1 Sistemi ad n-gradi di libertà dissipativi

Per risolvere il problema degli autovettori di un sistema di n equazioni differenziali del secondo ordine del tipo:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [\sigma]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{F\} \tag{1}$$

è possibile trasformare il sistema in un sistema di $2n$ equazioni differenziali del primo ordine.
È noto infatti che un sistema di m equazioni differenziali di ordine N è riconducibile ad un sistema di mN equazioni differenziali del primo ordine.
Per far ciò si ponga:

$$\begin{aligned} \{X_1\} &= \{\dot{x}\} \\ \{X_2\} &= \{x\} \end{aligned}$$

e si assumano come variabili, oltre alle $\{x\}$ le $\{\dot{x}\}$.
L'insieme di queste $2n$ variabili si indichi con $\{y\}$

$$\{y\} = \left\{ \begin{array}{c} \{X_1\} \\ \{X_2\} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \{\dot{x}\} \\ \{x\} \end{array} \right\} \tag{2}$$

Si potrà scrivere così:

$$\begin{cases} \{X_1\} = \left\{\dot{X}_2\right\} \\ [m]\left\{\dot{X}_1\right\} + [\sigma]\left\{\dot{X}_2\right\} + [k]\{X_2\} = \{F\} \end{cases} \tag{3}$$

ovvero:

$$\begin{cases} [m]\left\{\dot{X}_2\right\} - [m]\{X_1\} = \{0\} \\ [m]\left\{\dot{X}_1\right\} + [\sigma]\left\{\dot{X}_2\right\} + [k]\{X_2\} = \{F\} \end{cases} \tag{4}$$

Il sistema (4) è un sistema di $2n$ equazioni differenziali del primo ordine in $\{X_1\}$ e $\{X_2\}$ e può essere scritto:

$$\begin{bmatrix} [0] & [m] \\ [m] & [\sigma] \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \left\{\dot{X}_1\right\} \\ \left\{\dot{X}_2\right\} \end{array} \right\} + \begin{bmatrix} -[m] & [0] \\ [0] & [k] \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \{X_1\} \\ \{X_2\} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \{0\} \\ \{F\} \end{array} \right\} \tag{5}$$

Posto:

$$[M] = \begin{bmatrix} [0] & [m] \\ [m] & [\sigma] \end{bmatrix} \; ; \; [K] = \begin{bmatrix} -[m] & [0] \\ [0] & [k] \end{bmatrix} \; ; \; \{Y\} = \left\{ \begin{array}{c} \{0\} \\ \{F\} \end{array} \right\} \tag{6}$$

e tenendo presente la (2) il sistema (5) può in definitiva scriversi:

$$[M]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = \{Y\} \tag{7}$$

Le matrici $[M]$ e $[K]$, essendo le $[m]$, $[\sigma]$ e $[k]$ reali e simmetriche, sono reali e simmetriche.
Il sistema ridotto (8) presenta il vantaggio che gli autovalori che si ottengono dalla soluzione del problema degli autovalori sono ortogonali e possono essere usati, a mezzo del teorema di espansione, la soluzione del moto forzato.

1.1 Il problema degli autovalori

Considerando il sistema omogeneo che si ottiene dalla (8):

$$[M]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = \{0\} \tag{8}$$

e posto:

$$\{y\} = \{\Phi\} e^{\alpha t}$$

si ottiene

$$\alpha [M]\{\Phi\} + [K]\{\Phi\} = \{0\}$$

e quindi per soluzioni $\{\Phi\}$ diverse da zero dovrà essere:

$$|\alpha [M] + [K]| = 0 \tag{9}$$

La (9) è l'equazione caratteristica del sistema e risulta di grado $2n$ in α.
Dall'equazione caratteristica si ricavano quindi $2n$ valori di α.
Ciascuna di tali radici potrà essere o reale o complessa:
se è reale essa sarà negativa e corrisponderà ad un moto aperiodico smorzato, cioè smorzato in misura critica o superiore alla critica,
se è complessa ci sarà necessariamente un'altra radice complessa ad essa coniugata; la parte reale comune a questa coppia di valori sarà negativa.
Se per esempio le radici k-esima e h-esima sono coniugate risulterà:

$$\begin{cases} \alpha_k = -\mu_k + i\omega_k \\ \alpha_h = -\mu_k - i\omega_k \end{cases}$$

È da notare che i lvalore ω_k rappresenta la pulsazione naturae smorzata del modo k-esimo e che se tutte le $2n$ radici α sono complesse ed, a coppie, coniugate si avranno n valori di ω_k.
Determinati i $2n$ valori di α, gli autovalori corrispondenti si ottengono, analogamente al caso dei sistemi non smorzati, considerando la matrice $2n \times 2n$:

$$[a] = [\alpha [M] + [K]]$$

calcolando l'aggiunta $\left[A^{(T)}\right]$ relativa ad ogni valore α_r di *alpha* ed assumendo per l'autovettore $\left\{\Phi^{(r)}\right\}$ una qualunque colonna di $\left[A^{(T)}\right]$ diversa da zero.
L'autovettore corrispondente alla generica radice α_r sarà del tipo:

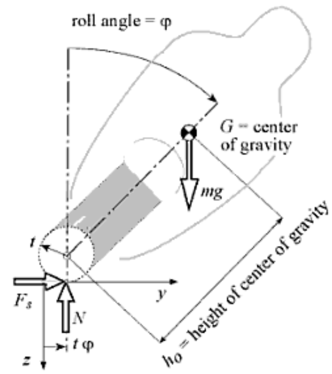
$$\left\{\Phi^{(r)}\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_r \left\{\Phi^{(r)}\right\} \\ \left\{\Phi^{(r)}\right\} \end{array} \right\} \tag{10}$$

e sarà costituito da $2n$ elementi: n ampiezze della velocità ed n ampiezze degli spostamenti.
A copie α_k ed α_h complesse coniugate corrisponderanno coppie di autovettori complessi coniugati.

Per quanto concerne i $2n$ elemnti dell'autovettore $\left\{\Phi^{(r)}\right\}$ occorre dire che essi sono dei numeri complessi definiti a meno di una costante arbitraria e che tale costante è in questo caso un numero complesso.
Ciò vuol dire che nel caso di oscillazione libera di sistemi smorzati, non solo le ampiezze degli spostamenti si mantengono, per un determinato modo, in rapporto costante ma le differenze di fase tra gli elementi complessi dell'autovettore si mantengono costanti e sono in generale diversi da zero e 180°.
Ciò porta come conseguenza che se si eccita un particolare modo di vibrare del sistema, oltre al fatto che la vibrazione si estingue nel tempo, l'oscillazione di ciascuna massa del sistema sarà sfasata rispetto all'oscillazione delle altre masse: le masse raggiungeranno i loro massimi spostamenti in momenti diversi.
La sequenza con la quale ciò avviene si ripete ad ogni ciclo di oscillazione, la linea elastica varia con continuità ed i nodi di oscillazione sis spostano, salvo a ripassare per le stesse posizioni nel ciclo successivo.

2 Capsize

In assenza di azione del pilota è noto che un motociclo cade lateralmente in un tempo più o meno lungo, ciò significa che il motociclo è un veicolo intrinsecamente instabile in particolar modo quando l'azione stabilizzante degli effetti giroscopici risulta trascurabile. Tale instabilità opportunamente controllata dal pilota permette di inclinare il motociclo ed affrontare le curve in modo corretto.
Il modo di capsize (modo non oscillatorio) è caratterizzato da un parametro definito come *costante di tempo* che rappresenta il tempo necessario alla caduta del veicolo. A questo punto risulta abbastanza intuitivo che quanto più piccola è la costante di tempo (*quindi quanto più risulta instabile il capsize*), tanto minore deve essere l'anticipo con cui il pilota deve iniziare la manovra di inclinazione del veicolo nella fase di inserimento in curva. A tale scopo i motocicli da competizione richiedono una elevata instabilità del capsize affinchè il veicolo possa inserirsi rapidamente in curva ed effettuare rapidi cambi di traiettoria.
Si consideri il modello piano, a 2 gradi di libertà, del motociclo che avanza in rettilineo con sterzo bloccato, visto frontalmente e siano trascurabili gli effetti giroscopici. Le coordinate scelte sono lo spostamento laterale y del punto di contatto pneumatico-strada e l'angolo di rollio φ.
Il sistema è definito dai seguenti paramenti: h_0 altezza del baricentro, t raggio della sezione retta dello pneumatico (per semplicità si fa l'ipotesi che i due pneumatici siano uguali), m ed I_{x_G} massa e momento d'inerzia di massa intorno al baricentro, V velocità di avanzamento, k_φ e k_λ rigidezze degli pneumatici a camber e deriva rispettivamente.
Le equazioni del moto sono:



$$
\begin{aligned}
m\ddot{z}_G &= mg - N \\
m\ddot{y}_G &= F_s \\
I_{x_G}\ddot{\varphi} &= N\,(y_G - y) + F_s\; z_G
\end{aligned} \tag{11}
$$

Tenendo conto delle relazioni

$$
y_G = y + h_0 \sin\varphi\ ;\ \ z_G = -t - h_0 \cos\varphi \tag{12}
$$

Le equazioni del moto sono:

$$
\begin{cases} m\ddot{y} + mh_0\ddot{\varphi}\cos\varphi - mh_0\dot{\varphi}^2\sin\varphi = F_s \\ \left(I_{x_G} + mh_0^2\right)\ddot{\varphi} + mh_0\cos\varphi\ddot{y} - mgh_0\sin\varphi = -F_s t \end{cases} \tag{13}
$$

che linearizzate intorno alla posizione di equilibrio verticale:

$$
\begin{cases} m\ddot{y} + mh_0\ddot{\varphi} = F_s \\ \left(I_{x_G} + mh_0^2\right)\ddot{\varphi} + mh_0\ddot{y} - mgh_0\varphi = -F_s t \end{cases} \tag{14}
$$

Per piccoli valori dello strisciamento, la forza laterale, che la strada esercita sul pneumatico può essere descritta con una legge lineare in funzione degli angoli di deriva e di rollio:

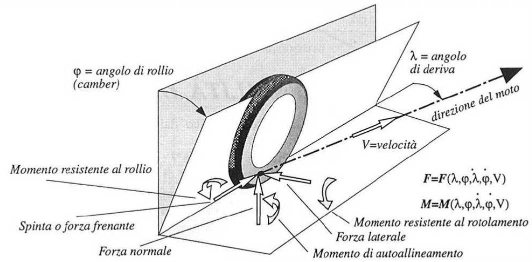
$$
F_s = mgk_\lambda\lambda + mgk_\varphi\varphi \tag{15}
$$

dove

$$
\lambda = \frac{-\dot{y}}{V} \tag{16}
$$

rappresenta l'angolo di deriva.
Le equazioni del moto linearizzate in forma matriciale diventano:

$$
[M]\left\{\begin{array}{c}\ddot{y}\\ \ddot{\varphi}\end{array}\right\} + [\sigma]\left\{\begin{array}{c}\dot{y}\\ \dot{\varphi}\end{array}\right\} + [K]\left\{\begin{array}{c}y\\ \varphi\end{array}\right\} = \{F\} \tag{17}
$$



dove la matrice di massa:

$$[M] = \begin{bmatrix} m & mh_0 \\ mh_0 & \left(I_{x_G} + mh_0^2\right) \end{bmatrix} \tag{18}$$

la matrice di smorzamento:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \dfrac{mgk_\lambda}{V} & 0 \\ t\dfrac{mgk_\lambda}{V} & 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

la matrice di rigidezza:

$$[K] = \begin{bmatrix} 0 & -mgk_\varphi \\ 0 & -mg\left(h_o + k_\varphi\right) \end{bmatrix} \tag{20}$$

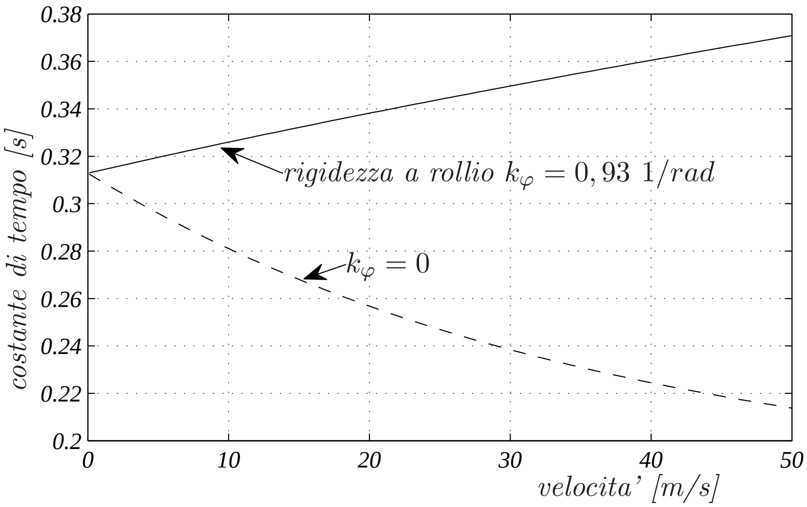
Risolvendo il problema degli autovalori, si ottengono quattro autovalori di cui soltanto uno è reale positivo; un secondo autovalore è identicamente nullo, mentre i restanti due sono complessi coniugati a parte reale negativa. L'autovalore reale è relativo al modo non oscillatorio instabile di *capsize*, quello nullo è dovuto al fatto che il sistema è semidefinito e i due autovalori complessi rappresentano due modi di vibrare stabili.
Il *capsize* si presenta quindi come un modo non oscillatorio instabile; la legge è del tipo:

$$\varphi(t) = \Phi_0 e^{\frac{1}{\tau}t} \tag{21}$$

La costante di tempo del capsize è in definitiva una misura della facilità d'inclinazione della motocicletta, pertanto è importante studiarne l'andamento in funzione dei vari parametri della motocicletta.

2.1 Esempio numerico

Per un motociclo avente i seguenti parametri: massa $248kg$, momento d'inerzia di massa $34.1kg\ m^2$, raggio della sezione retta degli pneumatici $10cm$, quota del baricentro $64.8cm$, rigidezza a deriva degli pneumatici $11N/rad$ si ottiene il seguente diagramma della costante di tempo al variare dellla velocità per due diversi valori della rigidezza al camber:



Dalla figura si vede come la costante di tempo cresce al crescere della velocità, che significa che al crescere della velocità diventa più difficile inclinare la motocicletta.
In figura è rappresentato anche il caso limite con rigidezza al rollio nulla: in tal caso l'andamento della costante di tempo al crescere della velocità è decrescente. Ciò è dovuto al fatto che all'aumentare della velocità V, diminuisce l'angolo di deriva e perciò si riduce la forza laterale che contrasta il modo di caduta del motociclo.