



# Cinematica e Dinamica dei Sistemi Multibody

A cura di

Federico Cheli  
Ettore Pennestrì

**VOLUME 1**



Casa Editrice Ambrosiana

Cinematica e Dinamica  
dei Sistemi Multibody

# Cinematica e Dinamica dei Sistemi Multibody

Teoria

*A cura di*

**Federico Cheli**

**Ettore Pennestrì**

*Parte I*

---

*Teoria*

# Prefazione

Il presente testo di Cinematica e Dinamica dei Sistemi Multibody arricchisce il panorama delle pubblicazioni didattiche in lingua italiana e costituisce un valido strumento per i docenti che vogliono inserire nei curricula corsi che includono tale argomento. I contenuti dell'opera sono in grado di soddisfare esigenze didattiche che vanno dalla laurea specialistica, in futuro laurea magistrale, al dottorato di ricerca. Salutiamo dunque con favore la presente pubblicazione che si colloca in un settore, quello della Dinamica Multibody, le cui radici affondano nel solco di più di due secoli di tradizione italiana della Meccanica Razionale ed Applicata, ma le cui applicazioni industriali sono sempre più frequenti ed innovative.

La modellazione mediante tecniche multibody di sistemi complessi pone problematiche per certi aspetti analoghe a quelle che si presentano nelle analisi agli elementi finiti non-lineari. Inoltre, le difficoltà di carattere numerico, spesso presenti nell'analisi con l'approccio multibody, hanno dato un considerevole impulso alla ricerca di algoritmi sempre più affidabili. L'attenzione che la comunità accademica italiana sta dedicando a questo nuovo settore è testimoniata, oltre che dall'aumento della produzione scientifica nel settore, anche dalla costituzione, in seno all'AIMETA, di un gruppo di studio sulla Cinematica e Dinamica dei Sistemi Multibody i cui membri hanno partecipato alla stesura del presente testo.

L'opera è stata logicamente organizzata in due volumi, il primo dei quali principalmente dedicato agli aspetti teorici mentre il secondo alle applicazioni ed al software. Stante la multidisciplinarietà degli argomenti, alla preparazione del testo hanno efficacemente contribuito ricercatori provenienti sia dal settore aerospaziale che da quello meccanico. Ciò lo ha reso ricco di significativi spunti di approfondimento su vari aspetti. La struttura quasi monografica dei capitoli, non incidendo sull'organicità del testo, si presta a fornire al lettore ampie e dettagliate informazioni su varie tematiche quali, ad esempio, la cinematica dei corpi rigidi, la generazione delle equazioni di vincolo cinematico, l'impatto tra corpi, le formulazioni dinamiche, l'integrazione numerica.

Ai Curatori ed agli Autori esprimiamo il nostro più vivo compiacimento per aver portato a termine un'importante opera che ci auguriamo possa costituire un riferimento sia per gli allievi ingegneri, sia per coloro i quali si rivolgono alla Dinamica Multibody come efficace strumento di analisi.

*G. Diana, M. Borri*

*Milano, 26 Gennaio 2006*

# Presentazione

La dinamica dei sistemi multibody ha le sue radici storiche nell'opera di Lagrange *Mécanique Analytique*, in cui venne per la prima volta presentata una formulazione dinamica in grado di generare, in maniera sistematica, le equazioni del moto di modelli di sistemi meccanici.

Com'è noto, il testo non incontrò subito il favore degli ingegneri per via dell'assenza di figure. Per Lagrange, infatti, la Meccanica era considerata quale una branca dell'Analisi matematica. Per contro, testi quali il *Graphische Dynamik* del Wittenbauer, pur se limitati all'analisi dinamica di sistemi piani, ebbero una larga diffusione tra gli ingegneri agli inizi del XX secolo.

La storia della Dinamica è troppo lunga per essere condensata in queste poche righe per cui non continueremo oltre sull'argomento. Tuttavia, a distanza di tempo, l'approccio Lagrangiano mantiene la sua attualità ed importanza, mentre le applicazioni di metodi grafici riguardano quasi esclusivamente la soluzione di problemi a fini didattici.

Nelle Scuole Italiane di Ingegneria l'insegnamento della formulazione dinamica Lagrangiana veniva prevalentemente demandato ai corsi di Meccanica Razionale. Infatti, fino ai primi anni '80, quando la laurea in ingegneria veniva conseguita dopo un corso di studi della durata di cinque anni, rarissimi erano i corsi del triennio di applicazione in cui la dinamica Lagrangiana e gli esempi presentati riguardavano modelli con pochi gradi di libertà. L'approccio Newtoniano era largamente preferito in quanto si riteneva privilegiasse l'intuizione ed il senso fisico dell'analista.

La necessità di simulare i movimenti finiti di modelli sistemi meccanici, con complesse topologie e costituiti da un non trascurabile numero di masse discrete, avvalendosi di mezzi automatici di calcolo, stimolò lo sviluppo di software *general purpose* che soddisfacesse le suddette necessità. Venne quindi creato il termine *multibody*, per designare quel nuovo settore della dinamica che ha come oggetto di studio algoritmi e formulazioni in grado di simulare, in maniera efficiente ed affidabile, sempre più ampie categorie di modelli di sistemi meccanici. In particolare, tra gli obiettivi di questa branca della dinamica computazionale vi sono anche:

- la formulazione di algoritmi numerici e simbolici volti alla generazione e soluzione delle equazioni che descrivono la cinematica e la dinamica dei modelli di sistemi meccanici;
- l'ideazione e l'implementazione di software che facilitino le fasi di input dei dati e di visualizzazione ed animazione del movimento dei vari corpi interconnessi.

È dunque grazie alla sempre più diffusa disponibilità di questi nuovi strumenti che l'ingegnere può demandare al calcolatore il tedioso compito di generare e risolvere le equazioni che governano il comportamento del suo modello e concentrarsi su quelle fasi, quali, ad esempio, l'interpretazione dei risultati, in cui la sua esperienza ha un ruolo prevalente.

La storia moderna dell'analisi dinamica multibody inizia nei primi anni '60 quando si fa sempre più sentita l'esigenza di codici di simulazione dinamica *general purpose* da impiegare nella progettazione ed analisi di sistemi di controllo di satelliti.

È negli anni '70 ed '80 che tuttavia cominciano ad essere commercialmente disponibili sul mercato dei software multibody *general purpose* quali IMP (Integrated Mechanisms Program), ADAMS (Automated Dynamic Analysis of Mechanical Systems), DADS (Dynamic Analysis and Design System), AUTOLEV. Tutti software in grado di eseguire delle simulazioni di una larga classe di modelli di sistemi meccanici.

Tra i primi utenti di tali software vi sono le *big corporations* delle case costruttrici di veicoli, nonché l'esercito statunitense, che sponsorizzò lo sviluppo di DADS. La possibilità di prevedere a calcolo il comportamento di un veicolo è la necessaria premessa per costruire prototipi già parzialmente ottimizzati e dunque ridurre il budget per le varie verifiche sperimentali. Grazie all'impiego del software multibody, i guadagni erano ulteriormente incrementati dalla diminuzione dei tempi necessari allo sviluppo dell'intero progetto.

Pur se l'origine di tali codici è prevalentemente accademica, vari motivi conducono alla creazione di società dedicate al loro sviluppo e manutenzione. È in questo periodo che viene fondata da M.A. Chace, docente presso l'università del Michigan ad Ann Arbor, la Mechanical Dynamics Inc., che sovrintenderà allo sviluppo ed alla commercializzazione di ADAMS, tra i più industrialmente diffusi software multibody.

L'esperienza multibody di uno degli editor del presente testo (E.P.) inizia nell'agosto del 1983 quando partecipa ad Iowa City al NATO Advanced Study Institute, organizzato da E.J. Haug, ed avente quale tema la cinematica e dinamica dei sistemi multibody. Nella lista dei partecipanti troviamo, tanto per citarne solo alcuni, M. Chace, W. Gear, P. Nikravesh, H. Rankers, W. Schielen, K. van der Werff, M. Vanderploeg, R. Wehage, J. Wittenburg, ricercatori i cui studi hanno contribuito in maniera significativa alla nascita ed alla crescita del settore della dinamica multibody.

Dal punto di vista dell'insegnamento della dinamica multibody, invece, la situazione, tranne rare eccezioni, è rimasta a lungo stagnante. Un'importante svolta si verifica tra il 1986 e 1987, ad opera di P. Nikravesh e di E.J. Haug, i cui testi sulla dinamica multibody avevano un'impostazione orientata all'insegnamento accademico.

Il sempre più diffuso impiego della dinamica multibody in varie realtà industriali, la conseguente necessità di formare degli ingegneri attraverso l'insegnamento dei fondamenti teorici alla base dei software multibody e dei rispettivi limiti, nonché in grado di poterne correttamente interpretare i risultati, costituisce uno dei motivi del presente testo.

Inoltre, lo sviluppo delle attività di ricerca è legato in maniera quasi imprescindibile ad una solida formazione didattica di coloro i quali partecipano alle attività medesime. Tale esigenza è anche compresa tra quelle che motivano la redazione del presente testo sulla dinamica dei sistemi multibody.

La varietà delle formulazioni dinamiche disponibili, nonché la consapevolezza dell'utilità di un coordinamento didattico delle varie sedi universitarie, hanno suggerito di coinvolgere nell'iniziativa vari ricercatori ed esperti italiani di dinamica multibody, ognuno dei quali ha con competenza e generosità contribuito a vari capitoli e paragrafi.

Gli scopi che si prefigge il presente testo sono dunque esclusivamente quelli didattici. La disponibilità di un manuale di dinamica multibody in lingua italiana sicuramente agevola la divulgazione, presso gli allievi ingegneri, di concetti e metodologie alla base di questo settore della Meccanica. Per questo motivo, a tutti gli Autori è stato sempre raccomandato di fornire una trattazione didatticamente accessibile, con l'aggiunta di esempi volti a facilitare l'assimilazione e la comprensione dell'argomento.

In Italia, la pubblicazione del primo testo didattico ed in cui appare il termine *multicorpo*, traduzione italiana di *multibody*, risale al 1998 ed è dovuta a G. Diana ed F. Cheli. In tale testo la formulazione adottata in ADAMS viene esposta con finalità prettamente didattiche. Sempre per soddisfare finalità didattiche, nel

1999 E. Pennestrì pubblica il testo *Elementi di Dinamica Tecnica e Computazionale*. Ambedue le citate pubblicazioni hanno una circolazione prevalentemente limitata alle sedi universitarie dei rispettivi autori. Nel settore della ricerca, sono da anche registrare notevoli iniziative per l'impostazione di innovative formulazioni e l'implementazione di software multibody *general-purpose* presso varie sedi universitarie italiane.

Presso il Politecnico di Milano, C. Cavagna, negli anni '80, fu il precursore dello sviluppo del software interattivo, oggi noto come **MeCAD**, per l'analisi cinematica e dinamica di meccanismi piani. Tale sviluppo fu completato presso l'università di Brescia da G. Legnani. La struttura cinematica e le dimensioni del meccanismo venivano specificate tramite una tavoletta grafica digitalizzatrice.

Nel medesimo periodo, presso l'università di Genova, veniva realizzato il software **AnMecc**.

Più recentemente, G. Legnani, a Brescia, sviluppa la libreria **SpaceLib**, A. Tasora, a Parma, il software **Chrono**, R. Lot, a Padova, il software **MBSYMB**, L. Vita, a Roma Tor Vergata, il software **NUMDYN3D**. Presso il Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale del Politecnico di Milano vengono svolte ricerche che vanno dagli algoritmi di integrazione numerica, alla dinamica multibody dei corpi flessibili, allo sviluppo di codici quali, ad esempio, **MBDYN**. Ragioni di spazio ci impediscono di menzionare tutti coloro i quali in Italia hanno contribuito o contribuiscono allo sviluppo di questo importante settore e di questo ce ne scusiamo. Tuttavia, appare importante osservare che si registra una crescita sia del numero di congressi scientifici dedicati all'argomento, sia del numero di ricercatori italiani partecipanti.

Il presente testo, suddiviso in due volumi, ha l'ambizione di raccogliere in maniera organica nozioni e contenuti didattici utili a coloro i quali siano interessati alla dinamica dei sistemi multibody.

La divisione in due volumi è motivata dalle diverse impostazioni didattiche dei corsi universitari in cui viene insegnata la dinamica multibody. Talune, infatti, tendono a privilegiare gli aspetti teorici della materia, altri quelli applicativi.

La varietà delle formulazioni dinamiche esposte nel testo non deve confondere, ma piuttosto essere considerata quale spunto di approfondimento. Il testo, quindi, non ha alcuna pretesa di essere un'enciclopedia sulla dinamica, ma piuttosto uno strumento ad uso didattico la cui consultazione sia utile a tutti coloro siano seriamente interessati alla simulazione dinamica di sistemi.

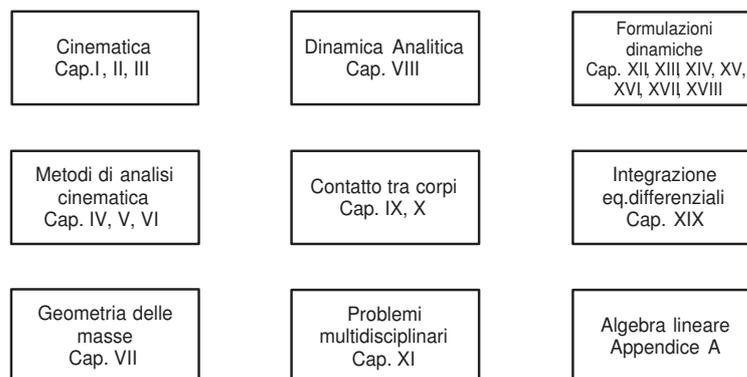


Figura 0.1 Argomenti trattati nel testo

Nel primo volume sono presentati vari aspetti della *teoria* della cinematica e dinamica dei sistemi multibody, mentre nel secondo si discutono le caratteristiche di taluni software nonché varie *applicazioni*.

Le formulazioni cinematiche e dinamiche presenti nella letteratura sono tra loro diverse ed il testo si propone di descriverne i fondamenti teorici di quelle più diffuse, ma senza alcuna pretesa di esaustività. Agli Autori è stato quindi chiesto di presentare alcuni dei contenuti didattici dei corsi da loro insegnati. Ciò ha talvolta provocato delle lievi ripetizioni di argomenti. Si è preferito mantenere le suddette ripetizioni per non spezzare la continuità della trattazione.

Grazie alla struttura quasi monografica dei singoli capitoli, l'acquisizione dei concetti espressi nei vari capitoli non sempre richiede una lettura dei capitoli con ordine *seriale*. A questo proposito, lo schema presentato in Figura 0.1 raggruppa i vari capitoli per argomenti *affini*.

Nei limiti del possibile, si è cercato di mantenere una certa uniformità sia nella nomenclatura che nella notazione. L'indicazione data agli Autori è stata quella di avvalersi principalmente della notazione matriciale in tutti i loro sviluppi. Tale notazione, a nostro giudizio, facilita l'implementazione all'elaboratore, nonché l'interpretazione delle formule quando vengono esposte agli studenti tramite lucidi o scritte dal docente sulla lavagna. In particolare, i vettori sono usualmente racchiusi da parentesi graffe  $\{\cdot\}$ , mentre le matrici da parentesi quadre  $[\cdot]$ . Poiché in alcune trattazioni è importante distinguere il riferimento cartesiano in cui le componenti del vettore sono espresse, tale informazione è stata aggiunta all'interno delle parentesi graffe. Pertanto, se le componenti del vettore  $\vec{r}$  sono espresse in un generico riferimento cartesiano  $o_i - x_i y_i z_i$ , scriveremo  $\{^i r\}$ . Analogamente, la matrice  $[A]$ , per la trasformazione di componenti vettoriali da un riferimento  $i^{\text{mo}}$  ad un riferimento  $j^{\text{mo}}$ , viene indicata utilizzando la notazione  $\left[ \begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix} A \right]$ .

Alla realizzazione del testo hanno contribuito, non solo in veste di Autori, G. Legnani (che ha fornito varie macro  $\text{\LaTeX}$ ), G. Quaranta (che ha predisposto il file di stile  $\text{\BibTeX}$  utilizzato), A. Tasora (che ha realizzato la figura riprodotta in copertina), mentre E. Pennestrì ha raccolto e collazionato i files  $\text{\LaTeX}$  inviati dagli Autori.

Infine, un doveroso ringraziamento va a tutti coloro i quali, nel corso di questi anni, hanno contribuito attraverso varie discussioni a far maturare e ad incoraggiare la stesura del presente testo.

*F. Cheli, E. Pennestrì*

# Indice

## Part I

Prefazione	3
Presentazione	5
Elenco degli Autori	27
<b>1 Cinematica Teorica</b>	<b>1</b>
1.1 Introduzione	1
1.2 Cinematica del punto	1
1.2.1 Posizione di un punto	1
1.2.2 Tangente ad una curva $\mathcal{C}$	2
1.2.3 Velocità di un punto	3
1.2.4 Cenni sulle proprietà differenziali delle curve	4
1.2.5 Accelerazione di un punto	6
1.3 Spostamento di un corpo rigido	7
1.4 Proprietà della matrice di trasformazione	9
1.5 Il teorema di Eulero	9
1.6 La formula di Cayley	11
1.7 Orientamento di un corpo	12
1.8 Composizione di rotazioni attorno agli assi coordinati	14
1.9 Angoli di Eulero	15
1.10 La formula di Rodrigues	17

1.11	I parametri di Rodrigues	19
1.12	I parametri di Eulero	21
1.12.1	Proprietà notevoli dei parametri di Eulero	24
1.13	Il teorema del Mozzi	25
1.13.1	Proprietà vettori spostamento-I	27
1.13.2	Proprietà dei vettori spostamento-II	27
1.14	Moto spaziale finito di un corpo rigido: Descrizione matriciale	29
1.15	Estensione della formula di Rodrigues al caso di moto spaziale generico	31
1.16	Definizione dei parametri del moto elicoidale	31
1.17	Calcolo numerico parametri del moto elicoidale: Metodo di Shiflett e Laub	33
1.18	Calcolo numerico parametri del moto elicoidale: Metodo di Gupta e Chutakanonta	37
1.19	Velocità angolare	39
1.19.1	Rotazione infinitesima e velocità angolare	41
1.20	La trasformazione della matrice antisimmetrica del vettore velocità angolare	42
1.21	Derivate dei parametri di Eulero	42
1.22	Relazione notevole tra la matrice $[E]$ , la sua derivata e il vettore dei parametri di Eulero	44
1.23	Velocità e accelerazione angolare	45
1.23.1	Relazione tra $\{\dot{p}\}$ , $\{\omega\}$ .	47
1.24	Velocità angolare e parametri intrinseci del moto	47
1.25	Spostamenti e rotazioni virtuali	48
1.26	Velocità angolare e derivate degli angoli di Eulero	50
1.27	Nota sintetica sulle parametrizzazioni	51
1.27.1	Parametrizzazioni minimali e non	51
1.27.2	Parametrizzazioni vettoriali e non	52
1.27.3	Parametrizzazione di Cayley-Gibbs-Rodrigues	52
1.27.4	Parametrizzazione esponenziale	53
1.27.5	Altre parametrizzazioni vettoriali	54
1.28	Gli angoli di Cardano	55
1.29	Integrabilità	59
1.30	Proprietà additiva dei vettori velocità angolare	60
1.31	Derivate di vettori espressi in due differenti sistemi di riferimento	61
1.32	La matrice $[\dot{G}]$	62
1.33	La matrice $[\ddot{A}]$	63
1.34	Accelerazione angolare di un corpo e derivate seconde dei parametri di Eulero	63
1.35	Analisi di velocità ed accelerazioni	64
1.35.1	Punti appartenenti al medesimo corpo rigido	64
1.35.2	Accelerazione angolare relativa	66
1.35.3	Punti appartenenti a corpi rigidi distinti	66
1.36	Composizione di moti infinitesimi	68

1.37	Centro ed asse di istantanea rotazione	70
1.38	Asse moto elicoidale infinitesimo	72
1.39	La screw istantanea di un corpo rigido	74
1.40	Dualità delle proprietà di moti piani e spaziali: teorema di Aronhold-Kennedy	75
1.41	Definizione caratteristiche cinematiche del primo ordine	77
1.42	Il centro delle accelerazioni	78
1.43	Analisi caratteristiche cinematiche del corpo rigido	79
	Esercizi e Complementi	86
	Appendice Vettori linea	118
	Appendice Una relazione notevole tra matrici	119
	Bibliografia	119
<b>2</b>	<b>Quaternioni</b>	123
2.1	Introduzione	123
2.2	Elementi di algebra dei quaternioni	123
2.3	Notazioni alternative	127
2.4	Rotazioni	128
2.5	Interpretazione geometrica dei quaternioni	131
2.6	Topologia di $S^3$ e parametrizzazione delle rotazioni	133
2.7	Velocità angolare	134
2.8	Accelerazione angolare	137
2.9	Varie	139
	2.9.1 Normalizzazione di quaternioni e di matrici [A]	139
	2.9.2 Interpolazione di rotazioni	139
	Esercizi e Complementi	141
	Bibliografia	143
<b>3</b>	<b>Analisi della struttura cinematica</b>	145
3.1	Introduzione	145
3.2	Definizioni	145
3.3	La rappresentazione di coppie cinematiche	148
3.4	La classificazione delle coppie cinematiche	148
3.5	Analisi dei gradi di libertà	150
	3.5.1 Formula di Grübler (1883)	152
	3.5.2 Formula di Kutzbach (1933)	152
	3.5.3 Formula di Kutzbach modificata	152
3.6	Meccanismi a struttura cinematica variabile	153
3.7	Metodo matriciale per il calcolo dei g.d.l.	154
3.8	Topologia dei sistemi multibody e grafi	156
	3.8.1 Definizioni elementari della teoria dei grafi	156
	3.8.2 Alcune matrici associate alla teoria dei grafi	160

3.9	Un'applicazione della teoria dei grafi	163
3.10	Un'applicazione della teoria dei grafi alla generazione delle equazioni del moto di rotismi	166
	Esercizi e Complementi	170
	Bibliografia	187
<b>4</b>	<b>Analisi cinematica: la metodologia di Denavit e Hartenberg</b>	<b>189</b>
4.1	Introduzione	189
4.2	Notazione	190
4.3	Elementi base: posizione di punti e corpi	191
4.3.1	Posizione di un punto	191
4.3.2	Rappresentazione matriciale di vettori	191
4.3.3	Posa di un corpo	191
4.3.4	Proprietà della matrice di posizione	192
4.3.5	Normalizzazione della matrice di rotazione $[R]$	192
4.4	Accoppiamenti semplici ad un grado di libertà	193
4.5	Catene di corpi	194
4.5.1	Catene aperte	194
4.5.2	Catene chiuse	194
4.5.3	Sistemi complessi	194
4.6	I parametri di Denavit e Hartenberg (D&H)	195
4.7	Rototraslazioni elicoidali	197
4.7.1	Rototraslazioni generiche	197
4.7.2	Rototraslazioni particolari	199
4.7.3	Rototraslazioni assegnate rispetto a diversi riferimenti	199
4.7.4	Estrazione dei parametri elicoidali	199
4.8	Scrittura delle equazioni cinematiche: alcune varianti	200
4.8.1	Introduzione	200
4.8.2	Metodo di Denavit & Hartenberg (D&H)	201
4.8.3	Metodo della doppia terna	202
4.8.4	Metodo di Gupta	203
4.8.5	Equivalenza tra metodi	204
4.9	Accoppiamenti complessi ad uno o più gradi di libertà	205
4.10	Link complessi	208
4.11	Velocità ed accelerazioni	209
4.11.1	Velocità ed accelerazioni di punti	209
4.11.2	Velocità ed accelerazioni di corpi	209
4.11.3	Uso delle matrici di velocità ed accelerazione	209
4.12	Cambio di sistema di riferimento delle matrici $[W]$ ed $[H]$	210
4.13	Matrici di velocità e di accelerazione dei giunti	210
4.14	Matrice dell'asse elicoidale $[L]$	211
4.15	Cinematica relativa	213

4.16	Cinematica diretta, inversa e configurazioni singolari	214
4.16.1	Introduzione	214
4.16.2	Analisi matriciale delle posizioni	215
4.16.3	Analisi matriciale delle velocità	217
4.16.4	Analisi matriciale delle accelerazioni	218
4.16.5	Catene cinematiche chiuse	218
4.17	Accenni di cinetostatica	219
4.18	Dualità cinetostatica	220
4.19	Gradi di libertà, singolarità, iperstatiche	220
4.20	Esempio applicativo: il robot SCARA	221
4.20.1	Introduzione	221
4.20.2	Cinetostatica	223
4.20.3	Configurazione singolare	224
4.20.4	Analisi matriciale di posizione	224
4.20.5	Analisi matriciale delle velocità	224
4.20.6	Analisi matriciale delle accelerazioni	227
4.21	Esempio applicativo: alcuni robot seriali	228
4.21.1	Un manipolatore RRR	228
4.21.2	Un manipolatore 6R	229
4.22	Esempio applicativo: un meccanismo con catena cinematica chiusa	231
4.22.1	Il manovellismo ordinario centrato	231
4.22.2	Il manovellismo rivisitato senza iperstatiche	235
	Bibliografia	237
<b>5</b>	<b>Analisi cinematica:</b>	
	<b>Metodo delle equazioni di vincolo</b>	<b>239</b>
5.1	Premessa	239
5.2	Coordinate generalizzate	240
5.3	Sistema delle equazioni di vincolo	241
5.4	Coppie cinematiche inferiori	242
5.4.1	Derivate delle equazioni di vincolo nei sistemi articolati piani	243
5.5	Disamina di altri vincoli	245
5.5.1	Vincolo di distanza	246
5.5.2	Vincolo sulla posizione angolare relativa	247
5.6	Coppie superiori	248
5.7	Coppia ad ingranaggi	253
5.8	Equazioni di vincolo per meccanismi spaziali	254
5.8.1	Riferimenti del giunto	255
5.9	Vincoli base	256
5.9.1	Primo vincolo di ortogonalità.	256
5.9.2	Secondo vincolo di ortogonalità.	256
5.9.3	Vincolo sferico.	257

5.9.4	Vincolo sferico-sferico o vincolo di distanza.	258
5.9.5	Primo vincolo di parallelismo.	258
5.9.6	Secondo vincolo di parallelismo.	259
5.10	Vincoli per coppie cinematiche	259
5.10.1	Coppia rotoidale	260
5.10.2	Coppia cilindrica	260
5.10.3	Coppia prismatica	261
5.10.4	Coppia sferica	262
5.10.5	Coppia vite-madrevite	262
5.10.6	Coppia sfera nel cilindro	264
5.11	Vincoli composti	264
5.12	Vincoli reonomi	270
5.12.1	Vincoli sul moto assoluto di un punto	270
5.12.2	Vincoli sul membro telaio	271
5.12.3	Distanza variabile tra due punti	271
5.12.4	Vincolo di rotazione	271
5.13	Vincoli di normalizzazione	272
5.14	Derivate delle equazioni di vincolo	272
5.14.1	Blocco matrice Jacobiana per primo vincolo base di ortogonalità	273
5.14.2	Blocco matrice Jacobiana per secondo vincolo base di ortogonalità	274
5.14.3	Blocco matrice Jacobiana per primo vincolo base di parallelismo	275
5.14.4	Blocco matrice Jacobiana per secondo vincolo base di parallelismo	275
5.14.5	Blocco matrice Jacobiana per vincolo sferico	275
5.14.6	Blocco matrice Jacobiana per vincolo distanza costante	275
5.14.7	Blocco matrice Jacobiana per vincolo distanza variabile tra due punti	276
5.14.8	Blocco matrice Jacobiana per vincolo di rotazione	276
5.14.9	Blocco matrice Jacobiana per equazione vite-madrevite	277
5.14.10	Blocco matrice Jacobiana per vincolo moto assoluto di un punto	278
5.14.11	Blocco matrice Jacobiana per vincoli sul membro telaio	278
5.14.12	Derivate dei vincoli di normalizzazione	279
5.14.13	Sommario dei risultati ottenuti	279
5.15	Soluzione equazioni di vincolo	279
5.16	Analisi delle velocità	282
5.17	Analisi delle accelerazioni	283
5.17.1	Il vettore $\{\gamma\}$ per i vincoli base	283
	Esercizi e Complementi	286
	Bibliografia	306
<b>6</b>	<b>Analisi cinematica: metodo delle coordinate naturali</b>	<b>309</b>
6.1	Introduzione	309
6.2	Sistemi multibody piani	309
6.2.1	Coordinate relative	309

6.2.2	Coordinate assolute	311
6.2.3	Coordinate naturali	312
6.2.4	Approccio matriciale	315
6.3	Sistemi multibodi spaziali	317
6.3.1	Scelta delle coordinate	318
6.3.2	Definizione dei vincoli	319
6.3.3	Approccio matriciale	323
6.4	Analisi cinematica	324
6.4.1	Analisi di posizione	325
6.4.2	Analisi di velocità	325
6.4.3	Analisi di accelerazione	326
6.5	Coordinate naturali e coordinate angolari	326
6.5.1	Imbardata, rollio e beccheggio	326
6.5.2	Angoli di Cardano	328
6.5.3	Angoli di Euler	328
6.5.4	Velocità angolare: caso piano	329
6.5.5	Velocità angolare: caso spaziale	329
	Esercizi e Complementi	330
	Bibliografia	334
<b>7</b>	<b>Geometria delle masse</b>	<b>335</b>
7.1	Centro di massa	335
7.2	Matrice dei momenti e dei prodotti di inerzia	335
7.3	Trasformazione delle matrici di inerzia	337
7.4	Caratteristiche inerziali dei solidi composti	338
7.5	Momenti principali di inerzia	339
7.6	Corpi dinamicamente equivalenti	341
	Esercizi e Complementi	343
<b>8</b>	<b>Dinamica analitica</b>	<b>347</b>
8.1	Introduzione	347
8.1.1	Sistema di riferimento	348
8.1.2	Principio di relatività di Galilei	348
8.1.3	Legge di inerzia	349
8.1.4	Legge fondamentale della dinamica continua	349
8.1.5	Legge di azione e reazione	350
8.1.6	Principio di conservazione della massa	351
8.1.7	Principio di conservazione della risultante e del momento risultante delle forze	351
8.1.8	Principio di conservazione della quantità di moto	351
8.1.9	Principio di conservazione del momento della quantità di moto	352
8.1.10	Principio di conservazione della velocità del baricentro	353

8.1.11	Principio di conservazione dell'energia	354
8.1.12	Teorema della quantità di moto	355
8.1.13	Teorema del momento della quantità di moto	356
8.1.14	Teorema del moto del baricentro	357
8.1.15	Teorema dell'energia cinetica	358
8.2	Corpo rigido quale sistema di punti materiali	359
8.3	Momento della quantità di moto	361
8.4	Coppie di forze	363
8.5	Equazioni di Euler	363
8.6	Dinamica continua	366
8.6.1	Postulati fondamentali della dinamica	367
8.6.2	Relazione simbolica della dinamica continua	367
8.6.3	Equazione simbolica della dinamica continua	368
8.6.4	Principio di d'Alembert	373
8.6.5	Equazioni di Lagrange	373
8.6.6	Equazioni di Maggi	382
8.6.7	Equazioni di Appell	384
8.6.8	Equazioni di Hamilton	385
8.6.9	Principio variazionale di Gauss	388
8.6.10	Principio variazionale di Hertz	391
8.6.11	Principio variazionale di Hamilton	392
8.6.12	Principio variazionale di Hölder	394
8.6.13	Principio variazionale di Maupertuis – Eulero	396
8.6.14	Principio di d'Alembert – Lagrange generalizzato	398
8.6.15	Equazioni di Gibbs – Appell	400
8.6.16	Equazioni di Kane	402
8.7	Dinamica impulsiva	402
8.7.1	Legge fondamentale della dinamica impulsiva	403
8.7.2	Teorema della quantità di moto e del momento delle quantità di moto nel moto impulsivo	405
8.7.3	Teorema dell'energia cinetica nel moto impulsivo	407
8.7.4	Equazione simbolica della dinamica impulsiva	408
8.7.5	Principio variazionale di Robin	411
8.7.6	Principio variazionale di Kelvin	411
8.7.7	Teorema del guadagno di energia cinetica	412
8.7.8	Teorema di Carnot	412
8.7.9	Teorema di Bertrand	413
	Esercizi e Complementi	414
	Bibliografia	444
<b>9</b>	<b>Problemi di Contatto nei Sistemi Multicorpo</b>	<b>447</b>
9.1	Introduzione	447

9.2	Cinematica del Contatto	448
9.2.1	Curve e superfici in forma parametrica	449
9.3	Curve e superfici in forma discreta	460
9.3.1	Verifica del contatto fra due triangoli	460
9.3.2	Ottimizzazione tramite <i>octree</i>	463
9.3.3	Verifica dell'intersezione fra parallelepipedi	464
9.4	Modelli di interazione	465
9.4.1	Modelli impulsivi	465
9.4.2	Modelli continui	470
	Esercizi e Complementi	475
	Bibliografia	477
<b>10</b>	<b>La simulazione di eventi impulsivi</b>	<b>479</b>
10.1	Attrito	479
10.2	Fenomenologia dell'attrito	480
10.3	Il modello classico di attrito coulombiano	483
10.3.1	Esempio introduttivo	484
10.4	Equazioni differenziali con discontinuità	487
10.5	Modelli di attrito	491
10.5.1	Modelli statici	491
10.5.2	Modelli con stati interni: Dahl, Bliman-Sorine, LuGre e varianti	493
10.6	L'attrito nei codici multicorpo	496
10.6.1	Modelli coulombiani	497
10.6.2	Modelli con stati interni	497
10.6.3	Confronto di differenti modelli	498
10.7	Contatti non conformi	502
10.7.1	Giunto cilindrico	503
10.7.2	Giunto sferico	505
10.8	Modelli di cuscinetti a strisciamento	507
10.9	Modello di cuscinetto bidimensionale	508
10.9.1	Esempio numerico: manovellismo di spinta con cuscinetto a strisciamento	510
10.10	Modello tridimensionale di cuscinetto a strisciamento	513
10.10.1	L'attrito nei cuscinetti a strisciamento	515
10.10.2	Osservazioni utili per l'implementazione numerica	516
10.10.3	Un esempio	517
10.11	Urto tra due corpi: Metodo grafico di Routh	520
10.11.1	Legge di Poisson	521
10.11.2	Costanti dell'impatto	523
10.11.3	Corpi rigidi e non lisci	523
10.11.4	Corpi perfettamente lisci e rigidi	524
10.11.5	Corpi elastici e scabri	524

10.11.6	Corpi lisci ed elastici	526
10.12	Diagramma di Routh degli impulsi	526
10.13	Urto piano: approccio multibody al metodo di Routh	529
10.14	Funzioni logiche ed analisi dinamica	538
10.14.1	Proprietà delle funzioni logiche numeriche	540
10.14.2	Rappresentazione di sequenze logiche	542
	Esercizi e Complementi	543
	Bibliografia	555
<b>11</b>	<b>Formulazione ed analisi di problemi multidisciplinari</b>	<b>557</b>
11.1	Introduzione	557
11.1.1	Esempio elettromeccanico	559
11.1.2	Esempio idromeccanico	560
11.1.3	Principio delle Potenze Virtuali	561
11.1.4	Potenza fluidodinamica	562
11.1.5	Potenza elettromagnetica	563
11.2	Interazioni fra Reti	564
11.2.1	Leggi di Kirchhoff	564
11.2.2	Formalismo dei Grafi con legami (Bond Graph)	566
11.3	Fondamenti di idraulica	567
11.3.1	Dinamica dei fluidi nei condotti	567
11.3.2	Perdite di carico.	569
11.3.3	Generatore di pressione.	571
11.3.4	Generatore di portata.	572
11.3.5	Accumulatore.	573
11.3.6	Accoppiamento idro-meccanico	575
11.4	Fondamenti di elettrodinamica	579
11.4.1	Equazioni di Maxwell.	579
11.4.2	Analogia tra corrente elettrica e corrente di spostamento.	580
11.4.3	Campo elettrico.	580
11.4.4	Potenza virtuale elettromagnetica.	580
11.4.5	Equazione del condensatore.	581
11.4.6	Equazione della conduttanza.	582
11.4.7	Equazione del solenoide.	583
	Esercizi e Complementi	585
	Bibliografia	592
<b>12</b>	<b>Analisi dinamica: estensione del metodo di Denavit-Hartenberg</b>	<b>593</b>
12.1	Introduzione	593
12.2	Le matrici per la dinamica	594
12.2.1	Matrice delle azioni $[\Phi]$	594

12.2.2	Matrice della quantità di moto $[\Gamma]$	594
12.2.3	Matrice (Pseudo-Tensore) d'inerzia $[J]$	594
12.3	Cambi di riferimento delle matrici $[\Phi]$ , $[\Gamma]$ e $[J]$	595
12.4	Relazioni tra grandezze cinematiche e dinamiche	595
12.4.1	Accelerazioni e azioni d'inerzia	596
12.4.2	Velocità e quantità di moto di un corpo rigido	596
12.4.3	Energia cinetica di un corpo rigido	596
12.4.4	Energia potenziale	597
12.4.5	Forza peso	597
12.4.6	Potenza delle forze d'inerzia	597
12.4.7	L'operatore <i>Skew</i>	597
12.4.8	Potenza di un sistema di forze	597
12.4.9	Lavoro infinitesimo (o virtuale)	598
12.5	Momento d'inerzia di un corpo in movimento	598
12.6	Approfondimenti e dimostrazioni	599
12.6.1	Matrice delle azioni	599
12.6.2	Matrice della quantità di moto	600
12.6.3	Matrice (Pseudo-tensore) d'inerzia	601
12.6.4	Dimostrazione della relazione $[\Phi] = [H][J] - [J][H]^t$	602
12.6.5	Dimostrazione della relazione $[\Gamma] = [W][J] - [J][W]^t$	602
12.6.6	Conservazione della quantità di moto	603
12.7	Esempi numerici	603
12.7.1	Matrice $[\Phi]$ : esempio numerico	604
12.7.2	Matrice $[\Gamma]$ : esempio numerico	604
12.7.3	Matrice $[J]$ : esempi numerici	605
12.8	Dinamica del corpo rigido	606
12.8.1	Introduzione	606
12.8.2	Problema dinamico inverso	607
12.8.3	Problema dinamico diretto	607
12.9	Esempio applicativo: studio della dinamica del corpo umano	609
12.9.1	Introduzione	609
12.9.2	Modello del corpo umano	609
12.9.3	Dinamica diretta	611
12.9.4	Calcolo della traiettoria	613
12.10	Catene Aperte: La struttura delle equazioni dinamiche	613
12.10.1	Generalità, analisi diretta ed inversa	613
12.10.2	Reazioni vincolari	616
12.10.3	Dinamica lagrangiana	616
12.10.4	Proprietà dell'equazione dinamica	617
12.10.5	Analisi dinamica inversa	617
12.10.6	Analisi dinamica diretta	618
12.11	Un esempio: il robot SCARA	618

12.11.1	Dinamica Diretta e Inversa	618
12.11.2	Modello a parametri dinamici minimi	620
12.12	Catene chiuse: la struttura delle equazioni dinamiche	621
12.12.1	Scrittura delle equazioni	621
12.12.2	Problema dinamico diretto	622
12.12.3	Configurazioni singolari	624
12.12.4	Problema dinamico inverso, azioni motrici e reazioni vincolari	624
12.13	Dinamica di catene cinematiche aperte	624
12.13.1	Introduzione e generalità	624
12.13.2	Problema dinamico inverso	625
12.13.3	Problema dinamico diretto	626
12.14	Dinamica di catene chiuse	630
12.14.1	Dinamica diretta ed inversa	630
12.14.2	Riduzione del numero delle variabili	630
12.15	Dinamica lagrangiana	632
	Bibliografia	632
<b>13</b>	<b>Formulazione dinamica con parametri di Eulero</b>	<b>635</b>
13.1	Introduzione	635
13.2	Minimizzazione di una funzione soggetta a vincoli	635
13.3	Equazioni di Lagrange per i sistemi di corpi	636
13.3.1	Moltiplicatori di Lagrange e reazioni vincolari	637
13.4	Generazione matrice delle masse $[M]$	644
13.5	Lavoro virtuale e forze generalizzate	644
13.6	Elementi elastici e smorzatori viscosi	646
13.7	Sistema di equazioni algebrico-differenziali	648
13.8	Sistemi meccanici a vincoli variabili	651
13.8.1	Eliminazione di vincoli	652
13.8.2	Aggiunta di vincoli	653
13.9	Un modello di urto nella formulazione multibody	653
13.10	Calcolo della variazione di velocità a seguito dell'urto	658
13.11	L'attrito coulombiano nelle coppie cinematiche inferiori	659
13.11.1	La coppia rotoidale	660
13.11.2	La coppia prismatica	661
13.12	Simulazione dinamica con attrito	663
13.12.1	Analisi dinamica inversa	663
13.12.2	Analisi dinamica diretta	664
13.13	Energia cinetica di un corpo per un moto spaziale	665
13.14	Forze generalizzate	666
13.15	Applicazione delle equazioni di Lagrange	668
13.16	Elementi elastici e smorzatori viscosi	671
13.16.1	Movimento relativo lineare	671

13.16.2	Movimento angolare relativo	673
13.17	Moltiplicatori di Lagrange	675
	Esercizi e Complementi	678
	Bibliografia	695
<b>14</b>	<b>Formulazione ricorsiva</b>	<b>697</b>
14.1	Premessa	697
14.2	Formulazione cinematica ricorsiva	697
14.3	Cinematica di una struttura ad albero	702
14.4	Equazioni della dinamica per corpi adiacenti	704
14.4.1	Calcolo delle forze generalizzate	707
14.5	Dinamica di una catena cinematica aperta	708
14.5.1	Descrizione algoritmo ricorsivo per dedurre le equazioni del moto	710
	Esercizi e Complementi	713
<b>15</b>	<b>Riduzione del numero di coordinate</b>	<b>717</b>
15.1	Riduzione del numero di coordinate	717
15.2	Il metodo del partizionamento del vettore coordinate	721
15.2.1	Il partizionamento delle coordinate	723
15.3	Ortogonalizzazione dei vincoli	726
15.4	Deduzione matrice ortogonale $[V]$ mediante decomposizione in valori singolari	727
15.5	Determinazione matrice ortogonale $[V]$ tramite decomposizione QR	728
15.6	La formulazione di Udwadia-Kalaba	730
15.6.1	La formulazione stabilizzata di Baumgarte	732
15.6.2	Applicazione del criterio di stabilizzazione di Baumgarte	733
15.7	Linearizzazione delle equazioni del moto	733
15.8	Riduzione in forma di equazione di stato	735
	Esercizi e Complementi	739
	Bibliografia	747
<b>16</b>	<b>Il Metodo del Complemento Ortogonale</b>	<b>749</b>
16.1	Introduzione	749
16.1.1	Definizioni	749
16.2	Equazioni di Newton-Euler	751
16.3	Equazioni dei vincoli cinematici olonomi	751
16.4	Equazioni di Euler-Lagrange	752
16.5	Calcolo della matrice $T$ e della sua derivata	753
	Esercizi e Complementi	758
	Bibliografia	796
<b>17</b>	<b>Formulazione dinamica con coordinate naturali</b>	<b>799</b>

17.1	Introduzione	799
17.2	Energia cinetica	799
17.2.1	Sistemi piani	799
17.2.2	Sistemi spaziali	803
17.3	Forze e coppie	805
17.3.1	Lavoro virtuale di una forza	805
17.3.2	Lavoro virtuale di una coppia	805
17.4	Analisi dinamica	807
17.4.1	Equazioni di Lagrange in coordinate dipendenti	808
17.4.2	Derivazione delle equazioni di vincolo	809
17.4.3	Metodo di Baumgarte per la stabilizzazione delle equazioni di vincolo	810
17.4.4	Metodo della penalità	810
	Esercizi e Complementi	812
	Bibliografia	820
<b>18</b>	<b>Formulazione della dinamica con il principio di Gauss</b>	<b>821</b>
18.1	Spazio di Configurazione	821
18.2	Vincoli	822
18.2.1	Vincoli Olonomi	822
18.2.2	Vincoli non-olonomi	824
18.3	Principio di Gauss	827
18.4	Equazione fondamentale:operatività del principio di Gauss	828
18.5	La reazione dei vincoli	831
18.6	Un ulteriore esame dell'equazione fondamentale	831
	Esercizi e Complementi	834
	Bibliografia	837
<b>19</b>	<b>Integrazione numerica di equazioni differenziali</b>	<b>839</b>
19.1	Introduzione e definizioni	839
19.1.1	Approssimazioni alle differenze finite	840
19.1.2	Errori di troncamento	841
19.1.3	Convergenza, consistenza e stabilità	841
19.1.4	Introduzione alla stabilità dei metodi numerici	842
19.2	Metodi di integrazione per equazioni differenziali ordinarie	847
19.2.1	Metodi lineari a passo multiplo	847
19.2.2	Metodi a passo singolo	848
19.2.3	Sintesi delle due classi	850
19.2.4	Equazioni non lineari e metodi "Predictor-Corrector"	851
19.3	Stabilità dei metodi di integrazione	851
19.3.1	Zero-stabilità	852
19.3.2	Assoluta stabilità lineare	852
19.3.3	Seconda barriera di Dahlquist, A-stabilità ed L-stabilità	854

19.3.4	Cenni di stabilità non-lineare (in grande)	858
19.4	Integrazione delle rotazioni	860
19.4.1	Preliminari sulla notazione	860
19.4.2	Necessità della parametrizzazione	860
19.4.3	Scelta del metodo	861
19.5	Analisi di metodi per la risoluzione di sistemi meccanici	863
19.5.1	Metodi lineari multipasso e BDF	863
19.5.2	Analisi dei metodi a passo singolo	866
19.6	Integrazione di Sistemi di equazioni algebrico-differenziali	869
19.6.1	Introduzione e concetto di indice	870
19.6.2	Soluzione attraverso i metodi per ODE	873
19.6.3	Tecniche di riduzione dell'indice	876
19.7	Stabilità non lineare e metodi energetici	877
19.7.1	Importanza e limiti delle nozioni di stabilità numerica	877
19.7.2	Il criterio energetico	878
19.7.3	Alcuni esempi semplici	878
19.7.4	Estensione alle rotazioni	881
19.7.5	Altri aspetti d'integrazione geometrica	882
19.7.6	Conservazione e dissipazione	883
	Esercizi e Complementi	884
	Bibliografia	895
Appendice A Cenni di Algebra Lineare		897
A.1	Spazi di vettori, sottospazi e basi.	897
A.1.1	Generalità	897
A.1.2	Spazio di vettori	898
A.1.3	Sottospazio di vettori	898
A.1.4	Insiemi di vettori indipendenti	898
A.1.5	Insieme di vettori che generano uno spazio vettoriale.	899
A.1.6	Basi di uno spazio di vettori.	900
A.1.7	Basi ortogonali ed ortonormali	901
A.1.8	Somma di due spazi di vettori.	901
A.1.9	Spazi di vettori ortogonali.	901
A.1.10	Complemento ortogonale di uno spazio di vettori in $V_n$	901
A.2	Definizioni	902
A.2.1	Prodotto di matrici	902
A.2.2	Matrice Diagonale	902
A.2.3	Matrice Identità	902
A.2.4	Matrice Trasposta	902
A.2.5	Matrice Simmetrica	903
A.2.6	Matrice Antisimmetrica	903
A.2.7	Matrice Ortogonale	903

A.2.8	Determinante	903
A.2.9	Minore di una matrice	904
A.2.10	Cofattore	904
A.2.11	Matrice aggiunta	904
A.2.12	Matrice Singolare	904
A.2.13	Inversa di una Matrice Quadrata	904
A.2.14	Matrice Semidefinita Positiva	904
A.2.15	Matrice Idempotente	905
A.2.16	Autovalori ed autovettori di una matrice quadrata	905
A.2.17	Proprietà delle matrici simmetriche	905
A.2.18	Rango di una matrice	908
A.2.19	Rango del prodotto di matrici	909
A.2.20	Proprietà della matrice $AA^T$	909
A.3	L'algoritmo di Gauss-Jordan	909
A.3.1	La tecnica del pivoting	911
A.3.2	Procedura di Gauss-Jordan e soluzione di sistemi lineari di equazioni	913
A.4	La fattorizzazione di Cholesky	916
A.5	La decomposizione QR	920
A.5.1	Ortogonalizzazione secondo Gram-Schmidt	920
A.5.2	Calcolo delle matrici Q ed R	920
A.6	Soluzione di sistemi lineari	922
A.6.1	Sistemi di equazioni sovradeфинiti	922
A.6.2	Sistemi di equazioni sottodeфинiti	924
A.7	La trasformazione di Householder	924
A.8	La fattorizzazione QR secondo Householder	926
A.9	Un'applicazione della trasformazione di Householder	929
A.10	Una proprietà delle matrici positive definite	930
A.10.1	Fattorizzazione di matrici positive definite	930
A.10.2	Decomposizione in valori singolari	931
A.11	La matrice generalizzata inversa di Moore-Penrose	933
A.11.1	Calcolo matrice pseudoinversa mediante fattorizzazione di Gram-Schmidt	934
A.11.2	Calcolo matrice pseudoinversa mediante decomposizione SVD	935
A.11.3	Calcolo matrice pseudoinversa mediante algoritmo di Greville	936
A.11.4	Calcolo matrice pseudoinversa con il metodo di Varga	936
A.12	Soluzione di sistemi lineari con la matrice pseudo-inversa	937
A.13	Matrici partizionate	939
A.14	Soluzione a blocchi di un sistema lineare di equazioni	941
A.15	Soluzione di Sistemi Lineari Sparsi	943
A.15.1	Rappresentazione di matrici sparse	944
A.15.2	Fattorizzazione $LDL^T$	946
A.15.3	Fattorizzazione $LDL^T$ per matrici sparse	947
	Bibliografia	949

Appendice B Il metodo di Newton Raphson	951
Bibliografia	953
Indici	953
Indice dei Nomi	955
Indice Alfabetico	959
Indice degli Autori	973

## Elenco degli Autori

Alla stesura del volume hanno contribuito:

Prof. Marco Borri, Politecnico di Milano,  
Prof. Carlo L. Bottasso, Politecnico di Milano,  
Ing. Francesco Braghin, Politecnico di Milano,  
Ing. Massimo Cavacece, Università di Cassino  
Prof. Federico Cheli, Politecnico di Milano  
Prof. Domenico de Falco, II Università di Napoli  
Prof. Giorgio Diana, Politecnico di Torino  
Prof. Giovanni Legnani, Università di Brescia  
Prof. Roberto Lot, Università di Padova  
Ing. Dino Manara, Università di Brescia  
Prof. Paolo Mantegazza, Politecnico di Milano  
Ing. Pierangelo Masarati, Politecnico di Milano  
Ing. Marco Morandini, Politecnico di Milano  
Prof. Ettore Pennestrì, Università di Roma Tor Vergata  
Ing. Giuseppe Quaranta, Politecnico di Milano  
Prof. Rosario Sinatra, Università di Catania  
Ing. Roberto Stefanelli, Università di Roma Tor Vergata

Ing. Alessandro Tasora, Università di Parma

Ing. Lorenzo Trainelli, Politecnico di Milano

Ing. Diego Tosi, Università di Brescia

Ing. Pier Paolo Valentini, Università di Roma Tor Vergata

Ing. Leonardo Vita, Università di Roma Tor Vergata

Ing. Giacomo Ziliani, Università di Brescia

# Indice dei Nomi

## A

Alizade R., 152  
Altpeter F., 495  
Amontons G., 480  
Ampère, A. M., 581  
Angeles J., 80, 751  
Appell P., 384, 400, 438, 440  
Aristotele, 349, 369  
Armstrong B., 495  
Aronhold S., 75, 77  
Aström, K., 494

## B

Barabanov N., 495  
Battaglini G., 113  
Baumgarte J.W., 734, 735, 812, 878  
Bayo E., 315, 665  
Bennett G.T., 173  
Bernard, J. E., 492  
Bernoulli D., 356  
Bernoulli J., 369, 571  
Bertrand J. L. F., 414  
Bliman, P.-A., 493  
Borri M., 11  
Bottasso L., 11  
Brach R.M., 657  
Braghin F., 11  
Budyans R. G., 504  
Butcher, J. C., 851

## C

Canudas de Wit, C., 494  
Cardano G., 55, 140, 172  
Carnot L., 413  
Cartesio R., 349, 352, 369  
Cavacece M., 11  
Cavagna C., 7  
Cayley A., 11, 12, 19, 52, 92, 113, 124  
Chace M., 6  
Chang C.O., 734  
Chasles C., 25  
Cheli F., 11  
Chetaev N.G., 399  
Cholesky A.L., 727, 918, 919  
Chutakanonta P., 37  
Clausius R., 369  
Clifford W.K., 74, 124  
Coriolis, 213  
Coulomb C.A., 480, 483, 491  
Crossley F.R.E., 156

## D

d'Alembert J. - B. Le R., 369, 373, 394, 398, 399, 402, 638  
Dahl, P., 493  
Dahlquist, G., 850, 857  
de Broglie L. - V., 398  
de Falco D., 11  
de Jalon J.G., 315, 665  
de L'Hospital, 649  
De Solla Price D., 184  
Denavit J., 189, 195  
Descartes R., 349, 352, 369  
Diana G., 11  
Dimentberg F.M., 74  
Dirac P.A.M., 539  
Dobrzjanskyj L., 156  
Dupont P., 495

## E

Euler L., 9, 14, 15, 19, 21, 24, 42, 92, 124, 140, 142, 339, 356, 363, 380, 397, 418, 419, 611, 634, 850, 851, 855, 858, 859, 865, 871

## F

Faraday, M., 581  
Fermat P. de, 397, 398  
Frenet F., 4, 6  
Freudenstein F., 152, 156  
Frobenius F.G., 124

## G

Galilei G., 348–350  
Gauss K.F., 124, 280, 391, 399, 581, 911  
Gear W., 6  
Gibbs J.W., 52, 124, 386, 399, 400, 438, 440  
Grübler M., 152, 170  
Gram, 922  
Grassmann H.G., 74, 124  
Greville T.N.E., 938  
Gupta K.C., 37, 104, 203

## H

Hölder O., 396  
Hamilton W.R., 123, 143, 385–387, 393, 638  
Hartenberg R.S., 189, 195  
Haug E.J., 6, 637, 655, 686, 723  
Hayward V., 495  
Heaviside O., 124, 539  
Helmholtz H. L. F. von, 380  
Hertz H. R., 367, 392

Hooke R., 172  
Householder A.S., 926  
Hurwitz A., 124  
Huygens C., 338, 363

## J

Jordan C., 911  
Jordan W., 911  
Jourdain P. E. B., 399  
Juvinall R., 504

## K

Kalaba R.E., 733  
Kane T. R., 402  
Kane T.R., 402, 438–440  
Karnopp D., 492  
Kelvin W. T. Lord, 411  
Kennedy A.B.W., 75, 77  
Kirchhoff G., 565, 566, 569  
Klein F., 92, 118  
Kronecker, 934  
Kutta, 611, 620  
Kutzbach K., 152, 170, 254, 735

## L

Lagrange J.L., 5, 79, 142, 369, 373–375, 377, 378, 380–382, 394, 399, 400, 402, 574, 634  
Lanchester W., 484  
Laplace, P.-S., 560  
Laub A.J., 33, 100, 104  
Lee Sangkoo, 751  
Legnani G., 7, 11, 189, 595, 939  
Leibniz G. W., 358  
Lipson C., 504  
Lot R., 7, 11

## M

Maggi G.A., 384, 438–440  
Manara D., 11, 189, 595  
Mantegazza P., 11  
Marcolongo R., 25, 100  
Masarati P., 11  
Maupertuis P. - L. M. de, 397  
Maxwell, C., 581  
Mehmke R., 100  
Milenkovic, V.J., 54  
Moore E.H., 935  
Morandini M., 11  
Mozzi del Garbo G.G., 25, 75, 117, 211

## N

Newton I., 280, 349, 350, 356, 357, 363, 572, 634, 853, 953  
Nikravesh P., 6, 637, 723, 734

## O

Olsson, H., 494  
Ortega R., 495

## P

Paynter H.M., 568  
Pennestrì E., 11  
Penrose R., 935  
Phillips J., 156  
Piper, 216  
Plücker J., 113, 118, 211  
Poincaré H., 133  
Poisson S.D., 466, 521

## Q

Quaranta G., 11

## R

Rankers H., 6  
Raphson J., 280, 953  
Rayleigh J. W. S. Lord, 394  
Reshetov L., 156  
Reuleaux F., 148, 178  
Reynolds O., 509, 572  
Robin J. W., 411  
Rodrigues O., 17, 19, 21, 31, 52  
Routh E.J., 380, 520, 529  
Runge, 611, 620

## S

Schielen W., 6  
Schmidt, 922  
Segner J.A., 339  
Serret J.A., 4, 6  
Shifflett G.R., 33, 100, 104  
Sinatra R., 11  
Sommer H.J., 79  
Sorine, M., 493  
Stefanelli R., 11  
Steiner R., 338, 363  
Strato, 369  
Stribeck R., 481  
Stronge W.J., 657  
Study E., 74

## T

Tasora A., 7, 12  
Taylor B., 390  
Teofrasto, 369  
Tosi D., 12, 189, 595  
Trainelli L., 12

## U

Udwadia F.E., 733  
Uicker J.J., 189

**V**

Valentini P.P., 12  
van der Werff K., 6  
Vanderploeg M., 6  
Varga A., 938  
Veldpaus F.E., 80, 104  
Vita L., 7, 12  
Volterra V., 408

**W**

Watt J., 147  
Wehage R., 6  
Whittaker E.T., 154  
Wiener T.F., 54  
Willis R., 168  
Wittenbauer F., 5  
Wittenburg J., 6

**Y**

Young W. C., 504

**Z**

Ziliani G., 12, 189, 595



# Indice Alfabetico

## A

- Accelerazione
  - in assenza di vincoli, 829
  - in presenza di vincoli, 829
- Accelerazione angolare, 63, 137
- Accelerazione angolare relativa, 66
- Accelerazione di gravità
  - matrice della, 599
- Accelerazione di un punto, 6
- Accelerazioni
  - centro delle, 78, 83
  - punti dello stesso corpo, 64
  - punti di corpi diversi, 66
- Accoppiamenti
  - cilindrici, 205
  - complessi, 205
  - con ingranaggi, 207
  - matrice dell'asse elicoidale, 211
  - matrice di accelerazione, 210
  - matrice di posizione, 193
  - matrice di velocità, 210
  - matrici di posizione, 205
  - rotoidali, 206
  - sferici, 206
- Accoppiamenti semplici, 193
- Accoppiamento prismatico, 193
- Accoppiamento rotoidale, 193
- Adams, metodi di, 850
  - Bashfort, 850
  - Moulton, 850
- Adesione
  - condizione di, 458
- Algebra lineare
  - richiami di, 899
- Analisi cinematica
  - di una pressa, 330
  - di una trasmissione con giunto cardanico, 332
  - metodo delle coordinate naturali, 309
- Analisi cinematica dei meccanismi spaziali, 254
- Analisi cinematica del jerk, 286
- Analisi cinematica meccanismi spaziali
  - metodo delle equazioni di vincolo, 254
  - metodo ricorsivo, 699
- Analisi dinamica
  - del pendolo trifilare, 817
  - di un doppio pendolo piano, 814
  - metodo delle coordinate naturali, 801
  - robot SCARA, 620
- Anello cinematico
  - v. Circuiti, 147
- Angoli di
  - yaw-pitch-roll*, 55
  - yaw-pitch-roll*, 326
  - Bryant, 55
  - Cardano, 55, 140, 328
  - Euler, 328
  - Eulero, 15, 140
- Angoli di Cardano
  - derivate di, 58
- Angoli di Eulero, 91
  - derivate, 50
  - trasformazione in parametri di Eulero, 91
- Angolo di contingenza, 5
- Appell
  - vedi* Gibbs-Appell, 438, 440
  - equazione di, 384
  - equazione di Gibbs -, 400
- Applicazioni formulazione multibody, 680, 681
- Approssimazione stazionaria, 482, 560
- Aronhold-Kennedy
  - teorema di, 75, 116
- Asse del Mozzi, 211
- Asse di Mozzi, *vedi* Asse elicoidale
  - v. Asse moto infinitesimo elicoidale, 116
- Asse di rotazione, 15, 17
- Asse elicoidale
  - matrice del, 211
- Asse istantanea rotazione, 70
- Asse moto elicoidale, 29, 33, 37
- Asse moto finito elicoidale, 95, 97, 100
- Asse moto infinitesimo elicoidale, 105
  - a partire da velocità, 77, 79, 106, 110
- Assi principali d'inerzia, 336
- Atti di moto
  - composizione, 68, 111, 112
- Attrito
  - approssimazione stazionaria, 482
  - contatto non conforme, 502
  - coulombiano, 479
  - dinamico, 458
  - effetto Stribeck, 481
  - memoria, 482
  - modelli coulombiani, 491
  - modelli di Bliman e Sorine, 493
  - modelli di LuGre, 494
    - passività, 495
    - pre-slittamento, 495
  - modello di Dahl, 493

- modello di Karnopp, 492
- pre-slittamento, 481
- stati interni, 493
- statico, 458
- Attrito coulombiano, 483, 665
  - applicazione, 484, 544, 661
  - dinamica inversa con, 665
- Azione, 350, 396
  - hamiltoniana, 393
  - legge di reazione e, 350
  - minima, principio della, 397
  - stazionaria, principio dell', 396
- Azioni
  - d'inerzia, 598, 604
  - matrice delle, 596

## B

- Base vettoriale
  - definizione, 899
- Baumgarte
  - formulazione stabilizzata di, 734, 735, 744, 812, 817, 878
  - metodo di, 744
- Baumgarte, metodo di, 878
- BDF, *vedi* Metodi numerici
- Bertrand
  - teorema di, 414
- Bi-normale, 454
- Binomio
  - lagrangiano, 377
- Bond Graph, 568
- Bryant
  - angoli di, 55

## C

- C-traiettoria, 823
- Calcolo di T, 755
- Cambi di riferimento
  - matrice d'inerzia, 597
  - matrice dell'asse elicoidale, 211
  - matrice della quantità di moto, 597
  - matrice delle azioni, 597
  - matrici di accelerazione, 210
  - matrici di velocità, 210
  - rototraslazioni elicoidali, 199
- Caratteristica
  - cinetica, 383
- Cardano
  - angoli di, 55, 328
  - giunto di, 323
- Carnot
  - teorema di, 413
- Catena aperta, 194, 221, 228, 309, 615, 626
  - cinematica, 194, 213, 228, 229

- dinamica, 615, 626
- dinamica diretta, 620, 628
- dinamica inversa, 619, 627
- Catena chiusa, 194, 231, 310, 623, 632
  - cinematica, 218, 231
  - dinamica, 623, 632
  - dinamica diretta, 624, 632
  - dinamica inversa, 626, 632
- Causalità, 569
- Cayley
  - formula di, 12
- Cayley-Klein
  - parametri di, 92
- Centro delle accelerazioni, 78, 83
- Centro di curvatura, 4
- Centro di istantanea rotazione, 71
- Cholesky
  - fattorizzazione di, 727, 918
- Cilindroide, 113
- Cinematica, 189
  - catena aperta, 194, 213, 228, 229, 309
  - catena chiusa, 231, 310
  - diretta, 214
    - manipolatore 6R, 229
    - manipolatore RRR, 228
    - SCARA, 221, 224, 227
  - inversa, 214
    - manipolatore 6R, 229
    - manipolatore RRR, 228
    - SCARA, 221, 224, 227
  - manovellismo, 231
- Cinematica dei corpi rigidi
  - velocità ed accelerazioni di punti, 66
- Cinematica del corpo rigido
  - angoli di Eulero, 15
  - asse di rotazione, 17
  - asse istantanea rotazione, 70
  - asse moto elicoidale, 29, 37
  - asse moto finito elicoidale, 25, 95, 97, 100
  - asse moto infinitesimo elicoidale, 72, 74, 75, 79, 106, 116
  - formula di Rodrigues, 17, 21
  - matrice di rotazione, 22
    - definizione numerica, 27
  - matrice spostamento, 86
  - moto elicoidale
    - descrizione matriciale, 29
  - moto sferico, 9
  - orientamento di un corpo, 12
  - parametri di Eulero, 21
  - parametri moto elicoidale, 33
  - parametri moto finito elicoidale, 100
  - parametri moto infinitesimo elicoidale, 77, 105, 110

- proprietà dei vettori spostamento, 27
- rotazioni attorno ad assi coordinati, 14
- teorema del Mozzi, 25
- teorema di Eulero, 9
- velocità angolare, 39, 41
  - derivate angoli di Cardano, 58
  - derivate angoli di Eulero, 50
  - derivate parametri di Eulero, 45
- velocità angolare in coordinate naturali, 329
- velocità ed accelerazioni di punti, 64
- Cinematica del punto
  - accelerazione, 6
  - posizione, 1
  - velocità, 3
- Cinematica relativa, 213
- Cinetostatica, 219
  - dualità, 220
  - robot SCARA, 223
- Circonferenza osculatrice, 4
- Circuiti
  - definizione, 146
  - indipendenti, 159
- Circuiti indipendenti, 159
- Coefficiente
  - di restituzione
    - di Newton, 467, 473
    - di Poisson, 469
- Coefficiente di restituzione, 465, 466, 522, 658, 660
- Coefficiente di viscosità dinamica, 572
- Cofattore, 906
- Complementarietà, condizione di, 448
  - modello continuo, 471
  - Newton, 467
  - Poisson compressiva, 469
  - Poisson espansiva, 470
- Complemento Ortogonale
  - applicazioni, 760
  - metodo del, 751
- Complessità computazionale, 127, 130
- Componente
  - lagrangiana, 377
- Composizione dei moti, 213
- Compressione, 468
- Computergrafica, 127
- Condizione delle radici, 854
- Configurazione
  - spazio di, 823
- Configurazioni singolari, 214, 220, 626
  - manipolatore RRR, 228
  - manovellismo, 234
  - robot SCARA, 224
  - SCARA, 221
- Conservazione
  - del momento della quantità di moto, principio di, 353
  - del momento risultante delle forze, principio di, 351
  - dell'energia totale, principio di, 354
  - della massa
    - principio di, 562
  - della massa, principio di, 351
  - della quantità di moto, principio di, 352
  - della risultante delle forze, principio di, 351
  - della velocità del baricentro, principio di, 353
- Consistenza
  - metodi numerici, 843
- Contatto
  - attivo, 466, 468
  - conforme, 480, 481
  - curva di, 448
  - fondo-corsa, 475
  - istante iniziale e finale, 458
  - non conforme, 481, 502
  - soluzioni multiple, 458
  - superficie di, 448
- Continuità
  - equazione di, 562
- Contrattività, 860
- Convergenza
  - metodi numerici, 843
- Coordinata
  - ciclica, 380
  - fisica, 373
  - generalizzata, 373
  - ignorabile, 380
  - lagrangiana, 375
  - libera, 366
  - quasi, 400
- Coordinate assolute, 311
- Coordinate naturali
  - analisi cinematica, 309
  - analisi dinamica, 801
  - cinematica di un giunto cardanico, 332
  - cinematica di una pompa a pedale, 313
  - cinematica di una pressa, 330
  - coppia cilindrica, 320
  - coppia prismatica, 314, 321
  - coppia rotoidale piana, 314, 320
  - coppia sferica, 320
  - coseni direttori, 312
  - descrizione del corpo rigido, 316, 318
  - dinamica del pendolo trifilare, 817
  - dinamica di un doppio pendolo piano, 814
  - energia cinetica, 803, 806
  - forze generalizzate, 807
  - matrice di massa, 803, 806
  - matrice di trasformazione, 316, 323

- punti base, 312, 314
  - velocità angolare di una terna, 329
- Coordinate omogenee, 191
- Coordinate Plückeriane, 74, 118, 211
- Coordinate relative, 309
- Coppia ad ingranaggi
  - equazione di vincolo, 253
- Coppia cilindrica
  - in coordinate naturali, 320
  - riferimenti del giunto, 260
- Coppia cinematica
  - definizione, 146
  - grado di libertà, 148
  - grado di molteplicità, 148
- Coppia prismatica
  - in coordinate naturali, 314, 321
  - riferimenti del giunto, 261
- Coppia prismatica piana
  - equazioni di vincolo, 242
  - Jacobiano, 244
- Coppia rotoidale piana
  - equazioni di vincolo, 242
  - in coordinate naturali, 314, 320
  - Jacobiano, 243
  - lubrificazione idrodinamica, 507
- Coppia sfera nel cilindro
  - riferimenti del giunto, 264
- Coppia sferica
  - in coordinate naturali, 320
  - riferimenti del giunto, 262
- Coppia superiore
  - equazione di vincolo, 248
- Coppie, 596
- Coppie cinematiche
  - classificazione, 148
  - contatto, 475
  - riferimenti dei giunti, 259, 260
- Coriolis
  - teorema di, 213
- Corpo rigido, 608
  - dinamica, 608
  - dinamica diretta, 609
  - dinamica inversa, 609
  - in coordinate naturali, 316, 318
- Corpo umano, 611
  - dinamica, 611
  - dinamica diretta, 613
  - simulazione, 611
- Coseni direttori, 312
  - matrice dei, 13
- Curva
  - di contatto, 454
  - NURBS, 450
  - parametrica, 450
  - retta tangente, 2
- Curvatura
  - raggio di, 5
- Curvatura elicoidale, 6

**D**

- d'Alembert
  - equazione di, 398
  - principio di, 373
  - principio di Lagrange –, 369
  - principio di, forma lagrangiana, 402
  - principio generalizzato di Lagrange –, 399
- D&H
  - Denavit e Hartenberg , *vedi* Denavit J.
- DAE
  - formulazione multibody, 650, 810
- Dahlquist
  - prima barriera di, 850
  - seconda barriera, 857
- Decomposizione in valori singolari, 933
  - applicazione, 729, 742
- Decomposizione valore singolo
  - applicazione, 38
- Denavit
  - i parametri di, 195
  - il metodo di, 189, 201
- Derivata di un vettore, 41
- Differenziale
  - di un prodotto scalare, 50
  - di un prodotto vettoriale, 50
- Dinamica, 347, 595
  - analitica, 347, 366
  - catena aperta, 615, 626
  - catena chiusa, 623, 632
  - continua, 347, 366
  - continua, equazione cardinale della, 355
  - continua, equazione simbolica della, 367
  - continua, legge fondamentale della, 350
  - continua, relazione simbolica della, 367
  - corpo rigido, 608, 609
  - corpo umano, 611
  - diretta, 615, 628
  - equivalenza, 377
  - impulsiva, 347, 402
  - impulsiva, equazione simbolica della, 409
  - impulsiva, legge fondamentale della, 404
  - inversa, 615, 627
  - lagrangiana, 618, 634
  - manovellismo, 623
  - Newton-Euler, 634
  - primo postulato della, 367
  - quadrilatero, 623
  - robot SCARA, 620
  - secondo postulato della, 367

sistema fluttuante, 611  
 Dinamica diretta, 624  
   catena aperta, 620, 628  
   catena chiusa, 624, 632  
   corpo rigido, 609  
   corpo umano, 611, 613  
   robot SCARA, 620  
 Dinamica inversa, 626, 653  
   catena aperta, 619, 627  
   catena chiusa, 626, 632  
   corpo rigido, 609  
   robot SCARA, 620  
 Dirac  
   funzione di, 539  
 Disequazione  
   pura, 368  
 Distanza  
   fra curve o superfici, 455  
   minima, 456  
 Doppia terna  
   il metodo della, 202  
 Dualità cinetostatica, 220

**E**

Elemento cinematico, 145  
 Energia  
   cinetica, 358  
   cinetica, prima forma del teorema dell'- nel moto continuo, 358, 372  
   cinetica, seconda forma del teorema dell'- nel moto continuo, 358, 372  
   cinetica, teorema del guadagno di, 412  
   cinetica, teorema della perdita di, 413  
   cinetica, teorema nel moto impulsivo, 408  
   cinetica, variazione asincrona dell', 395  
   cinetica, variazione dell', 354  
   cinetica, variazione sincrona dell', 392  
   interna, 354  
   potenziale, 355  
   totale, 354  
   totale, principio di conservazione dell', 354  
 Energia cinetica, 598  
   in coordinate naturali, 803, 806  
 Energia potenziale, 599  
 Equazione  
   canonica, 386  
   cardinale della dinamica continua, 355  
   cardinale, prima del moto continuo, 356  
   cardinale, prima del moto impulsivo, 406  
   cardinale, seconda del moto continuo, 356  
   cardinale, seconda del moto impulsivo, 406  
   di Appell, 384  
   di d'Alembert, 398  
   di equilibrio dinamico, 373  
   di equilibrio statico, 373  
   di Gibbs – Appell, 400  
   di Hamilton, 386  
   di Kane, 402  
   di Maggi, 384  
   di moto, 347, 369  
   dinamica, 373  
   prima forma dell'- di Lagrange, 375  
   pura, 369  
   seconda forma dell'- di Lagrange, 377  
   simbolica della dinamica continua, 367  
   simbolica della dinamica impulsiva, 409  
   simbolica della Statica, 370  
   simbolica della statica, 369  
 Equazione di continuità, 562  
 Equazione fondamentale, 830  
 Equazioni Algebrico-Differenziali  
   integrazione, 842, 871  
   indice, 873  
 Equazioni di chiusura  
   catena aperta, 194  
   catena chiusa, 194  
   metodo della doppia terna, 202  
   metodo di Denavit e Hartenberg, 201  
   metodo di Gupta, 203  
   sistemi complessi, 194  
   varianti, 200  
 Equazioni di Euler, 363, 365, 366  
 Equazioni di Lagrange, 638, 670, 810  
 Equazioni di vincolo  
   metodo della penalità, 812, 817  
   metodo di Baumgarte, 812, 817  
 Equazioni di vincolo strutturale  
   caso piano, 242  
 Equazioni differenziali con discontinuità, 487  
 Equazioni differenziali ordinarie  
   integrazione, 841  
 Equazioni vettoriali di chiusura, 146  
 Equilibrio  
   dinamico, equazioni di, 373  
   statico, equazioni di, 373  
 Equivalenza  
   dinamica, 377  
   meccanica, 348  
 Espansione, 468  
 Esperienza di Newton, 572  
 Euler  
   angoli di, 15, 91  
   derivate dei parametri di, 42  
   dinamica, 634  
   equazioni di, 363, 365, 366, 418, 419  
   metodo di integrazione, 611  
   parametri di, 21, 22, 24, 91  
   derivate, 44, 45, 47, 63

- principio variazionale di Maupertuis –, 397
- teorema di, 9, 380
- Euler, metodo di
  - esplicito, 850, 855
  - implicito, 855, 858
- Euler-Lagrange
  - equazioni di, 754

## F

- Fairbairn
  - guida di, 171
- Fattorizzazione di Cholesky, 918
- Fattorizzazione QR, 737, 922, 925
  - applicazione, 38, 730, 741
- Fermat
  - principio di, 397
- Fluidi Newtoniani, 572
- Forma
  - di Pfaffian, 382
- Forma di Hessemberg, 874
- Formula di Cayley, 12
- Formula di Rodrigues, 17, 21
- Formula di Rodrigues estesa, 31
- Formulazione multibody
  - aggiunta di vincoli, 655
  - eliminazioni di vincoli, 654
  - forze generalizzate, 668, 807
  - modello d'urto, 655
  - riduzione numero coordinate, 719
- Formulazione multibody in 3D, 667
- Formulazione ricorsiva
  - analisi cinematica, 699
  - forze generalizzate, 709
- Forza
  - apparente, 348
  - attiva, 350
  - campo di, 352
  - conservativa, 355
  - d'inerzia, 373
  - di contatto
    - normale, 471
    - normale dissipativa, 471
    - normale elastica, 471
  - esterna, 351
  - finita, 404
  - generalizzata, 399
  - in movimento, 347
  - infinita, 404
  - interna, 351
  - monogenica, 394
  - motrice, 349
  - non conservativa, 378
  - perduta, 373
  - posizionale, 355

- reattiva, 350
- risultante, 351
- viscosa, 394
- viva, 358
- Forza peso, 599
- Forze
  - matrice delle, 596
- Forze generalizzate
  - calcolo sistematico, 647
  - caso piano, 646
  - elemento molla-smorzatore, 648, 673
  - formulazione ricorsiva, 709
  - in coordinate naturali, 807
  - moto spaziale, 668
- Frenet-Serret
  - formule di, 6
- Funzione
  - di Dirac, 540
  - di Gibbs, 400
  - di Hamilton, 385
  - di Lagrange, 378
  - di Rayleigh, 394
  - di Routh, 380
  - monogenica, 394
  - step, 540
- Funzione lagrangiana
  - estesa, 639
- Funzioni logiche, 539

## G

- Galilei
  - principio di relatività di, 348
  - trasformazione di, 349
- Gauss
  - principio di, 823
  - principio di , 829
  - principio di Gibbs –, 399
  - principio variazionale di, 391
- Gauss-Jordan
  - algoritmo di, 911
- Gaussiana, 830
- Gear, formulazione di, 878
- Generalizzazione del teorema di Aronhold-Kennedy,  
75, 116
- Geodetica, 391
- Geometria computazionale, 127
- Geometria delle masse, 335
  - matrice d'inerzia, 335
  - momenti principali d'inerzia, 339
  - solidi composti, 338, 343
- Gibbs
  - equazione di Appell –, 400
  - funzione di, 400
  - principio di Gauss –, 399

spazio di, 386  
 Gibbs-Appell  
 applicazione formulazione dinamica di, 438, 440  
 Giroscopio, 423, 425, 426, 429  
 Giunti, *vedi* accoppiamenti  
 Giunto cardanico, 172, 265  
 in coordinate naturali, 323  
 Grübler  
 formula di, 152  
 Gradi di libertà, 220  
 formula di Grübler, 152  
 formula di Kutzbach, 152  
 metodo matriciale di analisi, 154, 173, 175  
 Gradi di libertà  
 numero di, 827  
 Grafi  
 definizioni elementari, 156  
 Gupta  
 il metodo di, 203

## H

Hölder  
 principio variazionale di, 396  
 Hamilton  
 azione di, 393  
 equazione di, 386  
 funzione di, 385  
 principio variazionale di, 393  
 sistema di, 386  
 trasformazione di, 387  
 variabile di, 386  
 Hartenberg, *vedi* Denavit  
 Heaviside  
 funzione di, 539  
 Hertz  
 legge di contatto di, 472  
 principio variazionale di, 392  
 HHT, *vedi* Metodi numerici  
 Householder  
 trasformazione di, 926, 931  
 Hunt-Crossley  
 modello di, 473  
 Huygens-Steiner  
 teorema di, 338

## I

Impatto, 465, 521, 655, 692  
 Impulso, 403  
 attivo, 407  
 compressivo di Poisson, 468  
 di Newton, 467  
 espansivo di Poisson, 469  
 esterno, 405  
 finito, 404

interno, 408  
 istantaneo, 404  
 reattivo, 407  
 Inerzia  
 Matrice di, 143  
 matrice di, 596  
 Integrale  
 del momento cinetico, 380  
 del moto, 351  
 dell'energia cinetica, 379  
 Integrazione  
 metodo di Euler, 611  
 Interazione  
 modelli di, 447  
 Interazione tra corpi  
 impatto, 465, 521, 655, 692  
 Interpenetrazione tra corpi, 456  
 Iperstatiche, 220

## J

Jacobiano, 214, 810  
 Jerk  
 equazioni per analisi, 286  
 Jourdain  
 principio di, 399

## K

Kane  
 equazione di, 402  
 Kelvin  
 principio variazionale di, 411  
 Kelvin-Voigt  
 modello di, 472  
 Kirchhoff  
 leggi di, 565, 566, 569  
 Kutzbach  
 formula di, 152  
 formula modificata di, 152, 172

## L

Lagrange  
 applicazione formulazione dinamica di, 434, 438, 440, 442  
 binomio di, 377  
 componente di, 377  
 coordinata di, 375  
 equazioni di, 436, 638, 670, 810  
 funzione di, 378  
 moltiplicatore di, 374  
 moltiplicatori di, 574, 810  
 prima forma delle equazioni di, 375  
 principio di d'Alembert -, 369  
 principio generalizzato di d'Alembert -, 399  
 seconda forma dell'equazione di, 377

- seconda forma delle equazioni di, 377
- sistema di, 378
- sistema ridotto di, 381
- Lagrangiana, 618, 634
- Lavori Virtuali
  - Principio dei, 564
- Lavoro infinitesimo, 600
- Lavoro virtuale, 600
  - di una coppia, 807
  - di una forza, 807
  - in coordinate naturali, 807
- Legge
  - di azione e reazione, 350
  - di inerzia, 349
  - fondamentale della dinamica continua, 350
  - fondamentale della dinamica impulsiva, 404
  - prima di Newton, 349
  - seconda di Newton, 350
  - terza di Newton, 350
- Lineari a passo multiplo LMM, *vedi* Metodi numerici
- Link complessi, 208
- Lubrificazione idrodinamica, 507
  - coppia rotoidale, 507

## M

- Maggi
  - equazione di, 384
- Maggi-Kane
  - applicazione formulazione dinamica di, 438, 440, 442
- Manipolatore
  - Stanford, 715
- Manipolatore piano
  - analisi cinematica, 287
- Manipolatore seriale 5R
  - Modello dinamico di un, 771
- Manovellismo, 231
  - cinematica, 231
  - configurazioni singolari, 234
  - dinamica, 623
- Manovellismo di spinta
  - analisi dinamica, 766
- Massa, 350
  - principio di conservazione della, 351
- Matrice
  - aggiunta, 906
  - antisimmetrica, 905
  - cofattore, 906
  - decomposizione spettrale, 909
  - determinante, 905
  - di Householder, 926
  - diagonale, 904
  - idempotente, 907
  - identità, 904
  - inversa, 906
  - minore di una, 905
  - partizionata, 941
    - inversa, 942
    - trasposta, 942
  - prodotto, 904
  - pseudoinversa di Moore-Penrose, 935
  - rango, 910
  - semidefinita positiva, 906
  - simmetrica, 905
  - singolare, 906
  - trasposta, 904
- Matrice antisimmetrica, 42
  - definizione di, 24
- Matrice d'inerzia, 596, 597
  - cambi di riferimento, 597
  - definizione, 603
  - esempio numerico, 607
- Matrice d'inerzia *vedi* Pseudo tensore d'inerzia
- Matrice dell'asse elicoidale
  - cambi di riferimento, 211
  - di un accoppiamento, 211
- Matrice della accelerazione di gravità, 599
- Matrice della forza peso, 599
- Matrice della quantità di moto, 597
  - cambi di riferimento, 597
  - definizione, 602
  - esempio numerico, 606
- Matrice delle azioni, 596
  - cambi di riferimento, 597
  - definizione, 601
  - esempio numerico, 606
- Matrice delle forze, 597, *vedi* Matrice delle azioni
- Matrice delle masse
  - caso piano, 646
- Matrice di accelerazione, 209, 597
  - cambi di riferimento, 210
  - di un accoppiamento, 210
- Matrice di massa
  - in coordinate naturali, 803, 806
- Matrice di posa, 192
- Matrice di posizione, 192
  - cambio di riferimenti multipli, 192
  - inversione, 192
- Matrice di rotazione
  - derivata della, 42, 45
  - derivata seconda della, 63
  - fattorizzazione della, 22
- Matrice di trasformazione, 192
  - in coordinate naturali, 316, 323
- Matrice di velocità, 209, 597
  - cambi di riferimento, 210
  - di un accoppiamento, 210
- Matrice Jacobiana, *vedi* Jacobiano

- Matrici
  - tipologie di, 904
- Maupertuis
  - principio variazionale di Eulero –, 397
- Meccanica
  - classica, 348
  - corpuscolare, 398
  - equivalenza, 348
  - non relativistica, 348
  - ondulatoria, 398
  - relativistica, 355
- Meccanismi spaziali
  - analisi cinematica dei, 254
  - analisi cinematica robot, 114
  - analisi delle posizioni, 279
    - quadrilatero sferico, 279
- Meccanismo
  - a croce di Malta, 153, 298
  - chiave Yale, 180
  - definizione di, 148
- Metodi numerici
  - HHT, 867
  - Newmark, 865
  - Backward Differentiation Formulas, 865
  - Lineari a passo multiplo LMM, 849, 852, 854
  - Predictor-Corrector, 853
  - Runge-Kutta, 850, 852, 854, 856, 860, 893
    - Gauss, 869
    - Lobatto, 871
    - Radau, 871
- Metodo delle equazioni di vincolo, 254
  - coppia cilindrica, 260
  - coppia prismatica, 261
  - coppia rotoidale, 260
  - coppia sfera nel cilindro, 264
  - coppia sferica, 262
  - meccanismo RCCC, 303
  - quadrilatero sferico, 279
  - riferimenti dei giunti, 259
  - riferimento del giunto, 255
  - vincoli base, 256
- Minimizzazione
  - metodo dei moltiplicatori, 637
- Minore di una matrice, 905
- Modellazione solida, 449
  - attributi geometrici, 449
  - entità topologiche, 449
- Modello dinamico di un manipolatore parallelo, 775
- Modello dinamico minimo, 619
  - robot SCARA, 622
- Molteplicità di un membro, 145
- Moltiplicatore
  - di Lagrange, 374
- Moltiplicatori di Lagrange, 574, 637, 639, 810
  - calcolo diretto dei, 653
  - interpretazione dei, 640
  - reazioni vincolari, 642, 677
- Momento
  - della quantità di moto, teorema nel moto continuo, 359
  - cinetico, 378
  - cinetico, integrale del, 380
  - della quantità di moto, 352
  - della quantità di moto, principio di conservazione del, 353
  - della quantità di moto, teorema nel moto continuo, 356, 371
  - della quantità di moto, teorema nel moto impulsivo, 406
  - della quantità di moto, variazione del, 405
  - risultante degli impulsi, 405
  - risultante delle forze, 351
  - risultante delle forze, principio di conservazione del, 351
- Momento d'inerzia, 335
- Momento della quantità di moto, 361, 596
- Moore-Penrose
  - proprietà di , 831
- Moti finiti
  - composizione, 90, 92
- Moti infinitesimi
  - composizione, 68, 111, 112
- Moti sferici, 90
- Moto
  - a regime, 381
  - atto di - anteriore, 406
  - atto di - posteriore, 406
  - atto virtuale di, 366
  - calcolo del, 347
  - continuo, 347
  - continuo, prima equazione cardinale, 356
  - continuo, seconda equazione cardinale, 356
  - continuo, teorema dell'energia cinetica nella prima forma, 358, 372
  - continuo, teorema dell'energia cinetica nella seconda forma, 358, 372
  - equazione di, 347, 369
  - impulsivo, 347, 402
  - impulsivo, prima equazione cardinale, 406
  - impulsivo, seconda equazione cardinale, 406
  - impulsivo, teorema dell'energia cinetica, 408
  - integrale del, 351
  - intermittente, 153, 298
  - merostatico, 381
  - momento della quantità di, 352
  - naturale, 389
  - quantità di, 352
  - reversibile, 367

- variato asincrono, 394
  - variato sincrono, 392
- Moto rigido
  - definizioni, 7
- Mozzi
  - asse del, 27, 211
  - teorema del, 25
- N**
- Newmark, *vedi* Metodi numerici
- Newton
  - algoritmo di, 853, 877
  - dinamica, 634
  - esperienza di, 572
  - ipotesi di, 467
  - modello impulsivo di, 466, 473, 658
  - prima legge di, 349
  - seconda legge di, 350
  - terza legge di, 350
- Newton-Euler
  - equazioni di, 359, 436, 753
- Normale
  - a una curva parametrica, 454
  - a una superficie parametrica, 454
- Numero
  - di Reynolds, 572
- NURBS, 450
  - B-spline, 450, 451
  - basi B-spline, 451
  - basi razionali, 450
  - curva, 450
  - intersezione, 452
  - inviluppo convesso, 452, 458
  - nodi, 450
  - partizione dell'unità, 451
  - poligono di controllo, 450
  - prodotto tensoriale, 453
  - superficie, 454
  - trasformazione affine, 453
- Nutazione
  - angolo di, 15
- Nyström, metodi di, 850
- O**
- Odografa del movimento, 6
- Ordine di accuratezza, metodo numerico, 843
- Orientamento di un corpo, 12
- Ortogonalizzazione dei vincoli, 720
- Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, 922
- Osservatore
  - assoluto, 348
  - relativo, 348
- P**
- Parametri
  - di Eulero, 21, 131, 138
  - di Rodrigues, 19
  - Parametri di Cayley-Klein, 92
  - Parametri di Eulero, 91
    - condizione di normalizzazione, 22
    - derivate dei, 42, 44, 45, 47, 63
    - proprietà notevoli dei, 24
    - trasformazione in angoli di Eulero, 91
  - Parametrizzazioni, 51
  - Partizionamento delle coordinate, 723
  - Passo di integrazione
    - contatto continuo, 470
    - identificazione del contatto, 459
  - Peaucellier
    - meccanismo di, 171
  - Pendolo
    - balistico, 417
  - Pendolo semplice
    - applicazione della formulazione multibody, 680
  - Percossa, 404
  - Perturbazioni singolari, 570, 872
  - Pfaffian
    - forma di, 382
  - Piano
    - normale, 4
    - osculatore, 4
    - rettificante, 4
  - Pivot
    - definizione, 913
  - Poisson
    - ipotesi di, 469
    - legge di, 521
    - modello impulsivo di, 466, 521
  - Polari del moto, 71
  - Poligono di controllo, 450
  - Postulato
    - primo della dinamica, 367
    - secondo della dinamica, 367
  - Potenza
    - delle forze d'inerzia, 599
    - di un sistema di forze, 599
    - virtuale, 412
  - Potenze Virtuali
    - Principio delle
      - generalizzazione, 563
  - Potenziale, 355
  - Potenziale rotore, 582
  - Precessione
    - angolo di, 15
  - Predictor-Corrector, *vedi* Metodi numerici
  - Primo Principio della Termodinamica, 563, 569, 571
  - Principio
    - dei Lavori Virtuali
      - generalizzazione, 563

- dei lavori virtuali, 369
- del minimo sforzo, 391
- dell'azione stazionaria, 396
- della direttissima, 392
- della minima azione, 397
- della minima costrizione dei vincoli, 391
- della Termodinamica
  - primo, 563, 569, 571
  - secondo, 570
- delle Potenze Virtuali
  - generalizzazione, 563
- delle potenze virtuali, 369
- di conservazione del momento della quantità di moto, 353
- di conservazione del momento risultante delle forze, 351
- di conservazione dell'energia totale, 354
- di conservazione della massa, 351, 562
- di conservazione della quantità di moto, 352
- di conservazione della risultante delle forze, 351
- di conservazione della velocità del baricentro, 353
- di d'Alembert, 373
- di d'Alembert – Lagrange, 369
- di d'Alembert, forma lagrangiana, 402
- di Fermat, 397
- di Gauss – Gibbs, 399
- di Jourdain, 399
- di relatività di Galilei, 348
- generalizzato di d'Alembert – Lagrange, 399
- variazionale di Gauss, 391
- variazionale di Hölder, 396
- variazionale di Hamilton, 393
- variazionale di Hertz, 392
- variazionale di Kelvin, 411
- variazionale di Maupertuis – Eulero, 397
- variazionale di Robin, 411
- Principio dei lavori Virtuali, 564
- Principio dei lavori virtuali
  - applicazione, 433
- Principio di d'Alembert, 638
- Problema cinematico
  - diretto, *vedi* Cinematica diretta
  - inverso, *vedi* Cinematica inversa
- Problema di distanza minima, 454
- Problema dinamico, *vedi* Dinamica
- Prodotto d'inerzia, 335
- Pseudo tensore d'inerzia, 596, *vedi* Matrice d'inerzia
  - definizione, 603
- Pseudoinversa
  - definizione, 935
  - mediante decomposizione SVD, 937
  - mediante fattorizzazione di Gram-Schmidt, 936
  - metodo di Greville, 938
  - metodo di Varga, 938

- Punti
  - candidati al contatto, 455
- Punto
  - materiale, 348
- Punto medio, metodo del, 850, 861

## Q

- Quadrilatero
  - dinamica, 623
- Quadrilatero articolato, 310, 311, 760
  - in coordinate naturali, 312
- Quadrilatero RCCC
  - analisi cinematica di un, 303
- Quadrilatero sferico
  - analisi delle posizioni, 279
- Quantità di moto, 352, 598, 604
  - matrice della, 596
  - principio di conservazione della, 352
  - teorema nel moto continuo, 356
  - teorema nel moto impulsivo, 406
  - variazione della, 403, 405
- Quaternioni, 123

## R

- Raggio di curvatura, 4, 5
- Rayleigh
  - funzione di, 394
- Reazione, 350
  - forza di, 350
  - legge di azione e, 350
  - vincolare, 407
- Reazioni vincolari, 618, 626
  - Calcolo nelle coppie cinematiche piane, 639
- Relazione
  - simbolica della dinamica continua, 367
  - simbolica della Statica, 370
  - simbolica della statica, 369
- Reynolds
  - numero di, 572
- Riduzione numero coordinate, 719
  - fattorizzazione QR
    - esempio, 741
  - fattorizzazione SVD, 729
    - esempio, 742
- Riferimento
  - assoluto, 348
  - inerziale, 349
  - sistema di, 348
- Riferimento del giunto, 255, 640
  - reazioni vincolari, 642
- Risultante
  - degli impulsi, 405
  - delle forze, principio di conservazione della, 351
- Robin

principio variazionale di, 411  
 Robot  
   analisi cinematica di un, 114  
 Robot SCARA  
   analisi matriciale delle accelerazioni, 227  
   analisi matriciale di posizione, 224  
   analisi matriciale di velocità, 224  
   cinematica diretta ed inversa, 221, 224, 227  
   cinetostatica, 223  
   configurazione singolare, 224  
   configurazioni singolari, 221  
   dinamica, 620  
   modello dinamico minimo, 622  
 Rodrigues  
   formula di, 17, 21, 31  
   parametri di, 19  
   vettore di, 20  
 Rotazioni, 128  
 Rotismi epicicloidali  
   cinematica dei, 291  
   equazione di Willis, 168, 254  
   struttura cinematica dei, 166  
 Rotolamento  
   condizione di, 458  
 Rototraslazioni elicoidali, 197  
   cambi di riferimento, 199  
 Routh  
   *vedi* Urto, 520  
   funzione di, 380  
 Runge-Kutta, *vedi* Metodi numerici

## S

SCARA, *vedi* robot SCARA  
 Screw istantanea, 74  
 Secondo Principio della Termodinamica, 570  
 Singolarità, *vedi* configurazioni singolari  
 Sistema  
   anonomo, 367  
   canonico, 386  
   conservativo, 355  
   hamiltoniano, 386  
   isolato, 351  
   lagrangiano, 378  
   lagrangiano ridotto, 381  
   onomo, 367  
   reonomo, 366  
 Sistema di equazioni algebrico-differenziali, *vedi* DAE  
 Sistemi di equazioni sottodefiniti, 926  
 Sistemi di equazioni sovradeffiniti, 924  
 Sistemi fluttuanti, 611  
 Skew  
   l'operatore, 599  
 Solidi equimomentali, 341  
 Spazio

  anisotropo, 348  
   delle configurazioni, 397  
   delle fasi, 386  
   di Gibbs, 386  
   eterogeneo, 348  
   euclideo, 386  
   isotropo, 348  
   omogeneo, 348  
 Spazio di vettori, 900  
 Spostamento  
   elementare, 366  
   infinitesimo di un corpo rigido, 48  
   infinitesimo di un punto, 825  
   virtuale, 366  
   virtuale di un corpo rigido, 48  
 Stabilità, 843, 844, 853  
   lineare assoluta, 846, 847, 854  
   non-lineare, 860  
   A-, 857  
   dominio di, 855  
   L-, 859  
   Zero-, 846, 847, 854  
 Statica  
   equazione simbolica della, 369, 370  
   relazione simbolica della, 369, 370  
 Stato  
   variabile di, 347  
 Stephenson  
   meccanismo di, 171  
 Stiction, 666  
 Stiff, equazioni, 857  
 Struttura cinematica, 145  
   variabile, 153, 180, 298  
 Superficie  
   di contatto, 454  
   NURBS, 454  
   parametrica, 450  
 SVD, *vedi* Decomposizione in valori singolari

## T

Tangente  
   a una curva parametrica, 451, 454  
   a una superficie parametrica, 454  
 Tangente ad una curva, 2  
 Telaio strutturale, 148  
 Tempo  
   assoluto, 348  
   eterogeneo, 348  
   omogeneo, 348  
 Tensore d'inerzia, 597  
 Teorema  
   del guadagno di energia cinetica, 412  
   del momento della quantità di, 371

- del momento della quantità di moto nel moto continuo, 356, 359
- del momento della quantità di moto nel moto impulsivo, 406
- del moto del baricentro, 357
- dell'energia cinetica nel moto impulsivo, 408
- dell'energia cinetica nella prima forma nel moto continuo, 358, 372
- dell'energia cinetica nella seconda forma nel moto continuo, 358, 372
- della perdita di energia cinetica, 413
- della quantità di moto nel moto continuo, 356
- della quantità di moto nel moto impulsivo, 406
- di Bernoulli, 571
- di Bertrand, 414
- di Carnot, 413
- di Eulero, 380
- Teorema del Mozzi, 25
- Teorema di Aronhold-Kennedy, 75, 116
- Teorema di Coriolis, 213
- Teorema di Eulero, 9
- Topologia, 133
- Torsione di una curva, 6
- Torsore cinematico
  - v. Twist, 752
- Trapezi, metodo dei, 850, 855, 857, 861
- Trasformazione
  - canonica, 387
  - del link, 208
  - di Galilei, 349
  - di giunto, 208
  - hamiltoniana, 387
- Trasformazione di Householder, 926
- Twist
  - definizione, 752

**U**

- Urto, 465, 521, 655, 692
  - anelastico, 415
  - centrale, 414
  - diretto, 416
  - elastico, 415
  - metodo grafico di Routh, 520, 547

**V**

- Variabile
  - canonica, 386
  - canonica della prima serie, 386
  - canonica della seconda serie, 386
  - di stato, 347
  - generalizzata, 373
  - hamiltoniana, 386
  - indipendente, 375
- Variazione
  - asincrona, 394, 395
  - asincrona dell'energia cinetica, 395
  - asincrona isoenergetica, 395
  - del momento della quantità di moto, 405
  - dell'energia cinetica, 354
  - della quantità di moto, 403, 405
  - sincrona, 392
  - sincrona dell'energia cinetica, 392
  - virtuale, 380
  - virtuale di ordine superiore, 398
- Velocità
  - normale fra corpi in contatto, 457
  - anteriore, 404
  - di compenetrazione, 458, 474
  - posteriore, 404
  - punti dello stesso corpo, 64
  - punti di corpi diversi, 66
  - relativa fra corpi in contatto, 457
  - tangenziale fra corpi in contatto, 458
  - virtuale, 366
- Velocità angolare, 39, 41, 42, 45, 47, 58, 134, 329
  - derivate angoli di Cardano, 58
  - derivate angoli di Eulero, 50
  - derivate parametri di Eulero, 42, 45
  - integrabilità, 59
  - proprietà additiva, 60, 104
- Velocità di un punto, 3
- Velocità relativa, 65
- Velocità
  - possibile, 825
- Vettore di Rodrigues, 20
- Vettori linea, 118
- Vincoli, 824
  - reazione dei , 833
  - condizione di congruenza, 831
  - matrice dei, 830
  - non-olonomi, 826
  - olonomi, 824
  - reonomi, 240
  - scleronomi, 240
- Vincoli base, 256
  - delle coppie cinematiche, 257
  - numero di equazioni scalari, 257
  - primo vincolo di ortogonalità, 256
  - primo vincolo di parallelismo, 258
  - secondo vincolo di ortogonalità, 256
  - secondo vincolo di parallelismo, 259
  - vincolo di distanza, 258
  - vincolo sferico, 257
- Vincoli composti, 264
- Vincoli unilaterali
  - caso piano, 178
- Vincolo
  - anolonomo, 367

- bilatero, 367
- di pura mobilità, 367
- fisso, 412
- forma Pfaffiana, 825–828
- forza di reazione del, 839
- ideale, 367
- liscio, 367
- mobile, 409
- olonomo, 367
- principio della minima costrizione del, 391
- reonomo, 825
- scabro, 369
- scleronomo, 825
- unilatero, 367
- Vincolo distanza costante, 265
- Viscosità dinamica
  - Coefficiente di, 572

## W

- Wehage R., 637
- Willis
  - equazione di, 168, 254
- Wrench
  - definizione, 752

# Indice degli Autori

## B

Borri M., 862–865, 879–886  
Bottasso C.L., 447–460, 465–477  
Braghin F., 347–359, 366–418

## C

Cavacece M., 918–935

## D

de Falco D., 823–839, 899–911, 935–939, 941–945

## L

Legnani G., 189–236, 595–634, 939–941, 953–955  
Lot R., 309–334, 801–822

## M

Manara D., 189–236, 595–634  
Mantegazza P., 559–593, 841–861, 865–879, 886–896  
Masarati P., 559–593, 841–861, 865–879, 886–896  
Morandini M., 479–483, 491–506, 544

## P

Pennestrì E., 1–51, 54–119, 145–187, 239–306, 335–  
346, 359–366, 418–444, 483–491, 539–547,  
637–696, 699–750, 911–939, 941–945

## Q

Quaranta G., 559–593, 841–861, 865–879, 886–896

## S

Sinatra R., 751–798  
Stefanelli R., 520–539, 547–555

## T

Tasora A., 123–143, 460–465, 945–950  
Tosi D., 189–236, 595–634  
Trainelli L., 51–54, 862–865, 879–886

## V

Valentini P.P., 507–520, 637–696  
Vita L., 239–306, 637–696, 719–750

## Z

Ziliani G., 189–236, 595–634