

# Modi di vibrare e stabilità del motociclo

G. Di Massa

6 dicembre 2011

# Capitolo 1

## Sistemi ad $n$ -gradi di libertà dissipativi

Per risolvere il problema degli autovettori di un sistema di  $n$  equazioni differenziali del secondo ordine del tipo:

$$[m] \{\ddot{x}\} + [\sigma] \{\dot{x}\} + [k] \{x\} = \{F\} \quad (1.1)$$

è possibile trasformare il sistema in un sistema di  $2n$  equazioni differenziali del primo ordine.

È noto infatti che un sistema di  $m$  equazioni differenziali di ordine  $N$  è riconducibile ad un sistema di  $mN$  equazioni differenziali del primo ordine. Per far ciò si ponga:

$$\begin{aligned} \{X_1\} &= \{\dot{x}\} \\ \{X_2\} &= \{x\} \end{aligned}$$

e si assumano come variabili, oltre alle  $\{x\}$  le  $\{\dot{x}\}$ .

L'insieme di queste  $2n$  variabili, definito come *variabili di stato*, è indicato con  $\{y\}$

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} \{X_1\} \\ \{X_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\dot{x}\} \\ \{x\} \end{Bmatrix} \quad (1.2)$$

Si potrà scrivere così:

$$\begin{cases} \{X_1\} = \{\dot{X}_2\} \\ [m] \{\dot{X}_1\} + [\sigma] \{\dot{X}_2\} + [k] \{X_2\} = \{F\} \end{cases} \quad (1.3)$$

ovvero:

$$\begin{cases} [m] \{\dot{X}_2\} - [m] \{X_1\} = \{0\} \\ [m] \{\dot{X}_1\} + [\sigma] \{\dot{X}_2\} + [k] \{X_2\} = \{F\} \end{cases} \quad (1.4)$$

Il sistema (1.4) è un sistema di  $2n$  equazioni differenziali del primo ordine in  $\{X_1\}$  e  $\{X_2\}$  e può essere scritto:

$$\begin{bmatrix} [0] & [m] \\ [m] & [\sigma] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{X}_1\} \\ \{\dot{X}_2\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -[m] & [0] \\ [0] & [k] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X_1\} \\ \{X_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F\} \end{Bmatrix} \quad (1.5)$$

Posto:

$$[M] = \begin{bmatrix} [0] & [m] \\ [m] & [\sigma] \end{bmatrix}; [K] = \begin{bmatrix} -[m] & [0] \\ [0] & [k] \end{bmatrix}; \{Y\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F\} \end{Bmatrix} \quad (1.6)$$

e tenendo presente la (1.2) il sistema (1.5) può in definitiva scriversi:

$$[M] \{\dot{y}\} + [K] \{y\} = \{Y\} \quad (1.7)$$

Le matrici  $[M]$  e  $[K]$ , essendo le  $[m]$ ,  $[\sigma]$  e  $[k]$  reali e simmetriche, sono reali e simmetriche.

Il sistema ridotto (1.8) presenta il vantaggio che gli autovalori che si ottengono dalla soluzione del problema degli autovalori sono ortogonali e possono essere usati, a mezzo del teorema di espansione, per la soluzione del moto forzato.

## 1 Il problema degli autovalori

Considerando il sistema omogeneo che si ottiene dalla (1.8):

$$[M] \{\dot{y}\} + [K] \{y\} = \{0\} \quad (1.8)$$

e posto:

$$\{y\} = \{\Phi\} e^{\alpha t}$$

si ottiene

$$\alpha [M] \{\Phi\} + [K] \{\Phi\} = \{0\}$$

e quindi per soluzioni  $\{\Phi\}$  diverse da zero dovrà essere:

$$|\alpha [M] + [K]| = 0 \quad (1.9)$$

La (1.9) è l'equazione caratteristica del sistema (o *equazione delle frequenze*) e risulta di grado  $2n$  in  $\alpha$ .

Dall'equazione caratteristica si ricavano quindi  $2n$  valori di  $\alpha$ .

Ciascuna di tali radici potrà essere o reale o complessa:

- se è reale corrisponderà ad un moto non oscillatorio che a sua volta potrà essere:
  - aperiodico smorzato, cioè smorzato in misura critica o superiore alla critica, se  $\alpha_i$  è negativa;

- non oscillatorio esponenzialmente crescente (*instabilità statica*) se  $\alpha_i$  è positivo;
- se è complessa corrisponderà ad un moto oscillatorio e ci sarà necessariamente un'altra radice complessa ad essa coniugata; la parte reale comune a questa coppia di valori sarà l'opposto del fattore di smorzamento  $-\zeta$ , pertanto:
  - se la parte reale è negativa il moto sarà oscillatorio smorzato;
  - viceversa, se la parte reale fosse positiva, il moto sarà oscillatorio con oscillazioni che crescono nel tempo (*instabilità dinamica*).

Se per esempio le radici k-esima e h-esima sono coniugate risulterà:

$$\begin{cases} \alpha_k = -\mu_k + i\omega_k \\ \alpha_h = -\mu_k - i\omega_k \end{cases}$$

È da notare che il valore  $\omega_k$  rappresenta la pulsazione naturale smorzata del modo k-esimo e che se tutte le  $2n$  radici  $\alpha$  sono complesse ed, a coppie, coniugate si avranno  $n$  valori di  $\omega_k$ .

Determinati i  $2n$  valori di  $\alpha$ , gli autovalori corrispondenti si ottengono, analogamente al caso dei sistemi non smorzati, considerando la matrice  $2n \times 2n$ :

$$[a] = [\alpha [M] + [K]]$$

calcolando l'aggiunta  $[A^{(T)}]$  relativa ad ogni valore  $\alpha_r$  di  $\alpha$  ed assumendo per l'autovettore  $\{\Phi^{(r)}\}$  una qualunque colonna di  $[A^{(T)}]$  diversa da zero. L'autovettore corrispondente alla generica radice  $\alpha_r$  sarà del tipo:

$$\left\{ \Phi^{(r)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_r \left\{ \Phi^{(r)} \right\} \\ \left\{ \Phi^{(r)} \right\} \end{array} \right\} \quad (1.10)$$

e sarà costituito da  $2n$  elementi:  $n$  ampiezze della velocità ed  $n$  ampiezze degli spostamenti.

A copie  $\alpha_k$  ed  $\alpha_h$  complesse coniugate corrisponderanno coppie di autovettori complessi coniugati.

Per quanto concerne i  $2n$  elementi dell'autovettore  $\{\Phi^{(r)}\}$  occorre dire che essi sono dei numeri complessi definiti a meno di una costante arbitraria e che tale costante è in questo caso un numero complesso.

Ciò vuol dire che nel caso di oscillazione libera di sistemi smorzati, non solo le ampiezze degli spostamenti si mantengono, per un determinato modo, in rapporto costante ma le differenze di fase tra gli elementi complessi dell'autovettore si mantengono costanti e sono in generale diversi da zero e  $180^\circ$  (valori dei sistemi conservativi).

Ciò porta come conseguenza che se si eccita un particolare modo di vibrare del sistema, oltre al fatto che la vibrazione varia di ampiezza nel tempo,

l'oscillazione di ciascuna massa del sistema sarà sfasata rispetto all'oscillazione delle altre masse: le masse raggiungeranno i loro massimi spostamenti in momenti diversi.

La sequenza con la quale ciò avviene si ripete ad ogni ciclo di oscillazione, la linea elastica varia con continuità ed i nodi di oscillazione si spostano, salvo a ripassare per le stesse posizioni nel ciclo successivo.

## Capitolo 2

# Modo di CAPSIZE

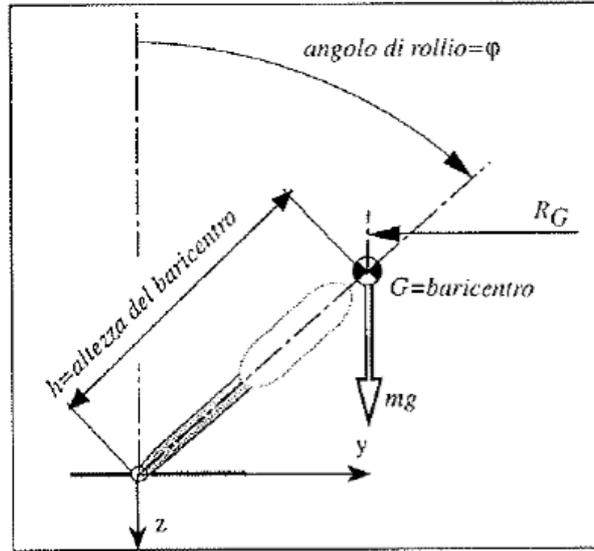
In assenza di azione del pilota è noto che un motociclo cade lateralmente in un tempo più o meno lungo, ciò significa che il motociclo è un veicolo intrinsecamente instabile in particolar modo quando l'azione stabilizzante degli effetti giroscopici risulta trascurabile. Tale instabilità opportunamente controllata dal pilota permette di inclinare il motociclo ed affrontare le curve in modo corretto.

Il modo di capsize (modo non oscillatorio) è caratterizzato da un parametro definito come *costante di tempo* che rappresenta il tempo necessario alla caduta del veicolo. A questo punto risulta abbastanza intuitivo che quanto più piccola è la costante di tempo (*quindi quanto più risulta instabile il capsize*), tanto minore deve essere l'anticipo con cui il pilota deve iniziare la manovra di inclinazione del veicolo nella fase di inserimento in curva. A tale scopo i motocicli da competizione richiedono una elevata instabilità del capsize affinché il veicolo possa inserirsi rapidamente in curva ed effettuare rapidi cambi di traiettoria.

### 1 Modello con ruote lenticolari

Si consideri un motociclo nelle seguenti ipotesi:

- il veicolo avanza in rettilineo (direzione  $x$ ) a velocità costante  $V$ ;
- lo spessore del pneumatico è nullo;
- gli strisciamenti tra strada e pneumatico sono trascurabili;
- sterzo bloccato;
- effetti giroscopici trascurabili;



L'equilibrio dei momenti, scritto rispetto ai punti di contatto, rappresenta l'equazione del moto:

$$(I_{X_G} + mh^2) \ddot{\varphi} = mgh \sin \varphi \quad (2.1)$$

che linearizzata per  $\varphi = 0$  diventa:

$$(I_{X_G} + mh^2) \ddot{\varphi} - mgh\varphi = 0 \quad (2.2)$$

poichè, come detto, il capsizing è un modo di vibrare non oscillatorio, l'equazione (2.2) ha soluzione del tipo:

$$\varphi(t) = \Delta\varphi e^{st} \quad (2.3)$$

che sostituita nella (2.2) conduce alla seguente equazione delle frequenze:

$$(I_{X_G} + mh^2) s^2 - mgh = 0 \quad (2.4)$$

la cui soluzione è, a conferma di un moto non oscillatorio, di tipo reale:

$$s = \sqrt{\frac{mgh}{I_{X_G} + mh^2}} \quad (2.5)$$

la costante di tempo  $\tau$  è fornita dall'inverso della soluzione dell'equazione delle frequenze:

$$\tau = \sqrt{\frac{I_{X_G} + mh^2}{mgh}} = \sqrt{\frac{h}{g} \left( 1 + \frac{\rho^2}{h^2} \right)} \quad (2.6)$$

Dalla (2.6) si vede che la costante di tempo  $\tau$  cresce al crescere del raggio giratore  $\rho$  (che corrisponde a masse disposte più lontane dal baricentro).

## 1.1 Esempio

Con riferimento ai seguenti dati:

- massa complessiva del motociclo,  $m = 248kg$ ;
- altezza del baricentro,  $h = 0.648m$ ;
- momento d'inerzia baricentrico rispetto all'asse di rollio  
 $I_{X_G} = 34.1 \text{ kgm}^2$ ;

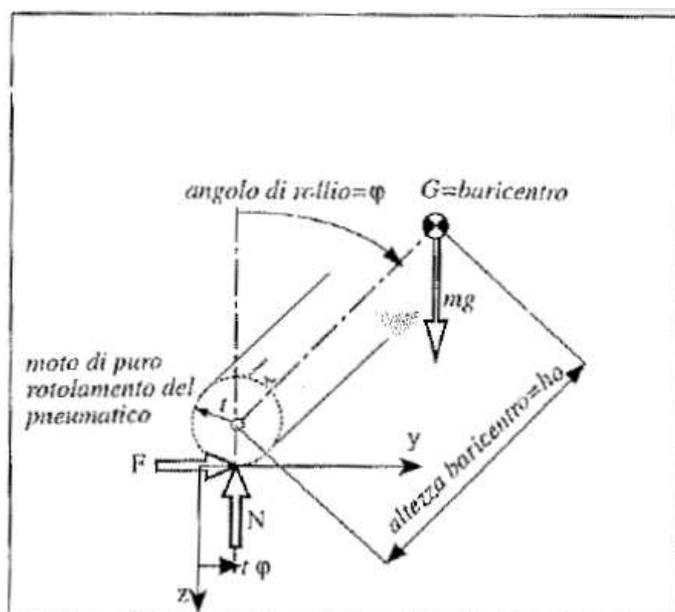
calcolare la costante di tempo.

Valutare, inoltre, come varia la costante di tempo se il momento d'inerzia si dimezza.

## 2 Modello con pneumatici toroidali senza strisciamento

Si rimuova adesso l'ipotesi fatta nel §1 di spessore nullo degli pneumatici, e si considerino due pneumatici uguali di forma toroidale a sezione retta circolare di raggio  $t$ .

Poichè è sempre valida l'ipotesi che il pneumatico rotoli senza strisciare sulla superficie stradale, il sistema ha sempre un solo grado di libertà. Scrivendo



le equazioni del moto con l'approccio Newtoniano si ottengono le seguenti

tre equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} m\ddot{z}_G &= mg - N \\ m\ddot{y}_G &= F \\ I_{X_G}\ddot{\varphi} &= N(y_G - y) + F z_G \end{aligned} \quad (2.7)$$

dove  $y$  rappresenta lo spostamento trasversale del punto di contatto. Poichè è ancora valida l'ipotesi di *puro rotolamento* possiamo esprimere  $y, X_G, y_G$  in funzione di  $\varphi$ .

$$y = \varphi t ; y_G = \varphi t + h_0 \sin \varphi ; z_G = -t - h_0 \cos \varphi \quad (2.8)$$

Dalla 2.7 si ottiene:

$$I_{X_G}\ddot{\varphi} - (mg - m\ddot{z}_G)(y_G - y) - m\ddot{y}_G z_G = 0 \quad (2.9)$$

che linearizzata nell'intorno di  $\varphi = 0$  conduce alla seguente equazione delle frequenze:

$$(I_{X_G} + mt^2 + 2mth + mh^2) s^2 - mgh = 0 \quad (2.10)$$

da cui

$$s = \sqrt{\frac{mgh}{I_{X_G} + m(t+h)^2}} \quad (2.11)$$

la costante di tempo risulta:

$$\tau = \sqrt{\frac{I_{X_G} + m(t+h)^2}{mgh}} = \sqrt{\frac{\rho^2 + (t+h)^2}{gh}} \quad (2.12)$$

L'equazione 2.12 mostra che la costante di tempo cresce all'aumentare del raggio del toroide del pneumatico, pertanto, nella fase di inserimento in curva, per inclinare una motocicletta con pneumatici di grosse dimensioni, è richiesto un tempo maggiore rispetto a quello necessario per effettuare la medesima manovra con un motociclo con pneumatici di dimensioni inferiori.

## 2.1 Esempio

Con riferimento all'esempio del paragrafo 1.1 calcolare la costante di tempo sostituendo al posto delle ruote lenticolari, ruote toroidali di raggio  $t = 0.10 \text{ m}$ .

## 3 Modello con pneumatici toroidali con strisciamento laterale

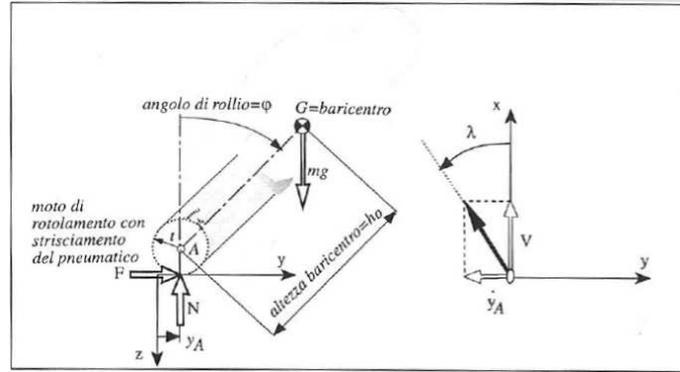
Si consideri il modello piano del paragrafo precedente §2 eliminando l'ipotesi di puro rotolamento tra pneumatici e superficie stradale.

Tale modello possiede 2 gradi di libertà:

- lo spostamento laterale  $y_A$  del punto di contatto pneumatico-strada;
- il rollio  $\varphi$  intorno all'asse di rollio  $x$ .

Le equazioni del moto sono le stesse del paragrafo 2.7 eccetto la relazione cinematica che lega  $y_A$  e  $\varphi$ . Mentre restano ancora valide le relazioni:

$$y_G = y + h \sin \varphi ; z_G = -t - h \cos \varphi \quad (2.13)$$



Tenendo conto delle relazioni 2.13 le equazioni del moto diventano:

$$\begin{cases} m\ddot{y} + mh_0\ddot{\varphi} \cos \varphi - mh_0\dot{\varphi}^2 \sin \varphi = F \\ (I_{x_G} + mh_0^2)\ddot{\varphi} + mh_0 \cos \varphi \dot{\varphi} - mgh_0 \sin \varphi = -F_t \end{cases} \quad (2.14)$$

che linearizzate intorno alla posizione di equilibrio verticale:

$$\begin{cases} m\ddot{y} + mh_0\ddot{\varphi} = F \\ (I_{x_G} + mh_0^2)\ddot{\varphi} + mh_0\ddot{y} - mgh_0\varphi = -F_t \end{cases} \quad (2.15)$$

Le 2.15 sono un sistema di due equazioni nelle tre incognite  $\varphi$ ,  $y$  ed  $F$ .

Per piccoli valori dello strisciamento, la forza laterale, che la strada esercita sullo pneumatico può essere descritta con una legge lineare in funzione degli angoli di deriva e di rollio:

$$F = mgk_\lambda \lambda + mgk_\varphi \varphi \quad (2.16)$$

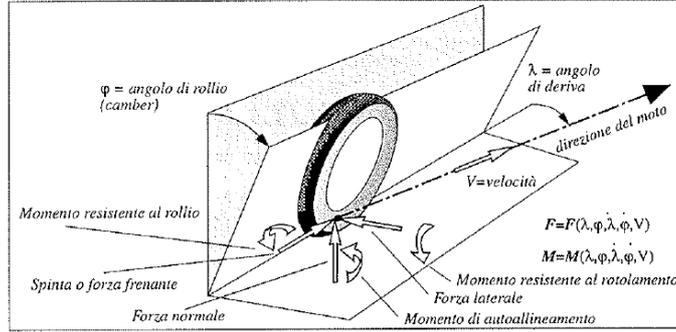
dove

$$\lambda = \frac{-\dot{y}}{V} \quad (2.17)$$

rappresenta l'angolo di deriva.

Le equazioni del moto linearizzate in forma matriciale diventano:

$$[M] \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\varphi} \end{Bmatrix} + [C] \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} y \\ \varphi \end{Bmatrix} = \{F\} \quad (2.18)$$



dove la matrice di massa:

$$[M] = \begin{bmatrix} m & mh \\ mh & (I_{X_G} + mh^2) \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

la matrice di smorzamento:

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{mgk_\lambda}{V} & 0 \\ t \frac{mgk_\lambda}{V} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

la matrice di rigidità:

$$[K] = \begin{bmatrix} 0 & -mgk_\varphi \\ 0 & -mg(h - k_\varphi t) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Risolvendo il problema degli autovalori (§1), si ottengono quattro autovalori di cui soltanto uno è reale positivo; un secondo autovalore è identicamente nullo, mentre i restanti due sono complessi coniugati a parte reale negativa. L'autovalore reale è relativo al modo non oscillatorio instabile di *capsize*, quello nullo è dovuto al fatto che il sistema è semidefinito e i due autovalori complessi rappresentano due modi di vibrare stabili.

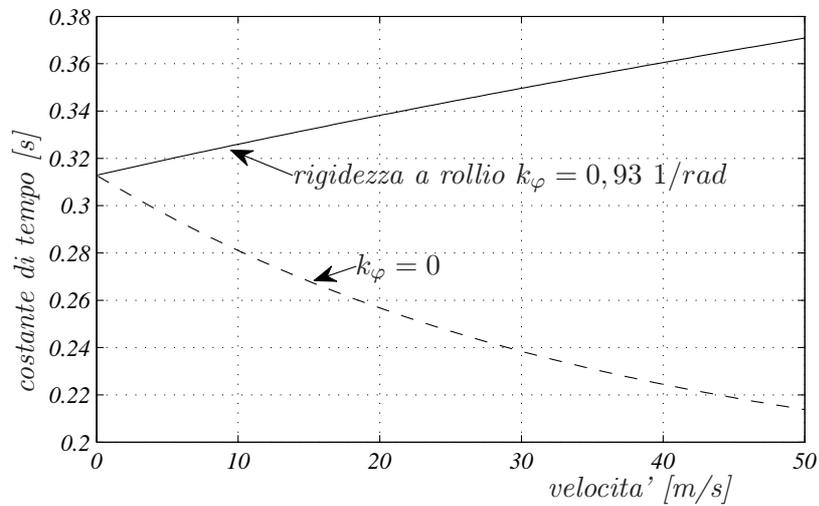
Il *capsize* si presenta quindi come un modo non oscillatorio instabile; la legge è del tipo:

$$\varphi(t) = \Phi_0 e^{\frac{1}{\tau}t} \quad (2.22)$$

La costante di tempo del *capsize* è in definitiva una misura della facilità d'inclinazione della motocicletta, pertanto è importante studiarne l'andamento in funzione dei vari parametri della motocicletta.

### 3.1 Esempio

Per il motociclo del paragrafo 2.1 avente rigidità a deriva degli pneumatici  $k_\lambda = 10.8 \text{ rad}^{-1}$  e rigidità a camber  $k_\varphi = 0.93 \text{ rad}^{-1}$  si ottiene il seguente diagramma della costante di tempo al variare della velocità:



Dalla figura si vede come la costante di tempo cresce al crescere della velocità, che significa che al crescere della velocità diventa più difficile inclinare la motocicletta.

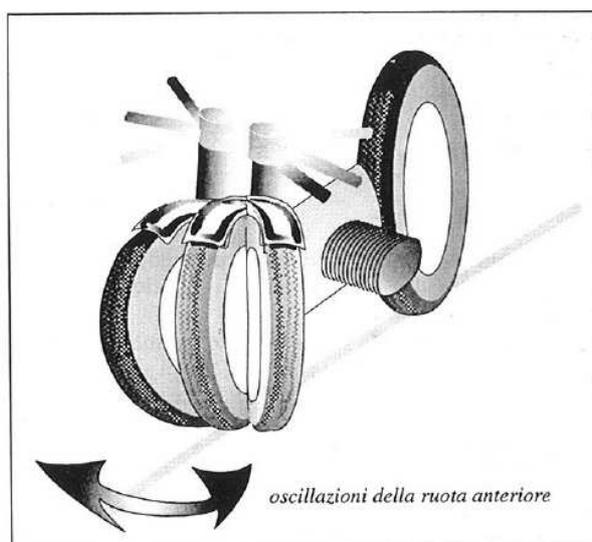
In figura è rappresentato anche il caso limite con rigidità al rollio nulla: in tal caso l'andamento della costante di tempo al crescere della velocità è decrescente. Ciò è dovuto al fatto che all'aumentare della velocità  $V$ , diminuisce l'angolo di deriva e perciò si riduce la forza laterale che contrasta il modo di caduta del motociclo.

## Capitolo 3

# Modo di WOBBLE

Questo modo si manifesta con oscillazioni dell'avantreno intorno all'asse di sterzo che si innescano al crescere della velocità di avanzamento. Si tratta di oscillazioni che si destano anche in altri tipi di veicoli come gli autoveicoli e gli aerei (carrello anteriore) dove vengono identificate con il modo di *shimmy*. I valori usuali della frequenza di questo modo sono dai  $4\text{ Hz}$  per i motocicli pesanti, ai  $9\text{ Hz}$  per quelli leggeri. La frequenza del modo *wobble* cresce all'aumentare dell'avancorsa ed al diminuire dell'inerzia dell'avantreno. Essa dipende sia dalle caratteristiche di rigidità dello pneumatico che da quelle della forcella anteriore.

Per velocità superiori ai  $10 - 20\text{ m/s}$  ( $40 - 80\text{ km/h}$ ) il modo wobble risulta poco smorzato e può diventare instabile, al fine di aumentarne il grado di stabilità nei motocicli leggeri che raggiungono elevate velocità si adottano smorzatori di sterzo.



## 1 Modello ad un grado di libertà

In prima approssimazione ipotizzando che il modo di wobble sia completamente disaccoppiato dal moto del retrotreno e dal rollio del motociclo, lo si può studiare con un modello ad un solo grado di libertà che schematizza il solo avantreno (fig.3.1). L'equazione del moto si può scrivere imponendo

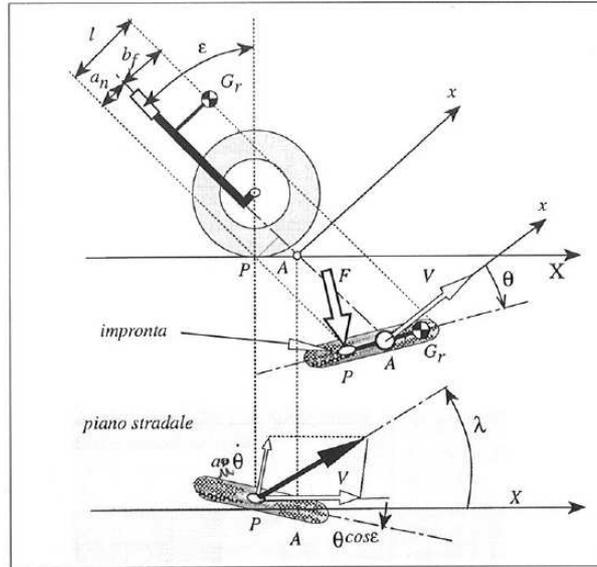


Figura 3.1: Modello ad 1 g.d.l.

l'equilibrio alla rotazione rispetto all'asse di sterzo:

$$I_A \ddot{\vartheta} + c \dot{\vartheta} = -F a_n \quad (3.1)$$

con  $I_A = I_G + m b_f^2$  momento d'inerzia di massa intorno all'asse di sterzo,  $c$  smorzamento dello sterzo ed

$$F = k_\lambda \lambda \quad (3.2)$$

e nell'ipotesi di piccole oscillazioni

$$\lambda = \frac{a_n \dot{\vartheta}}{V} + \vartheta \cos \varepsilon \quad (3.3)$$

Sostituendo le 3.2 e 3.3 nella 3.1 si ottiene l'equazione del moto nell'ipotesi di piccole oscillazioni:

$$I_A \ddot{\vartheta} + \left( c + \frac{k_\lambda a_n^2}{V} \right) \dot{\vartheta} + k_\lambda a_n \cos \varepsilon \vartheta = 0 \quad (3.4)$$

Sostituendo nell'equazione del moto una soluzione del tipo

$$\vartheta = \Delta \vartheta e^{st}$$

si ottiene la seguente equazione delle frequenze

$$I_A s^2 + \left( c + \frac{k_\lambda a_n^2}{V} \right) s + k_\lambda a_n \cos \varepsilon = 0 \quad (3.5)$$

Gli autovalori risultano:

$$s_{1,2} = \frac{-(cV + k_\lambda a_n^2) \pm \sqrt{(cV + k_\lambda a_n^2)^2 - 4I_A V^2 k_\lambda a_n \cos \varepsilon}}{2I_A V} \quad (3.6)$$

Analogamente a quanto riportato nel paragrafo §1, se introduciamo il seguente vettore di stato

$$\{y\} = \left\{ \begin{array}{c} \{X_1\} \\ \{X_2\} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \{\dot{\vartheta}\} \\ \{\vartheta\} \end{array} \right\}$$

l'equazione del moto 3.4 diventa

$$\begin{cases} \dot{x}_2 - x_1 = 0 \\ I_A \dot{x}_1 + \left( c + \frac{k_\lambda a_n^2}{V} \right) x_2 + k_\lambda a_n \cos \varepsilon x_2 = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

che può essere scritta nella forma dell'equazione (1.8) con

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ I_A & \left( c + \frac{k_\lambda a_n^2}{V} \right) \end{bmatrix}; [K] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & k_\lambda a_n \cos \varepsilon \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

per cui risolvendo l'equazione (1.9) si ottiene la (3.5).

Dall'equazione (3.6) si ottiene che la frequenza naturale del wobble è la parte immaginaria degli autovalori:

$$\omega = \frac{\sqrt{(cV + k_\lambda a_n^2)^2 - 4I_A V^2 k_\lambda a_n \cos \varepsilon}}{2I_A V} \quad (3.9)$$

ed il rapporto di smorzamento (parte reale degli autovalori) è dato da:

$$\zeta = \frac{c + \frac{k_\lambda a_n^2}{V}}{2\sqrt{I_A V^2 k_\lambda a_n \cos \varepsilon}} \quad (3.10)$$

è interessante notare che  $\zeta$  diminuisce al crescere della velocità. In tale caso, però, non potendo cambiare segno, il wobble sarà sempre stabile.