dal vettore $(1,-1,1)$.

3. Sia r la retta di equazioni $\begin{cases} z &= x-y\\ y &= 2x\end{cases}$

a) Trovare i piani passanti per il punto $P(0,2,0)$, paralleli ad r e distanti 1 da r.

b) Trovare la superficie di rotazione che si ottiene facendo ruotare la retta $\begin{cases} x &= 1\\ y &= z\end{cases}$ attorno alla retta r.

4. Sia $A\in M_3(\mathbb{R})$ una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} a & b & c\\ 0 & d & e\\ 0 & 0 & f\end{pmatrix}$$

con a,d,f distinti tra loro. Provare che A è diagonalizzabile.

Mostrare con un esempio che l'affermazione precedente non è vera se a,d,f non sono distinti.

5. Classificare, al variare di $\lambda\in\mathbb{R}$, le coniche della famiglia

$$(\lambda+6)x^2+2\lambda xy+y^2+2x-4y=0\ .$$

Soluzioni

Esercizio 1

$$\begin{aligned}&(1-\sqrt{3}\,i)^9-(1+i)^6\ =\\ &\quad (2(\cos\frac{5\pi}{3}+i\,\sin\frac{5\pi}{3}))^9+(\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\sin\frac{\pi}{4}))^6\ =\\ &\quad 2^9(\cos 15\pi+i\,\sin 15\pi)+2^3(\cos\frac{3\pi}{2}+i\,\sin\frac{3\pi}{2})=\\ &\quad -512-8\,i\ .\end{aligned}$$

Esercizio 2

a) Sommando alla seconda equazione la prima moltiplicata per $-\lambda$ e sommando alla terza equazione la prima moltiplicata per -2, si ottiene il sistema equivalente:

$$\begin{cases} x+\lambda y-z &= 0\\ \quad(-1-\lambda^2)y+(\lambda+2)z+\lambda t &= 0\\ \quad -2\lambda y+(\lambda+2)z+t &= 0\end{cases}$$

che ha come matrice dei coefficienti

$$A\ =\ \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & -1-\lambda^2 & \lambda+2 & \lambda\\ 0 & -2\lambda & \lambda+2 & 1\end{pmatrix}$$

Il minore di ordine 2 formato dalla prima e dalla terza riga e dalla prima e quarta colonna è non nullo, quindi $\varrho(A) \geq 2$. Esaminiamo i minori di ordine 3 che si ottengono orlando il suddetto minore.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda & \lambda \\ 0 & -2\lambda & 1 \end{vmatrix} = -1-\lambda+2\lambda^2 \text{ si annulla per } \lambda = 1 \text{ oppure } \lambda = -1/2.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & \lambda \\ 0 & \lambda+2 & 1 \end{vmatrix} = 2-\lambda-\lambda^2 \text{ si annulla per } \lambda = 1 \text{ oppure } \lambda = -2.$$

Quindi se $\lambda = 1$, $\varrho(A) = 2$ e $\dim W_1 = 2$.

In tal caso il sistema è equivalente a $\begin{cases} x &= -y+z \\ t &= 2y-3z \end{cases}$ e una base di W_1 è $\{(-1,1,0,2),(1,0,1,3)\}$.

Se $\lambda \neq 1$, allora $\varrho(A) = 3$ e $\dim W_1 = 1$. In tal caso abbiamo un sistema di 3 equazioni indipendenti in 4 incognite. Le soluzioni sono $\alpha(\Delta_1, -\Delta_2, \Delta_3, -\Delta_4)$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$ e Δ_i è il minore di ordine 3 di A che si ottiene cancellando la i-esima colonna. Quindi una base di W_λ è:

$(-\lambda^3+2\lambda-1, \lambda^2+\lambda-2, 2\lambda^2-\lambda-1, \lambda^3-3\lambda+2)$.

Esercizio 3

a) Un vettore direzionale di r è $v_r = (1,2,-1)$. Quindi un piano π con vettore direzionale (a,b,c) è $\parallel r$ se e solo se $(1,2,-1)\cdot(a,b,c) = a+2b-c = 0$.

Il generico piano passante per P e $\parallel r$ è dunque $\pi_{a,b}: \ ax+b(y-2)+(a+2b)z = 0$. Essendo $\pi_{a,b} \parallel r$, la distanza di $\pi_{a,b}$ da r è uguale alla distanza di un qualunque punto di r da $\pi_{a,b}$. Sia $O(0,0,0) \in r$. Allora $d(O,\pi_{a,b}) = \frac{|-2b|}{\sqrt{a^2+b^2+(a+2b)^2}} = 1$ se e solo se $2a^2+4ab+b^2 = 0$ se e solo se $\frac{a}{b} = \frac{-2\pm\sqrt{2}}{2}$. Esistono quindi due piani che verificano le condizioni richieste:

$\pi_{-2-\sqrt{2},2}: (-2-\sqrt{2})x+2(y-2)+(-\sqrt{2}+2)z = 0$,

$\pi_{-2+\sqrt{2},2}: (-2+\sqrt{2})x+2(y-2)+(\sqrt{2}+2)z = 0$.

b) Sia $P(1,t,t)$ il generico punto della retta che ruota. Il piano passante per P e $\perp r$ è $\sigma: (x-1)+2(y-t)-(z-t) = 0$. La circonferenza descritta dalla rotazione di P attorno ad r è data dall'intersezione di σ con la sfera di centro O e raggio OP:

$$\begin{cases} x+2y-z-t-1 = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1+2t^2 \end{cases}$$

Una sua rappresentazione cartesiana è : $x^2+y^2+z^2 = 1+2(x+2y-z-1)^2$.

Esercizio 4

Il polinomio caratteristico di A è $(T-a)(T-d)(T-f)$, quindi se a,d,f sono distinti tra loro, A ha 3 autovalori distinti e pertanto è diagonalizzabile.

Sia ϕ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che $A = M^E_{\phi(E)}$ dove E è la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Se $a = d = f = 0$ e $b = c = e = 1$, l'unico autovalore di A è 0 con molteplicità 3. Se A fosse diagonalizzabile, l'autospazio associato a 0 dovrebbe avere dimensione 3 e quindi ϕ dovrebbe essere l'endomorfismo nullo. Ma questo è assurdo perché $\phi(e_2) = e_1$.

Esercizio 5

Il determinante della matrice A associata alla generica conica della famiglia è

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \lambda+6 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & -2 \\ 1 & -20 & \end{vmatrix} = -4\lambda-1$$

Si ha una conica non degenere $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -1/4$.

Il determinante della matrice associata alla forma quadratica è $\Delta = -\lambda^2+\lambda+6$. Se $\lambda < -2$ oppure $\lambda > 3$, $\Delta < 0$ e si ha una iperbole. Se $\lambda = -2$ oppure $\lambda = 3$, $\Delta = 0$ e si ha una parabola. Per $-2 < \lambda < 3$ si ha un'ellisse.

29 Giugno 1994

1. Determinare le radici (complesse) del polinomio

$$X^7 - X^6 + i\,X - i \ .$$

2. Sia $\mathcal{F}$, la superficie rigata data da

$$(*) \quad \begin{cases} x &=& 2t^2 - t \\ y &=& t - 4t^3 \\ z &=& 1 + t + u\,t^2 \end{cases}$$

a) Determinare, se esiste, un piano π tale che $\mathcal{F} \cap \pi$ contenga due rette parallele distinte.

b) Esistono valori reali α tali che la curva ottenuta ponendo $u = \alpha$ in (*) sia piana?

3. Siano $v_1 = (1, 2 - 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (2, 3, -3)$ e $V = \mathcal{L}(\{v_1, v_2, v_3\})$.

a) Determinare una base di V e completarla ad una base F di $\mathbb{R}^3$.

b) Determinare un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 tale che $V \cap W = \mathcal{L}(\{v_1\})$.

c) Sia $S = \{v_1, v_2, v_3, v_1+\lambda v_3\}$. Quanto vale la caratteristica della matrice M_S^F al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$?

4. Sia $\phi : M_{2,3}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2,3}(\mathbb{R})$ l'omomorfismo di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali dato da

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & f \end{pmatrix}$$

a) Determinare la dimensione del nucleo e un base dell'immagine.

b) Dire se ϕ è un endomorfismo semplice.

Soluzioni

Esercizio 1

Si ha: $X^7 - X^6 + i\,X - i = X^6(X-1) + i\,(X-1) = (X-1)\,(X^6 + i) = 0$.

Una radice è $x = 1$; le altre sono le radici seste di $-i$. Poiché $-i = \cos 3\pi/2 - i\,\sin 3\pi/2$, le radici cercate sono:

$$x_k = \cos\frac{3\pi/2 + 2k\pi}{6} - i\,\sin\frac{3\pi/2 + 2k\pi}{6} \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ .$$

Esercizio 2

a) Intersechiamo il piano $\pi :\ y = 0$ con $\mathcal{F}$, si ha $t - 4t^3 = 0$, cioè $t = 0$, $t = 1/2$, $t = -1/2$ cui corrispondono rispettivamente il punto $(0, 0, 1)$, la retta $r_1 : x = y = 0$ e la retta $r_2 : x = 1, y = 0$, e $r_1 \parallel r_2$.

b) Il punto $P(2t^2 - t,\ t - 4t^3,\ 1 + t + \alpha\,t^2)$ sta sul piano $ax + by + cz + d = 0$ se e solo se

$a(2t^2 - t) + b(t - 4t^3) + c(1 + t + \alpha\,t^2) + d = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \quad -4bt^3 + (2a + \alpha c)t^2 + (b - a + c)t + (c + d) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \quad -4b = 0, \quad 2a + \alpha c = 0, \quad b - a + c = 0, \quad c + d = 0$

Ne segue che la curva è piana se e solo se $\alpha = -2$; in tal caso è contenuta nel piano $x + z - 1 = 0$.

Esercizio 3

a) Siano $T = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $A = M_T^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Poiché $\det A = 0$, $\varrho(A) \leq 2$; inoltre il minore di ordine 2 formato dalle prime due righe e dalle prime due colonne è non nullo, quindi $\varrho(A) = 2$ e $\{v_1, v_2\}$ è una base di V. Sia $T' = \{v_1, v_2, e_1 = (1,0,0)\}$; siccome $\det(M_{T'}^{E_3}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, e_1 completa $\{v_1, v_2\}$ a una base di $\mathbb{R}^3$.

b) Sia $W = \mathcal{L}(\{v_1, e_1\})$. E' chiaro che $\dim W = 2$ e che $W \neq V$ perché $e_1 \notin V$. Quindi $\dim(V \cap W) < 2$. Ma $v_1 \in V \cap W$, quindi $\mathcal{L}(\{v_1\}) \subset V \cap W$. Ma se due sottospazi hanno la stessa dimensione e uno di essi è contenuto nell'altro, allora necessariamente sono uguali.

c) Da quanto detto nel punto (a) il vettore v_3 è combinazione lineare di v_1 e v_2, e quindi anche $v_1 + \lambda v_3$ è combinazione lineare di v_1 e v_2 per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Perciò $\mathcal{L}(\{v_1, v_2, v_1 + \lambda v_3\}) = \mathcal{L}(\{v_1, v_2\})$ e, se $S' = \{v_1, v_2\}$, $\varrho(M_S^F) = \varrho(M_{S'}^F) = 2$.

Esercizio 4

Ker $\phi = \{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \ / \ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\} =$
$\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \ / \ d, e \in \mathbb{R}\}$

E' chiaro che $\dim \operatorname{Ker} \phi = 2$, una base essendo
$\{n_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, n_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\}$.

Un elemento di Im ϕ è del tipo $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & f \end{pmatrix}$, con $a, b, c, f \in \mathbb{R}$ e, posto

$m_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

$m_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad m_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

si può scrivere come $am_1 + bm_2 + cm_3 + fm_4$. Quindi $F = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ è un insieme di generatori di Im ϕ. E' immediato verificare che F è un insieme di vettori linearmente indipendenti, quindi F è una base di Im ϕ.

b) Poiché n_1 e $n_2 \in$ Ker phi, n_1 e n_2 sono due autovettori associati all'autovalore 0. Inoltre si ha: $\phi(m_i) = m_i$ per $i = 1, \ldots, 4$, quindi gli m_i sono autovettori associati all'autovalore 1. Per concludere basta provare che $\{n_1, n_2, m_1, m_2, m_3, m_4\}$ è una base di $M_{2,3}(\mathbb{R})$; siccome $\dim M_{2,3}(\mathbb{R}) = 6$, basta provare che $n_1, n_2, m_1, m_2, m_3, m_4$ sono linearmente indipendenti. Ma se

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 + \lambda_3 m_1 + \lambda_4 m_2 + \lambda_5 m_3 + \lambda_6 m_4 \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ \lambda_1 + \lambda_4 & \lambda_2 + \lambda_5 & \lambda_6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

si deduce subito che $\lambda_i = 0, \forall i = 1, \ldots, 6$.

Si osservi che questo mostra in particolare l'indipendenza lineare degli m_i.

18 Luglio 1994

1. Dire per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ il seguente sistema è compatibile e, in tal caso, determinarne le soluzioni.

$$\begin{cases} x + 2y - (\lambda+1)z & = & 1 \\ \lambda x + y - 2z & = & \lambda \\ \lambda x + (\lambda+1)y - 2z & = & \lambda \end{cases} .$$

2. Siano $A(2,1)$ e $B(-1,0)$ due punti del piano. Per ogni retta r passante per B si consideri la proiezione ortogonale P di A su r. Provare che al variare di r nel fascio di rette di centro B il punto P descrive una conica; dire che tipo di conica è.

3. Siano date le rette

$$r : \begin{cases} x & = & t+1 \\ y & = & 2t \\ z & = & 1-t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2x - y + z & = & 0 \\ x - 2y + 1 & = & 0 \end{cases} .$$

a) Dire se r ed s sono complanari.

b) Determinare una retta che sia complanare sia con r che con s.

c) Determinare una rappresentazione cartesiana della superficie ottenuta ruotando la retta r attorno alla retta s.

Es.4. Dati $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ e $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\alpha & \alpha \end{pmatrix}$, si consideri l'omomorfismo di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ dato da $\varphi(M) = A\,M$.

a) Determinare una base di Im φ e di Ker φ.

b) Sia E la base di $M_2(\mathbb{R})$ data da:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Determinare la matrice $M^E_{\varphi(E)}$.

c) Determinare, se esiste, un autovettore associato ad un autovalore non nullo.

d) Dire se φ è un endomorfismo semplice.

Es.5. Il sottoinsieme

$$\{(z, \bar{z}) \mid z \in \mathbb{C}\}$$

è un $\mathbb{R}$-sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^2$? E' un $\mathbb{C}$-sottospazio vettoriale?

16 Settembre 1994

1. Dire per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ il seguente sistema è compatibile e, in tal caso, dire da quanti parametri indipendenti dipendono le soluzioni.

$$\begin{cases} 2x - y + z & = & 0 \\ -2x + (\lambda+2)y - z & = & 1 \\ 2\lambda x + y + \lambda^2 z & = & \lambda \end{cases} .$$

2. Sia r la retta di equazioni cartesiane $\begin{cases} x-y &= z \\ y-2x &= 0 \end{cases}$.

Determinare:

a) due rette ortogonali passanti per l'origine e ortogonali ad r.

b) due piani non paralleli che siano entrambi paralleli ad r.

c) la superficie descritta dalla rotazione di r attorno all'asse z.

3. Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione

$$(z-2i)^3 = \frac{i}{1-i} \ .$$

4.

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice associata alla trasformazione lineare $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mediante le seguenti basi:

$$F = \{(1,0,0),(1,1,2),(0,1,0)\} \qquad G = \{(1,0),(0,1)\} \ .$$

Determinare Ker φ , $\varphi(1,-1,-1)$ e $\varphi^{-1}(2,3)$.

5. Determinare un endomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che 2 sia un autovalore e Im φ sia ortogonale al sottospazio $W = \{(x,y,z) \mid x = y - z = 0\}$.

11 Ottobre 1994

1. Dato il cerchio di equazione

$$\gamma : \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2z &= 1 \\ x-y+z &= 2 \end{cases}$$

a) Determinare l'asse, il centro e il raggio di γ.

b) Provare che la proiezione ortogonale di γ sul piano yz è una conica e classificare tale conica.

2. Rappresentare nel piano complesso l'insieme dei numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} |z-i| &\leq 1 \\ \text{Im } z &= \text{Re } z \end{cases}$$

3. Discutere e risolvere al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il sistema lineare

$$\begin{cases} x+y-\lambda z &= 0 \\ x-y+2\lambda z &= \lambda \\ -x-\lambda y+z &= 1 \\ x-\lambda y+(\lambda+1)z &= \lambda+1 \end{cases}$$

4. Sia $V = L(\{(1,0,1,1),(0,1,1,1)\}) \subseteq \mathbb{R}^4$.

a) Determinare, se esistono due sottospazi W_1, W_2 di $\mathbb{R}^4$ fra loro ortogonali tali che

$$\mathbb{R}^4 = V \oplus W_1 = V \oplus W_2 \ .$$

b) Determinare la proiezione ortogonale u del vettore $v = (2,3,4,1)$ su $V^\perp$.

c) Determinare, se esiste, un endomorfismo φ di $\mathbb{R}^4$ per il quale V sia un sottospazio invariante ma non un autospazio.

5. Determinare, se esistono,

a) una matrice $P \in M_2(\mathbb{R})$ invertibile simile alla matrice $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) una matrice $R \in M_2(\mathbb{R})$ non invertibile simile alla matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

c) due matrici diagonalizzabili A e $B \in M_2(\mathbb{R})$ tali che la matrice $A \cdot B$ non sia diagonalizzabile.

4 Gennaio 1995

Es.1. Tra i piani passanti per l'asse z determinare:

a) quelli che contengono la retta

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

b) quelli che segano la sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z + 4 = 0$ secondo cerchi di raggio $\sqrt{5}\,d$, dove d è la distanza della retta $x = 2y - 1 = \frac{z-1}{2}$ dall'asse z.

Es.2. Sia V l'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathbb{C}^2$ e sia

$$W = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid i\,z_1 + 2z_2 = 0\} \ .$$

a) Provare che W è un sottospazio vettoriale di V.

b) Determinare una base di W.

c) Definire un omomorfismo $\phi : V \longrightarrow V$ di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali tale che Ker $\phi = W$ e $(i, -i) \in$ Im ϕ.

d) Dire se l'omomorfismo definito nel punto (c) è un omomorfismo di $\mathbb{C}$-spazi vettoriali.

Es.3. Sia E la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e ϕ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$M^E_{\phi(E)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Provare che $u = (1, 0, 1)$ è un autovettore di ϕ.

b) Completare u ad una base ortogonale di autovettori di ϕ.

c) Verificare che ϕ è un isomorfismo e, fissata una base F di $\mathbb{R}^3$, rappresentare ϕ^{-1} mediante la matrice associata.

Es.4. Sia γ la conica $xy + x + 1 = 0$.

a) Classificare γ.

b) Provare che γ è simmetrica rispetto al punto $(0, -1)$.

c) Ridurre γ in forma canonica.

13 Febbraio 1993

1. Dati i tre piani

$$\pi_1 : x + \lambda y + 2z = \lambda - 1 \quad \pi_2 : 2\lambda x + \lambda y + z = 0 \quad \pi_3 : x - \lambda z = 0$$

dire per quali valori reali di λ i tre piani appartengono ad un fascio e in tal caso determinare l'asse del fascio.

2. Trovare la superficie simmetrica della superficie di equazione $xy + z^2 - z + 1 = 0$ rispetto al punto $(1, 2, 0)$.

3. Determinare il centro e il raggio del cerchio

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 2z = 0 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases} .$$

4. Dati i sottospazi di $\mathbb{R}^3$

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y + 3z = 0\}$$

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + z = 2y = 0\}$$

determinare, se esiste,

a) un omomorfismo $\phi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\phi_1(V) = W$ e $(1, 1, 0) \in \text{Ker}\ \phi_1$;

b) un isomorfismo $\phi_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\phi_3(V) = W$;

c) un endomorfismo semplice non nullo $\phi_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\phi_2(V) \subset W$;

5. Siano z_1, z_2, z_3 le radici del polinomio $X^3 + i$. Calcolare

$$\frac{1}{z_1 z_3} + \frac{1}{z_2 z_3} + \frac{1}{z_1 z_2} .$$

12 Giugno 1995

1. Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare ha soluzioni e, in caso affermativo dire quante sono e determinarle.

$$S : \begin{cases} \lambda x + y & = & 3 - \lambda \\ x + y - \lambda z & = & 1 \\ \lambda x + y + \lambda z & = & 4 - \lambda \end{cases}$$

Aggiungere ad S un'equazione in x, y, z tale che i coefficienti di x, y, z siano non nulli e il sistema così ottenuto non abbia soluzioni per nessun valore reale di λ.

2. Sono dati il punto $P(0, 0, 0)$, e le rette $\quad r : x + 1 = 2y = z \quad$ e $\quad s : \begin{cases} x + y & = 0 \\ z & = 1 \end{cases}$

a) Verificare che r ed s sono sghembe.

b) Determinare il piano passante per P e parallelo ad r ed s.

c) Determinare il punto Q simmetrico di P rispetto ad s.

c) Determinare un'equazione cartesiana della superficie che si ottiene facendo ruotare la retta s attorno all'asse y.

3. Siano dati la base $B = \{(1,0,0,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$ di $\mathbb{R}^4$ e la trasformazione lineare $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tale che

$$M^B_{\varphi(B)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determinare $\varphi(1,1,-1,0)$.

b) Determinare una base di Im φ e una base di Ker φ.

c) Provare che 0 è un autovalore e determinare un autovettore ad esso relativo.

12 Luglio 1995

1. Sia $\mathcal{L}$ la curva rappresentata parametricamente da:

$$\begin{cases} x &= t+2 \\ y &= t^2-1 \\ z &= t+t^2 \end{cases}$$

a) Dire se $\mathcal{L}$ è piana.

b) Provare che la proiezione ortogonale di $\mathcal{L}$ sul piano $x+y-1=0$ passa per il punto $(2,1,0)$.

c) Determinare i piani passanti per l'asse y che intersecano la curva $\mathcal{L}$ in due punti coincidenti.

2. Sia V_α il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$

$$\{\ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ /\ \begin{cases} \alpha\, x + y - z &= 0 \\ 2x + \alpha\, y + \alpha\, z + (\alpha-1)t &= 0 \\ x + 2\alpha\, z + (\alpha-1)t &= 0 \end{cases} \ \}$$

Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la dimensione di V_α.

3. Sia

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \ /\ a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Provare che W è un sottospazio dello spazio vettoriale reale $M_{2,3}(\mathbb{R})$ delle matrici reali 2×3.

b) Determinare una base F di W e scrivere le coordinate della matrice $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ rispetto a tale base.

c) Determinare un omomorfismo $\varphi : M_{2,3}(\mathbb{R}) \to M_{2,3}(\mathbb{R})$ tale che $W = \text{Ker}\ \varphi$.

d) Esiste un omomorfismo surgettivo $\varphi : M_{2,3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ tale che $W = \text{Ker}\ \varphi$?

4. Dire perché la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & b \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile per ogni valore di $a,b \in \mathbb{R}$.

Fissato $a = b = 2$, si determinino gli autovalori e una base di ciascun autospazio della matrice A.

15 Giugno 1998

1. Stabilire per quali valori reali di λ il seguente sistema lineare ha soluzioni e, par tali valori, dire quante e quali sono le soluzioni.

$$\Sigma_\lambda : \begin{cases} \lambda x + 2z - \lambda t = 2 \\ 2x + \lambda y - z + t = \lambda \\ (\lambda - 2)x - 2y + 8z - 5t = 2\lambda + 2 \end{cases}$$

Fissato $\lambda = 0$, si aggiunga al corrispondente sistema Σ_0 una o più equazioni lineari in modo tale da ottenere un sistema che ha una ed una sola soluzione.

2. Siano dati la retta $r : \begin{cases} x = y - 2 \\ y = z + 1 \end{cases}$ e il piano $\pi : x - 2z = 0$.

a) Determinare una rappresentazione parametrica della retta proiezione ortogonale di r sul piano $y = 0$.

b) Esistono piani passanti per r paralleli al piano π?

c) Trovare la retta su π incidente con r e passante per $(0, 0, 0)$.

d) Trovare una rappresentazione cartesiana della superficie ottenuta facendo ruotare l'asse x attorno alla retta r.

3. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i vettori $v_1 = (1, 1, 0, 0)$ e $v_2 = (0, 0, 1, 1)$ e sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da v_1 e v_2.

a) Determinare una base F di $\mathbb{R}^4$ che contiene i vettori v_1 e v_2.

b) Determinare una base di $V^\perp$.

c) Costruire un'applicazione lineare $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Im}(\varphi) = V$$

e determinare la matrice $M^F_{\varphi(F)}$ dove F è la base costruita al punto a).

d) Stabilire se φ è un endomorfismo semplice.

8 Luglio 1998

1. Calcolare la caratteristica della seguente matrice di $M_4(I\!R)$ al variare di $\lambda \in I\!R$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda + 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \lambda + 1 \\ \lambda + 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & \lambda + 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Stabilire per quali valori di λ la quarta colonna è combinazione lineare delle altre tre.
Vi sono valori di λ per cui tale combinazione lineare è unica?

2. Sia data la retta $r : \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 - t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$

a) Determinare una rappresentazione parametrica di r tale che il punto $O(0,0,0)$ si ottenga per il valore zero del parametro.

b) Determinare una rappresentazione cartesiana del piano che contiene la retta r e la retta r' : $\begin{cases} x+y=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$

c) Determinare i punti della retta r che hanno distanza 3 dall'origine.

d) Sia A uno di questi punti. Determinare una sfera di raggio $9/2$ che interseca la retta r nel punto O e nel punto A.

3. Sia data l'applicazione lineare tra $I\!R$-spazi vettoriali $\varphi_\lambda : I\!R^3 \to I\!R^3$ definita da

$$\begin{array}{rcl} \varphi_\lambda(1,0,0) & = & (1,\lambda,0) \\ \varphi_\lambda(0,1,0) & = & (0,1,\lambda) \\ \varphi_\lambda(0,0,1) & = & (1,1,0) \end{array}$$

a) Determinare la dimensione del nucleo e dell'immagine di φ_λ al variare di λ in $I\!R$.

b) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di φ_1.

c) Determinare un sottospazio W di $I\!R^3$ tale che $W \cap \mathrm{Im}(\varphi_1) = \{(0,0,0)\}$.

18 Settembre 1998

1. Sia data la matrice

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & \lambda \\ 1 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & -\lambda \\ -1 & -2\lambda-3 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

a) Determinare per quali valori reali di λ il sistema lineare omogeneo $A_\lambda X = 0$ possiede almeno ∞^2 soluzioni.

b) Fissato $\lambda = 0$, si determini una base dello spazio vettoriale delle soluzioni del corrispondente sistema lineare omogeneo.

c) Determinare gli eventuali valori reali di λ per cui il seguente sistema lineare non ha soluzioni.

$$A_\lambda X = \begin{pmatrix} \lambda^2 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

2. Sia date le rette $r : \begin{cases} x+y-z = 1 \\ x-y = 0 \end{cases}$ $\quad s : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$.

a) Esistono piani passanti per r e paralleli ad s?

b) Determinare la distanza tra r ed s.

c) Stabilire se esistono rette incidenti sia r che s e perpendicolari al piano $x+y-z=0$.

d) Data la superficie $F:\begin{cases} x &= u(t^2+1) \\ y &= u(1-t) \\ z &= 2u-1 \end{cases}$, provare che F è una superficie rigata che contiene la retta r.

3. Sia $F=\{(1,1,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$ e sia $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tra $\mathbb{R}$-spazi vettoriali definita da

$$\varphi(x,y,z)=(x,x+y,x+y+z)$$

a) Verificare che F è una base di $\mathbb{R}^3$ e costruire la matrice $M^F_{\varphi(F)}$.

b) Provare che φ è un isomorfismo e determinare l'isomorfismo inverso.

c) Stabilire se φ è un endomorfismo semplice.

d) Determinare, se esiste, un sottospazio U di dimensione 1 tale che $\varphi(U)\subset U$.

7 Ottobre 1998

1. Determinare la caratteristica della seguente matrice al variare di $\lambda\in\mathbb{R}$

$$A_\lambda=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & \lambda-1 \\ 0 & \lambda & \lambda & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

Fissato $\lambda=-1$ si determini una base del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne della corrispondente matrice.

2. Date la retta $r:\begin{cases} x-2y+z &= 0 \\ 3x-z &= 0 \end{cases}$ e la curva $\mathcal{C}:\begin{cases} x &= t^2-t \\ y &= 1-t^3 \\ z &= t-1 \end{cases}$.

a) Determinare il piano che passa per r e per il punto $(1,1,1)$.

b) Determinare una rappresentazione cartesiana della sfera che ha centro nel punto $(1,0,-1)$ ed è tangente a r.

c) Stabilire se la curva $\mathcal{C}$ è piana.

d) Provare che il cilindro che ha $\mathcal{C}$ come direttrice e generatrici parallele ad r contiene la retta r.

3. Siano dati i seguenti sottospazi di $I\!R^4$

$$V = \{(x,y,z,t) \in I\!R^4 \mid x-y = z-2t = 0\}$$

$$W = \mathcal{L}(\{(1,-1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,0,1)\})$$

a) Stabilire se esiste un'applicazione lineare $\varphi : I\!R^4 \to I\!R^4$ tale che $\mathrm{Ker}\,\varphi = V$ e $\mathrm{Im}\,\varphi = W$.

b) Determinare una base del sottospazio $V \cap W$.

c) Costruire un endomorfismo semplice $\varphi : I\!R^4 \to I\!R^4$ che abbia i sottospazi V e $V^\perp$ come autospazi.

1 Febbraio 1999

1. Date le rette $r : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\quad s : \begin{cases} x-1 = 0 \\ y+z = 0 \end{cases}$.

a) Stabilire se r ed s sono complanari.

b) Determinare un piano passante per la retta r e parallelo alla retta s.

c) Determinare una retta passante per $A(0,1,0)$ che sia ortogonale a r e a s.

d) Determinare una sfera che ha le rette r e s tra le sue tangenti.

2. Date nel piano le tre rette

$$r_1 : \; x + 7\,y - 6\,\lambda = 0 \qquad r_2 : \; \lambda\,x - y - 1 = 0 \qquad r_3 : \; 2\,x + y - \lambda = 0$$

stabilire per quali valori reali di λ queste tre rette appartengono ad un fascio.

3. Per ogni $\lambda \in I\!R$, sia $\varphi_\lambda : I\!R^3 \to I\!R^2$ l'applicazione lineare tra $I\!R$-spazi vettoriali che ha come matrice associata rispetto alle basi canoniche

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2(\lambda-1) \\ \lambda^2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

a) Determinare al variare di λ la dimensione di $\mathrm{Ker}\,(\varphi_\lambda)$ e una base di $\mathrm{Im}\,(\varphi_\lambda)$.

b) Determinare per quali valori di λ il vettore $(1,2)$ appartiene a $\mathrm{Im}\,(\varphi_\lambda)$.

c) Posto $\lambda = -1$ determinare una base di $(\mathrm{Ker}\,(\varphi_\lambda))^\perp$.

4. Siano $a, b \in I\!R$ e

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & b & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determinare i valori reali di a e b per i quali 0 è un autovalore di M.

b) Esistono valori reali di a e b per i quali M ha come unico autovalore 0?

c) Fissato $a = 0$, determinare per quali valori di b la matrice M è diagonalizzabile.

24 Febbraio 1999

1. Sono date le rette $r : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & y \\ y & = & z \end{array} \right.$ $\qquad s : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & t+1 \\ y & = & t \\ z & = & t+2 \end{array} \right.$.

a) Provare che r ed s sono parallele e determinare il piano che le contiene.

b) Determinare la distanza tra le due rette r ed s.

c) Determinare una rappresentazione cartesiana della superfie che si ottiene ruotando la retta s attorno alla retta r.

d) Determinare, se esiste, una retta ℓ che sia complanare con r e sghemba con s.

2. Sono dati i piani

$$\pi_1 :\ \lambda x + y = 2 \qquad \pi_2 :\ x - z = \lambda \qquad \pi_3 :\ y + \lambda z = -\lambda$$

a) Per quali valori reali di λ questi tre piani appartengono ad un fascio?

b) Per quali valori reali di λ si ha $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$?

c) Provare per ogni $\lambda \in I\!R$ esiste uno ed un solo piano passante per l'origine e ortogonale ai tre piani π_1, π_2, π_3.

3. Sia $\varphi : I\!R^3 \to I\!R^3$ l'applicazione lineare tra $I\!R$-spazi vettoriali definita da

$$\varphi(x, y, z) = (y - 2z, -y + 2z, x - z) \ .$$

a) Determinare una base di $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$ e una base di $\mathrm{Im}\,(\varphi)$.

b) Provare che 0 è un autovalore per φ e determinare due distinti autovettori associati all'autovalore 0.

c) Stabilire se φ è un endomorfismo semplice.

d) Costruire una base F di $I\!R^3$ con vettori appartenenti a $\mathrm{Ker}\,(\varphi) \cup (\mathrm{Ker}\,(\varphi))^\perp$ e calcolare la matrice $M^F_{\varphi(F)}$.

7 Giugno 1999

1. Sono dati il piano $\pi :\ x - 2\,y + z = 0$ e la retta $r : \begin{cases} x &= 2t \\ y &= t \\ z &= 0 \end{cases}$.

a) Provare che la retta r è contenuta in π e determinare una rappresentazione cartesiana della retta s contenuta in π che passa per l'origine ed è ortogonale ad r.

b) Tra i piani del fascio che ha come asse la retta r, determinare quelli che hanno distanza 1 dal punto $A(1,0,1)$.

c) Determinare una rappresentazione cartesiana della superficie ottenuta facendo ruotare la retta r attorno all'asse y.

2. Sono dati i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$U = \{(a+2b, 0, 2a-b, b) \,|\, a, b \in \mathbb{R}\} \qquad V = \{(a+2b, a, 2a-b, b) \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$$

a) Determinare una base dei sottospazi $U + V$, $U \cap V$, $U^{\perp}$.

b) E vero che $\mathbb{R}^4 = U^{\perp} \oplus V$?

3. Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ sia $\varphi_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da

$$\varphi_\lambda(x,y,z) = (x - y + \lambda\, z, x + \lambda\, y + \lambda\, z, -x + (\lambda - 1)\, y)$$

a) Calcolare al variare di λ la dimensione di $\mathrm{Ker}(\varphi_\lambda)$.

b) Per quali valori di λ il vettore $(0, \lambda+1, 0)$ appartiene a $\mathrm{Im}(\varphi_\lambda)$?

c) Fissato $\lambda = 1$, provare che 1 è un autovalore di φ_1 e determinare un autovettore associato a tale autovalore.

d) Stabilire se φ_1 è un endomorfismo semplice.

9 Luglio 1999

1. Sono dati i punti $A(1,1,-\lambda)$, $B(0,2,2)$, $C(\lambda,-1,\lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Determinare i valori di λ per i quali i tre punti sono allineati.

b) Stabilire per quali valori di λ i tre punti individuano un unico piano e in tal caso determinarne l'equazione cartesiana.

c) Posto $\lambda = 0$, sia r la retta passante per A e per B. Determinare la retta s passante per C, perpendicolare e incidente con r.

d) Data la curva $\mathcal{L}: \begin{cases} x = 1-u \\ y = 1+u \\ z = 2u^2 \end{cases}$ scrivere un'equazione cartesiana del cilindro $\mathcal{F}$ che ha generatrici parallele all'asse x e contenente $\mathcal{L}$.

Stabilire se $\mathcal{F}$ contiene la retta AB determinata al punto c).

2. Sono dati i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 0,\ y = z\} \qquad V = \mathcal{L}(\{(1,1,2,0),(1,1,0,-2),(1,1,4,2)\})$$

a) Determinare una base dei sottospazi U, V, $U \cap V$.

b) Costruire un endomorfismo φ di $\mathbb{R}^4$ tale che $\mathrm{Ker}(\varphi) = U$ e l'autospazio associato all'autovalore 1 sia V.

c) Stabilire se l'endomorfismo φ costruito al punto b) è semplice.

3. Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ sia

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & \lambda^2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare al variare di λ la caratteristica $\varrho(A_\lambda)$ della matrice A_λ.

b) Si consideri il sistema $A_\lambda X = 0$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. Determinare per quali valori reali di λ questo sistema ha infinite soluzioni e in tal caso determinare una base dello spazio vettoriale delle sue soluzioni.

17 Settembre 1999

1. Sono dati i piani

$$\pi_1 \,:\, x+z=\lambda, \qquad \pi_2 \,:\, x+\lambda\, y=0\,, \qquad \pi_3 \,:\, \lambda\, x+\lambda\, z=\lambda^2\,, \qquad \pi_4 \,:\, x+y-z=0$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Determinare i valori di λ per i quali i quattro piani si intersecano in un solo punto.

b) Si consideri il luogo $\mathcal{L} \,:\, \pi_1 \cap \pi_3 \cap \pi_4$. Rappresentare $\mathcal{L}$ in forma parametrica al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

Posto $\lambda = 1\,, \quad r = \pi_1 \cap \pi_2\,, \quad s = \pi_3 \cap \pi_4$

c) Stabilire se le rette r ed s sono parallele.

d) Determinare la retta t ortogonale e incidente sia a r che ad s.

2. Sia

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & 2a \end{pmatrix} \quad | \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Provare che W è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$.

b) Determinare due basi di W che non hanno elementi comuni.

c) Determinare un sottospazio U di $M_2(\mathbb{R})$ tale che $M_2(\mathbb{R}) = W \oplus U$.

3. Sono dati la base $F = \{(1,0,0),(1,1,1),(2,1,3)\}$ di $\mathbb{R}^3$ e l'endomorfismo φ di $\mathbb{R}^3$ definito da

$$M^F_{\varphi(F)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determinare $\varphi((0,-1,-1))$.

b) Determinare una base di $\mathrm{Ker}(\varphi)$ e una base di $\mathrm{Im}(\varphi)$.

c) Trovare gli autospazi di φ e stabilire se φ è un endomorfismo semplice.