

Università degli Studi di Napoli Federico II

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Appunti per un corso di

AERODINAMICA DEGLI AEROMOBILI

A cura di **Carlo de NICOLA** (denicola@unina.it)



...occhi attenti vigilano su una delicata fase del volo...

Anno Accademico 2018-2019

Indice

I	ALCUNE CONSIDERAZIONI GENERALI	7
1	Funzionamento di un aeromobile, architettura, modellistica semplice	9
1.1	Introduzione	9
1.2	Sul concetto di velocità di/in un fluido	14
1.3	Caratterizzazione aerodinamica di un aeromobile	17
1.4	Come si studia il volo in maniera razionale	18
1.5	Ala e carico alare	18
1.5.1	Il carico aerodinamico	19
1.6	Il modello più semplice per il funzionamento dell'ala: la Teoria Globale	22
1.6.1	La resistenza indotta a portanza nulla: <i>tubetti</i> di flusso	26
1.7	Scia vorticosa e <i>downwash</i> sull'ala	26
1.8	Impostazione del testo	28
1.9	Funzionamento del profilo in ambito non viscoso incomprimibile	28
1.9.1	Soluzioni esatte	30
1.10	Il momento, stabilità del velivolo e conseguenze architetture: impennaggi	33
1.11	Effetti della viscosità alle basse velocità	36
1.12	La comprimibilità: i fatti, la classificazione, il campo fluidodinamico	38
1.13	Ala a freccia	41
1.13.1	Ala infinita a freccia in ambito non viscoso incomprimibile	43
1.13.2	Ala infinita a freccia in ambito non viscoso comprimibile	45
1.14	Funzionamento dell'ala	45
1.15	Stabilità: la freccia, il diedro	49
1.16	Completamento dell'architettura	49
2	Le equazioni per la soluzione di campi di moto	51
2.1	Le equazioni di Navier-Stokes	51
2.2	Forma conservativa e forma adimensionale delle equazioni di Navier-Stokes	52
2.3	Le equazioni di Reynolds	54
2.4	Forme ridotte delle equazioni di Navier-Stokes	58
2.5	Le equazioni di Eulero	62
2.6	Condizioni al contorno per le equazioni di Eulero e Navier-Stokes	63
2.7	Modelli a potenziale	64
2.8	Quadro riassuntivo dei modelli fluidodinamici	66
2.9	Le equazioni modello di Burgers	67
3	Il trattamento delle geometrie di interesse aeronautico	69
3.1	Premessa	69
3.2	La geometria dei profili alari	69
3.2.1	Famiglie di profili alari delle serie NACA	70
3.2.2	Trattamento delle geometrie dei profili descritte in forma tabulare	73
3.3	Forme 3-D	74
3.4	Esercizi	76

II	AERODINAMICA NON VISCOSA INCOMPRESSIBILE	79
4	Soluzioni potenziali approssimate	81
4.1	Introduzione	81
4.2	Soluzioni potenziali approssimate 2-D	81
4.2.1	Introduzione	81
4.2.2	Teoria generale del profilo sottile: formulazione del problema	82
4.2.3	Soluzione del problema del profilo sottile	85
4.2.4	Alcuni risultati particolari	92
4.2.5	Le forze di spinta e di resistenza dei bordi	95
4.2.6	Distribuzioni lineari di singolarità	98
4.2.7	La linea media dei profili laminari	102
4.2.8	Teoria del Punto Neutro Posteriore	104
4.2.9	Metodo ingegneristico di Abbott - Metodo NACA	106
4.2.10	Riepilogo dei risultati della Teoria del Profilo Sottile	107
4.2.11	Inferenza della Teoria del Profilo Sottile sul funzionamento dei profili alari	110
4.3	L'ala dritta: la teoria della linea portante	111
4.3.1	Impostazione della teoria	111
4.3.2	Equazioni fondamentali	111
4.3.3	Metodo di Multhopp	113
4.3.4	Risultati della teoria della linea portante	118
4.3.5	Considerazioni su ala ellittica e carico ellittico	121
4.4	L'ala a freccia: la teoria della superficie portante approssimata	123
4.4.1	Impostazione della teoria	123
4.4.2	Sviluppo delle equazioni	123
4.4.3	Risultati della teoria della superficie portante approssimata	126
4.5	Ala a delta alle basse velocità di crociera: la Teoria di Jones	130
4.5.1	Introduzione	130
4.5.2	Calcolo dell'energia associata ad un campo potenziale e Massa Addizionale Apparente	130
4.5.3	La teoria delle ali di piccolo allungamento: teoria di Jones	131
4.6	Oltre le teorie semplici: metodi a reticolo di vortici	134
4.6.1	Struttura del metodo	136
4.7	Il metodo semiempirico di Schrenk	138
4.8	Ala finita: un compendio	140
5	Soluzioni potenziali "esatte": i metodi a pannelli	143
5.1	Soluzioni teoriche	143
5.2	Soluzioni numeriche: i metodi a pannelli	143
5.3	Metodi di distribuzione superficiale di singolarità e formulazione integrale	145
5.4	Alcune considerazioni sulla Terza Identità di Green	146
5.5	I metodi a pannelli	150
5.6	I metodi a pannelli basati sulla Terza Identità di Green	154
5.6.1	La soluzione generale del problema	154
5.6.2	La modellazione nei metodi a pannelli	157
5.6.3	Il metodo a pannelli per flussi instazionari	161
5.6.4	Calcolo della resistenza indotta mediante l'analisi nel piano di Trefftz	164
5.7	Il metodo Douglas-Neumann in campo 2-D	165
5.7.1	Esercizi	170
5.8	Metodi con distribuzioni variabili di vortici per il campo portante	172
5.8.1	Considerazioni preliminari	172
5.8.2	Metodi con sola vorticità costante a tratti - Il metodo di Oeller	173
5.8.3	Metodi con sola vorticità lineare variabile	174
5.8.4	Vorticità linearmente variabile e distribuzione uniforme di sorgente	174
5.8.5	Il metodo delle singolarità simmetriche	174

5.8.6	I metodi con distribuzione assegnata di sorgenti	175
5.8.7	Esercizi	176
III AERODINAMICA NON VISCOSA COMPRIMIBILE		177
6	Campi comprimibili linearizzati	179
6.1	Introduzione	179
6.2	Le leggi di similitudine subsonica	179
6.3	Campi supersonici	185
6.4	Il calcolo dei numeri di Mach critici	186
7	Il campo transonico: aspetti non viscosi	191
7.1	Struttura del campo	191
7.2	Determinazione qualitativa della resistenza d'onda per $M_{\infty_{crit}} < M_{\infty} < 1$	194
7.3	Il Principio di Indipendenza dal numero di Mach - Conseguenze	196
IV EFFETTI VISCOSI		199
8	Effetti viscosi in Aerodinamica Applicata	201
8.1	Introduzione	201
8.2	Alcune considerazioni sullo strato limite 2-D	202
8.2.1	L'equazione di Von Karman	204
8.2.2	Considerazioni sulla soluzione delle equazioni dello strato limite	205
8.2.3	Considerazioni sulla lastra piana isobarica	206
8.2.4	Considerazioni sullo strato limite intorno ad un profilo	207
8.3	Lo strato limite tridimensionale	208
8.4	Instabilità dei flussi laminari e transizione	209
8.5	Transizione e separazione in Aerodinamica Applicata	213
8.5.1	Flussi 2-D	213
8.5.2	Flussi 3-D	216
8.6	Effetti viscosi alle alte velocità	221
8.6.1	Introduzione	221
8.6.2	Effetti viscosi in flusso attaccato	222
8.6.3	SWBLI: il fenomeno dell'interazione tra onda d'urto e strato limite	222
9	Flussi separati e stallo	225
9.1	Introduzione	225
9.2	Considerazioni sulla scia in flusso separato	229
9.3	Lo stallo di bassa velocità	229
9.3.1	Stalli 2-D	230
9.3.2	Lo stallo dell'ala e della configurazione	231
9.4	Gli effetti dell'interazione tra onda d'urto e strato limite	233
9.5	SWBLIC: il controllo degli effetti dell'urto	238
9.6	Conclusioni	243
10	Metodi di strato limite e di interazione Eulero/Strato Limite	245
10.1	Introduzione	245
10.2	Il metodo di Thwaites per lo strato limite laminare	246
10.3	Metodi per la previsione della transizione	248
10.4	Metodi integrali -diretti ed inversi- per lo strato limite turbolento	253
10.5	Individuazione teorica della separazione dello strato limite	257
10.6	Accoppiamento tra soluzione esterna e strato limite	258
10.7	Calcolo della polare di un profilo	260

10.8	Un metodo per campi 3-D: <i>Strip Theory</i>	261
10.9	Esercizi	262
V AERODINAMICA APPLICATA		263
11	Sul funzionamento dei profili alari	265
11.1	Considerazioni preliminari	265
11.2	Profili ed ala	265
11.3	L'importanza dello studio dei profili	266
11.4	Determinazione teorica del comportamento dei profili	268
11.5	Comportamento dei profili alari <i>low speed</i>	271
11.6	Funzionamento dei profili per il volo subsonico	272
11.7	La polare	274
12	Metodi per l'alta portanza	277
12.1	Ala: curva di portanza e polare	277
12.2	Metodi teorici per la previsione dell'alta portanza	277
12.3	Metodi teorici per la previsione della resistenza	281
12.4	Valore limite del coefficiente di portanza dei profili	281
12.5	Ali: portanza massima e portanza massima utile	283
12.6	Criteri empirici per la previsione dello stallo	284
12.6.1	Criteri empirici per la previsione del tipo di stallo di un profilo	285
12.7	Determinazione dell'assetto critico e del cammino di stallo	286
13	Sistema di ipersostentazione e comandi di volo	289
13.1	Introduzione	289
13.2	Considerazioni sui criteri di progetto del sistema di ipersostentazione	289
13.3	Influenza dei sistemi di ipersostentazione sulle prestazioni del velivolo	291
13.4	Aspetti costruttivi ed operativi	294
14	Modifiche della geometria ed effetti sulle prestazioni aerodinamiche	299
14.1	<i>Wing tip device: winglet</i>	299
15	L'accrescimento ghiaccio sulle superfici dei velivoli	307
15.1	Introduzione	307
15.2	Il fenomeno fisico dell'accrescimento ghiaccio	310
15.3	Metodologia di predizione dell'accrescimento ghiaccio	313
15.4	Considerazioni sul degrado delle prestazioni del velivolo per accrescimento ghiaccio	322
15.5	Cenni sui regolamenti di certificazione in ghiaccio	325
15.6	Riferimenti	326
VI AERODINAMICA DELLA PROPULSIONE: ELICHE E PRESE D'ARIA		327
16	Le eliche	329
16.1	Introduzione	329
16.2	Aerotecnica	330
16.3	Funzionamento approssimato dell'elemento di pala - Coefficienti di R�enard	332
16.4	Alcune considerazioni sul passo	335
16.5	Curve caratteristiche	335
16.6	Eliche a passo variabile in volo	337
16.6.1	Stadi di funzionamento	338
16.7	Teoria impulsiva semplice	339

16.8	Teoria impulsiva generale o teoria generale della quantità di moto	342
16.9	Calcolo dei rendimenti dell'elica	346
16.10	Teoria dell'elemento di pala. Risultati e limiti	349
16.11	Teoria vorticoso dell'elica	350
16.12	Perfezionamento della teoria dell'elemento di pala	353
16.13	Influenza delle perdite viscoso e del numero finito di pale	354
16.14	Effetti della comprimibilità in campo subsonico	359
16.15	Mutua influenza tra elica e velivolo, da [100]	360
16.15.1	Effetti diretti dell'elica sul velivolo	360
16.15.2	Effetti indiretti dell'elica sul velivolo	362
16.15.3	Conclusione	363
17	Prese d'aria	365
17.1	Generalità	365
17.2	Caratterizzazione delle prestazioni: parametri di <i>performance</i>	365
17.3	Prese d'aria subsoniche	368
17.4	Prese d'aria supersoniche: generalità	370
17.5	Presa d'aria supersonica a Pitot.	371
17.6	Presa d'aria convergente-divergente	372
17.7	Prese d'aria a compressione mista	376
17.8	Lo strato limite nelle prese d'aria	379
17.9	Accoppiamento tra presa e motore	380
17.10	Instabilità per <i>buzzing</i>	382
17.11	Esercizi	383
VII	APPENDICI	385
A	Integrali notevoli	387
B	Le Identità di Green	389
C	Informazioni di aerodinamica teorica	393
C.1	Alcune soluzioni particolari	393
C.2	Singularità tridimensionali: sorgente, doppietta	393
C.3	Singularità uniformemente distribuite	395
C.4	Equivalenza tra distribuzioni di vortici e distribuzioni di doppiette	397
C.5	Singularità linearmente variabili	398
C.6	Le singularità supersoniche tridimensionali concentrate	398
C.7	Il coefficiente di pressione	400
C.8	Il calcolo della resistenza su un profilo alare	400
C.9	Esercizi	402
D	Misurazione della velocità. Il tubo di Pitot	405
D.1	Il tubo di Pitot	405
D.2	Velocità vera, indicata, calibrata ed equivalente	407
E	Stima della polare di avanprogetto di un aeromobile	409
	BIBLIOGRAFIA	416

LISTA DEI SIMBOLI

In questa versione del testo le grandezze a carattere vettoriale sono caratterizzate, indifferentemente, mediante scrittura in grassetto o mediante sottolineatura. I tensori di ordine 2 saranno doppiamente sottolineati.

Alcuni acronimi utilizzati

- CAD *Computed Aided Design*
- CFD *Computational Fluid Dynamics*
- DATCOM *DATA COMpendium*
- EIF *Equivalent Inviscid Flow*
- ESDU *Engineering Sciences Data Unit*
- FPE *Full Potential Equation*
- MLW, MTOW *Maximum Landing Weight, Maximum Take-Off Weight*
- MVD *Median Volume Diameter*
- NACA *National Advisory Committee for Aeronautics*
- NASA *National Aeronautics and Space Administration*
- NS *Navier-Stokes equations*
- PNS *Parabolized Navier-Stokes equations*
- RANS *Reynolds Averaged Navier-Stokes equations*
- SWBLI(C) *Shock Wave/Boundary Layer Interaction (Control)*
- SPTE *Small Perturbation Transonic Equation*
- TLNS *Thin Layer Navier-Stokes equations*

Alcuni simboli utilizzati

In assenza di indicazione, la grandezza si intende adimensionale.

- A (1) superficie fittizia di un'elica; (2) area della sezione di una presa d'aria
- \mathcal{A} allungamento alare
- b apertura alare (distanza tra i due estremi dell'ala), $[L]$
- c corda di un profilo, $[L]$
- C curvatura intrinseca, $[L^{-1}]$
- C_l, C_d, C_m coefficienti di portanza, resistenza e momento di beccheggio di profilo
- C_L, C_D, C_Y, C_M coefficienti di portanza, resistenza, forza laterale e momento di beccheggio di ala o velivolo
- C_{Lmaxc} coefficiente di portanza massimo convenzionale dell'ala
- CP centro di pressione
- C_p coefficiente di pressione
- C_f coefficiente di attrito
- c_p calore specifico (per l'aria 1006. $J/(kg K)$)
- $c_{p,w}$ calore specifico dell'acqua (4180. $J/(kg K)$)
- $c_{p,i}$ calore specifico del ghiaccio (2098. $J/(kg K)$)
- C_T, C_Q, C_P coefficienti di spinta, coppia e potenza dell'elica
- d diametro delle gocce d'acqua *droplets*, in micron ($= 10^{-6} m$)
- D (1) diametro di un'elica; (2) parametro di distorsione di una presa d'aria
- d_{ice} spessore di accrescimento ghiaccio, $[L]$
- e fattore di Oswald per la resistenza indotta dalla portanza
- E (1) efficienza aerodinamica; (2) efficienza di cattura totale di acqua
- f *non-freezing fraction*
- g accelerazione di gravità ($9.806 m/s^2$)
- h coefficiente di scambio termico convettivo, $[W/(m^2 K)]$
- i unità immaginaria, $i = \sqrt{-1}$

-
- k_m parametro per la modulazione della portata massica nella Teoria Globale
 - K parametro inerziale nell'equazione delle traiettorie delle gocce d'acqua
 - K_L conducibilità termica dell'aria ($0.0242 \text{ W}/(m \text{ K})$)
 - K_s rugosità superficiale relativa
 - l, d, m portanza, resistenza, momento di beccheggio di profilo, $[M/T^2]$ per l e d , $[ML/T^2]$ per m
 - L, D, Y, M portanza, resistenza, forza laterale e momento di beccheggio di ala o velivolo, $[ML/T^2]$ per L, D e Y , $[ML^2/T^2]$ per M
 - Le numero di Lewis
 - LWC Liquid Water Content, $[kg/m^3]$
 - L_f calore latente di fusione dell'acqua ($33.4 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$)
 - L_s calore latente di sublimazione dell'acqua ($28.1 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$)
 - L_v calore latente di vaporizzazione dell'acqua ($22.6 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$)
 - m massa, $[kg]$
 - \dot{m} portata d'acqua per unità di superficie, $[kg/(m^2s)]$
 - M numero di Mach
 - $M_{\infty crit}, M'_{\infty crit}$ numeri di Mach critici inferiore e superiore
 - n, \mathbf{n} normale e versore normale
 - n freezing fraction
 - n_x, n_z coseni direttori della direzione di accrescimento
 - p (1) pressione, $[M/(LT^2)]$; (2) passo (eliche)
 - P pressione di ristagno $[M/(LT^2)]$
 - Pr numero di Prandtl (per l'aria = 0.71 oppure 0.9 in flusso turbolento)
 - P_1, P_2 pressione del vapore saturo in condizioni asintotiche e sulla superficie, $[Pa]$
 - P_m pressione media dell'aria $[Pa]$
 - Q portata di calore per unità di superficie, $[W/m^2]$
 - R (1) costante del gas, $[L^2/(T^2K)]$; (2) raggio di un'elica
 - Re numero di Reynolds
 - s ascissa curvilinea, $[L]$
 - S superficie in pianta dell'ala, $[L^2]$
 - St numero di Stanton
 - S_m, S_w superficie di riferimento, $[m^2]$
 - t, \mathbf{t} tangente e versore tangente
 - t, t_s tempo, $[s]$
 - T, Q, P spinta ($[ML/T^2]$), coppia ($[ML^2/T^2]$), potenza ($[ML^2/T^3]$) per l'elica
 - T temperatura, K o $^{\circ}C$
 - Tu Fattore di turbolenza
 - u, v, w componenti della velocità, $[L/T]$
 - U, V velocità, $[L/T]$
 - W peso, $[ML/T^2]$
 - x, X, y, Y, z, Z, t coordinate nello spazio e nel tempo, (L, T) ;
 - y_1 ordinata lungo l'apertura dell'inizio del sentiero di stallo
 - α angolo di attacco, adimensionale se in radianti, altrimenti $[^{\circ}]$
 - α_{zL}, α_{zL} angolo di attacco a portanza nulla (profilo ed ala)
 - α^* angolo di attacco convenzionale di stallo dell'ala, adimensionale se in radianti, altrimenti $[^{\circ}]$
 - β (1) angolo di deviazione globale del flusso; (2) angolo di derapata; (3) efficienza di cattura locale d'acqua
 - γ (1) carico di profilo; (2) carico lungo l'apertura; (3) vorticità, $[L/T]$; (4) rapporto di funzionamento dell'elica; (5) costante dell'aria; (6) angolo di rampa
 - Γ (1) circolazione; (2) intensità di vortice, $[L^2/T]$; (3) angolo diedro $[^{\circ}]$
 - δ (1) spessore dello strato limite, $[L]$; (2) angolo di deviazione di una corrente supersonica; (3) rapporto P/p_{sl} (prese d'aria)
 - δ^* spessore di spostamento, $[L]$
 - ϵ angolod'urto
 - Δ (1) tipo di ala per velivoli supersonici; (2) operatore matematico, indica una differenza
 - η (1) eliche: rendimento, $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ rendimenti parziali; (2) prese d'aria: efficienza, $\eta_p, \eta_{ke}, \eta_d$ sono relative alle pressioni di ristagno, al recupero di energia cinetica, alla trasformazione adiabatica; (3) η_v rapporto di flusso di massa per piastre forate, (9.7)
 - θ (1) spessore di quantità di moto, $[L]$; (2) eliche: calettamento geometrico; (3) angolo di *pitch*
 - λ (1) rapporto di rastremazione; (2) eliche: rapporto di funzionamento

- Λ angolo di freccia, [$^\circ$]
- μ, ν coefficienti di viscosità cinematica, [$M/(LT)$], e dinamica, [L^2/T]
- μ, M densità, [L^2/T], ed intensità, [L^3/T], di doppietta
- π numero di Archimede ($\pi = 3.141592654\dots$)
- ρ densità, [M/L^3]
- ρ_{H_2O} densità dell'acqua ($1000. \text{ kg/m}^3$)
- ρ_{ice} densità del ghiaccio ($910. \text{ kg/m}^3$ a $^\circ C$)
- σ (1) densità di sorgente, [L/T]; (2) solidità di un'elica
- Σ intensità di sorgente [L^2/T]
- τ spessore del profilo alare, [L] (adimensionale se relativo alla corda)
- τ (1) sforzo tangenziale, [$M/(LT^2)$]; (2) spessore relativo
- φ calettamento aerodinamico
- Φ, ϕ (1) potenziale di velocità, potenziale di perturbazione, [L^2/T];
- Φ (2) angolo di rollio
- ξ, η, ζ terna di assi cartesiani
- Ω, ω velocità angolari

Alcuni altri suffissi utilizzati

- a addizionale
- $a1$ relativo a $C_L = 1$
- b basico
- cr critico
- c camber
- C valutato sulla superficie del corpo
- dd divergenza della resistenza
- ell ala ellittica,
- inf, sup inferiore, superiore
- L Lagrangiano
- $l.e, t.e.$ bordo di attacco, bordo di uscita
- max, min massimo, minimo
- n, t normale e tangenziale
- p relativo alle condizioni di progetto
- r, t radice ed estremità dell'ala
- sep separazione
- sl livello del mare
- t (1) *thickness*; (2) relativo alla gola di un condotto a sezione variabile
- u, l dorso e ventre
- w parete, oppure riferito al vento (caso degli assi vento)
- x, y, z indica derivazione parziale
- x, s relativo all'ascissa curvilinea
- $0, 1, 2$ rispettivamente condizioni asintotiche, di ingresso e di uscita di una presa d'aria
- ∞ condizioni asintotiche
- $*$ condizioni critiche

PREFAZIONE

La progettazione di un aeromobile, cosa alquanto complessa, prevede l'interazione tra numerose discipline dell'Ingegneria, una delle quali è l'Aerodinamica. I contenuti di ciascuna di queste discipline non sono sempre definiti con precisione, e nella stesura di questo testo ci si è collegati alla tradizione della Scuola di Ingegneria Aerospaziale di Napoli. L'obbiettivo è una trattazione al livello di Laurea Magistrale, e dunque rivolta a lettori che abbiano dimestichezza con i concetti e le nozioni impartiti per la Laurea in Ingegneria Aerospaziale di una qualunque università.

Per dare un assetto compiuto alla struttura del testo per un corso di AERODINAMICA DEGLI AEROMOBILI si sono qui fusi due diversi testi usati in passato:

- lo "storico" testo didattico *Teorie e metodi in Aerodinamica Applicata*, 1970-1972, manoscritto del prof. Valentino Losito per il corso di AERONAUTICA GENERALE della laurea in Ingegneria Aeronautica dell'Università di Napoli, tenuto dal Prof. Losito dal 1966 al 1993;
- gli appunti per il corso di AERODINAMICA DEGLI AEROMOBILI, da me redatti con il concorso di numerosi e validi collaboratori (ai quali sono riconoscente), appunti utilizzati anche dal prof. Losito per i corsi di AERODINAMICA DEGLI AEROMOBILI da Lui tenuti in Accademia Aeronautica e presso la Seconda Università di Napoli dal 1993 al 2002.

Il testo contiene un corpus di nozioni che va certamente oltre l'ambito del corso così come ristrutturato nel 2003 a seguito di una modifica dell'ordinamento degli studi che ha prodotto la riduzione del sapere impartito agli allievi ingegneri del 15-20%: non se ne propone quindi l'utilizzazione integrale.

Sono grato alla famiglia del Prof. Losito per avermi autorizzato a portare avanti questa iniziativa, con la quale io continuo un'opera avviata insieme al Professore nel 1998. Buona parte della motivazione che mi ha spinto può ritrovarsi in quanto scrissi nel 2004: *È straordinaria l'attualità e l'originalità della struttura del corso del Prof. Losito, da Lui costruito ex novo a partire dal 1966. Ancora oggi non riesco a trovare, tra i tanti, un libro di testo che contenga il sapere che, nell'ambito delle Scienze del Volo, il Prof. Losito si prefiggeva di trasmettere agli allievi.*

Ho comunque mantenuto intatto, per quanto possibile, il materiale scritto dal prof. Losito, inserendolo nel modo che ho ritenuto più opportuno nella struttura complessiva che ora descrivo.

Si è suddiviso il contenuto in sette parti. Nella prima si presentano considerazioni generali fondamentali per la comprensione del ruolo che l'Aerodinamica ha nello studio del comportamento di un aeromobile. La Parte Seconda tratta l'Aerodinamica non viscosa delle basse velocità, che fornisce risultati già importanti per la progettazione. Gli aspetti introdotti dalla comprimibilità dell'aria al crescere della velocità di volo, ancora in ambito non viscoso, sono sviluppati nella Parte Terza. Il ruolo fondamentale che ha la viscosità è l'argomento della Parte Quarta. Il comportamento aerodinamico di un aeromobile e dei suoi componenti è quindi presentato nella Parte Quinta, insieme al degrado aerodinamico causato dalla formazione di ghiaccio in volo. Si trattano poi nella Parte Sesta alcuni aspetti aerodinamici legati alla propulsione. Nelle Appendici infine sono richiamati alcuni fondamenti di Aerodinamica e di Matematica.

Nel testo si è lasciata l'indicazione di numerosi esercizi utili per approfondire gli aspetti teorici, anche se molti di essi risultano essere anacronistici. Ed inoltre oggi si può e si deve preferire l'applicazione di metodi già disponibili piuttosto che svilupparne di nuovi.

Per tutto il testo si fa riferimento al libro *Fondamenti di Aeronautica Generale*, scritto dal prof. Losito e edito nel 1983 dall'Accademia Aeronautica di Pozzuoli. Orientato, all'epoca della sua edizione, alla preparazione in Aerodinamica e Meccanica del Volo degli Allievi Piloti dell'Accademia Aeronautica, il libro è, ora come nel passato, e per gentile concessione dell'Accademia Aeronautica, parte integrante del materiale didattico degli Allievi Ingegneri dell'Università di Napoli.

Un doveroso, sincero ringraziamento a

Vincenzo CIRINO
Domenico COIRO
Francesco DE DOMENICO
Alessandra MEO
Antonella ONOFRIO
Luigi PAPARONE
Antonio PICCOLO
Gianluca PINTO
Alessandro PRANZITELLI
Vittorio PUOTI
Antonio RAGNI
Giovanni Paolo REINA
Serena RUSSO
Renato TOGNACCINI
Roberto VACCATORELLI
Angelo VITIELLO

(e qualcuno l'avrò dimenticato...) che hanno contribuito, in epoche diverse, alla stesura di questi Appunti. Sono grato a tutti, in particolare ad Antonio PICCOLO.

Mi fa piacere poi ricordare i costanti stimoli all'innovazione ricevuti, all'epoca, dagli amici dell'Ufficio di Aerodinamica dell'AERITALIA di Pomigliano d'Arco.

Parte I

**ALCUNE CONSIDERAZIONI
GENERALI**

Capitolo 1

Funzionamento di un aeromobile, architettura, modellistica semplice

1.1 Introduzione

L'aeromobile è un veicolo che ha il compito di trasportare un carico pagante svolgendo una missione di volo. La conseguenza di questa affermazione è molto vasta, e conduce a quella che viene definita l'architettura dell'aeromobile. Per una classificazione degli aeromobili e per gli aspetti architettonici generali si fa riferimento a [1], Cap. 1.

Nel moto relativo tra aeromobile ed aria si sviluppa sulla superficie esterna del velivolo un sistema di forze, Fig. 1.1, di origine aerodinamica¹; insieme al sistema delle forze è necessario introdurre un sistema di momenti, riferiti ad un prefissato polo. La forza ed il momento complessivi derivanti dall'interazione tra l'aria e le superfici dell'aeromobile si chiamano forza aerodinamica e momento della forza aerodinamica (rispetto al polo fissato). Questo sistema di forze e momenti dipende dalle condizioni di volo (quota, velocità, orientamento dell'aeromobile rispetto alla direzione della velocità, condizioni meteorologiche) e dalla superficie "attuale" dell'aeromobile, la cosiddetta configurazione, che può variare notevolmente durante la missione. Il comportamento dell'aeromobile è intimamente legato a questo sistema di forze ed a forze di altra natura, ad esempio propulsiva.

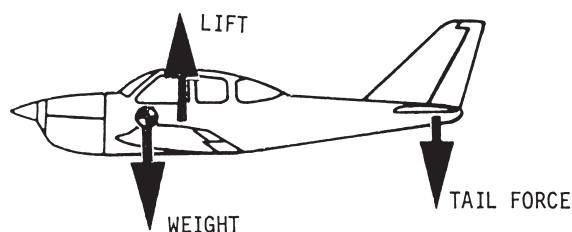


Figura 1.1: Un possibile schema delle forze agenti su un aeromobile

Lo scopo dell'Aerodinamica degli Aeromobili è la determinazione in ogni singola fase del volo delle forze e dei momenti di natura aerodinamica. È semplice poi mostrare che in opportune condizioni teorie, metodi, risultati e conclusioni possono essere validi anche quando il fluido di lavoro non è l'aria: in particolare, la sovrapposizione tra Aerodinamica ed Idrodinamica è in realtà veramente ampia.

¹Su una superficie solida a contatto con un fluido in movimento si esercita una forza derivante dall'azione relativa fluido/corpo in ogni punto della superficie: si parla di sforzi superficiali di contatto tra fluido e parete, la cui integrazione superficiale fornisce appunto tale forza. Lo sforzo superficiale in un punto può essere modellato come proiezione sulla normale alla superficie del tensore degli sforzi, cfr.(2.1). Nel caso di fluido in quiete si parla di Idrostatica (anche quando il fluido di lavoro non è l'acqua), gli sforzi superficiali sono perpendicolari punto per punto alla superficie, e la forza risultante è la spinta idrostatica.

Dal momento che esistono molti tipi di aeromobile, con le più disparate modalità operative, può essere conveniente fare riferimento alla forma e allo schema di Fig. 1.1, e si cercherà per quanto possibile di estendere tutte le considerazioni ad essa relative ad altri tipi di aeromobile.

TERNE DI RIFERIMENTO - ELEMENTI DI ARCHITETTURA

Sembra ovvio che gli elementi dell'architettura da introdurre immediatamente sono la fusoliera (che ha il compito, tra gli altri, di trasportare gran parte del carico pagante) e l'ala, necessaria a sviluppare la forza che, opponendosi al peso, consente all'aeromobile di volare. L'insieme di ala e fusoliera è detto velivolo parziale. Da considerazioni aerodinamiche si mostrerà la necessità di introdurre numerosi altri componenti per dare all'aeromobile il desiderato livello di stabilità, manovrabilità e sicurezza. Va detto peraltro che la continua evoluzione degli aeromobili deve necessariamente condurre all'idea che l'architettura "attuale" degli aeromobili certamente in un futuro più o meno prossimo sarà innovata in modo significativo: nel velivolo convenzionale la separazione tra fusoliera ed ala è netta, mentre da decenni si insegue, con successi parziali ed in nicchie ben definite, il concetto di velivolo "tutt'ala", tanto affascinante dal punto di vista concettuale quanto di difficile realizzazione su scale industriali.

Per un aeromobile è comodo introdurre diversi sistemi di riferimento, alcuni cartesiani ortogonali, altri polari o cilindrici (come nello studio dei corpi affusolati).

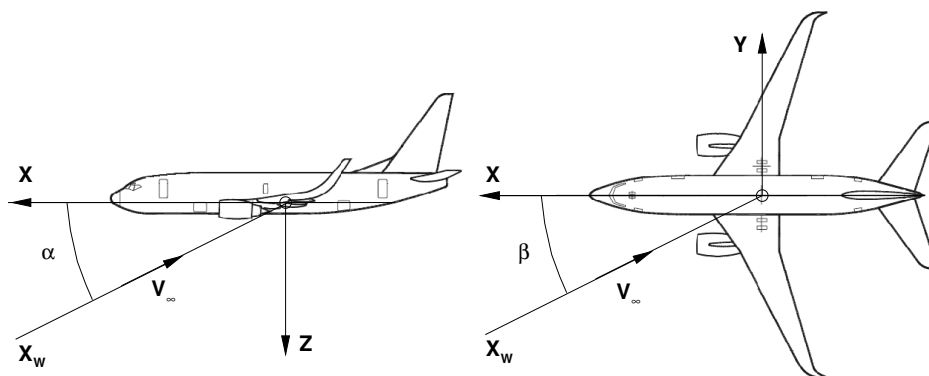


Figura 1.2: Angolo di attacco ed angolo di derapata

Una prima terna cartesiana ortogonale -assi velivolo, (x, y, z) , Fig. 1.2- può essere introdotta assumendo l'asse x lungo la fusoliera, l'asse y in direzione laterale, l'asse z verso l'alto. La proiezione dell'ala sul piano $(x - y)$ è la forma in pianta dell'ala, il dato più importante per la sua caratterizzazione; la misura dell'area della forma in pianta (inclusa la parte sovrapposta alla fusoliera) viene convenzionalmente indicata con S . La misura dell'estensione trasversale dell'ala (distanza tra i due estremi) è l'apertura alare b . Grandezza fondamentale derivata è l'allungamento alare $\mathcal{R} = b^2/S$. Esistono molti e diversi tipi di ala, con diverse funzionalità dal punto di vista aerodinamico e diversi aspetti caratterizzanti da ogni altro punto di vista (funzionale, operativo, strutturale, propulsivo, impiantistico). In dipendenza da come i profili sono "montati" lungo l'ala, e definito, in qualche modo, un suo asse trasversale, l'ala si dice diritta quando il suo asse è orientato lungo y ; l'ala a freccia è caratterizzata da un angolo significativo ($> 15^\circ$) tra asse dell'ala e asse y , come in Fig. 1.2.

Il profilo alare è la sezione di un'ala con un piano parallelo a $(x - z)$; per un'ala di forma arbitraria il profilo alare cambia lungo y . A partire dalla configurazione base dell'ala la forma del profilo cambia -in modo significativo- in seguito all'azionamento di dispositivi quali flap ed alettoni. Nel seguito si farà riferimento alla forma-base del profilo salvo esplicita specificazione.

La dimensione del profilo in direzione x è la misura della corda c , elemento fondamentale dell'architettura del profilo, che si può definire in diverse maniere, [1], ma che in genere coincide, con ottima approssimazione, con il segmento che congiunge il punto più avanzato del profilo con

quello più arretrato; spesso per corda si intende anche la sua misura. La regione intorno al punto più avanzato di un profilo costituisce il bordo di attacco, il punto più arretrato è il bordo di uscita; la forma dei bordi è fondamentale nel determinare il comportamento aerodinamico dei profili, e quindi dell'ala. Nella modellistica dell'ala a freccia si definisce e si usa anche la corda in direzione perpendicolare al bordo di attacco dell'ala.

Per il profilo un punto importante è quello ad $1/4$ della corda (distante cioè $c/4$ dal bordo di attacco), il fuoco.

Per un'ala di forma arbitraria il profilo alare cambia lungo y , insieme con la misura delle corde; la forma in pianta dell'ala è definita dalla legge di distribuzione delle corde $c = c(y)$. Le tre linee caratteristiche lungo l'apertura dell'ala sono quelle dei bordi di attacco, dei bordi di uscita e dei fuochi.

L'ala infinita, intesa come ala estesa trasversalmente in modo indefinito, è un'entità astratta molto importante nella modellistica dell'ala. Costituita ovviamente da un unico profilo alare, essa può essere dritta o a freccia.

Si definisce ora la terna degli assi vento (x_w, y_w, z_w) avente il versore dell'asse x_w diretto lungo la direzione della velocità asintotica \mathbf{V}_∞ , la velocità del velivolo rispetto all'aria in quiete a monte (il suffisso ∞ indicherà il riferimento alle condizioni dell'aria non ancora perturbata dal passaggio del velivolo); gli altri due assi sono determinati in analogia con gli assi velivolo. Nel volo livellato \mathbf{V}_∞ è orizzontale.

Nel moto relativo tra aria e velivolo la posizione relativa della terna degli assi velivolo rispetto a quella degli assi vento determina il comportamento aerodinamico: si introducono quindi gli angoli di attacco α e di derapata β , determinati rispettivamente da rotazioni intorno agli assi y e z , Fig. 1.2. L'angolo di attacco è formato dall'asse x_w e dalla sua proiezione sul piano $(x - y)$ del riferimento degli assi velivolo; l'angolo di derapata è l'angolo tra l'asse x_w e la sua proiezione sul piano $(y - z)$ del riferimento degli assi velivolo.

In generale durante ogni fase del volo -non solo nel volo a quota e velocità costanti- si definiscono la portanza L (da Lift), la forza laterale Y e la resistenza D (da Drag) come le proiezioni della forza aerodinamica rispettivamente sugli assi vento z_w, y_w e x_w ; le componenti del momento intorno ai tre assi sono in genere contrassegnati con la lettera M . Mentre la portanza, in certe situazioni, si può annullare, la resistenza aerodinamica è sempre presente: nasce quindi l'esigenza dell'apparato propulsivo per fornire la spinta necessaria ad opporsi alla resistenza (oltre che per accelerare il velivolo inizialmente fermo in pista!).

Forza aerodinamica e momento possono essere decomposti secondo gli assi velivolo (x, y, z) dando luogo a forza assiale, (ancora) forza laterale e forza normale. I tre momenti si chiamano rispettivamente di rollio (intorno all'asse x , di beccheggio (intorno all'asse y) e di derapata (intorno all'asse z).

Si parla di volo dritto quando il pilota è a testa in su (e la portanza, necessaria per equilibrare il peso, si conviene positiva); per contro nel volo rovescio (pilota a testa in giù) la portanza è negativa (e si parla di deportanza nel linguaggio tecnico italiano).

Nel caso di salita o discesa di particolare rilievo ai fini del calcolo delle prestazioni è l'angolo di rampa γ tra l'asse x_w e la sua proiezione nel piano orizzontale.

In generale la posizione del velivolo rispetto ad un riferimento terrestre è individuata dagli angoli di *pitch* θ , Fig. 1.3, e di rollio (*bank* o *roll*) Φ , Fig. 1.4. Il primo è definito come l'angolo tra l'asse x e la sua proiezione nel piano orizzontale, il secondo come l'angolo fra l'asse y e la sua proiezione nel piano orizzontale. Nella Fig. 1.4 si mostra anche l'angolo diedro Γ .

Quando, nel volo longitudinale (senza derapata e rollio), la portanza è nulla il relativo angolo d'attacco si definisce "angolo di portanza nulla" α_{zL} , e la direzione di \mathbf{V}_∞ definisce, nel sistema degli assi velivolo, la retta di portanza nulla.

Un primo modello che si propone -per modello si intende una descrizione più o meno approssimata, anche schematica, della realtà- è quello dell'aeromobile visto come un punto materiale nel quale devono essere concentrate tutte le forze (al minimo il peso, le forze aerodinamiche e la forza propulsiva). Nel volo livellato la relazione di equilibrio alla traslazione orizzontale è $D = T$. La relazione di equilibrio alla traslazione verticale è $L = W$, Fig. 1.5. In condizioni di moto non uniforme compaiono le forze d'inerzia.

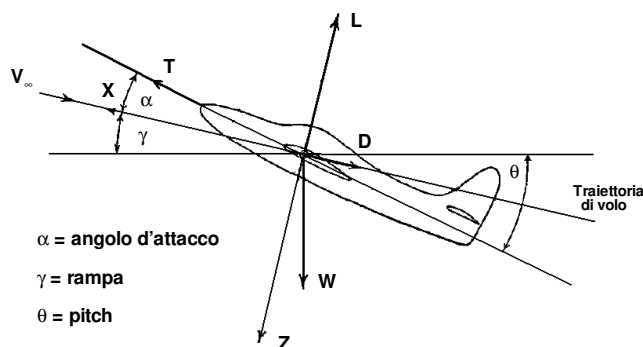


Figura 1.3: Angoli di assetto di un velivolo

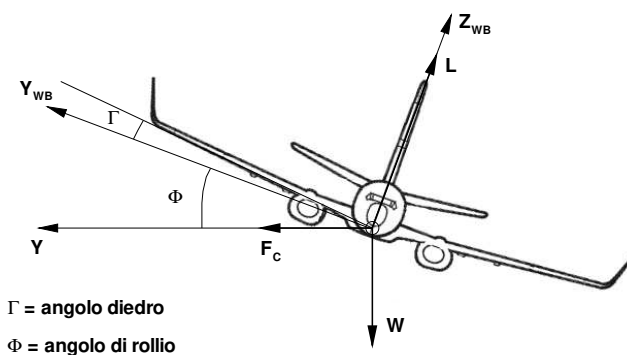


Figura 1.4: Angoli di assetto laterale di un velivolo

Conviene fare presente che in un volo a quota e velocità costanti alla perdita di peso derivante dal consumo di combustibile deve conseguire una riduzione di portanza.

GRANDEZZE TERMOFLUIDODINAMICHE, ADIMENSIONALIZZAZIONE

È necessario richiamare qui il fatto che il lettore interessato all'Aerodinamica degli Aeromobili deve avere dimestichezza, o almeno conoscenza non superficiale, con concetti fondamentali di discipline strettamente collegate. Se ne richiamano alcuni, che interverranno nel seguito.

- Fisica di base: Meccanica, Dinamica, Termodinamica (i Principi Fondamentali, la Teoria Cinetica dei Gas).
- Termodinamica di Equilibrio: definizione e significato di alcune grandezze di stato (massa, energia interna ed entropia, pressione, temperatura, densità, velocità caratteristiche e coefficiente di viscosità), equazioni di stato.
- Fluidodinamica, Aerodinamica, Gasdinamica: viscosità e sua dipendenza dalla temperatura, sforzi in un fluido, la condizione asintotica (di fluido indisturbato), la comprimibilità (condizioni di ristagno, condizioni critiche, onde d'urto, espansione di Prandtl-Meyer), modelli ed equazioni del moto, teoremi fondamentali (Bernoulli, Crocco, teoremi sui vortici, ecc.), numeri caratteristici e loro interpretazione, strato limite, moto quasi unidimensionale in condotti a sezione variabile, modello di atmosfera "standard".

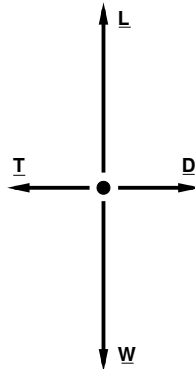


Figura 1.5: L'aeromobile visto come un punto materiale

La trattazione sarà svolta svincolandosi dalle dimensioni effettive dell'aeromobile facendo riferimento a grandezze opportunamente adimensionalizzate ed a numeri caratteristici (in questa impostazione i numeri di Mach, che misura l'effetto dell'alta velocità, e di Reynolds, che misura gli effetti della viscosità, hanno importanza assoluta²). In tal modo si ha certamente una maggiore generalità. Si fa presente che il passaggio successivo alla scala vera del problema può essere in generale non semplice³.

La corretta adimensionalizzazione di forze e momenti si effettua introducendo opportuni coefficienti adimensionali: limitandosi ai coefficienti di portanza, resistenza e momento di beccheggio C_L, C_D, C_M si ha

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 S} \quad (1.1)$$

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 S} \quad (1.2)$$

$$C_M = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 S \bar{c}} \quad (1.3)$$

ed il riferimento è alla pressione dinamica della corrente asintotica ed alla superficie alare S ; nella (1.3) la lunghezza di riferimento è la corda media dell'ala $\bar{c} = S/b$

Grandezza derivata, ma fondamentale, è l'efficienza aerodinamica

$$E = \frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D} \quad (1.4)$$

Il coefficiente di pressione C_p , funzione di campo, è l'adimensionalizzazione della pressione (statica) p riferita alla pressione asintotica p_∞ :

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} \quad (1.5)$$

²Detti V (il modulo della) velocità ed a la velocità del suono in un punto del campo di moto, il numero di Mach M in quel punto è $M = V/a$: il numero di Mach è una funzione di campo. Caratterizzato il problema in esame con una opportuna scelta di lunghezza L , velocità U , densità ρ e viscosità μ , il numero di Reynolds Re è $Re = \rho UL/\mu$.

³Si può pensare che l'aeromobile viaggi in un fluido non viscoso? No, non è possibile né a livello concettuale, né a livello progettuale né a livello operativo: è impossibile. È possibile pensare allora che l'aeromobile viaggi in un fluido "non ovunque" viscoso? Sì, l'aria "si comporta" in modo viscoso solo in una zona ristretta intorno al velivolo: e per un velivolo in condizioni di crociera questa zona è *molto* ristretta.

MISSIONE DI VOLO

La missione di volo di un aeromobile può essere vista come una sequenza di fasi successive, che nell'insieme costituiscono il profilo di missione.

- Taxi: rullaggio verso la testa della pista di decollo, sotto le direttive della Torre di Controllo.
- Decollo e salita: la velocità è maggiore di quella minima (al di sotto della quale un aeroplano non può volare a velocità ed a quota costante), la portanza deve essere maggiore del peso ($L > W$), e tale da dare all'aeromobile una adeguata velocità ascensionale, il coefficiente di portanza è elevato, la resistenza deve essere comunque non elevata.
- Crociera: la velocità è vicina a quella massima, la resistenza deve essere "minima", la portanza è uguale al peso, il coefficiente di portanza è piccolo.
- Discesa: velocità ridotta rispetto a quella di crociera, il coefficiente di portanza assume un valore medio - elevato.
- Atterraggio: la velocità è poco maggiore di quella minima, la resistenza può essere anche elevata, il coefficiente di portanza è di poco minore del coefficiente di portanza massimo dell'aereo.
- Taxi verso l'area di parcheggio.

Durante il volo è necessario effettuare manovre diverse, quali virata, salita e discesa, richiamata, e per certe categorie di velivoli, manovre acrobatiche, quali looping, tonneau, ecc.

1.2 Sul concetto di velocità di/in un fluido

FLUIDOSTATICA - LA VELOCITÀ PECULIARE

Si consideri un fluido non necessariamente monocomponente, in condizioni di equilibrio termodinamico, ad esempio, aria contenuta in una scatola con pareti adeguatamente rigide, impermeabili, adiabatiche.

Le molecole costituenti il fluido hanno, ad ogni istante, una loro velocità che cambia continuamente nel tempo, in dipendenza dell'interazione con le pareti e tra molecole, la velocità peculiare, o di agitazione molecolare, il cui valore medio temporale è legato alla temperatura (che in realtà è proprio la misura dell'energia media delle molecole). Rispetto ad un osservatore che vede la scatola ferma il risultante delle velocità, opportunamente pesate, di tutte le particelle è nullo. In condizioni ordinarie il concetto di urto elastico costituisce una buona modellazione di questa interazione.

La pressione termodinamica che si può misurare sulle pareti della scatola è la media risultante dagli scambi di quantità di moto legati agli urti delle molecole su ciascun punto della superficie. La pressione in un punto interno alla scatola può essere "costruita" a partire dal meccanismo di scambio di quantità di moto legato agli urti.

La Teoria Cinetica dei Gas costituisce un valido strumento per modellare tutto ciò in moltissime circostanze e con ottima approssimazione.

L'IPOTESI DEL CONTINUO: DALLA FORMULAZIONE PARTICELLARE AL CAMPO

Quando in un volume abbastanza piccolo rispetto alle dimensioni del sistema in esame c'è un numero opportunamente grande di molecole, per la maggior parte delle applicazioni ci si può svincolare dalle proprietà attuali delle particelle legate all'agitazione molecolare. Si introduce l'ipotesi del Continuo, largamente verificata nelle Scienze del Volo, a meno che non si voli ad altissime quote. In concreto, è "piccolo" lo spazio che due particelle percorrono tra due urti consecutivi.

Se l'ipotesi del Continuo è accettabile è possibile concentrare in un punto il moto di tutte le molecole contenute in un volume "abbastanza piccolo" mediante un procedimento di media pesata⁴. Si può introdurre il concetto di densità di massa, intesa come rapporto tra la massa di tutte le molecole contenute nel piccolo volume e la misura di tale volume. La velocità di massa è definita come media delle velocità delle particelle contenute del volume, pesata rispetto alle densità delle specie presenti: si applica questa velocità media nel centro del volume, e si definisce il campo delle velocità. La procedura si estende ad altre proprietà delle particelle: si è passati dalle particelle singole al punto e si è costruito il fondamentale concetto di campo.

Quando un oggetto si muove in un fluido sono diverse le approssimazioni che si possono fare: ma le grandezze termofluidodinamiche saranno sempre considerate proprietà di campo e non delle particelle.

Il campo di moto è quindi un concetto astratto ma fondamentale per risolvere a priori, e senza troppe perdite di informazione, i problemi che derivano dalle difficoltà di descrizione del moto peculiare delle molecole (che è invece un concetto ben definito ma di difficile manipolazione).

SCORRIMENTO LUNGO UNA SUPERFICIE

Nell'ipotesi del Continuo si usa dire che le particelle lambiscono le superfici solide, intendendo che non vi impattano. Ora la cosa è vera solo nel campo "mediato". Nella realtà le molecole urtano e rimbalzano (da qui viene la pressione) ed è la velocità di massa che non ha una componente normale alla superficie solida. In particolare:

- nel modello Euleriano la velocità di campo può essere non nulla sulla superficie;
- nel modello viscoso la velocità di campo è nulla alla parete, dove non c'è moto relativo tra corrente e superficie solida, e si introduce, in molti casi, il concetto di strato limite, inteso come quella piccola porzione in cui "funzionano" (in modo significativo) gli effetti della viscosità.

In un punto di ristagno di un campo Euleriano le particelle "macroscopiche" arrivano in direzione perpendicolare alla superficie, ma con velocità nulla: dunque si può dire che nemmeno in questo caso c'è urto tra corrente e superficie.

MOTO LAMINARE E MOTO TURBOLENTO - LA TRANSIZIONE

Si osservi un campo di moto "abbastanza da lontano": se in nessun punto del campo si notano variazioni significative delle velocità di massa nel tempo si ha a che fare con un moto "macroscopicamente" stazionario o permanente.

Si osservi poi lo stesso moto "abbastanza da vicino", punto per punto: in certi casi, in realtà molto frequenti, si nota che in alcuni punti del campo la velocità di massa non è costante nel tempo (insieme quindi alle sue componenti rispetto a un qualunque riferimento). Il moto in un punto viene detto laminare se velocità di massa e relative componenti sono costanti nel tempo, turbolento se velocità di massa e relative componenti oscillano nel tempo in modo irregolare. Si dice che il moto laminare è ben ordinato, "lamine" di fluido scorrono l'una sull'altra a diversa velocità nella stessa direzione. Si dice che il moto turbolento è un agitarsi caotico di particelle, ma il termine "caotico" non sembra bene appropriato. In quanto moto ordinato il moto laminare è più o meno sensibile ad un disturbo (contenuto nel fluido stesso oppure proveniente dall'esterno), che potrebbe perturbarne la regolarità: si parla di stabilità del moto laminare.

Nel caso più generale (e nella maggior parte delle applicazioni pratiche) si ha a che fare con campi di moto in cui c'è coesistenza di moto laminare e moto turbolento: così è per i campi di moto intorno agli aeromobili. In genere una certa zona intorno alla prua delle superfici che costituiscono l'aeromobile (bordi di attacco, ad esempio) è sempre caratterizzata da flusso laminare, e intorno

⁴In questo contesto il volume deve essere "abbastanza piccolo" rispetto alla dimensione caratteristiche del sistema che si sta analizzando, ma nel contempo deve essere abbastanza grande da contenere un numero statisticamente significativo di particelle: l'ipotesi del Continuo viene meno quando l'individuazione di un volume con queste caratteristiche non è realizzabile.

alle altre parti del velivolo si ha flusso turbolento. La regione attraverso la quale si ha il passaggio da moto laminare a moto turbolento si chiama regione di transizione, essendo la transizione il “fenomeno” di passaggio: l’amplificazione incontrollata dei disturbi quando raggiungono una regione laminare divenuta instabile (e quindi non più in grado di opporsi ai disturbi). Va detto subito, e non per inciso, che la transizione è un fenomeno molto complesso, non del tutto chiaro, che incide in modo decisivo sul comportamento delle superficie aerodinamiche, e quindi sulle prestazioni, di un velivolo: in certi casi di velivoli importanti la progettazione aerodinamica (e di conseguenza “tutta” la progettazione dell’aeromobile) ruota intorno al corretto posizionamento, nelle più significative condizioni di volo, della transizione.

MOTO TURBOLENTO

Localmente un flusso di tipo turbolento si sviluppa principalmente in una direzione, ed è caratterizzato da moti disordinati e caotici, in tutte le direzioni, non di singole particelle o molecole (come si suppone, ad esempio, nella Teoria Cinetica dei Gas), ma di macroscopiche masse di fluido di varia grandezza; tutto ciò si riflette nel fatto che tutte le variabili termofluidodinamiche, in un determinato punto del campo di moto, non sono costanti nel tempo.

Le componenti (in un opportuno riferimento) u, v, w della velocità di massa (e le altre grandezze termofluidodinamiche) nel moto turbolento macroscopicamente stazionario oscillano a frequenze che possono essere dell’ordine di molti khz.

Le difficoltà di una formulazione matematica della turbolenza possono essere grandemente ridotte se si suppone di considerare solo moti in cui la turbolenza è abbastanza “assestata” (*fully developed turbulent streams*): in questi casi è possibile e conveniente effettuare la decomposizione di una qualunque grandezza termofluidodinamica f in due termini ponendo

$$f = \bar{f} + f'$$

dove si è indicato con \bar{f} il valore medio nel tempo di f

$$\bar{f} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} f dt$$

e con f' la fluttuazione di f rispetto al valore medio; l’intervallo di integrazione Δt è piccolo, ma deve essere assunto di valore sufficientemente grande in modo tale che \bar{f} (nel caso di un fenomeno macroscopicamente stazionario) sia indipendente dal tempo. Il valor medio delle fluttuazioni è evidentemente nullo.

Tutte queste considerazioni si estendono facilmente a moti macroscopicamente instazionari, quando $\bar{f} \neq 0$ per alcune o per tutte le grandezze termofluidodinamiche.

La velocità media si definisce a partire dal valor medio di u, v, w : si tenga presente che la velocità media non coincide con la velocità di massa, che nel moto turbolento varia nel tempo. In Fig. 1.6 è riportato, in un punto del campo di moto e a partire dal valore medio della componente assiale della velocità di massa \bar{u} , un plausibile andamento della fluttuazione turbolenta assiale u' per un moto stazionario (a) ed instazionario (b).

Insieme alle fluttuazioni u' sono presenti fluttuazioni v' e w' : si usa dire che la turbolenza è tridimensionale anche in un campo di moto che, mediato, risulta essere bidimensionale (od anche unidimensionale).

Una misura dell’intensità della turbolenza in un punto del campo può essere data dal Fattore di Turbolenza Tu definito come

$$Tu = \frac{1}{V_\infty} \sqrt{\frac{1}{3}(u'^2 + v'^2 + w'^2)}$$

Tu è una misura dell’energia cinetica associata alla turbolenza rispetto all’energia cinetica della corrente asintotica: si osservi che se è nullo il valore medio di u' non è nullo il valor medio di u'^2 !

Un flusso turbolento è talmente complesso da sembrare difficilmente accessibile da un punto di vista matematico, e non solo. La modellazione teorica e numerica della turbolenza rimane un

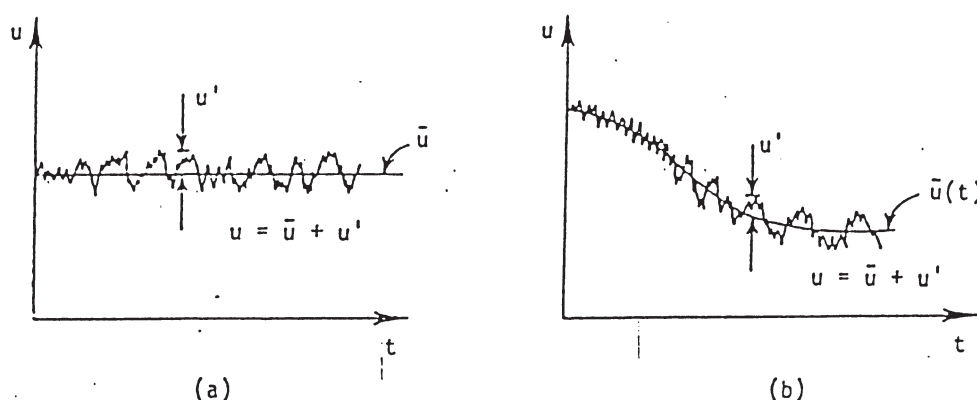


Figura 1.6: Fluttuazioni della velocità: (a) - moto stazionario; (b) - moto instazionario

problema aperto in Fluidodinamica, così come lo studio per via sperimentale degli effetti della turbolenza: d'altronde questi effetti sono tali da non potersi trascurare, anzi, essi sono dominanti.

In sintesi estrema la presenza della turbolenza determina lo sviluppo di un campo di moto del tutto diverso da quello che si avrebbe nel caso di flusso laminare, con aumento degli effetti viscosi, e quindi della resistenza, ma con maggiore capacità di evitare la separazione del flusso.

Nel caso delle Scienze del Volo il moto dell'aria a monte e lontano dall'aeromobile ha un certo livello di turbolenza (nella modellistica si parla di turbolenza iniziale o turbolenza asintotica) essenzialmente dettato dalle condizioni meteorologiche. La turbolenza in quota può avere quindi un'importanza decisiva sulla prestazioni di un aeromobile, e quindi sulla sua condotta.

1.3 Caratterizzazione aerodinamica di un aeromobile

In fase progettuale è necessario individuare e calcolare una estesa struttura di dati che descrive completamente gli effetti aerodinamici dell'interazione tra aria e velivolo nel loro moto relativo. Alcuni di questi dati possono avere una forma sintetica (in certi casi analitica), e descrivono coefficienti globali in funzione di una variabile indipendente. In altri casi si tratta di distribuzioni di alcune grandezze termofluidodinamiche (su tutta la superficie del velivolo o su parte di essa), e la base di dati può risultare di dimensioni assai rilevanti.

Alcuni esempi, generali e semplici.

Un dato aerodinamico essenziale per il progetto è costituito dalle polari dell'aeromobile: si tratta di curve del tipo (C_D, C_L) , oppure (C_M, C_L) , mediante le quali si possono poi produrre tutta una serie di analisi comportamentali e progettuali. Le polari descrivono in modo globale il comportamento aerodinamico di un aeromobile.

Non si deve però pensare che l'insieme delle polari siano due curve. Sono un po' di più. In particolare, i coefficienti aerodinamici (e dunque le relative polari) dipendono da diversi parametri.

Grande importanza hanno i numeri di Mach M e Reynolds Re di volo (influenzati da quota e velocità di volo, e dalle dimensioni dell'aeromobile): gli intervalli tra velocità minima e massima e tra quota zero e quota massima raggiungibile (quota di tangenza) sono in generale molto più estesi per un aeromobile che per qualunque altro veicolo. Ed inoltre il livello di turbolenza Tu può alterare in modo sensibile l'aerodinamica del velivolo. Un numero non piccolo di polari è necessario per caratterizzare queste influenze.

C'è poi da tenere in conto il fatto che un aeromobile modifica la propria geometria per svolgere la missione: flap deflessi (almeno due posizioni), alettoni deflessi (con angolo di deflessione variabile), carrelli giù, aerofreni estesi, propulsori con potenza impegnata variabile, caratterizzano in realtà tutta una serie di configurazioni diverse dalla configurazione base: se in principio si può dire che le possibili quaterne $(M, Re, Tu, \text{configurazione})$ sono infinite, in concreto si devono produrre polari in un numero che è dell'ordine delle centinaia, e non è poco.

Si potrebbero proporre numerosi altri esempi per mostrare che sono realmente molti i dati che l'Ufficio di Aerodinamica di un'industria aerospaziale deve fornire nel corso della vita di un aeromobile, dal suo concepimento alla fine della produzione, passando per la progettazione, la costruzione del prototipo, lo sviluppo di tutte le modifiche che derivano dalle prove di volo e dalla fase operativa.

1.4 Come si studia il volo in maniera razionale

In una certa accezione della realtà esistono alcune leggi fondamentali della Fisica, leggi universali che si possono esprimere in formule, od anche in modo euristico. Provando a descrivere sinteticamente le leggi che hanno impatto nell'Aerodinamica Applicata, e con un certo grado di approssimazione, si può scrivere quanto segue.

- Per quanto riguarda la materia, nulla si crea, nulla si distrugge
- La forza agente su un sistema deve uguagliare la variazione di quantità di moto (Legge di Newton)
- L'energia totale non si crea e non si distrugge, vi sono piuttosto scambi tra le diverse forme che può assumere l'energia: qui interessano principalmente l'energia cinetica, l'energia interna e l'energia potenziale (Principio di conservazione dell'energia, Primo Principio della Termodinamica).
- L'entropia di un sistema isolato non può diminuire (Secondo Principio della Termodinamica).

Qui si sono ritenute inessenziali altre leggi universali, peraltro di importanza assoluta, ad esempio le leggi dell'Elettromagnetismo.

Le leggi prima enunciate consentono di descrivere come evolvono in determinate condizioni i sistemi meccanici reali quale è, ad esempio, un aeromobile in volo, e dunque come procedere al loro progetto ed al loro controllo può essere dedotto da quelle leggi fondamentali.

La formulazione razionale delle leggi sopra indicate per un sistema fluido nel caso che valga l'ipotesi del continuo conduce all'insieme di equazioni dette di Navier-Stokes. Tali equazioni modellano l'interazione tra fluido ed aeromobile, con approssimazione più o meno spinta.

Un principio da richiamare subito e da chiarire è il Principio di Reciprocità, o di Relatività del Moto. Sotto opportune ipotesi, esso permette di trattare alcuni fenomeni che intervengono su un velivolo in volo rispetto all'aria in quiete esattamente come quelli che intervengono considerando il velivolo fermo investito da una corrente in movimento con velocità asintotica uguale ed opposta a quella di volo. Questo Principio sarà implicitamente utilizzato nella maggior parte delle situazioni. La simulazione dei fenomeni del volo nella galleria del vento si basa su questo Principio, anche se la reciprocità è in genere abbastanza lontana dall'essere verificata e c'è necessità di sforzi interpretativi per utilizzare correttamente i dati di galleria.

1.5 Ala e carico alare

Nel caso delle aerodine la portanza deve conseguire dal moto relativo tra uno o più elementi portanti e l'aria: le parti dell'aeromobile che generano la portanza sono riconducibili alla macchina a fluido chiamata ala. È noto che su un velivolo convenzionale le ali sono almeno in numero di tre (ala propriamente detta, piano di coda orizzontale ed impennaggio verticale).

È bene precisare comunque che anche altri elementi architettonici - la fusoliera o elementi della propulsione, ad esempio - in generale sviluppano portanza, solo che per un aeromobile convenzionale essa è marginale, e non viene considerata se non come una correzione in fase di progetto aerodinamico di dettaglio.

Per i velivoli convenzionali l'ala è detta fissa, per eliche e rotori degli elicotteri l'ala è rotante. Se un velivolo propulso ad elica è fermo sulla testata della pista in attesa di decollare c'è un moto relativo tra le pale dell'elica ed il fluido (elica a punto fisso), e c'è comunque un moto relativo

ala-fluido, moto indotto dall'elica. Quando l'elicottero è in *hovering* (in volo ma fermo rispetto alla terra) i rotori ruotano, e quindi le pale sono in moto relativo rispetto all'aria.

Come funziona un'ala? In estrema sintesi, l'ala imprime, nel moto relativo, una deviazione alle particelle d'aria ricevendone una forza di reazione, la forza aerodinamica: questa forza è data dalla globalità della variazione nel tempo della quantità di moto di tutte le particelle d'aria coinvolte.

Più in dettaglio, e collegato con questo semplice meccanismo Newtoniano, sulla superficie dell'ala si genera, nel moto relativo, un campo di sforzi normali (essenzialmente di pressione) e tangenziali differenti rispetto al caso statico: l'integrazione sull'intera superficie dell'ala di questi sforzi è la forza aerodinamica.

Nel volo livellato la variazione globale della quantità di moto delle particelle d'aria ha una componente verso il basso, e per reazione si genera sull'ala la portanza (che è una parte della forza aerodinamica). È da tenere presente che durante tutta la missione -tranne particolari situazioni- la forza portante è significativamente maggiore della forza resistente (di un ordine di grandezza ed anche di più). Pertanto, se ci si riferisce alla condizione media dell'aeromobile in volo la forza aerodinamica praticamente coincide con la portanza. Inoltre il fatto che le superfici portanti sono sottili fa concludere che

- gli sforzi di pressione sono mediamente (e praticamente, tranne che in alcune regioni particolari) perpendicolari alla direzione della velocità dell'aeromobile,
- gli sforzi tangenziali sono praticamente orientati in direzione della velocità dell'aereo,
- dunque la forza portante è praticamente dovuta al campo di pressione.

Lo stesso ragionamento non si ripete per la resistenza, che non dipende solo dagli sforzi tangenziali: essendo essa piccola rispetto alla portanza, anche una componente piccola della forza di pressione lungo direzione della velocità -la resistenza di pressione- è importante (si sta qui anticipando il fatto che la resistenza legata al campo di pressione è comunque importante).

1.5.1 Il carico aerodinamico

Il concetto di carico in Aerodinamica è piuttosto articolato.

Nel calcolo delle prestazioni dell'aeromobile interviene in modo decisivo la grandezza W/S , il "carico alare", che indica come in media il peso dell'aeromobile si distribuisce sull'ala. Funzione crescente del tempo, W/S è un importante indicatore dell'evoluzione del livello tecnologico in un arco temporale ormai maggiore di un secolo.

È poi importante notare una conseguenza del discorso del paragrafo (1.5): il calcolo su una superficie portante della portanza (che per un aeromobile in crociera è poco più piccola della forza aerodinamica) può effettuarsi anche integrando sulla forma in pianta la componente nella direzione z della differenza di pressione Δp tra la parte superiore ed inferiore della superficie:

$$L \cong \iint_S \Delta p(x, y) dx dy \quad (1.6)$$

La differenza di pressione Δp è il carico aerodinamico puntuale, ovviamente definito in punti $P(x, y, 0)$ del piano $(x - y)$ in corrispondenza della forma in pianta. Per questa via non si riesce ovviamente a stimare la resistenza di pressione, almeno direttamente⁵.

PROFILO ALARE E CARICO SUL PROFILO

Su ciascun profilo di un'ala insiste una portanza (per unità di apertura) $l = l(y)$ che si può ottenere integrando lungo x all'ascissa y il carico aerodinamico:

$$l = l(y) \cong \int_{c(y)} \Delta p(x, y) dx \quad (1.7)$$

⁵Per ali semplici molto si può fare in un modo indiretto, una volta nota la portanza: sarà determinata nel par. (1.6) un'importante relazione tra la portanza e quella particolare forma di resistenza ad essa legata.

La naturale adimensionalizzazione di l è il coefficiente di portanza di profilo

$$C_l = C_l(y) = \frac{l(y)}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 c(y)} \quad (1.8)$$

Ovviamente

$$C_l \cong \int_0^1 \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} d\left(\frac{x}{c}\right) = \int_0^1 \gamma d\left(\frac{x}{c}\right) \quad (1.9)$$

avendo introdotto il carico adimensionale lungo il profilo

$$\gamma(x/c) = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} \quad (1.10)$$

definito in ogni punto della corda e che può essere “letto” come quella grandezza che, integrata lungo la corda (normalizzata) fornisce proprio il coefficiente di portanza⁶.

Per l’ala infinita in molti casi la portanza l può calcolarsi anche valutando la circolazione Γ della velocità attorno al profilo, giusto il Teorema di Kutta-Joukowski in base al quale è

$$l = \rho_\infty V_\infty \Gamma \quad (1.11)$$

Un modo comodo per calcolare la portanza di un profilo può essere quindi l’integrazione della velocità tangenziale V_t sul corpo.

CARICO ALARE: CARICO LUNGO L’APERTURA

A questo punto un’ala può essere pensata come costituita da (infiniti) profili alari, spesso diversi l’uno dall’altro. La portanza di un’ala può comunque essere calcolata come

$$L = \int_{-b/2}^{+b/2} l(y) dy \quad (1.12)$$

e, dalla (1.8),

$$L = \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 C_l(y) c(y) dy = \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 b^2 \int_{-1}^1 \frac{C_l(y) c(y)}{2b} d\left(\frac{y}{b/2}\right) \quad (1.13)$$

Introducendo un’ascissa trasversale adimensionale $\eta = \frac{y}{b/2}$ si ha

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 S} = \frac{b^2}{S} \int_{-1}^1 \frac{c C_l}{2b} d\left(\frac{y}{b/2}\right) = \mathcal{R} \int_{-1}^1 \frac{c C_l}{2b} d\eta = \mathcal{R} \int_{-1}^1 \gamma(\eta) d\eta \quad (1.14)$$

avendo introdotto, in analogia con il carico di profilo ed indicandolo con il medesimo simbolo γ , il carico adimensionale lungo l’apertura:

$$\gamma(\eta) = \frac{c(\eta) C_l(\eta)}{2b} \quad (1.15)$$

La formula (1.14) è analoga alla (1.9), a parte la presenza del fattore di scala \mathcal{R} . I due carichi, quello di profilo e quello lungo l’apertura, sono diversi nella sostanza, ma analoghi.

Si osserva qui esplicitamente che per un’ala le definizioni corrette di l e C_l sono la (1.7) e la (1.8). Invece l’utilizzo del Teorema di Kutta-Joukowski (1.11) è alla base della Teoria della Linea Portante di Prandtl (e delle teorie da essa derivate), nella quale si fa l’ipotesi che il flusso su ciascun profilo dell’ala sia di tipo bidimensionale.

Il carico lungo l’apertura è una grandezza fondamentale. La conoscenza della distribuzione di carico $\gamma(\eta)$ è il principale dato aerodinamico che occorre calcolare per una valutazione del

⁶Altre significative considerazioni saranno fatte quando si presenterà la teoria del profilo sottile.

comportamento aerodinamico di un'ala, e quindi del velivolo parziale e del velivolo completo. Inoltre la distribuzione di carico interviene in modo decisivo in considerazioni di tipo strutturale.

In pratica la distribuzione di carico è la distribuzione della portanza lungo l'apertura. Come suggerisce la definizione, per ciascun profilo dell'ala i contributi della corda c (estensione fisica) e del coefficiente di portanza C_l (attitudine a portare) hanno pari importanza.

Il progettista in genere ha un'idea precisa di come debba essere la distribuzione del carico lungo l'apertura, e disegnerà l'ala in modo da avere quel carico, ma realizzare un'ala soddisfacente da tutti i punti di vista è un lavoro complesso che richiede notevole esperienza ed abilità. I vincoli che deve soddisfare la distribuzione di carico sono molteplici, aerodinamici e non, e di norma il progettista raggiunge un compromesso tra diverse esigenze, il cui soddisfacimento ne è fortemente condizionato. Alcune tra queste sono

- la bassa resistenza,
- un buon comportamento allo stallo,
- la compatibilità con le esigenze strutturali e di peso,
- l'ottimizzazione della configurazione insieme alla fusoliera ed alle altre superfici portanti (impennaggi) e alle superfici mobili di controllo e di ipersostentazione.

La distribuzione di carico può essere diversa sulle due semiali, Fig. 1.7: per effettuare la virata, ad esempio, occorre generare uno squilibrio della portanza generata dalle due semiali. Ed inoltre quando la portanza sull'ala è nulla il carico lungo l'apertura può non essere identicamente nullo.

È importante poter trattare nel modo più efficiente qualunque tipo di distribuzione di carico, mentre deve essere sempre possibile poter individuare il contributo dei diversi componenti dell'architettura di un velivolo: in tal senso si introducono due diverse decomposizioni di fondamentale importanza.

Decomposizioni del carico lungo l'apertura: carico simmetrico e carico antisimmetrico

Una qualunque distribuzione di carico $\gamma(\eta)$ può essere sempre decomposta in due diverse distribuzioni, Fig. 1.7, una simmetrica, $\gamma_s(\eta)$, con $\gamma_s(\eta) = \gamma_s(-\eta)$, ed una antisimmetrica, $\gamma_a(\eta)$, per la quale è $\gamma_a(\eta) = -\gamma_a(-\eta)$, con $\gamma_a(0) = 0$, secondo le relazioni

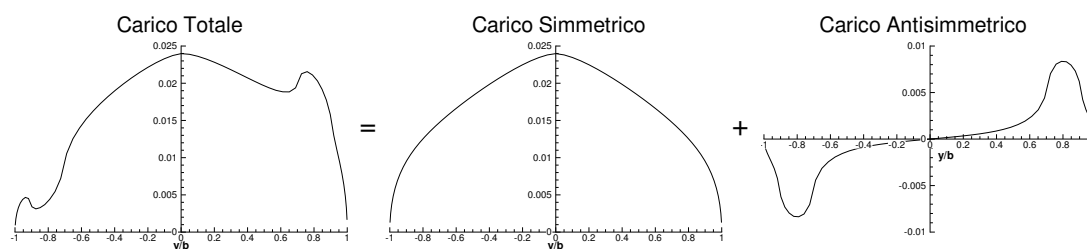


Figura 1.7: Decomposizione del carico lungo l'apertura

$$\gamma_s(\eta) = \frac{1}{2}[\gamma(\eta) + \gamma(-\eta)] \quad (1.16)$$

$$\gamma_a(\eta) = \frac{1}{2}[\gamma(\eta) - \gamma(-\eta)] \quad (1.17)$$

Il carico simmetrico (1.16) è relativo a condizioni di volo senza momento di rollio (crociera, salita o discesa), e le forze agenti sulle semiali sono uguali. Per la condizione antisimmetrica relativa alla (1.17) la portanza è nulla (c'è solo una coppia di rollio).

Decomposizioni del carico simmetrico lungo l'apertura: carico basico e carico addizionale

Per quel che concerne il carico simmetrico, l'esperienza ha dimostrato l'utilità di un'ulteriore decomposizione, Fig. 1.8.

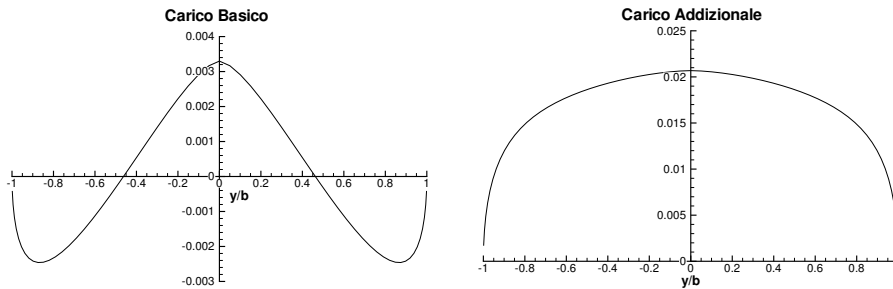


Figura 1.8: Carico basico e carico addizionale

- Il carico basico (lungo l'apertura) è quello che esiste con una portanza “netta” nulla sull'ala. Esso è dovuto allo svergolamento lungo l'apertura, definito come l'angolo formato tra la retta di portanza nulla del profilo alla stazione y ed una retta di riferimento (in genere la retta di portanza nulla alla radice): è questo lo svergolamento aerodinamico. Lo svergolamento geometrico è il calettamento relativo tra la corda di un profilo e la corda di riferimento, ed è semplice passare dallo svergolamento aerodinamico a quello geometrico, e viceversa, noto l'angolo di attacco di portanza nulla α_{zI} di ciascun profilo. Si fa presente che α_{zL} , l'angolo di attacco dell'ala per il quale il carico è quello basico, non è noto quando si è fissata la legge di svergolamento: esso deve essere calcolato.
- Il carico addizionale dà il valore della portanza agente sull'ala. Esso è relativo all'ala non svergolata (aerodinamicamente), la sua distribuzione è funzione della forma in pianta dell'ala e del tipo di profili utilizzati, e la sua intensità (e quindi il C_L) dipende dall'angolo d'attacco misurato a partire dall' α_{zL} . In campo lineare uguali incrementi dell'angolo d'attacco danno lo stesso incremento del carico.

1.6 Il modello più semplice per il funzionamento dell'ala: la Teoria Globale

Si possono ricavare alcuni risultati fondamentali per l'aerodinamica di un aeromobile mediante un modello estremamente semplificato, basato sui principi fondamentali della meccanica e su un'approssimazione abbastanza rozza del fenomeno del volo. Come prima detto, è l'accelerazione sulle particelle d'aria connessa con la deviazione loro impressa dalle superfici portanti del velivolo nel moto relativo che genera la forza aerodinamica.

Orbene, il Modello Globale per portanza e resistenza indotta sostituisce il fenomeno “Velivolo in Volo Rettilineo Uniforme” con il fenomeno “Condotto a Sezione Costante in Regime Unidimensionale Stazionario”, Fig. 1.9. Si assume che le particelle d'aria perturbate dall'aeromobile sono solo quelle di un tubo di flusso curvo le cui sezioni trasversali di ingresso ed uscita hanno aree A_I ed A_U uguali, di valore A collegato al quadrato dell'apertura alare b : si può scrivere $A = k_m \pi b^2 / 4$, essendo k_m un coefficiente di ordine di grandezza unitario che corregge al valore appropriato l'area della sezione trasversale, pensata circolare, del tubo di flusso⁷. Il significato più semplice del modello è che l'azione mutua tra fluido ed ala (o velivolo) è uguale, in termini globali, a quella che si sviluppa sulle pareti di un condotto ad asse curvo, e cioè con un gomito: la spinta sulle pareti

⁷In realtà le sezioni I e U hanno forma non necessariamente circolare; inoltre tra I e U non è necessario che il condotto sia a sezione rigorosamente costante, né che il moto sia unidimensionale.

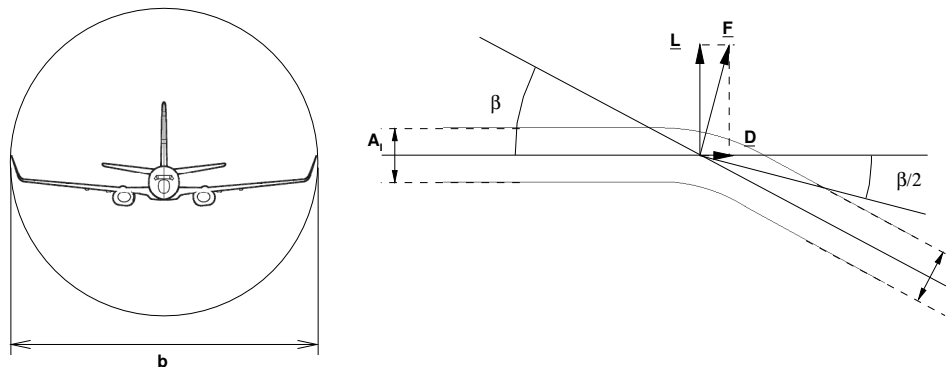


Figura 1.9: Deviazione del tubo di flusso mediante un gomito

è l'equivalente della forza aerodinamica sull'ala. Nel moto all'interno del tubo di flusso gli effetti della viscosità sono trascurati.

Il modello si basa su semplici considerazioni per portata, quantità di moto ed energia cinetica. Nelle sezioni I e U il moto è quindi unidimensionale, è $|\mathbf{V}_I| = |\mathbf{V}_U| = V (= V_\infty)$, la densità è ρ . A causa della curvatura del condotto le particelle che a monte in I hanno velocità uniforme sono perturbate, e in particolare a valle avranno subito una deviazione β collegata, nell'analogia con il velivolo, all'angolo d'attacco. La reazione a tale deviazione si estrinseca in una forza, di natura fluidodinamica, che ha una componente portante ed una resistente il cui valore è collegato a quello della portanza.

Sia ora $\dot{m} = \rho k_m \pi b^2 V / 4$ la portata attraverso il condotto. La spinta \mathbf{F} agente sulle pareti del condotto si calcola come

$$\mathbf{F} = \dot{m}(\mathbf{V}_U - \mathbf{V}_I) = \dot{m}\Delta\mathbf{V} \quad (1.18)$$

(risultato esatto), ed è quindi diretta lungo la bisettrice dell'angolo formato tra le direzioni dell'asse del condotto in I e U , verso l'estradosso.

Nell'analogia con il velivolo compaiono quindi la portanza e la resistenza L e D come le componenti di \mathbf{F} , Fig. 1.9. Si nota subito che la resistenza D esiste solo perché si deve realizzare una forza verticale necessaria ad equilibrare il peso, Fig. 1.5: si parla allora di "resistenza indotta dalla portanza" o, *tout court*, resistenza indotta.

Tralasciando, per ora, la genesi fisica dettagliata della forza \mathbf{F} , il risultato (1.18) si ricava dall'applicazione combinata delle prime due leggi fondamentali (quella della massa e quella della quantità di moto): secondo la (1.18) una determinata spinta si può ottenere o deviando poco una grande massa di fluido oppure deviando molto una piccola massa di fluido.

Considerando ora "utile" e "dissipata" le potenze \dot{E} e \dot{E}_d associate rispettivamente all'energia cinetica del fluido prima della deviazione e all'energia cinetica a valle relativa alla componente verso il basso della velocità, sarà allora

$$\dot{E} = \frac{1}{2}\dot{m}V^2 \quad \dot{E}_d = \frac{1}{2}\dot{m}|\Delta\mathbf{V}_v|^2 \quad |\Delta\mathbf{V}_v| = |\Delta\mathbf{V}| \cos \frac{\beta}{2}$$

Dunque rispetto a $|\Delta\mathbf{V}|$ la spinta cresce linearmente, l'energia "dissipata" cresce quadraticamente. Tanto basta per concludere, che a parità di spinta, se si vogliono limitare le perdite è necessario accelerare verticalmente al minimo una massa di fluido quanto più grande possibile: β (e dunque α) deve essere quanto più piccolo possibile, compatibilmente però con i vincoli derivanti da considerazioni diverse da quelle di minima "dissipazione". Il fatto che l'angolo di attacco debba essere molto piccolo nelle condizioni di crociera consegue da queste considerazioni.

Assumendo quindi che $|\beta| \ll 1$ (1 radiante, ovviamente, e quindi con β dell'ordine di grandezza del grado), un po' di formalismo consente di completare lo sviluppo del Modello Globale. Innanzitutto, sarà $\Delta V \cong V\beta$, e quindi $\beta \cong \Delta V / V$. La portanza L si calcola come

$$L = |\mathbf{F}| \cos(\beta/2) \cong |\mathbf{F}| = \dot{m}\Delta V = \rho k_m \pi \frac{b^2}{4} V^2 \beta \quad (1.19)$$

e dipende quadraticamente dall'apertura alare e dalla velocità di volo, mentre varia linearmente con la deviazione della corrente, e quindi con l'angolo d'attacco. Il coefficiente di portanza è allora

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 S} = k_m \frac{\pi}{2} \mathcal{AR} \beta \quad (1.20)$$

Per la resistenza indotta D_i si può procedere in due modi (il risultato sarà ovviamente lo stesso). Si può subito scrivere

$$D_i = |\mathbf{F}| \sin(\beta/2) \cong L\beta/2 = \frac{1}{2} L \frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{2} \frac{L^2}{\dot{m}V} = \frac{1}{2} \frac{L^2}{k_m \pi \rho \frac{b^2}{4} V^2} \quad (1.21)$$

essendo $\Delta V/V = L/(\dot{m}V)$. In alternativa, si può tenere conto del fatto che associata alla resistenza D_i è necessaria una spinta T uguale ed opposta alla resistenza: la potenza impegnata per produrre la spinta deve essere uguale alla potenza dissipata \dot{E}_d . Pertanto sarà

$$TV = D_i V = \dot{E}_d = \frac{1}{2} \dot{m} (\Delta V)^2 \quad (1.22)$$

e con semplici passaggi si ritrova il risultato (1.21): la resistenza indotta dipende dal quadrato della portanza (e dunque, nel volo livellato, del peso).

Piuttosto che trovare esplicitamente il coefficiente di resistenza indotta C_{D_i} , è più utile derivare la relazione tra C_{D_i} e C_L : con semplici sostituzioni si ottiene la fondamentale relazione

$$C_{D_i} = \frac{C_L^2}{k_m \pi \mathcal{AR}} \quad (1.23)$$

La formula (1.23) è universalmente valida ogni volta che c'è lo sviluppo di una forza portante. Questo risultato applicato agli aeromobili è di importanza centrale, ancorché ricavato da una teoria che modella molto alla lontana il fenomeno del volo. In quanto ricavato da leggi fondamentali, esso *non ha bisogno di essere verificato* con altri modelli meglio approssimati, bensì *serve per convalidare* tali modelli: il lettore ricorda certamente che un risultato identico viene trovato con la Teoria di Prandtl per l'ala, e non poteva essere diversamente...

Piuttosto, il ricorso alla Teoria di Prandtl per l'ala è utile per chiarire il ruolo del parametro k_m , detto "Fattore di Oswald". In effetti è ben noto, e sarà poi mostrato in (4.3), che secondo la Teoria di Prandtl per l'ala di minima resistenza indotta, ala detta ellittica, è $k_m = 1$, mentre per qualunque ala diversa da quella ellittica è $k_m < 1$. Si può concludere quindi che, se si assume circolare la sezione trasversale del condotto di riferimento nella Teoria Globale, per l'ala ellittica il diametro del condotto è esattamente uguale all'apertura alare, per un'ala non ellittica è *minore* dell'apertura alare: dunque in quest'ultimo caso c'è una minore portata di lavoro, dunque per sviluppare la stessa portanza è necessaria una maggiore deviazione, dunque la resistenza indotta è maggiore. In realtà uno dei principali obbiettivi delle teorie alari è proprio la determinazione di k_m .

Comunque in generale la resistenza indotta si riduce all'aumentare dell'allungamento, che nel progetto di un aeromobile viene tenuto elevato per quanto è possibile, e per la sua minimizzazione occorre poi un certo lavoro, anche di dettaglio, su tutti gli altri parametri che caratterizzano l'ala (forma in pianta, svergolamento, estremità). Si fa presente che la resistenza indotta è un'aliquota non piccola della resistenza di un aeromobile (20 ÷ 50%), in qualunque condizione di volo.

Si sintetizzano qui i notevoli risultati della Teoria Globale.

- Per sviluppare la portanza si deve accettare anche la resistenza: in questo modello la resistenza si sviluppa (anche se si è in moto non viscoso) solo se c'è portanza (resistenza indotta dalla portanza). La resistenza indotta cresce quadraticamente con il peso, ed è inversamente proporzionale al quadrato dell'apertura alare e al quadrato della velocità.

- La portanza è direttamente collegata alla deviazione determinata dalla curvatura del tubo di flusso, e dunque varia linearmente con l'angolo d'attacco; inoltre cresce con il quadrato dell'apertura dell'ala.
- L'efficienza dell'ala è tanto migliore quanto maggiore è l'allungamento alare: conviene cioè, fissato il peso dell'ala, e dunque la portanza, avere una piccola deviazione di una grande massa di aria (detta ΔV l'accelerazione verticale deve essere $\frac{\Delta V}{V} \ll 1$). L'efficienza massima di un'ala è di ordine 10, si realizza ad assetti abbastanza veloci, per i quali la forza aerodinamica è principalmente portanza.
- L'angolo di deviazione del gomito β deve essere piccolo per essere rappresentativo del funzionamento di un'ala, e la forza aerodinamica (le cui componenti sono appunto portanza e resistenza) è inclinata di $\frac{\beta}{2}$ rispetto alla verticale. Questo risultato è molto importante se si immagina che l'ala, grosso modo, corrisponde al gomito del tubo di flusso: si può dire che sull'ala la deviazione della corrente è metà di quella che si ha infinitamente a valle. Si usa anche dire che la deviazione verso il basso si estrinseca per metà prima e durante l'attraversamento dell'ala, e per metà dal bordo di uscita fino all'infinito. È in base a questa considerazione che la Teoria di Prandtl per l'ala finita (Teoria della linea portante) ha, tra le sue assunzioni, quella che prevede che la deviazione della corrente sulla linea portante sia la metà della deviazione infinitamente a valle. È comunque impossibile valutare con la Teoria Globale la legge con la quale la deviazione dell'asse del tubo di flusso (verso il basso in caso di superficie portante, verso l'alto in caso di superficie deportante) si sviluppa verso valle, e fino al valore asintotico: nell'analogia con il velivolo pertanto non è possibile sapere con questo modello quale sia la direzione (globale) della corrente in corrispondenza dei piani di coda (per il corretto posizionamento dei quali quest'informazione è peraltro molto importante).
- La curva $C_L - C_{Di}$, la polare indotta, è una parabola passante per l'origine degli assi, che si appiattisce al crescere dell'allungamento alare, Fig. 1.10.

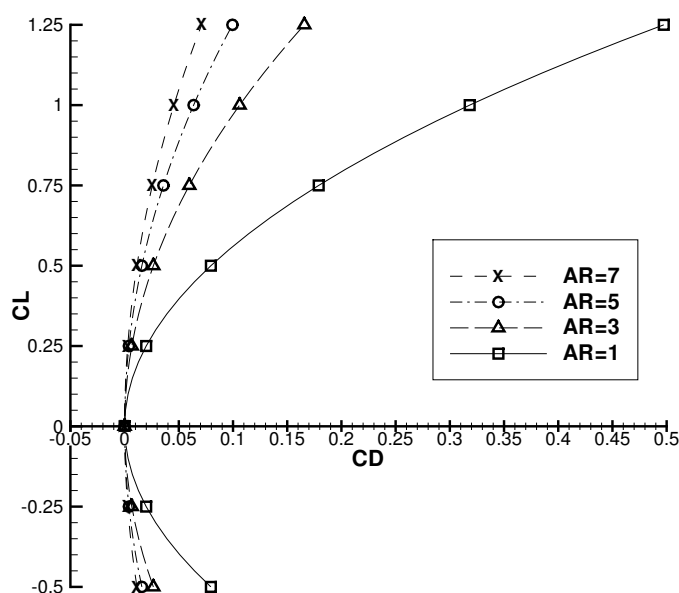


Figura 1.10: Polare indotta al variare dell'allungamento alare

Si ribadisce che i risultati qui trovati non vanno pensati come collegati ad un aeromobile o ad un'ala isolata: essi sono da intendersi sempre validi quando su un oggetto in moto relativo rispetto ad un fluido (un'autovettura, ad esempio) si sviluppa una forza con una componente

perpendicolare alla direzione del moto. Al più, una limitazione applicativa può esserci quando la deviazione globale impressa al fluido non è piccola.

1.6.1 La resistenza indotta a portanza nulla: *tubetti* di flusso

La Teoria Globale ora introdotta si riferisce ad un modello di flusso unidimensionale, almeno nelle sezioni di ingresso-uscita. Essa interpreta in modo significativo la genesi della resistenza indotta, ma solo quando il carico sull'ala è quello addizionale.

La resistenza indotta può esistere anche in condizioni di portanza nulla: al carico antisimmetrico ed al carico basico è associata una resistenza indotta, la quale pertanto deve essere più precisamente definita come indotta dalla *distribuzione di carico* (piuttosto che dalla portanza).

Dal punto di vista globale la cosa può essere vista considerando che a portanza nulla ma con distribuzione di carico non identicamente nulla la deviazione dell'aria sarà verso l'alto per una certa porzione di ala, verso il basso per la rimanente parte: anche se la portanza è globalmente nulla, una certa quantità di energia cinetica del moto relativo viene "dissipata" (nel senso precisato nel paragrafo precedente). Si può immaginare di utilizzare più tubi di flusso, ciascuno relativo ad una precisa porzione di ala, che lavorano in modo diverso l'uno dall'altro, Fig. 1.11.

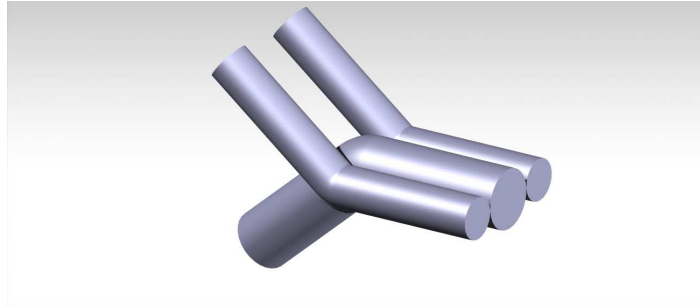


Figura 1.11: Resistenza indotta associata ad un carico basico: modellazione globale

1.7 Scia vorticoso e *downwash* sull'ala

È importante richiamare il fatto che a valle di un'ala è presente una scia vorticoso, legata alla distribuzione di carico sull'ala, con una struttura piuttosto complessa rispetto a quanto prevede la Teoria Globale. Nelle teorie alari per allungamenti medio-alti la scia è modellata con una densità di vortice (la vorticità libera). La relazione tra carico alare e vorticità libera si può trovare nell'ipotesi che il flusso sia bidimensionale in piani paralleli al piano $x - z$ (e quindi che i profili dell'ala "lavorino" in campo bidimensionale): la portanza $l(y)$, in generale definita dalla (1.7), può allora essere scritta come

$$l(y) = \rho_\infty V_\infty \Gamma(y) \quad (1.24)$$

essendo $\Gamma(y)$ la circolazione intorno al profilo all'ascissa y , variabile lungo l'apertura e nulla alle estremità, associabile ad un vortice di intensità variabile, detto vortice aderente. Si ricava quindi

$$\gamma = \frac{cC_l}{2b} = \frac{\Gamma}{bV_\infty} \quad (1.25)$$

Per i noti teoremi sui vortici in corrispondenza della variazione $d\Gamma$ su un tratto dy di ala

$$d\Gamma = \frac{d\Gamma}{dy} dy \quad (1.26)$$

occorre che all'ascissa y l'ala emani, verso valle, un vortice infinitesimo, detto vortice libero, di uguale intensità. La grandezza $\frac{d\Gamma}{dy}$ è una densità di vortice, ha le dimensioni di una velocità, e

si chiama vorticità; si usa dire che a valle di un'ala, e collegata al carico, esiste una superficie vorticosa di intensità

$$\gamma_{lib}(y) = \frac{d\Gamma(y)}{dy} = 2V_\infty \frac{d\gamma}{d\eta} \quad (1.27)$$

La scia giace sulla striscia del piano alare che va dal vortice aderente fino all'infinito a valle, con $-b/2 \leq y \leq +b/2$, Fig. 1.12a⁸.

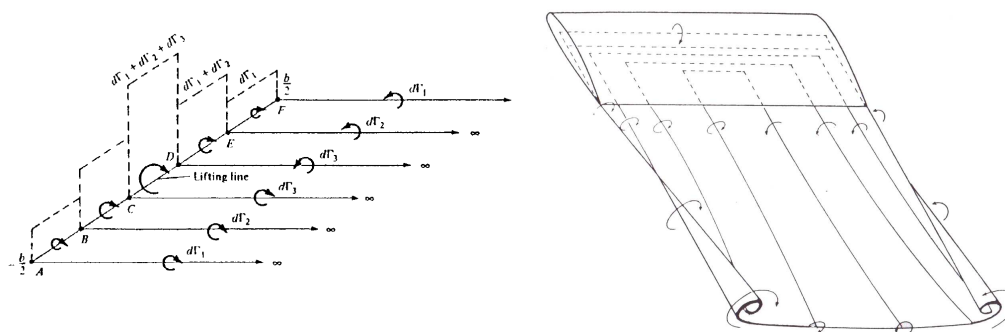


Figura 1.12: Scia a valle di un'ala. a) Modello di Prandtl, b) Scia non planare

Nelle teorie alari per ala diritta ed a freccia ciascun profilo viene visto come un elemento infinitesimo del vortice aderente, e si utilizza la relazione 2-D (1.24) (in particolare, la Teoria di Prandtl fa “scompare” del tutto l'estensione longitudinale dell'ala).

L'effetto della finitezza dell'ala viene introdotto attraverso un campo di velocità, praticamente perpendicolare al piano alare (il *downwash*), che modifica la corrente sul vortice: tale campo è indotto dalla vorticità libera (e, nel caso di ala a freccia, dalla componente assiale del vortice aderente⁹).

Rispetto a \mathbf{V}_∞ la velocità risultante sul vortice \mathbf{V}_{eff} cambia in intensità (in misura trascurabile) e direzione (poco), e cambia quindi anche l'angolo d'attacco di ciascun profilo dell'ala rispetto al valore nominale α : si parla di angolo di attacco effettivo α_{eff} , per il calcolo del quale è necessario valutare il *downwash* sull'ala. Ora questo calcolo è non semplice, sia perchè il *downwash* non è noto a priori (dipende proprio dalla distribuzione di carico che si intende calcolare), sia perchè in generale non è chiara, o meglio non è definibile, l'ascissa x alla quale si dovrebbe calcolare, per ogni valore di y .

Il modello di Prandtl assume per il *downwash* sull'ala, in ogni punto lungo l'apertura, la metà del *downwash* nel corrispondente punto improprio infinitamente a valle, nel piano di Trefftz, il cui calcolo è possibile effettuare; una proposta significativa per correggere la relazione tra il *downwash* nel piano di Trefftz e quello sull'ala per allungamenti medi e bassi viene presentata in [1]. L'assunzione di Prandtl è basata su un fondamentale risultato della Teoria Globale: la forza aerodinamica è perpendicolare alla bisettrice dell'angolo tra la direzione della corrente asintotica e quella della corrente a valle, lontano dall'ala; essa però funziona solo nel caso di ala diritta¹⁰.

⁸Si fa presente qui esplicitamente, e la cosa sarà richiamata nel paragrafo (4.3), che la superficie vorticosa nella realtà esiste, è fisica, e non giace in un piano, Fig. 1.12b, specie per ali fortemente caricate: è ben noto il fenomeno del *rolling up* (cfr. anche figura di copertina). Forma ed evoluzione della scia possono essere determinate solo mettendo in conto l'interazione tra carico alare e scia di forma non prefissata: il problema che la Teoria di Prandtl pone in forma linearizzata in realtà è non lineare.

⁹La componente assiale del vortice aderente motiva lo spostamento dei carichi legato all'introduzione della freccia sia positiva che negativa, ed impedisce che nella modellistica “scompaia” l'estensione longitudinale dell'ala.

¹⁰Diverso è il caso del modello vorticoso per l'ala a freccia, per la quale la collocazione del vortice aderente è invece necessaria, cfr. (4.4), e viene fatta sulla base delle proprietà del punto neutro posteriore (4.2.8), un importante risultato della Teoria del Profilo Sottile.

Evidentemente, come nel Modello Globale non ha senso un preciso posizionamento del velivolo (il gomito del tubo può stare dove vuole!), così nel modello di Prandtl il vortice aderente non ha una collocazione definita lungo l'asse velivolo x : a volte, impropriamente, si scrive che il vortice aderente è posto lungo la linea dei fuochi, e invece nella Teoria di Prandtl la dimensione x scompare.

La resistenza indotta nelle teorie alari si calcola tenendo conto che la portanza agente sul vortice aderente in realtà è perpendicolare alla velocità effettiva. Questa portanza diventa la forza aerodinamica sviluppata dal profilo: il contributo alla portanza dell'ala -che è sempre la componente perpendicolare alla velocità asintotica della forza aerodinamica- si riduce (poco), mentre il contributo alla resistenza indotta è la componente lungo la velocità asintotica.

1.8 Impostazione del test

In generale nello studio di una disciplina è conveniente, e dunque abituale, il ricorso allo schema di affrontare fenomeni per approssimazioni successive: si costruisce un modello semplice e lo si modifica introducendo aspetti via via più complessi in modo da approssimare al meglio la realtà.

Considerando il caso di un aeromobile inteso come “veicolo pesante che vola” (dunque con la necessità di avere la fusoliera ed un'ala, elemento necessario a generare la portanza per equilibrare il peso) il modello '0' è il Modello Globale già visto, che mostra come associata alla portanza dell'ala vi è una resistenza anche in assenza di viscosità: si introduce dunque l'esigenza della propulsione. Lo studio aerodinamico di fusoliera e superfici portanti viene quindi affrontato indipendentemente, dando un rilievo decisamente maggiore all'ala, per la quale si tratta prima il caso particolare dell'ala infinita dritta, il profilo alare, e a partire dalla soluzione del profilo si studia l'ala. Si passa quindi allo studio degli altri componenti del velivolo (la fusoliera, la propulsione, ecc.). Infine si procede ad un'integrazione complessiva.

Una buona traiettoria in Aerodinamica è iniziare ad analizzare il campo di moto non viscoso (si suppone nullo il coefficiente di viscosità μ) ed incomprimibile (la densità ρ non varia, il che corrisponde a dire che il numero di Mach M è nullo in tutti i punti del campo di moto); si introducono poi gli effetti di comprimibilità e viscosità. E dunque per la stesura di questo testo si è scelto di effettuare lo studio di profilo ed ala in campo non viscoso, prima incomprimibile e poi comprimibile, introducendo quindi gli effetti della viscosità. Successivamente si sono trattati gli aspetti legati alla propulsione, ed infine si è affrontato il degrado delle prestazioni aerodinamiche causato dalla formazione di ghiaccio in volo.

1.9 Funzionamento del profilo in ambito non viscoso incomprimibile

In questo paragrafo si introducono e si discutono le caratteristiche principali dei profili alari ad un componente con superficie impermeabile immersi in una corrente asintoticamente uniforme così come valutabili sulla base del modello di moto stazionario, non viscoso, incomprimibile ed irrotazionale. Certamente il lettore ha conoscenze sull'argomento dalle nozioni di Aerodinamica: esso però viene qui trattato per evidenziare alcuni punti fondamentali.

La Fig. 1.13 rappresenta l'andamento di alcune delle linee di corrente intorno ad un profilo convenzionale. Si evidenzia il comportamento della linea di corrente che raggiunge il profilo nel punto di ristagno A , e che si biforca in A ricomponendosi al bordo di uscita in B . L'asimmetria del campo di moto, e quindi della distribuzione delle pressioni sul corpo, determina una forza portante ed un momento di beccheggio.

È noto, e sarà richiamato in (2.7), che nelle ipotesi che si sono assunte il problema della determinazione del campo di moto è retto dall'equazione di Laplace, accoppiata ad appropriate condizioni al contorno. Le soluzioni del problema matematico possono essere esatte oppure approssimate, e si possono calcolare per via analitica oppure per via numerica.

Un risultato comunque generale e fondamentale (ed anche “paradossale”...) è che in questo modello un oggetto qualunque (bidimensionale) non presenta resistenza aerodinamica; un altro risultato, che coincide con quello ora enunciato, è che la corrente a valle assume la stessa direzione

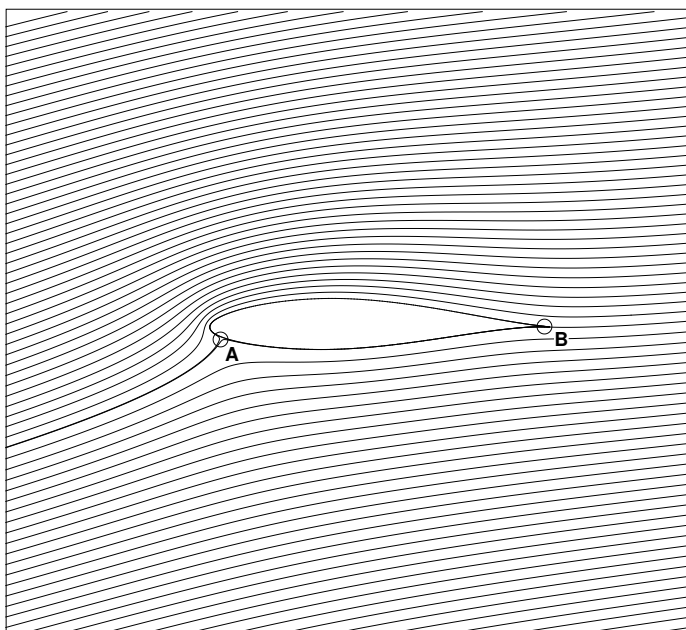


Figura 1.13: Una descrizione del campo di moto attorno al profilo

che aveva a monte (non c'è *downwash*). Nella realtà comunque la resistenza aerodinamica c'è, cresce, in generale, all'aumentare dell'ingombro che l'oggetto presenta rispetto alla direzione del moto relativo, e quindi cresce all'aumentare dell'estensione trasversale, misurata dallo spessore, e dell'angolo di attacco. Le leggi con cui la resistenza aumenta con lo spessore sono complesse e non facilmente sintetizzabili: ma per limitare la resistenza i profili alari hanno uno spessore per quanto possibile limitato. Il 13% è una buona indicazione orientativa per lo spessore percentuale di un profilo, indicazione mediata tra le diversissime applicazioni che si possono avere in Aerodinamica Applicata. Quindi l'estensione trasversale dei profili è di un ordine di grandezza minore dell'estensione longitudinale.

IMPORTANZA DELLA TEORIA DEL PROFILO SOTTILE

Assume quindi un'importanza straordinaria la Teoria del Profilo Sottile, che si propone di calcolare il comportamento aerodinamico dei profili alari quando l'ingombro trasversale tende ad annullarsi: in concreto, si parla di profili di piccolo spessore e piccola curvatura che lavorano a piccoli angoli di attacco. In (4.2) si introdurrà la fondamentale Teoria del Profilo Sottile, i cui risultati sono alla base della comprensione del funzionamento dei profili alari, e forniscono una gran mole di dati utile sia per l'analisi che per il *design*¹¹.

La Teoria del Profilo Sottile viene presentata in qualunque testo di Aerodinamica, ad esempio in [15] e [4] secondo l'impostazione di Glauert. Ma per questo testo il prof. Losito ha fatto riferimento alla più generale impostazione di Lighthill, che mette in conto simultaneamente lo spessore, l'angolo di attacco e la curvatura, e mediante la quale si riesce a valutare analiticamente l'errore che si commette quando, nell'applicazione, ci si allontana dalle ipotesi alla base della teoria.

Trattandosi di una teoria di piccole perturbazioni, ed essendo il modello di moto retto da un'equazione lineare, quella di Laplace, gli effetti saranno piccoli se le perturbazioni sono piccole, e sarà possibile disaccoppiare e sovrapporre gli effetti di spessore, curvatura ed angolo di attacco, introducendo però approssimazioni in genere non piccole.

¹¹Esistono teorie simili, ugualmente importanti, anche per ali in moto incompressibile, o per profili ed ali in moto comprimibile: un comune denominatore sta nel fatto che le superfici aerodinamiche devono essere sottili.

Ovviamente al crescere di uno o più dei tre parametri da cui dipende la perturbazione diventano sempre più significativi i contributi non lineari e di accoppiamento. Di norma le soluzioni ingegneristiche non possono limitarsi ad una semplice sovrapposizione di effetti.

1.9.1 Soluzioni esatte

Nel Cap. 5 si introdurranno i metodi numerici esatti che consentono di calcolare soluzioni generali (ossia campi di moto intorno a corpi di forma arbitraria a qualunque angolo di attacco).

Risultati importanti quantitativi possono venire dalla soluzione (analitica) del campo di moto intorno al cilindro circolare, [1], a partire dalla quale si ottengono soluzioni di riferimento in Aerodinamica. Tra i tanti esempi che si possono portare, è opportuno citare alcune famiglie di profili (Joukowski, Trefftz, Von Mises), l'applicazione del metodo per il problema di disegno, [11], la soluzione di Williams, [13], per la generazione di profili a due componenti. Il metodo è quello, classico, delle Trasformazioni Conformi, [11], e sembra pertanto errato sostenere che esso sia obsoleto (ancorché poco applicabile industrialmente in modo diretto).

Al fine di fornire un quadro preliminare ma abbastanza esaustivo degli effetti di angolo d'attacco, spessore e curvatura si descrive di seguito il campo di moto intorno al cilindro circolare, base della trattazione esatta dell'aerodinamica dei profili alari e, in generale, di tutti i campi di moto bidimensionali, presentando quindi la soluzione dell'ellisse, che contiene la soluzione del cilindro ma che da questa deriva, ed infine trattando campi di moto intorno a profili alari.

IL CASO DEL CILINDRO

È semplice mostrare che un campo in cui la linea di corrente detta di ristagno (per la quale in due suoi punti la velocità si annulla, e tra questi punti c'è una biforcazione) descrive in un suo tratto un cerchio può essere ottenuto mediante combinazione di una corrente uniforme, di una doppietta e di un vortice (di intensità, quest'ultimo, non troppo grande). Dualmente, il campo di moto attorno al cilindro può essere ottenuto come combinazione di queste tre entità, fissandone opportunamente le intensità.

Solo se l'intensità del vortice è nulla il campo di moto risulta essere a portanza nulla, con simmetria doppia. Se il vortice ha un'intensità non nulla c'è portanza, ed inoltre la simmetria è una sola, ed è rispetto ad un asse ortogonale alla direzione della corrente asintotica. Inoltre il campo di moto è identico se si invertono i versi delle velocità asintotiche a monte ed a valle (i versi delle velocità locali si invertono, ma la traccia delle linee di corrente rimane la stessa).

Non c'è convenienza in questo caso (ed in generale) a riferirsi ad un sistema di assi vento. Si preferisce ruotare il sistema degli assi vento in modo da avere uno dei due punti di ristagno, quello posteriore, in un punto preciso del cerchio (bordo di uscita), indipendentemente dall'inclinazione della corrente. Questo fatto permetterà di trattare adeguatamente il passaggio dal cilindro ai profili, realizzati con un punto angoloso in modo che il ricongiungimento delle linee di corrente superficiali avvenga appunto al bordo di uscita (se ben definito!).

È importante richiamare un risultato teorico esatto, e relativo solo cilindro circolare, portante e non portante: i tempi che le particelle a contatto con la superficie impiegano a percorrere il tratto sul dorso e quello sul ventre, a partire dal punto di ristagno anteriore e fino a quello posteriore, sono uguali. Questo fa comprendere come viene fuori la portanza sul cilindro: se le distanze percorse lungo il cilindro sono diverse tra dorso e ventre, mentre il tempo di percorrenza è lo stesso, velocità media delle particelle e pressione media sulla superficie saranno diverse, e dunque ci sarà forza risultante non nulla. Questo risultato, non generalizzabile a tutte le forme bidimensionali, viene spesso richiamato all'inizio dello studio delle Scienze del Volo per motivare euristicamente la genesi della forza aerodinamica portante come risultante dalla differenza di pressione (media) tra dorso e ventre.

PARTICOLARIZZAZIONE ALL'ELLISSE DELLA SOLUZIONE DEL CILINDRO

Si introducono alcune proprietà del campo di moto portante stazionario non viscoso incomprimibile irrotazionale intorno all'ellisse che si possono dedurre dalla soluzione analitica ottenuta attraverso

il metodo delle Trasformazioni Conformi. In particolare, detti α l'angolo d'attacco (in radianti), V_t la velocità tangenziale sul profilo (positiva se orientata in senso orario), e τ lo spessore relativo (rapporto dei diametri dell'ellisse), è notevole la formula

$$\frac{V_t}{V_\infty} = (1 + \tau) \frac{\sqrt{1 - x^2} \cos \alpha \pm (1 - x) \sin \alpha}{\sqrt{1 - x^2 + \tau^2 x^2}} \quad (-1 \leq x \leq +1) \quad (1.28)$$

Il bordo di uscita, punto $(1, 0)$, è il punto da cui si distacca la vena fluida, e nel quale è verificata la condizione di regolarità del flusso (detta anche condizione di Kutta). La (1.28) mostra in modo esatto il comportamento di questo particolare profilo al variare dello spessore e dell'angolo d'attacco, prevedendo come casi particolari il cilindro circolare ($\tau = 1$), la lastra piana ($\tau = 0$) ed il flusso intorno ad un punto di ristagno ($\tau \rightarrow \infty$).

Sono fondamentali, in particolare, le seguenti considerazioni, Fig. 1.14.

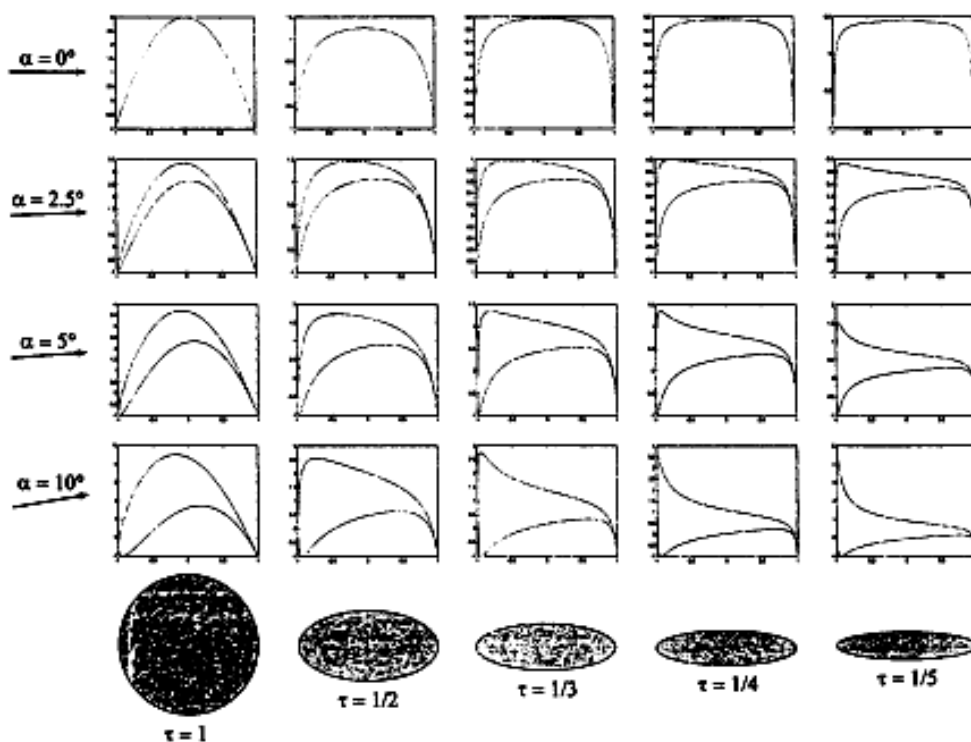


Figura 1.14: Coefficiente di pressione sull'ellisse al variare di α e τ

- Al crescere di α , fissato τ
 - la posizione del punto di velocità massima (e quindi di massima espansione), punto detto cresta nel gergo aerotecnico, avanza verso il bordo d'attacco, a partire dalla mezzeria per $\alpha = 0$;
 - la velocità massima aumenta, insieme con il livello di espansione e, di conseguenza, aumentano i cosiddetti gradienti di pressione;
 - il punto di ristagno anteriore si sposta verso valle e sul ventre (per $\alpha > 0$);
 - nel piano $(x/c - C_p)$ l'area racchiusa tra le curve rappresentative della distribuzione di pressione del ventre e del dorso (area che misura il valore del coefficiente di portanza) aumenta dal valore nullo che si ha per $\alpha = 0$, (allorquando tali curve sono coincidenti e sovrapposte);

- per piccoli angoli di attacco vale la relazione $C_l = 2\pi(1 + \tau)\alpha$, quindi la portanza varia linearmente con l'angolo di attacco secondo la legge del tipo $C_l = C_{l\alpha}\alpha$, essendo $C_{l\alpha} = 2\pi(1 + \tau)$ il gradiente della retta di portanza, che misura l'incremento del coefficiente di portanza corrispondente all'aumento unitario dell'angolo d'attacco (è evidente il contributo dello spessore alla portanza);
 - il centro di pressione CP, che è il punto di intersezione tra la retta lungo la quale agisce la forza aerodinamica ed il piano alare (la corda nel caso presente del profilo) si sposta in avanti (verso il bordo di attacco).
- Al diminuire di τ , fissato α
 - le variazioni di velocità diventano sempre più brusche;
 - per il caso limite della lastra piana ($\tau = 0$) è $C_{l\alpha} = 2\pi$, sul bordo di attacco per $\alpha \neq 0$ c'è sempre una singolarità della velocità, mentre per $\alpha = 0$ il campo di moto resta ovunque imperturbato;
 - il punto di ristagno anteriore non si sposta.

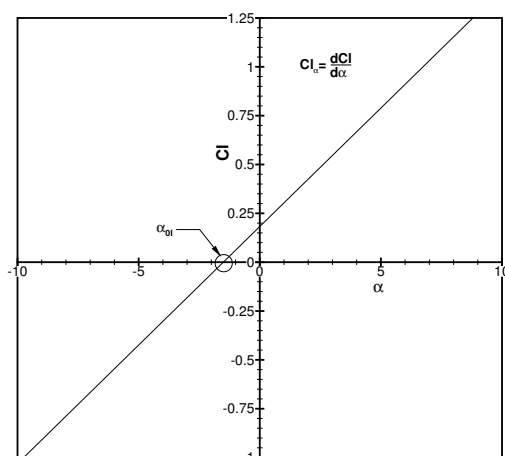


Figura 1.15: La retta di portanza dei profili

PROFILI ALARI

Il comportamento di un profilo alare in campo non viscoso incomprimibile è riconducibile per molti aspetti a quello dell'ellisse (che può sempre essere vista come un profilo alare, simmetrico e disegnato particolarmente male nella parte poppiera...): in particolare, per piccoli valori dell'angolo di attacco l'andamento del coefficiente di portanza in funzione dell'angolo di attacco è lineare.

Si può completamente caratterizzare l'aerodinamica non viscosa del profilo mediante pochi parametri, legati alla geometria del profilo: è necessario quindi fare riferimento alla "decomposizione" della geometria del profilo in spessore e linea media, cfr. (3.2), in modo da individuare le giuste dipendenze.

I parametri fondamentali sono tre.

1. Gradiente della retta di portanza $C_{l\alpha}$. La pendenza della retta di portanza nel piano ($C_l - \alpha$) dipende principalmente dallo spessore percentuale massimo τ : basta quindi riferirsi alla distribuzione di spessori del profilo. Una formula valida per valori di τ di interesse aeronautico è $C_{l\alpha} = 2\pi(1 + k\tau)$, nella quale k è un parametro dipendente dalla geometria (k è la vera incognita delle teorie del profilo alare in campo incomprimibile non viscoso!). Un plausibile valore per k è $k = .77$ (per l'ellisse è $k = 1$, come si è visto). Quindi la pendenza della retta di

portanza cresce con legge lineare con lo spessore a partire dal valore $C_{l\alpha} = 2\pi$, caratteristico dei profili “infinitamente sottili”, qual è la lastra piana. In effetti, a parità di angolo di attacco (a cabrare) lo spessore crescente fa aumentare l'intensità degli scorrimenti sul dorso e sul ventre, come si vede dalla (1.28), ma l'incremento sul dorso sarà maggiore. L'aumento lineare di $C_{l\alpha}$ con τ si ha fino a spessori percentuali intorno al 15%; per valori più elevati l'incremento reale non è più lineare, fino ad avere una decisa decrescita per l'aumentata importanza degli effetti viscosi.

2. Angolo di attacco di portanza nulla α_{zl} , che è l'angolo tra la corda e la direzione della velocità asintotica quando sul profilo la portanza è nulla (in analogia con l'angolo α_{zL} dell'ala o del velivolo). Esso dipende dalla forma della linea media del profilo, sarà positivo per curvatura negativa (e viceversa) e cresce in valore linearmente al crescere della curvatura, fino a valori del 3 – 4%. Per un profilo simmetrico è $\alpha_{zl} = 0$. Il carico sul profilo (1.10) valutato ad $\alpha = \alpha_{zl}$ avrà ovviamente integrale nullo. La retta di portanza di un profilo, Fig. 1.15, entità fondamentale in Aerodinamica, è determinata univocamente da $C_{l\alpha}$ e α_{zl} .
3. Angolo di attacco ideale o di progetto α_{id} , angolo al quale la distribuzione di carico sul profilo è particolarmente vantaggiosa ai fini della minimizzazione degli effetti viscosi. Si tratta quindi di un angolo di attacco (piccolo) corrispondente ad un assetto veloce (prossimo quindi all'assetto di crociera). Il coefficiente di portanza relativo è C_{lid} . Per gli angoli di attacco contenuti in un opportuno intorno di α_{id} (quindi anche per $\alpha = \alpha_{id}$) i gradienti di pressione (e di velocità) sul corpo sono i più blandi.

Nelle Figg. 1.16 e 1.17 sono riportate le soluzioni del campo di moto non viscoso incomprimibile intorno a due diverse sequenze di profili che vedono variare rispettivamente la curvatura massima e l'ascissa di curvatura massima. L'analisi delle soluzioni indica con chiarezza la dipendenza del campo di moto sul profilo da questi due importanti parametri.

1.10 Il momento, stabilità del velivolo e conseguenze architetture: impennaggi

Si premette che, in generale, lo stato di equilibrio di un sistema si dice stabile quando il sistema è in grado di contrastare spontaneamente una causa perturbatrice. In una condizione di equilibrio instabile invece il sistema perturbato reagisce in modo da amplificare la perturbazione, allontanandosi definitivamente dalla condizione di equilibrio.

In (1.9) si è visto che il centro di pressione di un profilo si sposta al crescere dell'angolo di attacco. Questa considerazione è ricca di conseguenze che coinvolgono l'equilibrio e la stabilità di un velivolo (e dunque la manovrabilità e la condotta): e comunque i più importanti aspetti dell'architettura di un aeromobile possono essere colti anche solo facendo alcune considerazioni sulla formula (1.28) e sulle sue conseguenze.

Il momento della forza aerodinamica intorno all'asse y C_M , detto momento di beccheggio, è di notevole importanza per lo studio dell'equilibrio e della stabilità. Esso può essere calcolato rispetto al polo più opportuno, ed è convenzionalmente definito positivo se ha un verso a cabrare. Si fa presente che a portanza nulla è in genere non nullo il momento, ed il centro di pressione si trova all'infinito (per avere un momento finito di una forza di intensità nulla occorre un braccio di lunghezza infinita).

In ipotesi abbastanza ben verificate in condizioni di crociera, al variare dell'angolo di attacco (o della velocità) la teoria prevede un momento di beccheggio (quasi) costante se valutato intorno ad un punto opportuno, che viene detto centro aerodinamico: per il controllo dell'equilibrio al beccheggio è di fondamentale importanza posizionare correttamente il baricentro (che si può controllare mediante opportuna dislocazione delle masse imbarcate) rispetto al centro aerodinamico (che invece non sarebbe semplice controllare).

Per il beccheggio di un profilo si possono assumere poli differenti: il bordo di attacco, il fuoco o, meglio, il centro aerodinamico. Alle basse velocità di crociera il momento rispetto al fuoco

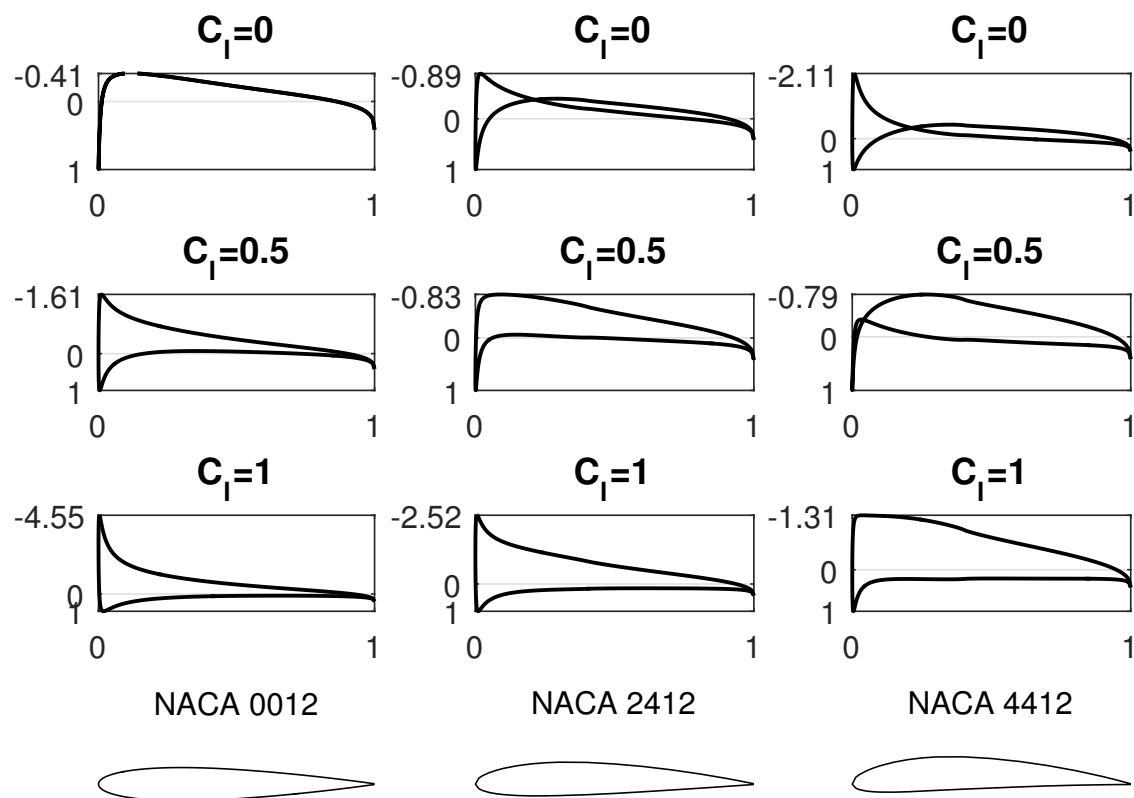


Figura 1.16: Coefficiente di pressione su profili NACA a 4 cifre ($\tau = 12\%$) al variare di curvatura ed angolo d'attacco - Soluzione numerica, Xfoil, [2]

è pressochè costante (cfr. la Teoria del Profilo Sottile): pertanto alle piccole incidenze il centro aerodinamico è molto vicino al fuoco. Quando diventano significativi gli effetti della comprimibilità il centro aerodinamico si sposta verso valle (in campo supersonico si trova vicino al 50% della corda), con importantissime implicazioni sulla progettazione e sulle qualità di volo complessive del velivolo. Ad incidenze alte, quando la separazione del flusso diviene significativa, il momento cambia drasticamente: tutto ciò per la “deformazione” del campo di moto rispetto al caso non viscoso ed incomprimibile.

Considerazioni analoghe vanno fatte per per ciascun profilo dell'ala, per l'ala, per il velivolo parziale e per il velivolo (completo); per il velivolo non minore importanza rispetto al beccheggio hanno poi i momenti intorno agli assi z ed x (di imbardata e di rollio).

Facendo riferimento al paragrafo (1.1) ed alla Fig. 1.1, è evidente che è possibile un volo uniforme se tutte le forze e tutti i momenti hanno risultante nullo: la cosa è verificata, ad esempio, nello schema di Fig. 1.5. In caso di squilibrio di forze e/o momenti a partire dalla condizione di volo uniforme il velivolo farà qualcosa di diverso, si avvia una manovra e si generano forze di inerzia. La stabilità aerodinamica del sistema-velivolo è la caratteristica che permette al velivolo in una certa condizione di volo a reagire ad una causa perturbante in modo autonomo -anche senza l'intervento diretto del pilota- evitando di precipitare in una condizione di volo incontrollato. La configurazione di un aeromobile può essere più o meno stabile, ma il livello di stabilità deve essere deciso dal progettista e conferito quindi all'aeromobile.

In generale un profilo (oppure un velivolo) è instabile intorno all'asse di beccheggio se a una crescita dell'angolo di attacco α (causato da una perturbazione, ad esempio una raffica verticale)

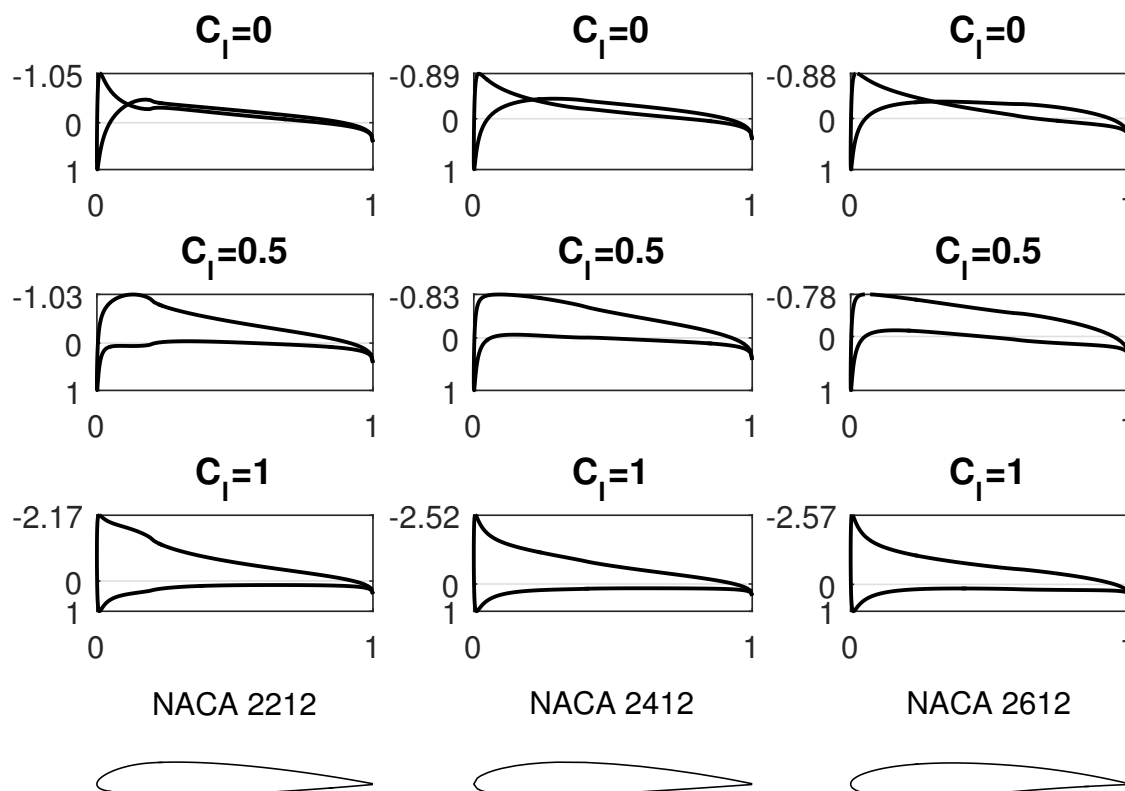


Figura 1.17: Coefficiente di pressione su profili NACA a 4 cifre ($\tau = 12\%$) al variare della posizione della freccia massima - Soluzione numerica, Xfoil, [2]

la variazione del momento è tale da indurre un ulteriore aumento di α , e cioè quando risulta

$$\frac{dC_m}{dC_l} > 0$$

La stabilizzazione del velivolo parziale alla raffica verticale ed a quella laterale viene realizzata mediante l'introduzione degli impennaggi, costituiti da un'ala orizzontale e una semiala verticale che, in condizioni perturbate, forniscono forze e momenti aerodinamici che si oppongono alla perturbazione, tendono ad annullarla e riportano la prua del velivolo nella giusta direzione. Gli impennaggi sono posizionati quanto più lontano possibile dal baricentro, o in coda alla fusoliera (configurazione convenzionale) oppure a prua (configurazione "canard", solo per il piano orizzontale), in modo da ridurre la superficie, evitando effetti poco "graditi", i seguenti.

- La presenza degli impennaggi rende il velivolo più complesso e pesante.
- In quanto superfici (portanti) esposte alla corrente, gli impennaggi danno resistenza, nelle varie forme.
- Si potrebbe pensare che l'orizzontale contribuisce alla portanza totale, alleviando l'ala. Invece in realtà l'orizzontale in certe condizioni porta (quando il centro di pressione è avanzato), in altre deporta: in questo secondo caso l'ala deve fornire una portanza più grande del peso (nel volo livellato) e dunque c'è un duplice aggravio di resistenza indotta, uno legato alla maggiore portanza dell'ala, l'altro alla resistenza indotta dell'orizzontale (si parla di resistenza di trim, essendo il trimmaggio una precisa attività di posizionamento delle superfici che costituiscono gli impennaggi per migliorare la condotta dell'aeromobile in ciascuna condizione di volo).

1.11 Effetti della viscosità alle basse velocità

La viscosità è reale, ma trascurarne l'esistenza non è paradossale, in quanto si ottengono comunque risultati fondamentali: introdurre poi la viscosità a partire da un modello non viscoso è necessario per ottenere altre informazioni comunque fondamentali.

Il lettore certo ha familiarità con il concetto di strato limite, regione dello spazio nella quale sono confinati gli effetti viscosi più significativi, "piccola" rispetto all'estensione complessiva del sistema. Questo concetto è decisivo in Aerodinamica degli Aeromobili. Un velivolo in crociera o opera in un campo di strato limite oppure... non è un buon velivolo: se gli effetti viscosi non sono confinati, la qualità del volo risulta inaccettabile.

Si nota qui esplicitamente che la soluzione prevista dal modello di moto non viscoso, cfr. (1.9), è sorprendentemente utile: lo sviluppo dello strato limite, che condiziona in modo significativo le prestazioni di un profilo, dipende principalmente dalla distribuzione di velocità determinata in ambito non viscoso. Ed inoltre in condizioni di crociera il campo di moto previsto dal modello non viscoso differisce di poco (ovviamente all'esterno dello strato limite, che è molto sottile) da quello effettivo.

Quali sono gli effetti reali che la viscosità introduce quando si supera il modello non viscoso? Limitandosi a considerazioni generali, innanzitutto la viscosità è responsabile della resistenza aerodinamica legata all'attrito tra linee di corrente e superfici dell'aeromobile (resistenza di attrito). Inoltre il campo di moto, per quella sua parte che si può considerare comunque e sempre non viscosa, viene alterato (così come la portanza), e questo fatto certamente dà luogo ad un incremento di resistenza, la resistenza di scia. Quest'alterazione cresce al crescere della portanza: quando poi diventa tale da presentare il distacco anticipato delle linee di corrente dalla superficie (linee che sono attaccate in ambito non viscoso) la portanza non cresce più linearmente con l'angolo d'attacco, la resistenza di scia aumenta notevolmente, ed inoltre si determina, a partire da un certo angolo di attacco la diminuzione della portanza al crescere dell'angolo di attacco: in questo caso si parla di stallo, e l'angolo di attacco per il quale la portanza è massima si chiama angolo di stallo. Riguardo la curva di portanza, rimane un tratto lineare (la cui pendenza cambia di poco rispetto al caso non viscoso) che ha un campo di validità limitato all'intervallo di angoli di attacco per i quali non c'è la separazione del flusso.

Se ci si limita al profilo alare, alle basse velocità la resistenza è tutta di tipo viscoso, e le curve caratteristiche si presentano come in Fig. 1.18. A volte le polari assumono forme atipiche, a causa dalla forte complessità degli effetti viscosi.

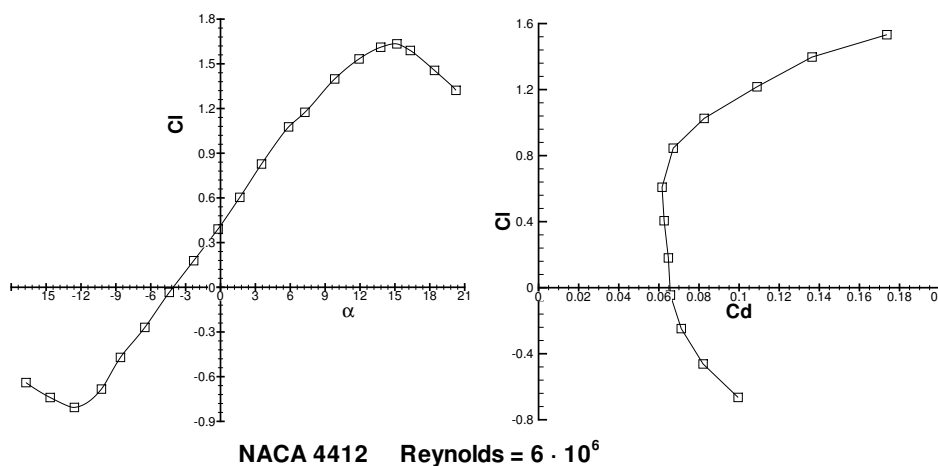


Figura 1.18: Curva di portanza e polare di un profilo

Se si parla di ala o velivolo la polare parabolica perde validità, tranne che in un ristretto intervallo di C_L , Fig. 1.19.

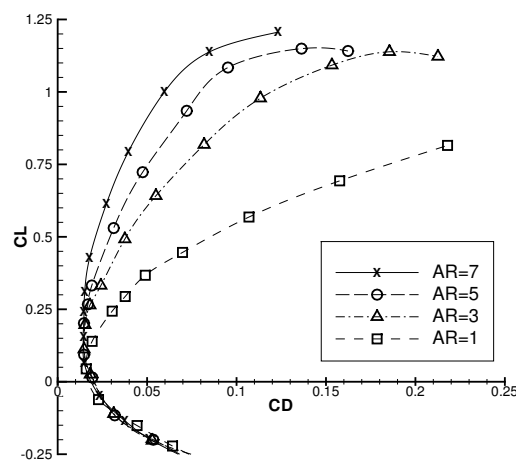


Figura 1.19: Le polari di un'ala, con l'effetto dell'allungamento

La condizione di stallo è quella più condizionante nella progettazione -non solo aerodinamica- dell'aeromobile, in quanto nel volo livellato corrisponde alla velocità minima di sostentamento V_{min} , dato fondamentale per la certificazione al volo: dalla definizione di coefficiente di portanza (1.1) si ha

$$V_{min} = \sqrt{\frac{2}{\rho_{\infty}} \frac{W}{S} \frac{1}{C_{Lmax}}} \quad (1.29)$$

essendo C_{Lmax} il coefficiente di portanza massimo, anch'esso grandezza fondamentale.

Un cenno agli ordini di grandezza può essere utile. Tutto quanto riportato in questo paragrafo è fortemente condizionato dal valore del numero di Reynolds di volo dell'aeromobile, che è riferito alla quota ed alla velocità di volo, ed ad una lunghezza di riferimento dell'aeromobile, ad esempio un valore medio delle corde dell'ala: si va dall'OdG di 10^7 per grandi velivoli veloci ad un OdG di 10^4 per velivoli molto molto piccoli, ad esempio i cosiddetti μ UAV (Micro Unmanned Aerial Vehicles): i fenomeni legati alla viscosità si sviluppano in modo totalmente differente per questi due diversi ordini di grandezza. Inoltre ad alti numeri di Reynolds per il C_{Lmax} (velivolo o ala) un ottimo valore è 1.3, per il C_{lmax} (profilo) si può avere un valore intorno a 1.5 – 1.6 (tanto vale per configurazioni base, senza cioè attivazione dei necessari sistemi di alta portanza per l'abbassamento della velocità minima di sostentamento); al decrescere del numero di Reynolds questi valori diminuiscono, anche drasticamente. Il coefficiente di resistenza minimo di un profilo è dell'ordine del centinaio di *Drag Counts* (1 *Drag Count* = 10^{-4} = .0001).

La Fig. 1.20, in diversa evidenza nelle precedenti edizioni di questi Appunti, è per “sancire” il concetto di aerodinamicità inteso come basso valore della resistenza di crociera...

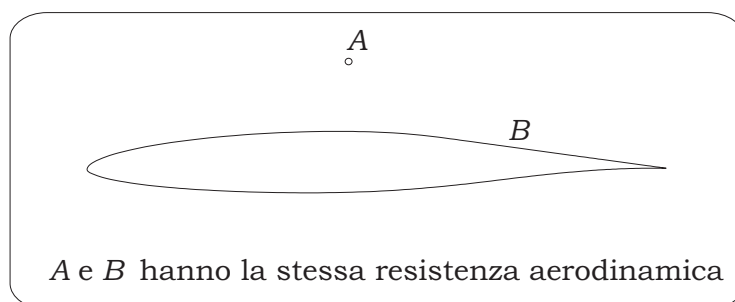


Figura 1.20: (No Comment)

Si fa in ultimo presente che l'introduzione della freccia influenza fortemente il comportamento dell'ala anche in campo viscoso, rendendo lo sviluppo dello strato limite molto più delicato, al punto tale da poter inficiare le prestazioni dell'ala o da richiedere, come rimedio, interventi sulla geometria (turbolatori o *fences*, ad esempio) che comunque aumentano la resistenza del velivolo.

1.12 La comprimibilità: i fatti, la classificazione, il campo fluidodinamico

Il modello di moto incomprimibile ha significato limitato alle “basse” velocità di volo, dove “basse” ora non ha un significato assoluto: vi sono velivoli per i quali alla massima velocità di volo il modello incomprimibile è assolutamente valido (e utile), mentre per altri velivoli che viaggiano alla loro minima velocità lo stesso modello non può dare risultati soddisfacenti.

Detta a_L la velocità del suono (con un po' di enfasi, la velocità Lagrangiana dei piccoli disturbi) il numero di Mach $M = V/a_L$ è in generale una funzione di campo, essendo funzioni di campo sia V che a_L : il numero di Mach di volo nel campo indisturbato, calcolato cioè a partire dalla velocità di volo, è $M = M_\infty = V_\infty/a_{L\infty}$. Il campo in un punto P viene detto subsonico, supersonico o sonico se $M(P) < 1$, $M(P) > 1$, $M(P) = 1$.

Si è osservato che per elevati valori subsonici di M_∞ i risultati teorici che derivano dal modello incomprimibile su profili ed ali divergono sostanzialmente dai dati sperimentali. Innanzitutto, il numero di Mach varia nel campo di moto, e le sue variazioni sono più intense di quelle della velocità. Se si riporta poi l'andamento del coefficiente di portanza e del coefficiente di resistenza in funzione di M_∞ di un profilo, Fig. 7.2, si osservano facilmente le seguenti caratteristiche ben nette:

- a) il coefficiente di portanza C_l cresce con il numero di Mach fino ad un certo valore per poi subire una diminuzione più o meno brusca, a volte simile a quella che il profilo presenta all'angolo di incidenza critica di stallo;
- b) il coefficiente di resistenza C_d per bassi valori del numero di Mach non varia in modo significativo, poi cresce rapidamente ed improvvisamente fino a valori molto elevati per poi decrescere successivamente;
- c) di conseguenza l'efficienza del profilo ha un andamento che presenta un massimo, per poi peggiorare di molto.

Questi sono, sinteticamente, alcuni degli effetti della comprimibilità: in particolare, la cosiddetta crisi di comprimibilità, consistente nell'aumento della resistenza e nella caduta dell'efficienza e della portanza, si presenterà per ogni geometria prima o poi al crescere di M_∞ . Come si vedrà, in campo comprimibile anche effetti locali possono dare risultati globali estremamente importanti.

Ora è bene notare esplicitamente che in generale quel che conta per una valutazione di massima dell'importanza degli effetti della comprimibilità non è M_∞ : certo se $M_\infty > .3$ certo la comprimibilità non potrà essere trascurata. In realtà quel che conta è il *massimo* valore del numero di Mach nel campo: il valore .3 generalmente indicato come soglia per iniziare a tenere in conto la comprimibilità si deve intendere riferito a M_{max} , e questo preciso valore numerico deriva dal fatto che, dipendendo gli effetti della comprimibilità dalla seconda potenza del numero di Mach o da potenze più grandi, l'inaccuratezza del modello incomprimibile è inferiore al 10% se $M_{max} < .3$. La limitazione $M_\infty < .3$ è da ritenersi valida per condizioni di volo nelle quali è molto piccola la perturbazione introdotta dall'aeromobile, e sono piccoli i suoi effetti: si pensi che per un velivolo che voli a $M_\infty = .2$ all'atterraggio, e cioè per $C_L \simeq C_{Lmax}$, sull'ala, intorno alla cresta, o punto di velocità massima, il numero di Mach è prossimo ad 1.

Quando $M_{max} < .3$ si parla di campo di moto iposonico, senz'altro da considerarsi incomprimibile. Ora se si suppone che la velocità asintotica a monte non sia molto elevata può accadere che ovunque sia $M < 1$ ed in certe regioni $M > .3$: il campo si dice allora subsonico. Se invece c'è coesistenza di regioni subsoniche e di regioni supersoniche si parla di campo transonico (anche se $M_\infty > 1$). Se la velocità di volo è sufficientemente elevata, in misura tale che $M_\infty > 1$, per

opportune forme geometriche del velivolo e per opportuni valori del coefficiente di portanza può essere $M > 1$ in ciascun punto del campo di moto, ed il campo si dice supersonico.

Si può pensare ad un passaggio da iposonico a campo subsonico, quindi a campo transonico ed, eventualmente, a campo supersonico pensando di aumentare la velocità del velivolo a partire dalla quiete. Il numero di Mach della corrente indisturbata relativo al passaggio da campo subsonico a campo transonico viene definito “numero di Mach critico inferiore” ($M_{\infty crit}$), il numero di Mach del passaggio da campo transonico a campo supersonico “numero di Mach critico superiore” ($M'_{\infty crit}$), definibile anche come il primo numero di Mach della corrente asintotica oltre il quale in nessun punto del campo la velocità è minore di quella del suono. Chiaramente è $M_{\infty crit} < 1$, $M'_{\infty crit} > 1$.

Pertanto vale la seguente caratterizzazione dei regimi di moto dal punto di vista della comprimibilità.

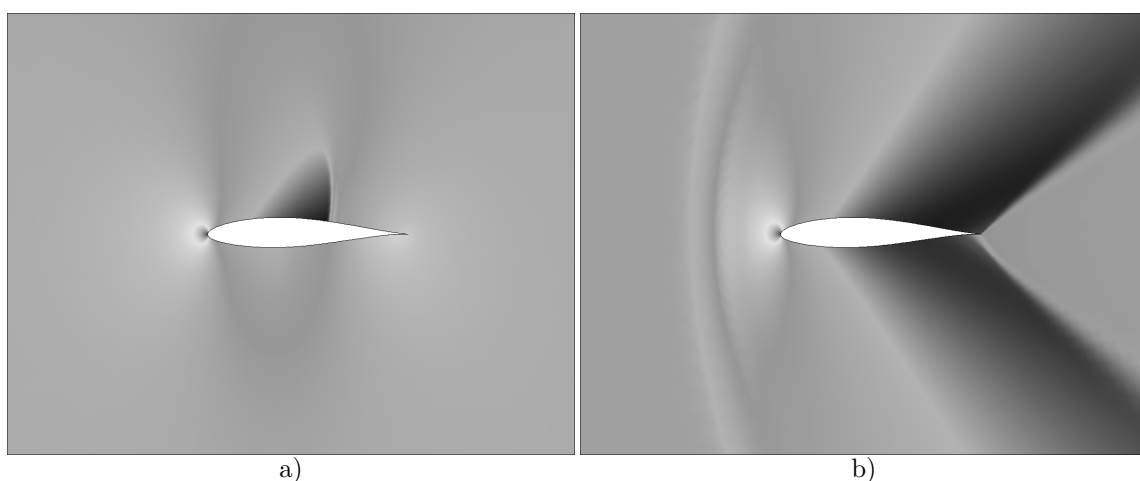


Figura 1.21: Visualizzazione del campo transonico (pressione) intorno al profilo NACA 63₂ – 215, $\alpha = .2^\circ$: a) $M_\infty = 0.75$, b) $M_\infty = 1.25$ - Soluzione Euleriana, da FLUENT, [3]

- a) Per $M_\infty < M_{\infty crit}$ il campo viene detto subsonico; tale campo è continuo.
- b) Il campo transonico è definito per $M_{\infty crit} < M_\infty < M'_{\infty crit}$: esso è caratterizzato dalla coesistenza di flussi subsonici e supersonici separati da linee soniche ed onde d'urto normali, con presenza, in taluni casi, di onde d'urto curve ed oblique. Si evidenzia la possibilità di avere un campo transonico a partire da condizioni asintotiche subsoniche o supersoniche: nella Fig. 1.21 è evidente la differente struttura delle onde d'urto nei due casi.
- c) Per $M'_{\infty crit} < M_\infty$ il campo viene detto supersonico: sono presenti solo onde d'urto oblique deboli, Fig. 1.22. Nel caso del profilo (campo di moto 2-D) è necessario, ma non sufficiente, che il bordo di attacco sia aguzzo; un'ala con profili a bordo arrotondato non potrà mai viaggiare in campo supersonico se non presenta un angolo di freccia sufficientemente grande.

Nel caso prima citato di grandi velivoli all'atterraggio abbastanza certamente il campo di moto è di tipo transonico anche se $M_\infty = .25$. Altri esempi sono forniti dalle classiche soluzioni analitiche del campo intorno al cilindro ed alla sfera, che conducono ad una determinazione del numero di Mach critico intorno a .4 e .5 rispettivamente, con una leggera sottostima rispetto alla realtà; un proiettile entra in campo transonico per $M_\infty = .55$.

La crisi di comprimibilità viene a mostrarsi sempre al di sopra di $M_{\infty crit}$, definibile anche come il numero di Mach della corrente indisturbata in corrispondenza del quale si raggiunge in uno o più punti del campo la velocità del suono. Si definisce poi il numero di Mach di divergenza della resistenza $M_{\infty dd}$ quando il coefficiente di resistenza cresce con M_∞ , a causa dell'aumento della resistenza d'onda, con un rateo superiore ad un valore prefissato: un velivolo “transonico” sarà operativo nell'intervallo $M_{\infty crit} < M_\infty < M_{\infty dd}$. Un altro numero di Mach di volo di interesse è

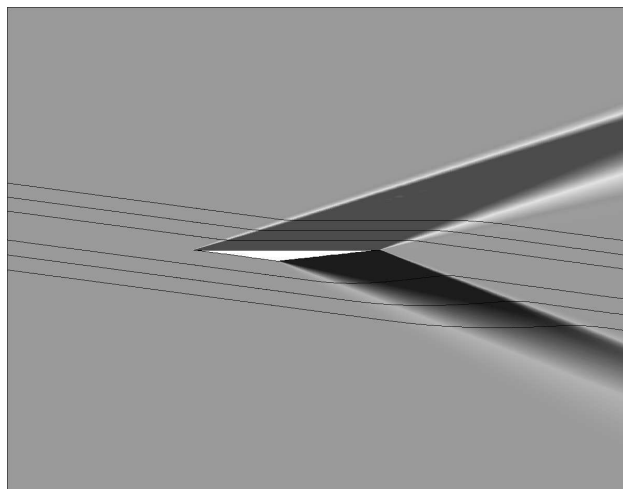


Figura 1.22: Campo supersonico (pressione e linee di corrente) intorno ad un tipico profilo per il volo supersonico, $\alpha = -4.5^\circ$ - Soluzione Euleriana, da FLUENT, [3]

quel valore per il quale la portanza presenta un massimo per poi decrescere in modo più o meno brusco. I valori dei numeri di Mach critici, data una geometria, dipendono dall'angolo di attacco.

Si osserva che mentre in campo subsonico e transonico gli effetti di comprimibilità sono limitati nello spazio (solo le particelle d'aria le cui traiettorie passano nei paraggi del velivolo sono perturbate in modo significativo), in campo supersonico il disturbo indotto dal corpo nella corrente si propaga trasversalmente fino all'infinito, e questa cosa ha effetti importanti per la sostenibilità del volo supersonico: a causa del fenomeno denominato *sonic boom*, [1], vi sono forti condizionamenti nella progettazione di velivoli supersonici, ed inoltre è inibito o fortemente ristretto il volo supersonico su aree abitate.

L'aerodinamica del campo comprimibile è profondamente diversa da quella del campo incomprimibile: le distribuzioni di pressione sui corpi cambiano sostanzialmente, l'insorgere e l'aumentare del coefficiente di resistenza associato alla presenza di onde d'urto (resistenza d'onda), dominanti in campo transonico, consente di dire senza esitazione che il campo transonico è il regno dell'onda d'urto normale (invece nel campo subsonico la comprimibilità non introduce resistenza addizionale oltre a quella viscosa ed indotta).

Nel Cap. 6 si presenterà un metodo per il calcolo dei numeri di Mach critici, e si passerà alle tecniche per campi comprimibili linearizzati. Saranno quindi trattati, in ambito non viscoso, il campo transonico (Cap. 7) e quello supersonico linearizzato (Capitolo ??). L'andamento dei coefficienti aerodinamici, in campo non viscoso, di un profilo convenzionale ad angolo di attacco fissato ed al variare del numero di Mach di volo, è presentato e discusso nel Cap. 7, Fig. 7.2. I principali effetti viscosi in campo comprimibile saranno trattati nel Cap. 8.6.

FISICA DELLA COMPRIMIBILITÀ

Per comprendere quali sono le cause che determinano questi effetti della comprimibilità all'aumentare della velocità di volo si può proporre un metodo euristico che evidenzia, anche in modo fisico e a partire dalla conoscenza della soluzione incomprimibile, la differenza di comportamento dell'aria alle diverse velocità mediante una valutazione qualitativa degli scorrimenti, in un caso bidimensionale. In concreto, si può pensare ad un tubo di flusso che contenga un profilo alare. I maggiori scorrimenti intorno al punto di velocità massima del profilo ed il rallentamento nelle regioni di ristagno possono essere visti come risultanti dalla variazione dell'area della sezione del tubo di flusso, nell'approssimazione di moto unidimensionale.

- Se il moto è considerato incomprimibile una delle equazioni di stato di questo "fluido incomprimibile" è $\rho = \text{costante}$. Il numero di Mach nel campo è nullo, essendo la velocità del suono

divergente. Dalla relazione $\dot{m} = \rho VA$ (*costante*) ad ogni riduzione (aumento) di area segue un aumento (diminuizione) di velocità esattamente inverso.

- Nel caso di moto considerato comprimibile l'equazione di stato (gas perfetto) è $p = \rho RT$: ad una variazione di area nelle regioni di accelerazione segue anche una variazione di pressione dello stesso segno, che comporta una variazione di densità e temperatura ancora dello stesso segno. Pertanto la variazione della velocità (di segno contrario di quello della variazione di area) sarà maggiore rispetto al caso incomprimibile in quanto la densità varia con l'area: gli scorrimenti si esaltano (sia in accelerazione che in decelerazione). Inoltre la variazione di temperatura determina una variazione della velocità del suono di segno inverso rispetto a quello della variazione di velocità: pertanto nel moto comprimibile le variazioni del numero di Mach sono in ogni punto (ulteriormente) esaltate rispetto a quelle della velocità (è per questa ragione che in genere, in opportune condizioni, la velocità "precipita" verso la velocità del suono in certe regioni di espansione per poi superarla, come succede, ad esempio, nella gola dei condotti convergenti-divergenti, quando lavora in condizioni critiche).
- Quando si è determinata una regione supersonica le necessarie ricompensioni avvengono mediante onde d'urto, alle quali è associata sempre una resistenza che si va a sommare alle altre forme di resistenza. L'urto normale si realizza quando è necessaria una ricompensione a subsonico (campo transonico), e la resistenza d'onda può essere molto elevata, cfr. (7.2).
- Lo sviluppo dello strato limite può essere fortemente condizionato dall'onda d'urto normale che vi impinge, Fig. 1.23: può allora nascere quella forte alterazione del campo di moto denominata "onda d'urto a λ " che ha importanti conseguenze sulle qualità di volo.

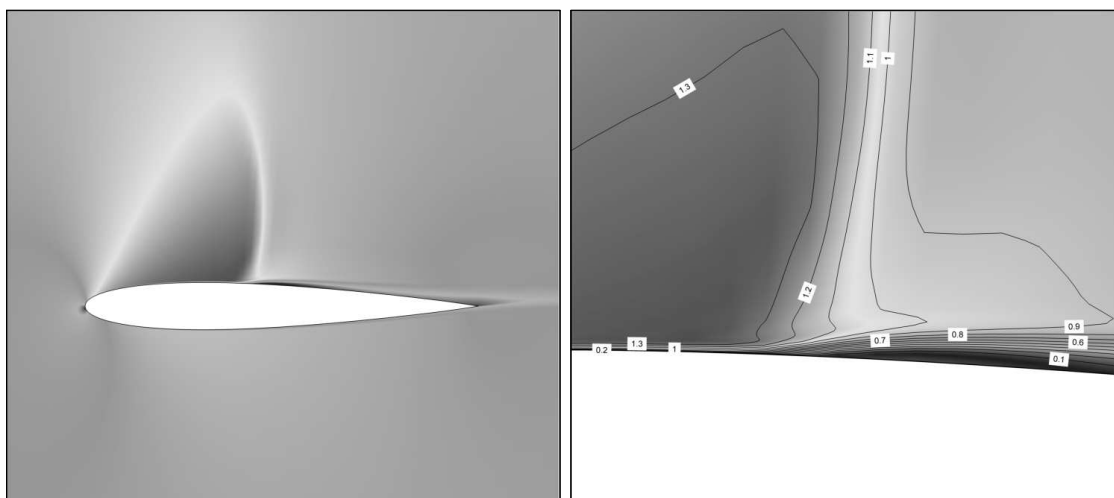


Figura 1.23: Interazione tra onda d'urto e strato limite in campo transonico - Profilo NACA 0012, $\alpha = 2^\circ$, $M_\infty = .82$, $Re = 6 * 10^6$ - Soluzione numerica (FLOWER, [91])

Per una più completa comprensione della fisica della comprimibilità è indispensabile tenere in conto tutte le proprietà delle onde d'urto e dei ventagli di espansione, [50], oltre alle modalità con cui esse interagiscono. Nella Fig. 1.24 si mostra la soluzione numerica del campo di moto non viscoso in un condotto con rampa di compressione a partire da condizioni supersoniche, ed è possibile apprezzare una casistica delle interazioni abbastanza ampia.

1.13 Ala a freccia

In riferimento alle superfici portanti del velivolo (ali ed impennaggi) un particolare architettonico di importanza fondamentale è la freccia, introdotta in (1.1). Si parla di ala a freccia quando c'è un

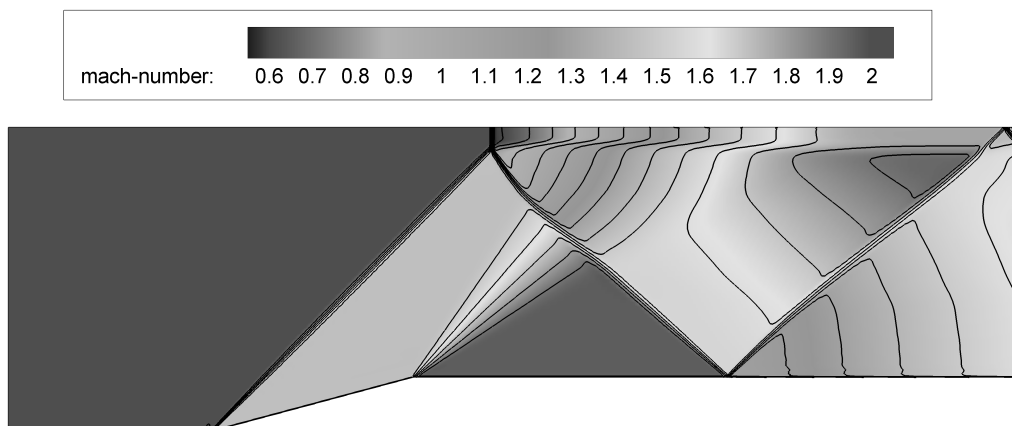


Figura 1.24: Interazione tra onde e superfici solide in campo non viscoso - FLUENT, [3]

angolo Λ non nullo (in realtà grande, in modo significativo) tra l'asse y e i diversi assi di riferimento dell'ala (freccia relativa ai bordi di attacco e di uscita, freccia ad $1/4$, ed i rispettivi angoli di freccia in generale non sono uguali). La freccia è definita negativa quando l'ala è rivolta verso la prua del velivolo. L'angolo di freccia lungo l'apertura può essere variabile, e la freccia di tutta l'ala può essere variabile in volo (come ad esempio è per il TORNADO).

Adottare un'architettura a freccia si impone per velivoli veloci, dal campo transonico fino al campo ipersonico: in questo modo è possibile ridurre (rispetto ad un'architettura dritta, a pari velocità) gli effetti di comprimibilità legati alla resistenza d'urto. Succede allora che si riesce ad avere velocità operative maggiori (con ovvio vantaggio dal punto di vista commerciale o strategico/tattico) e convenienti per la propulsione con motori a reazione.

È questo l'unico vero vantaggio della freccia: altri effetti sono drasticamente negativi o, se positivi, accoppiati ad altri effetti negativi dello stesso peso. Pertanto non si realizzano velivoli subsonici con ala a freccia.

Provando a fare un elenco degli effetti che si hanno mettendo a freccia un'ala dritta senza variare apertura e superficie (e quindi a parità di allungamento), si ha che l'ala a freccia

- 1) presenta un valore del numero di Mach critico inferiore più elevato;
- 2) a parità di angolo di attacco porta di meno (anche se, in certe circostanze, in campo supersonico la portanza potrebbe aumentare);
- 3) se positiva ha un effetto stabilizzante all'imbardata e destabilizzante al rollio, se negativa si comporta in modo opposto;
- 4) a pari coefficiente di portanza, sposta i carichi verso l'esterno se positiva, verso l'interno se negativa: lo spostamento dei carichi verso le estremità legato alla freccia positiva avrebbe significative aggravanti strutturali e aerodinamiche, per la cui soppressione è necessario introdurre un'adeguata legge di svergolamento;
- 5) presenta una struttura di campo di moto, sia non viscoso che viscoso, molto più complessa;
- 6) pesa di più rispetto all'ala dritta;
- 7) la modellazione è più complessa.

L'incremento di peso che la freccia comporta è rilevante (ed è maggiore per freccia negativa). Anche con la semplice schematizzazione strutturale "ala = trave incastrata" si vede come la freccia porta a maggiori sollecitazioni all'incastro a causa dell'eccentricità delle sollecitazioni, con necessità di strutture maggiormente resistenti, e dunque pesanti. Inoltre se il peso aumenta deve aumentare

anche la portanza, che intanto la freccia ridurrebbe: l'aumento di portanza non si può avere aumentando l'angolo di attacco, ma occorre aumentare la superficie alare, con ulteriore incremento del peso e della resistenza di attrito.

I complessi scorrimenti indotti dalla freccia -anche in crociera- comportano poi grosse difficoltà per la realizzazione di flussi laminari (in linea di massima non si possono realizzare ali laminari con $\Lambda > 20^\circ$).

In definitiva si ha che l'ala a freccia è indispensabile alle alte velocità di volo, non può avere grandi allungamenti (quindi ha maggiore resistenza indotta), deve essere svergolata (quindi è più complicata e costosa da realizzare), a parità di carico pagante ha superficie maggiore (quindi ha maggiore resistenza di attrito ed è più pesante).

La freccia negativa viene adottata su velivoli molto particolari e comunque sperimentali, anche se un serio e fondato motivo per non adottarla non esiste. È nota l'idea di R.T. Jones di combinare gli effetti contrastanti di freccia positiva e negativa nella sua ala obliqua, Fig. 1.25, realizzata nel velivolo NASA/AMES AD-1 (1982).

Un'ala per il volo supersonico ad alto numero di Mach o per il volo ipersonico è sempre a freccia, con angolo di freccia a volte molto pronunciato: si può arrivare ad angoli di freccia maggiori di 80° nella regione *inboard* dell'ala gotica. Quando la freccia deve essere elevata conviene impiegare, per ovvi motivi strutturali, l'ala a delta, Fig. 1.26.

1.13.1 Ala infinita a freccia in ambito non viscoso incomprimibile

Il concetto di ala infinita a freccia è consistente con il concetto di ala infinita dritta già introdotto: evidentemente gli angoli di freccia di bordo d'attacco, d'uscita e della linea dei fuochi sono uguali. Ed il funzionamento del profilo resta comunque la base sulla quale impostare il discorso per l'ala infinita a freccia. Si evidenzieranno di seguito tutte le differenze comportamentali connesse con l'introduzione della freccia, la principale delle quali è la scomparsa del moto piano.

Gli aspetti salienti si possono ricavare da semplici considerazioni legate alla linearità del modello retto dall'equazione di Laplace. Basta scomporre la velocità asintotica in una componente lungo l'asse dell'ala $V_\infty \sin \Lambda$ (flusso trasversale, uniforme perché scorrendo lungo l'ala non 'vede' curvature, e dunque "ozioso") ed una componente normale $V_\infty \cos \Lambda$, alla quale competono le variazioni di velocità e pressione. Il profilo che effettivamente lavora sarà quello ottenuto sezionando l'ala con un piano perpendicolare al suo asse, profilo caratterizzato da maggiore spessore percentuale in quanto il suo spessore rimane invariato mentre la sua corda si contrae. Ed inoltre nel flusso normale l'angolo d'attacco aumenta rispetto all'angolo d'attacco nominale in quanto la componente verticale della velocità asintotica non si riduce, quella componente in pianta sì.

DISTORSIONE DEL CAMPO DI MOTO

È semplice mostrare che l'introduzione di un angolo di freccia dà una distorsione del campo di moto già per l'ala infinita, Fig. 1.27. Per un flusso incomprimibile non viscoso è molto semplice determinare le linee di corrente sovrapponendo al campo bidimensionale normale supposto noto un campo trasversale uniforme.

È immediato verificare quanto segue.

- 1) Non si ha più una linea di ristagno (in prossimità del punto di ristagno che si avrebbe nel flusso normale le particelle scorrono lungo l'ala).
- 2) Il moto non è piano. Nella vista in pianta si evidenzia il fatto che le linee di corrente curvano dall'infinito a monte e fino al piano di Trefftz, Fig. 1.27.
- 3) La curvatura delle linee di corrente si riduce allontanandosi dal piano dell'ala.
- 4) La presenza di flessi nella vista in pianta significa un cambiamento della variazione della velocità nel flusso normale: ad esempio, si ha certamente un flesso in corrispondenza dei punti di ristagno e di massimo scorrimento del flusso normale (punti A e B di Fig. 1.27).

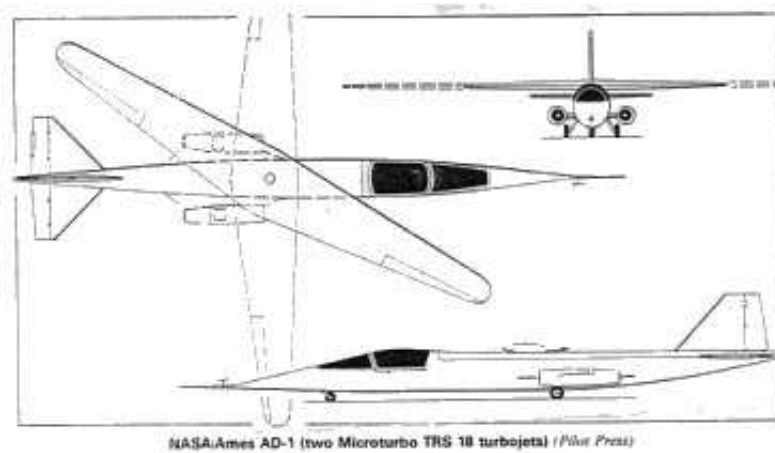


Figura 1.25: NASA/ Ames AD-1

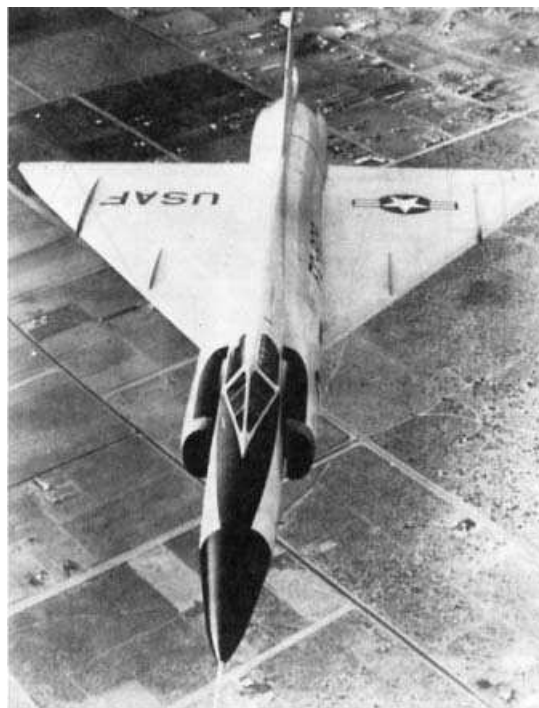


Figura 1.26: Il Convair F-102A in volo

IL PRINCIPIO DEL COSENO

Allora con l'introduzione di un angolo di freccia Λ

- la pressione dinamica effettiva si riduce di un fattore $\cos^2\Lambda$,
- lo spessore percentuale effettivo (e quindi il gradiente delle rette di portanza) aumenta in ragione inversa del $\cos\Lambda$,
- l'angolo d'attacco effettivo aumenta in ragione inversa del $\cos\Lambda$,

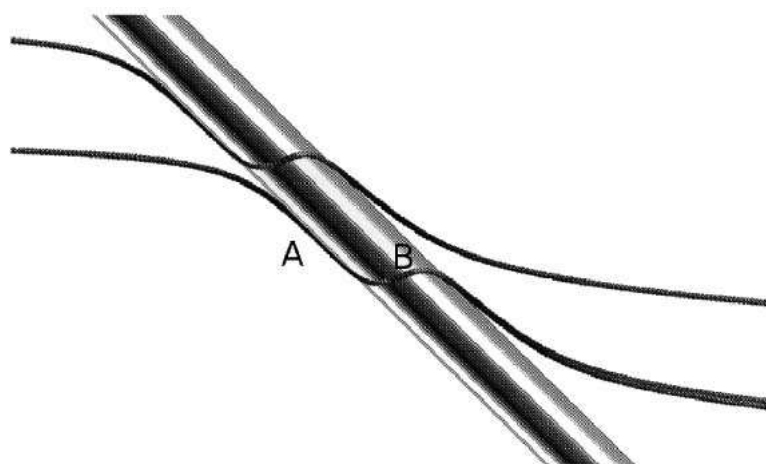


Figura 1.27: Vista in pianta delle linee di corrente "di ristagno" per un cilindro circolare a freccia ($\Lambda = 45^\circ$, $\alpha = 0^\circ$)

e se si bilancia il tutto e si fa l'ipotesi che il flusso nel piano normale all'asse dell'ala abbia caratteristiche bidimensionali si scopre che la portanza si riduce sì, ma meno del fattore $\cos^2\Lambda$. Ovviamente è lecito impiegare risultati ricavati in campo bidimensionale solo per piccoli angoli di freccia.

Si può allora ritrovare il Principio del Coseno, [1], pag. 270 e seguenti, in base al quale $C_{l_{\Lambda \neq 0}} = C_{l_{\Lambda=0}} \cos\Lambda$ e la cui validità può essere confinata a flussi per i quali è possibile disaccoppiare il flusso trasversale da quello normale. Si fa presente però che questo Principio viene dimostrato assumendo ipotesi molto restrittive, e non può dare risultati accurati per angoli di freccia medio-grandi: si preferisce qui e nel seguito parlare del "cosiddetto" Principio del Coseno, utile solo a illustrare l'andamento di massima della riduzione della portanza connessa con l'introduzione della freccia (e questo anche per l'ala).

1.13.2 Ala infinita a freccia in ambito non viscoso comprimibile

Quando gli effetti della comprimibilità sono lineari l'equazione che regge il campo è quella di Prandtl - Glauert, che è ancora lineare, e che viene risolta linearizzando le condizioni al contorno: anche in quest'ambito si ritiene valido il Principio del Coseno. Si noti che questo vale anche per i flussi supersonici linearizzati. Per flussi transonici (retti da equazioni non lineari per il potenziale o, in generale, dalle equazioni di Eulero) il disaccoppiamento non è possibile, e il Principio del Coseno perde di significato.

1.14 Funzionamento dell'ala

Le considerazioni contenute in questo paragrafo sono fatte trascurando tutti gli effetti viscosi, e nell'ambito del Principio di Reciprocità. Ci si chiede cosa accade alle particelle d'aria che, arrivando da lontano, attraversano la regione nella quale si trova il velivolo.

Si fa preliminarmente presente che per l'ala e freccia la distorsione del campo di moto è ben maggiore di quella di un'ala dritta, e non solo nella regione delle estremità alari, alla radice od in corrispondenza dei motori. Inoltre la più semplice modellistica di un'ala a freccia, la Teoria di Weissenger o della superficie portante approssimata, è certamente meno accurata di quella di Prandtl, e di più delicata applicazione.

IL CASO SUBSONICO

Non si può dire in generale che cosa accade alle singole particelle lungo le loro traiettorie: questo ovviamente dipende dalla geometria del velivolo, dalla condizione di volo (coefficiente di portanza) e dalla distanza della particella dal velivolo.

Limitando per semplicità il discorso ad un'ala isolata in volo livellato (condizione di volo abbastanza irrealistica in quanto probabilmente instabile) è certo che quando l'ala è portante la maggior parte delle particelle d'aria nel passaggio da monte a valle dell'ala viene deviata verso il basso, e la misura di questa deviazione è fortemente variabile. Se in una accezione Lagrangiana si controlla il comportamento dell'insieme delle particelle appartenenti ad un piano ($y-z$) a partire da una grande distanza dall'ala nel suo fluire verso ed oltre l'ala, si osserva che alcune particelle sono deviate verso l'alto, molte di più lo sono verso il basso, così come molte particelle deviano verso destra ed altrettante verso sinistra; la deviazione dipende ovviamente dalle coordinate (y_0, z_0) iniziali, ed anche da x . Quello che era un "piano" di particelle diventa una superficie che può assumere una forma assai complicata. Le perturbazioni che subisce una particella d'aria aumentano fortemente quanto più è piccola la distanza minima che nel suo moto assumerà rispetto all'ala, ed è massima per quelle particelle che lambiscono l'ala in prossimità delle sue estremità.

La cosa si sostanzia in un modo abbastanza complesso, ed il risultato più importante è la nascita di un flusso trasversale in corrispondenza del bordo di uscita. Il fluido che lambisce l'ala deve per forza lasciare la superficie in corrispondenza del bordo aguzzo, nella direzione della bisettrice dell'angolo del bordo di uscita (almeno in condizioni di crociera): questo fatto è legato alla viscosità del fluido che impedisce alle particelle di girare intorno al bordo aguzzo. Se si segue il moto di due particelle molto vicine a monte e che lambiscono l'ala una dal lato superiore (dorso) ed una dal lato inferiore (ventre), nella vista in pianta si osserva una deviazione significativamente diversa proprio in corrispondenza dell'ala, Fig. 1.28. Questo comportamento è il risultato di un moto secondario

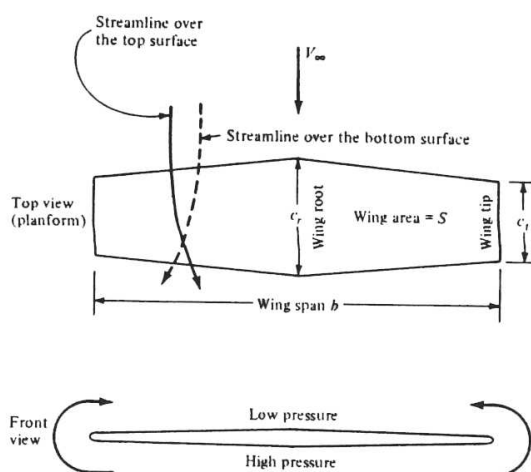


Figura 1.28: Moto di particelle che lambiscono un'ala portante

(cioè con velocità medie inferiori a quelle del moto principale da monte a valle) indotto dalla differenza di pressione (quindi dal carico distribuito lungo l'apertura) che c'è tra dorso e ventre dell'ala e che dà origine alla portanza. Quando le particelle che fluiscono sul dorso si ricongiungono a quelle che fluiscono sul ventre tra di esse ci sarà una differenza di velocità in senso trasversale: si tratta quindi di vorticità (variabile lungo l'apertura) che si intende emanata dal bordo di uscita dell'ala; questa vorticità degrada lentamente verso valle (nel modello Euleriano invece si manterrà inalterata in intensità a valle dell'ala fino al piano di Trefftz). L'intensità di tale vorticità può essere particolarmente grande in corrispondenza delle estremità alari, laddove si può parlare di vortici d'estremità. In definitiva, a valle di una superficie portante il campo che a monte, molto

lontano, era uniforme si complica molto, con la nascita di una superficie vorticosa, la scia, la cui forma evolve dal bordo di uscita fino all'infinito ¹².

La conoscenza dello sviluppo del campo a valle di un'ala è importante dal punto di vista progettuale perché è in esso che lavorano le superfici portanti che stanno a poppa dell'aeromobile.

Infine è chiaro che, nelle ipotesi poste, la perturbazione sul moto delle particelle d'aria che scorrono lontano dall'ala sarà piccola, tanto minore quanto più scorrono lontano (si dice che il disturbo indotto dall'ala è evanescente all'infinito, tranne che verso valle).

IL CASO SUPERSONICO

Una qualunque perturbazione rimane confinata all'interno del cono di Mach che si estende a valle della sorgente del disturbo: pertanto, almeno nelle condizioni di crociera supersonica, lo sviluppo del campo di moto è caratterizzabile con l'ausilio dei coni di Mach relativi a ciascun punto del bordo di attacco. Inoltre il flusso al bordo di uscita sarà diverso da quello che si realizza nel moto subsonico: la presenza di onde d'urto o ventagli di espansione fa sì che il flusso non abbandoni l'ala lungo la direzione della bisettrice del bordo di uscita, ed inoltre è presente una vorticità *anche* trasversale, a causa della differenza di velocità (ma non di pressione) tra dorso e ventre.

Tridimensionalità effettiva

Può succedere spesso che alcune porzioni di un'ala finita si comportino come se fossero in flusso bidimensionale. Ad esempio, per l'ala rettangolare l'effettiva tridimensionalità sarà limitata alla regione contenuta nei coni di Mach aventi origine all'estremità, Fig. 1.29: i profili non contenuti, in tutto od in parte, in questi coni lavorano in un campo bidimensionale supersonico, di struttura certamente più semplice del campo subsonico o transonico.

È facile constatare che il campo nella regione (I) è ancora bidimensionale e che le linee AE e BD inclinate dell'angolo di Mach rispetto alla direzionale della corrente rappresentano, per così dire, le linee limiti di informazione al flusso dell'esistenza dell'estremità alari. Si osservi come il *downwash* dietro l'ala non sia più completamente bidimensionale.

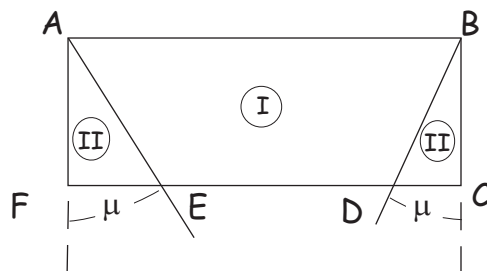


Figura 1.29: Regioni di flusso bidimensionale (I) o tridimensionale (II) sull'ala supersonica

Tutto questo è rigorosamente vero ad incidenza nulla e per un'ala con profilo simmetrico: d'altra parte, in condizioni di volo supersonico, e considerandosi teorie lineari sia nella regione (I) che per le regioni (II), lo studio può essere limitato ad ali molto sottili ed a piccoli angoli d'attacco, e dunque non si è lontani dal vero se si ammette che le linee AE e BD siano inclinate dell'angolo μ .

Bordo d'attacco delle ali supersoniche

Due distinti flussi si vengono a realizzare nel caso di ali a freccia.

Con riferimento alla forma in pianta di Fig. 1.30, sembra evidente che conta il numero di Mach relativo alla componente di velocità normale al bordo di attacco $M_{\infty_n} = V_{\infty_n}/a_{L\infty} = \sin K / \sin \mu$ per definire il bordo d'attacco

$$\text{supersonico} \quad \text{se } K > \mu \quad \text{e quindi } M_{\infty_n} > 1$$

¹²Può essere interessante mettere a fuoco la varietà delle configurazioni fluidodinamiche che si possono realizzare al bordo di uscita secondo diversi modelli di moto e in diverse condizioni (flusso attaccato, separato da una parte o da due parti, separato in modo complicato)

subsonico se $K < \mu$ e quindi $M_{\infty n} < 1$

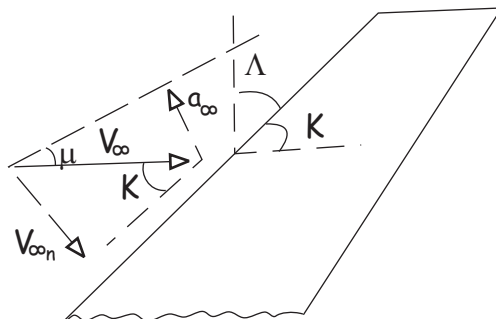


Figura 1.30: Decomposizione della velocità rispetto al bordo d'attacco di un'ala supersonica

Nel caso di bordo d'attacco subsonico non è che il flusso, in realtà molto complesso, sia subsonico, solo che alcune caratteristiche del flusso subsonico sono riconoscibili: ad esempio, i profili relativi dovranno avere bordo d'attacco arrotondato pur essendo il campo supersonico (dove il bordo d'attacco è supersonico i profili ovviamente sono a bordo d'attacco aguzzo).

Analoghe considerazioni e definizioni valgono per il bordo d'uscita.

È evidente che nel caso più generale al moto di un'ala supersonica è associato un problema misto.

Talune forme in pianta impiegate per ottimizzare particolari prestazioni -ala gotica (il Concorde...), *Cranked Wing*, Fig. 1.31- hanno il bordo di attacco dei profili *inboard* contenuto nel cono di Mach, quello dei profili *outboard* esterno¹³.

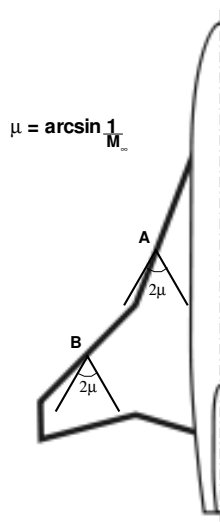


Figura 1.31: *Cranked Wing*: bordo di attacco misto supersonico/subsonico

IL CASO TRANSONICO

La complessità di questo caso deriva dalla possibile presenza, in alto transonico, di onde d'urto oblique al bordo di uscita: in questo caso per il flusso al bordo di uscita si fa riferimento al caso supersonico. Altrimenti le cose vanno come nel caso di funzionamento subsonico.

¹³Le considerazioni per la scelta della forma in pianta (e poi dei profili) sono complesse ed articolate; spesso è risultato opportuno l'impiego di ali a freccia variabile in volo (è il caso del TORNADO), il cui funzionamento è ovviamente assai complicato.

1.15 Stabilità: la freccia, il diedro

Come anticipato in (1.13) la freccia positiva ha un effetto stabilizzante all'imbardata e destabilizzante al rollio. Questo può essere visto, in modo semplice a partire dalla forma in pianta, considerando che in caso di raffica laterale le due semiali si possono ritenere investite da una corrente a velocità "effettiva" diversa, [1], pag. 275, e quella investita dalla corrente effettiva a velocità più grande porta e resiste di più rispetto all'altra, con conseguenti momenti di rollio e di imbardata.

Per la definizione dell'angolo diedro dell'ala e per gli effetti che esso induce nelle prestazioni dell'ala si può fare riferimento a [1], pag. 354. Comunque un eventuale angolo diedro nella vista frontale dell'ala viene introdotto tenendo conto che per diedro positivo (ali rivolte verso l'alto) il suo effetto sulla stabilità latero - direzionale di un'ala è lo stesso di quello della freccia positiva: il diedro positivo ha un effetto stabilizzante all'imbardata e destabilizzante al rollio, se negativo si comporta in modo opposto. Evidentemente l'effetto diedro non può derivarsi da considerazioni sulla forma in pianta.

1.16 Completamento dell'architettura

Nei paragrafi precedenti si è costruita in maniera razionale l'architettura fondamentale dell'aerodinamica di un velivolo che possa volare in modo stabile trasportando un carico pagante, e costituito quindi da fusoliera, ala ed impennaggi, sistema propulsivo.

Naturalmente su un aeromobile sono presenti molti altri apparati che operano secondo lo stesso principio di funzionamento delle ali, e cioè utilizzano al meglio un certa pressione dinamica locale: tra gli altri, ad esempio, sono importanti il sistema di ipersostentazione (serve a ridurre la velocità minima di sostentamento), le parti mobili degli impennaggi (equilibratore e timone), gli alettoni (di bassa e di alta velocità) e gli *spoiler*, i freni aerodinamici. Poi ci sono numerosi altri componenti, inseriti magari per funzioni specifiche di un certo aeromobile. Per il seguito il lettore dovrebbe conoscerne con certo dettaglio la funzione, la nomenclatura, le caratteristiche principali, il modo di lavorare. Numerose sono le fonti cui riferirsi: in particolare, [1].

Anche se in prospettiva si punta sempre ad una progettazione in cui l'aereo è visto come un tutt'uno, oggi si procede integrando vari componenti. Ad esempio si parte dalla fusoliera (carico pagante) e poi ci si appiccicano le superfici portanti (ala ed altre appendici per equilibrio, stabilità e controllo), gli organi di propulsione e tutti gli altri apparati. *Ab initio* il prodotto finale è "integrato" solo nella mente del progettista. Una volta realizzato il prototipo, dopo le verifiche ed i collaudi spesso è necessario procedere ad interventi, a volte non secondari: per l'aerodinamica si possono osservare sulle superfici di aerei oggi operativi turbolatori, promotori di stallo, *fences*...¹⁴.

Se si guarda alle idee ed ai concetti che il mondo della ricerca sta sviluppando (ed ai prototipi che si stanno realizzando) si vedrà che la macchina aereo così come oggi è concepita, progettata e realizzata è ancora "rudimentale". Ma sarà sempre così. Per il mercato, rispetto alla punta del livello tecnologico, si devono preferire procedure e prodotti consolidati: si può certamente concepire un prodotto più avanzato, ma... si riuscirà a tradurre l'idea in un progetto sostenibile¹⁵?

A volte non è che ci sia troppa libertà progettuale: la macchina "avanzata" per il volo supersonico *business*, Fig. 1.32, "deve" avere un'architettura identica a quella di una macchina antica, a suo tempo certamente innovativa (trascurando qui le difficoltà -a livello normativo- per far volare AS2 AERION o altri velivoli supersonici sui quali si sta lavorando: ma della scarsissima sostenibilità del volo supersonico commerciale già si è scritto).

¹⁴Il prof. Losito parlava di "pezze a colore"...

¹⁵È stato ampiamente discusso il caso di un velivolo della BOEING dichiarato innovativo sotto numerosi aspetti, il modello 787. La progettazione integrata e l'inizio della produzione avrebbero dovuto vedere tempi ridotti del 50% rispetto a prodotti di generazione immediatamente precedente, e invece durarono esattamente come nel passato. Inoltre tutta una serie di innovazioni tecnologiche -alcune delle quali di impatto non troppo sicuro sul mercato- si dimostrarono immature. Complessivamente questo progetto non ha introdotto un'innovazione decisiva nella progettazione dei grandi velivoli.

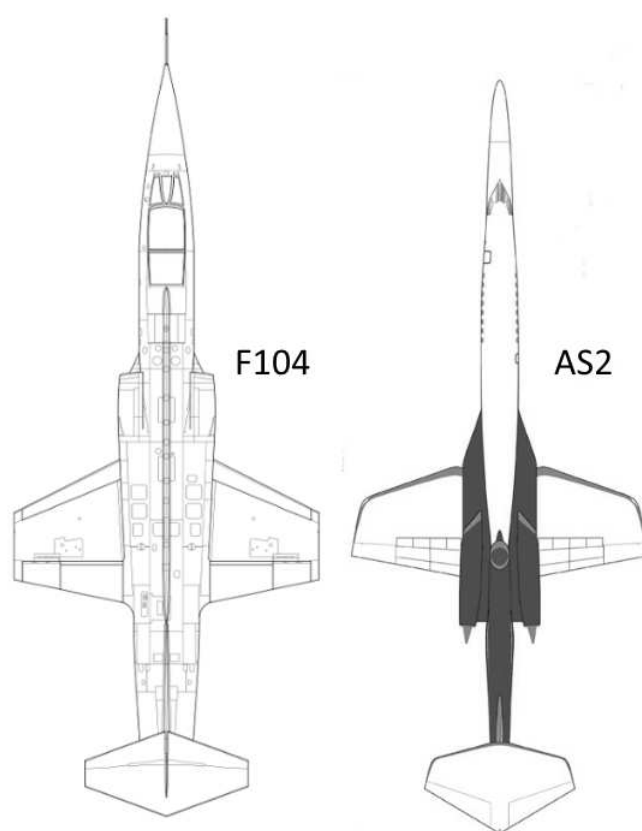


Figura 1.32: Confronto tra due forme in pianta: F104 (1950, $M_{cruise} > 2.2$) ed AS2 AERION (2022, probabilmente, $M_{cruise} = 1.4$)

Capitolo 2

Le equazioni per la soluzione di campi di moto

Scopo di questo capitolo è un'analisi dei diversi modelli fluidodinamici che possono impiegarsi per la soluzione dei campi di moto che si realizzano attorno a geometrie di interesse aeronautico di diversa complessità. Si richiameranno inizialmente le equazioni di Navier-Stokes, presentandone quindi alcune forme ridotte di pratica utilizzazione per la soluzione di campi viscosi; si discuteranno poi i due modelli di flusso non viscoso, quello retto dalle equazioni di Eulero e quello a potenziale. Si introdurranno, infine, le equazioni modello di Burgers, che sono di particolare utilità, dal punto di vista didattico così come dal punto di vista applicativo, per una efficace comprensione dei problemi matematici e numerici che si possono presentare nella chiusura e nella soluzione delle equazioni di Navier-Stokes e di Eulero.

2.1 Le equazioni di Navier-Stokes

Le equazioni fondamentali della fluidodinamica si basano sulle seguenti leggi:

- conservazione della massa;
- bilancio della quantità di moto;
- conservazione dell'energia.

Nella formulazione Lagrangiana, ipotizzando la trascurabilità degli effetti gravitazionali, queste equazioni si scrivono, [4],

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \underline{V}) &= 0 \\ \rho \frac{D\underline{V}}{Dt} - (\nabla \cdot \underline{\tau}) &= 0 \\ \rho \frac{DE}{Dt} + \nabla \cdot (\underline{J}_{ter} - \underline{\tau} \cdot \underline{V}) &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

essendo \underline{V} la velocità, ρ la densità, p la pressione, $E = u + V^2/2$ l'energia totale (u è l'energia interna), $\underline{\tau} = -p\underline{U} + \underline{\tau}_d$ il tensore degli sforzi (con $\underline{\tau}_d$ si indica la parte dissipativa del tensore degli sforzi, mentre \underline{U} è il tensore unitario del secondo ordine), \underline{J}_{ter} il flusso diffusivo di energia interna, mentre l'operatore $D/Dt = \partial/\partial t + \rho \nabla \cdot$ è la derivata sostanziale o Lagrangiana.

È necessario aggiungere al sistema (2.1) relazioni, dette fenomenologiche, per modellare le quantità $\underline{\tau}_d$ e \underline{J}_{ter} : ci si limita per ora, fino all'introduzione delle equazioni di Reynolds, al caso di moti laminari. Per \underline{J}_{ter} si può ricorrere alla relazione di Fourier $\underline{J}_{ter} = -\lambda \nabla T$, dove T è la temperatura e λ il coefficiente di conducibilità termica, mentre per il flusso diffusivo irreversibile di quantità di moto $\underline{\tau}_d$ è possibile postulare il modello fenomenologico, [4],

$$\underline{\tau}_d = (\pi + p)\underline{U} + \underline{\tau}_0 \quad (2.2)$$

essendo $\underline{\tau}_0 = 2\mu(\nabla V)_0^s$ (legge di Newton per gli sforzi viscosi) la parte simmetrica a traccia nulla del tensore degli sforzi e $\pi + p = \mu_2(\nabla \cdot V)$ la traccia della parte dissipativa del tensore degli sforzi (μ e μ_2 sono il primo ed il secondo coefficiente di viscosità).

Per i fluidi Newtoniani, qual è un gas perfetto in condizioni ordinarie, i coefficienti fenomenologici λ , μ e μ_2 devono dipendere dallo stato termodinamico del sistema, e sono quantità essenzialmente positive; qui si può assumere che dipendano soltanto dalla temperatura. Inoltre il rapporto μ_2/μ è molto piccolo e senz'altro trascurabile nelle applicazioni, per cui è valida l'approssimazione $\mu_2 = 0$ (e μ sarà il coefficiente di viscosità senza specificazione ulteriore).

In base alle relazioni fenomenologiche l'equazione dell'energia totale può anche essere formulata in termini del potenziale termodinamico entalpia, [4]

$$\rho \frac{DH}{Dt} - \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla \cdot [\lambda \nabla T + 2\mu (\nabla V)_0^s \cdot V] \quad (2.3)$$

essendo $H = E + p/\rho$ l'entalpia totale.

In genere l'equazione di bilancio di quantità di moto è detta equazione di Navier-Stokes; comunque ora e nel seguito si indicherà con questa dizione tutto il sistema di equazioni (2.1). Si osservi che il sistema di Navier-Stokes presenta carattere misto iperbolico-parabolico, mentre risulta essere di tipo iperbolico-ellittico qualora si eliminino i termini instazionari.

Il sistema (2.1), accoppiato ad opportune relazioni termodinamiche, costituisce un sistema determinato; affinché il problema sia ben posto è necessario aggiungere le condizioni iniziali e al contorno, che sono determinate in base a considerazioni di tipo fisico e che dipendono, naturalmente, dal problema in esame.

2.2 Forma conservativa e forma adimensionale delle equazioni di Navier-Stokes

Risulta talvolta conveniente riscrivere il sistema di equazioni (2.1) in forma conservativa, in una forma cioè in cui i coefficienti delle derivate di qualunque ordine o sono costanti oppure sono tali che le loro derivate non compaiono nelle equazioni.

Porre le equazioni in forma conservativa può permettere di rintracciare in esse la divergenza di una quantità fisica, e può presentare il vantaggio di superare eventuali difficoltà numeriche nei casi in cui sono presenti discontinuità, come accade se si è in presenza di onde d'urto: quindi questo risulta particolarmente utile nello studio dei campi di moto transonici, ove si è interessati a soluzioni contenenti discontinuità, che sono soluzione della forma integrale delle equazioni del bilancio, e non della forma differenziale (le soluzioni di queste ultime possono essere usate su entrambi i lati delle discontinuità ma non attraverso esse). Allo scopo di mostrare tale proprietà si consideri la legge di conservazione, espressa in forma integrale

$$\int Af \, dy + \int Bg \, dx = 0 \quad (2.4)$$

con $f = f(x, y)$, $g = g(x, y)$, $A = A(f, g)$, $B = B(f, g)$; utilizzando un *mesh* cartesiano ortogonale e scrivendo la (2.4) per il volume di controllo indicato in Fig. 2.1 si ottiene

$$\int_{x=x_r} Af \, dy + \int_{y=y_b} Bg \, dy - \int_{x=x_l} Af \, dy - \int_{y=y_o} Bg \, dx = 0 \quad (2.5)$$

Approssimando numericamente la (2.5) mediante il teorema della media si giunge alla seguente espressione:

$$[(Af)_r - (Af)_l] h_y + [(Bg)_b - (Bg)_o] h_x = 0 \quad (2.6)$$

La stessa legge di conservazione espressa in forma differenziale e conservativa si scrive

$$\frac{\partial}{\partial x}(Af) + \frac{\partial}{\partial y}(Bg) = 0$$

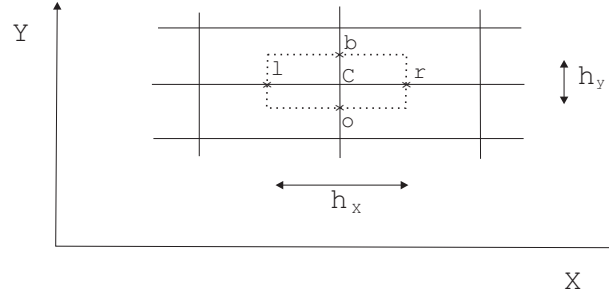


Figura 2.1: Discretizzazione della (2.4)

Sempre in riferimento al *mesh* cartesiano ortogonale di Fig. 2.1 e discretizzando l'equazione nel punto C con un metodo alle differenze finite si ottiene la seguente approssimazione

$$\frac{1}{h_x} [(Af)_r - (Af)_l] + \frac{1}{h_y} [(Bg)_b - (Bg)_o] = 0 \quad (2.7)$$

che coincide con la (2.6).

Quindi la soluzione delle equazioni differenziali poste in forma conservativa soddisfa le leggi integrali del bilancio; se si tiene presente che le soluzioni contenenti discontinuità che soddisfano le equazioni del bilancio nella loro forma integrale sono chiamate da Lax soluzioni deboli, si può concludere che anche le soluzioni delle leggi del bilancio espresse in forma differenziale e conservativa sono soluzioni deboli. Questa è la proprietà fondamentale della forma conservativa, [5].

In forma conservativa il sistema (2.1) si scrive, [6],

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{V}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{V}) + \nabla \cdot (\rho \underline{V} \underline{V} - \underline{\tau}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \nabla \cdot (\rho \underline{V} E + \underline{J}_{ter} - \underline{\tau} \cdot \underline{V}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Di norma risulta conveniente porre le equazioni di Navier-Stokes in forma adimensionale, associando ad ogni quantità una grandezza ad essa omogenea e caratteristica del fenomeno in esame: l'importanza relativa di un termine rispetto ad un altro è allora data dal valore del rapporto (adimensionale) tra i loro coefficienti, che è un numero caratteristico. Applicando tale procedura al sistema (2.1) si perviene al sistema (2.9), in cui si sono indicati con $Pr = c_p \mu / \lambda$ il numero di Prandtl del fluido e con $Re_\infty = \rho_\infty V_\infty l / \mu_\infty$ e $M_\infty = V_\infty / a_\infty$ rispettivamente i numeri di Reynolds e di Mach riferiti alla corrente asintotica (c_p è il calore specifico a pressione costante ed a la velocità del suono):

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \rho + \rho (\nabla) \cdot \underline{V} &= 0 \\ \rho \frac{D}{Dt} \underline{V} + \nabla p &= \frac{1}{Re_\infty} \nabla \cdot \underline{\tau}_d \\ \rho \frac{D}{Dt} H &= (\gamma - 1) M_\infty^2 \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{Re_\infty} \left\{ \nabla \cdot \left[\frac{\underline{J}_{ter}}{Pr} - (\gamma - 1) M_\infty^2 \underline{\tau}_d \cdot \underline{V} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Le grandezze che compaiono nel sistema (2.9) sono tutte adimensionali.

2.3 Le equazioni di Reynolds

Nel paragrafo (1.2) si sono introdotte le definizioni e le caratteristiche, formali e sostanziali, che differenziano un moto turbolento da un moto laminare, richiamando l'importanza fondamentale che questa differenziazione ha; si è anche detto che una grossa semplificazione ad affrontare lo studio dei moti turbolenti si ha se si trattano moti completamente sviluppati, senza cioè considerare le regioni del campo di moto in cui un flusso laminare non è più stabile e può iniziare a svilupparsi la transizione. Per *fully developed turbulent streams* si è poi introdotta la decomposizione di una grandezza termofluidodinamica f come

$$f = \bar{f} + f'$$

essendo \bar{f} il valore medio nel tempo di f

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f dt$$

e f' la fluttuazione di f rispetto al valore medio; le fluttuazioni sono rappresentabili mediante delle funzioni dello spazio e del tempo.

Indicando con f e g due variabili dipendenti e con s una qualsiasi delle variabili indipendenti x, y, z o t , è facile verificare la validità delle seguenti formule per le operazioni di media:

$$\overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g} \quad \overline{f \cdot g} = \bar{f} \cdot \bar{g} \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial s} = \bar{\frac{\partial f}{\partial s}} \quad (2.10)$$

È semplice constatare mediante le (2.10) che i valori medi di tali funzioni sono nulli:

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f' dt = \bar{f}' = 0 \quad (2.11)$$

La presenza delle fluttuazioni turbolente incrementa la resistenza alla deformazione: si produce cioè un aumento *apparente* della viscosità. Questo fondamentale aspetto del moto turbolento può essere spiegato mediante considerazioni di tipo fisico considerando un'area elementare dA perpendicolare alla direzione del flusso principale di una corrente turbolenta incomprimibile, Fig. 2.2. Assumendo un riferimento cartesiano avente l'asse x in direzione della corrente, e dette u, v, w le componenti della velocità (essendo u la componente lungo x) la portata elementare di massa che attraversa l'area dA per unità di tempo è pari a $\rho u dA$, e la portata elementare di quantità di moto è, corrispondentemente,

$$dJ_x = \rho u^2 dA \quad dJ_y = \rho u v dA \quad dJ_z = \rho u w dA$$

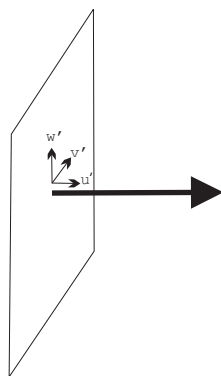


Figura 2.2: Flusso attraverso una superficie elementare

Ricordando che si è assunto che la densità resti costante, le medie temporali delle portate elementari di quantità di moto per unità di tempo sono pari a

$$\overline{dJ}_x = \rho \overline{u^2} dA \quad \overline{dJ}_y = \rho \overline{uv} dA \quad \overline{dJ}_z = \rho \overline{uw} dA$$

Ora, essendo

$$u^2 = (\bar{u} + u')^2 = \bar{u}^2 + 2\bar{u}u' + u'^2$$

si ha, per le (2.10), che

$$\overline{u^2} = \bar{u}^2 + \overline{u'^2}$$

ed è possibile inoltre ricavare, in modo analogo, che

$$\overline{uv} = \bar{u} \bar{v} + \overline{u'v'} \quad \overline{uw} = \bar{u} \bar{w} + \overline{u'w'}$$

Si ha quindi

$$\overline{dJ}_x = \rho(\bar{u}^2 + \overline{u'^2}) dA \quad \overline{dJ}_y = \rho(\bar{u}\bar{v} + \overline{u'v'}) dA \quad \overline{dJ}_z = \rho(\bar{u}\bar{w} + \overline{u'w'}) dA$$

e pertanto la presenza delle fluttuazioni di velocità fa sì che su dA insistano i seguenti sforzi addizionali, detti sforzi di Reynolds:

$$\sigma'_x = -\rho \overline{u'^2} \quad \tau'_{yx} = -\rho \overline{u'v'} \quad \tau'_{zx} = -\rho \overline{u'w'}$$

Espressioni analoghe possono ricavarsi ripetendo il procedimento lungo le direzioni y e z : l'insieme degli sforzi di Reynolds costituisce il tensore di Reynolds così definito:

$$\begin{pmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{yx} & \sigma'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} & \tau'_{zy} & \sigma'_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \rho \overline{u'^2} & \rho \overline{u'v'} & \rho \overline{u'w'} \\ \rho \overline{u'v'} & \rho \overline{v'^2} & \rho \overline{v'w'} \\ \rho \overline{u'w'} & \rho \overline{v'w'} & \rho \overline{w'^2} \end{pmatrix}$$

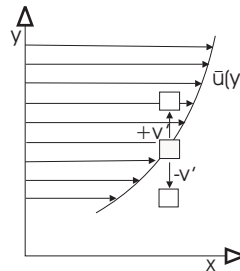


Figura 2.3: Flusso macroscopico diffusivo di una grandezza estensiva legato alla fluttuazione verticale

È facile verificare che le quantità ora introdotte sono diverse da zero. Infatti $\tau'_{xy} = \tau'_{yx} = -\rho \overline{u'v'}$ può interpretarsi come il trasporto in direzione y della componente lungo x della quantità di moto: assumendo che il profilo di velocità sia del tipo rappresentato in Fig. 2.3 e supponendo $\bar{v} = \bar{w} = 0$, è semplice vedere che una particella che possieda una velocità $\bar{u}(y)$ si sposta, per la presenza di una fluttuazione $v' > 0$, verso una regione in cui la velocità media è maggiore, e quindi, poiché tende a conservare il proprio stato, avrà una fluttuazione $u' < 0$. Al contrario, per una particella la cui velocità abbia una fluttuazione $v' < 0$ si avrà $u' > 0$. In genere il prodotto $\overline{u'v'}$ non solo è diverso da zero ma addirittura negativo, per cui lo sforzo τ'_{xy} si somma a quello "laminare" $\mu \partial \bar{u} / \partial y$.

Si può giungere agli stessi risultati con un metodo formale, ugualmente rigoroso, che consente di arrivare alla scrittura delle equazioni del moto che devono essere soddisfatte dalla media temporale delle componenti di velocità e pressione \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} , \bar{p} ; all'uopo, si riscrive il sistema (2.1) nel caso di regime incomprimibile:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\
\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) + \frac{\partial}{\partial z}(uw) \right] &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \\
\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2) + \frac{\partial}{\partial z}(vw) \right] &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 v \\
\rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uw) + \frac{\partial}{\partial y}(vw) + \frac{\partial}{\partial z}(w^2) \right] &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 w
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Si sostituiscono quindi nel sistema (2.12) le variabili termofluidodinamiche con la somma del valore medio \bar{f} e della fluttuazione f' . Per l'equazione di conservazione della massa si ha

$$\frac{\partial}{\partial x}(\bar{u} + u') + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{v} + v') + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{w} + w') = 0 \tag{2.13}$$

Mediando nel tempo, termine a termine, la (2.13) in base alle regole prima riportate, si ottiene la relazione

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}'}{\partial z} = 0$$

che, essendo $\bar{u}' = \bar{v}' = \bar{w}' = 0$, diventa

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \tag{2.14}$$

Dalla prima equazione del sistema (2.12) e in base alla (2.14) è facile ricavare che

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

e si vede quindi che sia le velocità medie che le fluttuazioni soddisfano l'equazione di continuità nel caso di regime di moto incomprimibile.

Applicando la stessa procedura alla seconda equazione del sistema (2.12) si ha

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t}(\bar{u} + u') + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u} + u')^2 + \frac{\partial}{\partial y}[(\bar{u} + u')(\bar{v} + v')] + \frac{\partial}{\partial z}[(\bar{u} + u')(\bar{w} + w')] \right] = -\frac{\partial}{\partial x}(\bar{p} + p') + \mu \nabla^2(\bar{u} + u')$$

e mediando ogni singolo termine si ricava

$$\begin{aligned}
\rho \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}^2 + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}'^2) + 2 \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}\bar{u}') + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{u}\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{u}\bar{v}') + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{u}'\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{u}'\bar{v}') \right. \\
\left. + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{u}\bar{w}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{u}\bar{w}') + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{u}'\bar{w}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{u}'\bar{w}') \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{p}'}{\partial x} + \mu \nabla^2 \bar{u} + \mu \nabla^2 \bar{u}'
\end{aligned}$$

Da tale relazione possono essere eliminati i termini lineari in \bar{u}' , \bar{v}' , \bar{w}' e \bar{p}' in virtù della condizione (2.11), ottenendo, nel caso di moto medio stazionario,

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{u}\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{u}\bar{w}) \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \nabla^2 \bar{u} - \rho \left[\frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}'^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{u}'\bar{v}') + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{u}'\bar{w}') \right]$$

e quindi, in forza della (2.14)

$$\rho \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \nabla^2 \bar{u} - \rho \left[\frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}'^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{u}'\bar{v}') + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{u}'\bar{w}') \right]$$

Generalizzando la procedura, si ha il sistema delle equazioni di Reynolds (*Reynolds Averaged Navier-Stokes equations*, RANS):

$$\begin{aligned} \rho \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \nabla^2 \bar{u} - \rho \left[\frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'^2}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u'w'}) \right] \\ \rho \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \nabla^2 \bar{v} - \rho \left[\frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'^2}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{v'w'}) \right] \\ \rho \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \nabla^2 \bar{w} - \rho \left[\frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'w'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'w'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{w'^2}) \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

I termini addizionali a secondo membro (rispetto alle (2.12)) sono le componenti della divergenza del tensore di Reynolds. Il modello relativo al caso di moto medio *Unsteady* è denominato U-RANS.

È evidente che le medie delle componenti di velocità soddisfano le stesse equazioni che reggono il regime di moto laminare con la condizione di aggiungere alle componenti del tensore degli sforzi espresso dalla legge di Newton gli sforzi addizionali di Reynolds; pertanto le componenti del tensore degli sforzi saranno

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -p + 2\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \rho \overline{u'^2} \\ \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \rho \overline{u'v'} \end{aligned}$$

Gli sforzi viscosi sono associati a diffusione di quantità di moto. Nel moto laminare questa avviene solo per effetto dello scorrimento relativo tra filetti fluidi (diffusione molecolare), mentre nel moto turbolento, in aggiunta alla diffusione molecolare, vi è uno scambio di quantità di moto su scala macroscopica legata al mescolamento turbolento. In generale, in presenza di turbolenza gli sforzi di Reynolds sono significativamente maggiori degli sforzi viscosi laminari, anche di qualche ordine di grandezza (la turbolenza spesso ha un ruolo dominante).

Un'espressione formale per τ_d per differenziare gli sforzi di Reynolds da quelli laminari può essere

$$\tau_d(x, y) = \tau_{lam} + \tau_{turb} \quad (2.16)$$

Per la chiusura di un problema fluidodinamico è necessario stabilire per τ_{turb} opportune relazioni matematiche, che costituiscono un cosiddetto modello di turbolenza: ne esistono moltissimi, ed il loro sviluppo è continuo¹. Alcuni modelli di turbolenza, in analogia con la legge di Newton per gli sforzi viscosi, legano gli sforzi di Reynolds alle derivate spaziali delle velocità medie: questo consente di definire una viscosità "effettiva" $\mu_{eff} = \mu + \mu_T$, somma del coefficiente di viscosità μ del fluido (molte volte chiamato impropriamente coefficiente di viscosità laminare) e di un "coefficiente di viscosità turbolenta" μ_T , incognito, variabile da punto a punto in quanto dipendente dalle caratteristiche puntuali del campo di moto e non solo dallo stato del fluido (è questa la più forte complicazione dei modelli di turbolenza: invece in molti casi μ si può assumere addirittura costante in tutto il campo di moto). Purtroppo in certe condizioni la modellazione della turbolenza è insoddisfacente, l'effetto della turbolenza non è calcolabile in modo accurato, e ne può conseguire notevole incertezza nelle previsioni aerodinamiche in condizioni di volo molto importanti e delicate.

Comunque sia, in ogni punto del campo di moto esistono sforzi tangenziali viscosi

$$\tau_d(x, y) = \tau_{lam}(x, y) + \tau_{turb}(x, y) = \mu_{eff} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.17)$$

Si presentano ora due esempi, semplici e ormai datati. Ci si pone nel caso 2-D, supponendo che la direzione principale della corrente sia l'asse x (da cui $\bar{u} = \bar{u}(y)$, $\bar{v} = 0$, $\bar{w} = 0$). Il modello di

¹La modellistica della turbolenza è la scienza che studia le relazioni tra sforzi turbolenti e valori delle grandezze del flusso (mediate rispetto al tempo).

Boussinesq definisce lo sforzo di Reynolds come

$$-\overline{\rho u'v'} = A \frac{d\bar{u}}{dy} = \rho\epsilon \frac{d\bar{u}}{dy}$$

dove A è un coefficiente di mescolamento, detto comunemente viscosità apparente o virtuale. Un altro modello, suggerito da Prandtl, propone per gli sforzi di Reynolds la relazione

$$-\overline{\rho u'v'} = \rho\ell^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy}$$

dove ℓ è la cosiddetta lunghezza di mescolamento. Un vantaggio di questo modello rispetto a quello di Boussinesq è costituito dal fatto che risulta più semplice modellare la lunghezza di mescolamento ℓ che non la viscosità cinematica apparente ϵ .

È utile accennare al fatto che per ricavare le equazioni di Reynolds nel caso di regimi comprimibili è preferibile utilizzare la formulazione detta *mass weighted averaging*; quest'approccio consiste nel definire le variabili *mass averaged* come

$$\tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}}$$

e, conseguentemente, nel definire una generica variabile termofluidodinamica come

$$f = \tilde{f} + f''$$

In questo caso la media temporale del termine f'' è diversa da zero, in generale, mentre è

$$\overline{\rho f''} = 0$$

L'equazione della continuità si scrive allora

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho} \tilde{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\rho} \tilde{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{\rho} \tilde{w}) = 0$$

le variabili ρ e p essendo definite come nel caso incomprimibile.

2.4 Forme ridotte delle equazioni di Navier-Stokes

Si fa presente che in questo paragrafo le variabili termofluidodinamiche non saranno soprassegnate, pur intendendosi che il loro valore può essere quello mediato nel tempo se il moto è turbolento (nel qual caso la viscosità sarà quella equivalente).

Il sistema (2.9) è formato da equazioni differenziali, a derivate parziali, non lineari, la cui soluzione analitica o numerica comporta una notevole mole di lavoro oltre a difficoltà non sempre superabili con successo; sono stati quindi introdotti una serie di modelli mediante successive approssimazioni, che se da un lato semplificano o rendono possibile la soluzione delle equazioni, dall'altro riducono la validità dell'applicazione del modello stesso.

Il modello più semplice, nell'ambito dei moti viscosi, è quello dello strato limite, introdotto da Prandtl: gli effetti viscosi sono confinati in una regione piccola rispetto alla dimensione caratteristica, ed esiste una direzione dominante, localmente perpendicolare alla direzione del flusso principale.

Esistono poi in natura molti tipi di flussi viscosi non rappresentati correttamente dal modello di strato limite; esempi sono riportati in Fig. 2.4, [8, pp. 418-419]. Nel caso della lastra piana immersa in una corrente rarefatta ipersonica e del corpo tozzo investito da una corrente ipersonica la forte interazione tra strato d'urto e strato limite non consente una soluzione basata su un modello valido in una sola delle regioni; nel caso (d) viene invece a cadere l'ipotesi di Prandtl di considerare le derivate solo in una direzione normale al corpo (in vicinanza dello spigolo sono da considerare entrambe le derivate normali alle pareti): questa situazione si riscontra nella giunzione

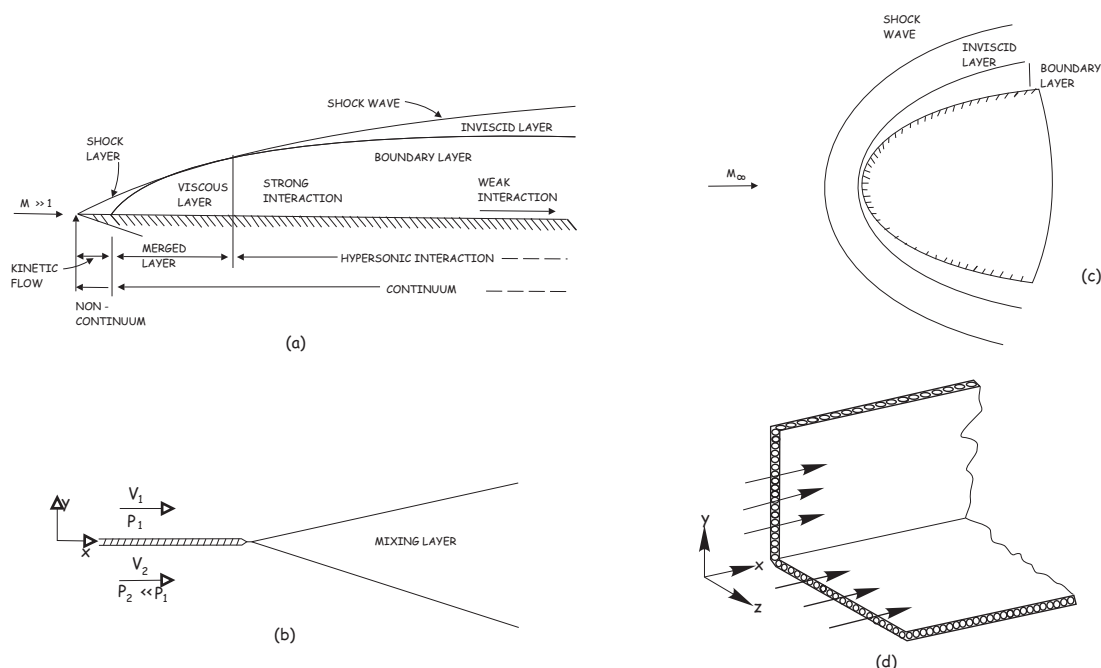


Figura 2.4: Schema di situazioni in cui non vale l'ipotesi di strato limite

ala-fusoliera, per esempio, o in condotti a sezione rettangolare (che si possono trovare, tipicamente, in certe prese d'aria). Si sono costruite allora forme ridotte del sistema (2.9), appartenenti ad una classe di equazioni dette RNS (*Reduced Navier-Stokes*), che si collocano tra le NS e le equazioni di strato limite ed esibiscono però caratteristiche meno complesse.

Caratteristiche comuni di tutti i modelli ridotti sono essenzialmente le seguenti, [9]:

- vi è una direzione dominante della corrente approssimativamente parallela a uno degli assi coordinati;
- i termini diffusivi nella direzione della corrente sono trascurabili rispetto a quelli ad essa normali;
- qualora si trascurino anche i termini diffusivi in direzione normale al moto il modello si riconduce alle equazioni di Eulero.

Si introducono ora quelli maggiormente significativi, di più frequente uso. Nelle applicazioni si lavorerà solo con il modello di Prandtl, sufficiente a spiegare la maggior parte dei fenomeni dell'Aerodinamica Applicata: si troverà scritto altre volte in questo testo che un velivolo, nelle sue condizioni di progetto, "viaggia" in uno strato limite e non in flusso "più completamente" viscoso. Cenni all'impiego delle soluzioni NS saranno comunque trattati.

È utile sottolineare che anche i modelli ridotti possono descrivere regimi di moto sia laminari che turbolenti mediante l'introduzione della viscosità effettiva.

IL MODELLO DI PRANDTL PER LO STRATO LIMITE

Si tratta di un modello fondamentale in Aerodinamica: la quasi totalità dei fenomeni reali in essa presenti viene a tutt'oggi modellata, e a volte correttamente prevista per via teorica, senza considerare il fluido "ovunque" viscoso, ma ricorrendo al modello di strato limite accoppiato ad un flusso "non viscoso" esterno. Il concetto di strato limite non è da associarsi solo al moto di un fluido in prossimità di una parete: esso è comunque valido quando le azioni viscosive sono confinate in una regione di piccolo spessore rispetto alla dimensione caratteristica (come ad esempio nel caso

di getti o scie sottili). Si può generalizzare il concetto e introdurre altri tipi di strato limite ogni qualvolta che gli effetti diffusivi diventano confrontabili con quelli convettivi, e l'estensione in cui questo accade è limitata.

Il modello formale viene qui descritto nel caso di moto 2-D lungo una superficie (pur ribadendo che la turbolenza è un fenomeno intrinsecamente 3-D!); la trattazione può effettuarsi per lo strato limite tridimensionale, anche comprimibile, anche instazionario. In un riferimento curvilineo (x, y) , con x ascissa curvilinea orientata in direzione della corrente esterna e y coordinata in direzione normale al corpo, siano u, v le componenti della velocità lungo x ed y rispettivamente.

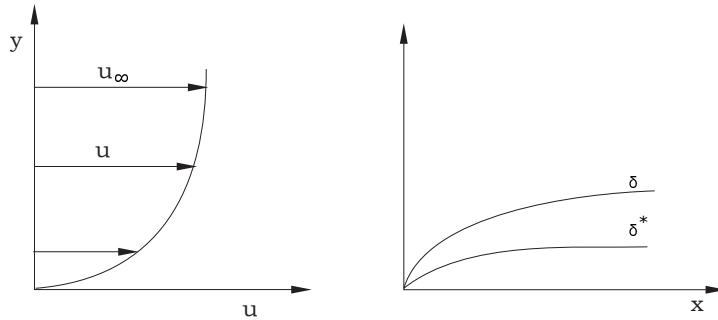


Figura 2.5: Profilo di velocità, spessore, spessore di spostamento su una superficie 2-D

In Fig. 2.5 si presenta un'idea dello strato limite su una superficie, con opportuno ingrandimento della regione nella direzione y lungo la quale gli effetti della viscosità sono efficaci. La linea $\delta(x)$ - bordo dello strato limite - definisce convenzionalmente la regione nella quale la componente u passa dal valore nullo alla parete ad un valore molto prossimo a quello della corrente esterna. La funzione $u(x, y)$ definisce, $\forall x$, il profilo di velocità (la vera incognita del problema dello strato limite). La misura di $\delta(x)$, $\forall x$ è lo spessore convenzionale dello strato limite: in genere per definire $\delta(x)$ si assume la convenzione che $\forall x, u(x, \delta) = 0.99U_e(x)$, essendo $U_e(x)$ la velocità nel moto esterno.

In ogni punto dello strato limite gli sforzi tangenziali viscosi possono essere espressi dalla 2.17, e quasi sempre il termine $\mu_{\text{eff}}\partial v/\partial y$ è trascurabile.

Le equazioni di Prandtl per il moto di strato limite 2-D incomprimibile si scrivono come, [7]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu_{\text{eff}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

con le relative condizioni al contorno

$$\begin{aligned} y = 0 : \quad u &= 0, \quad v = v_w \\ y = \delta : \quad u &= U_e(x), \quad \frac{\partial^n u}{\partial y^n} = 0, \forall n > 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Dal punto di vista matematico le equazioni di Prandtl hanno carattere parabolico. Dal punto di vista fisico lo strato limite “è” un campo di moto parabolico: questo significa che lo strato limite all'ascissa x non è influenzato da quel che accade a valle.

Nello strato limite la diffusione della quantità di moto è dominante.

THIN LAYER NAVIER-STOKES (TLNS) EQUATIONS

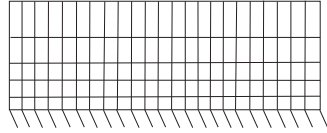
Quando le variazioni dei termini viscosi nella direzione del moto sono trascurabili, e contemporaneamente gli effetti della viscosità sono confinati in piccole regioni (questo può realizzarsi per

elevati valori del numero di Reynolds asintotico), si giunge al sistema di equazioni TLNS che, nel caso 2-D, cartesiano e comprimibile si scrive, [8],

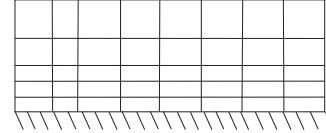
$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(p + \rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv - \mu_{\text{eff}} \frac{\partial u}{\partial y}) &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(p + \rho v^2 - \frac{4}{3} \frac{\partial \rho}{\partial t} \mu_{\text{eff}} \frac{\partial v}{\partial y}) &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho Eu + pu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho Ev + pv - \mu_{\text{eff}} u \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{4}{3} \mu_{\text{eff}} v \frac{\partial v}{\partial y} - \lambda \frac{\partial T}{\partial y}) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Le equazioni TLNS, mediante le quali si è in grado di predire accuratamente delle piccole zone di flusso separato nella direzione principale della corrente, presentano carattere misto iperbolico-parabolico per cui è possibile utilizzare la procedura iterativa *time dependent* per giungere asintoticamente allo stato stazionario: la presenza del termine instazionario nelle equazioni rappresenta allora solo un artificio per la determinazione della soluzione stazionaria e il tempo è da considerare come un parametro di convergenza, [10].

Il vantaggio di risolvere numericamente il sistema (2.20) consiste nel poter utilizzare griglie meno fitte rispetto a quelle usate per la risoluzione del sistema (2.1), come mostrato nella Fig. 2.6, con conseguente economia di memoria e di tempi di calcolo.



Esempio di griglia per le equazioni di NS



Esempio di griglia per le equazioni TLNS

Figura 2.6:

Pur essendo considerevolmente meno complicate delle equazioni di Navier-Stokes in forma completa, le TLNS richiedono comunque un notevole sforzo computazionale per ottenere una soluzione sufficientemente accurata.

PARABOLIZED NAVIER-STOKES (PNS) EQUATIONS

L'utilizzo sempre più frequente dei sistemi PNS è dovuto alla possibilità di risolvere efficientemente campi di moto stazionari, viscosi e supersonici attorno a configurazioni complesse poiché è possibile integrare le equazioni del moto mediante tecniche *space marching* (solitamente usate per la risoluzione delle equazioni di strato limite), che consentono la determinazione del campo fluidodinamico attraverso un solo *sweep* nella direzione della corrente.

Anche i sistemi di equazioni PNS si ottengono dalle equazioni di Navier-Stokes in forma completa a seguito dell'eliminazione di alcuni termini; in realtà l'approssimazione effettuata è tale da rendere il carattere del sistema di equazioni PNS iperbolico-parabolico, se verificate opportune condizioni, per cui l'utilizzo del termine PNS sembra improprio, [8]. Le condizioni che bisogna soddisfare sono il risultato di un'indagine sugli autovalori del sistema di equazioni PNS basata sul metodo di analisi di Fourier. Quest'indagine indica che il suddetto sistema ha un forte carattere ellittico in campo subsonico e transonico per cui un'integrazione del tipo *space marching* nella direzione della corrente non è possibile (è necessario in questo caso usare una procedura iterativa). Al contrario, nel caso di moto supersonico, la stessa indagine mostra che le equazioni PNS possono essere risolte con una tecnica *space-marching* a patto che non ci siano zone di *reverse flow* e che il

termine $\partial p/\partial x$, responsabile della propagazione a monte dei disturbi nelle zone subsoniche, intervenga in maniera *pesata* all'interno delle equazioni. Se ciò non avviene la procedura di integrazione adottata può portare a delle instabilità della soluzione, [8].

È possibile trovare in letteratura diverse forme di equazioni PNS; le più comuni sono quelle ottenute eliminando dal sistema (2.1) i termini instazionari e tutte le derivate dei termini viscosi lungo la direzione principale della corrente. Le equazioni così ottenute si scrivono nel caso 2-D, comprimibile e cartesiano come segue, [8]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) &= 0 \\ \rho \frac{u \partial u}{\partial x} + \rho \frac{v \partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_{\text{eff}} \partial u}{\partial y} \right) \\ \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{\text{eff}} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \rho u c_v \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_v \frac{\partial T}{\partial y} &= -p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu_{\text{eff}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{4}{3} \mu_{\text{eff}} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2\end{aligned}$$

2.5 Le equazioni di Eulero

Le equazioni di Eulero si ottengono dalle (2.9) assumendo l'ipotesi di fluido non viscoso e termicamente non conduttivo; ciò consente di porre $1/Re_\infty = 0$ e $\lambda = 0$, pervenendo alla formulazione delle seguenti equazioni, [6]:

$$\begin{aligned}\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\underline{\nabla} \cdot \underline{V}) &= 0 \\ \rho \frac{D\underline{V}}{Dt} + \underline{\nabla} p &= 0 \\ \rho \frac{DE}{Dt} + \underline{\nabla} \cdot (p\underline{V}) &= 0\end{aligned}\tag{2.21}$$

Il sistema (2.21) ha carattere iperbolico; in forma conservativa può essere scritto, [6],

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{V}) &= 0 \\ \frac{\partial(\rho \underline{V})}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{V} \underline{V}) + \underline{\nabla} p &= 0 \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{V} H) &= 0\end{aligned}\tag{2.22}$$

Si riporta in forma matriciale il sistema (2.22) nel caso bidimensionale ed in coordinate cartesiane, [8],

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(w) + \frac{\partial}{\partial y} g(w) = 0\tag{2.23}$$

con

$$w = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho u H \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v u \\ \rho v^2 + p \\ \rho v H \end{bmatrix}$$

Nell'ambito della modellistica di campi di moto non viscosi il modello retto dalle equazioni di Eulero rappresenta, da un punto di vista gerarchico, il livello più alto: esso contempla infatti il caso

di flussi rotazionali; questa caratteristica è di fondamentale importanza per la moderna progettazione aerodinamica, essendo possibile descrivere con buona approssimazione mediante le equazioni di Eulero campi di moto complessi, come, ad esempio, lo scarico di un turbofan, l'interazione tra la scia di un'elica e l'ala, il flusso attorno a un'ala a forte freccia o a delta, o il flusso ideale attorno ad un corpo in una corrente asintotica non uniforme.

È utile sottolineare che è possibile trovare, come soluzione delle equazioni di Eulero, superfici di discontinuità nel campo di moto (onde d'urto, superfici vorticosi e di contatto).

Perché una soluzione delle equazioni di Eulero risulti fisicamente accettabile occorre che il salto di entropia esistente attraverso eventuali superfici di discontinuità soddisfi il secondo principio della Termodinamica, mediante il quale si postula che la produzione di entropia in un processo fisico sia non negativa.

Il rispetto di questa condizione è inessenziale in campi di moto Euleriani che siano privi di superfici di discontinuità, in quanto, nelle ipotesi poste, le equazioni di bilancio di massa, quantità di moto ed energia soddisfano quella dell'entropia in regimi di moto subsonico, [9].

Al contrario, nei regimi transonici e supersonici l'unicità della soluzione potrebbe non essere garantita e può essere possibile l'esistenza di soluzioni forti sia di compressione che di espansione. Ora, come dimostrato da Lax, [5], l'imposizione della seconda legge della Termodinamica equivale non solo a garantire l'unicità della soluzione, ma a escludere quella non fisica (discontinuità di espansione). A tale scopo si introduce la viscosità artificiale. Tuttavia si fa presente che, nell'ambito delle soluzioni fisicamente accettabili, la condizione imposta sull'entropia non garantisce l'esistenza di una sola onda di compressione che soddisfi le relazioni di Rankine-Hugoniot: infatti, come è ben noto, queste ammettono, in un certo intervallo di valori dell'angolo di deflessione del flusso e di numero di Mach, due soluzioni (urto forte e urto debole).

Al giorno d'oggi la soluzione delle equazioni di Eulero rappresenta uno strumento di fondamentale importanza per lo studio di campi di moto principalmente per due motivi: se è già ben nota l'utilità, in sede di progetto preliminare e avanzato, di un'indagine di tipo non viscoso, giova richiamare qui l'esistenza della cosiddetta tecnica zonale, consistente nella descrizione del flusso attorno ad un corpo mediante la soluzione simultanea di diversi sistemi di equazioni, ognuno valido ed applicato in regioni diverse del campo di moto. A titolo di esempio si cita l'approccio consistente nello studio di un campo di moto mediante le equazioni di Eulero a sufficiente distanza dalle superfici solide (comunque laddove si stimi che gli effetti della viscosità siano trascurabili), e mediante le equazioni di Navier-Stokes per le regioni di strato limite e di scia.

L'approccio zonale può risultare particolarmente vantaggioso dal punto di vista del carico computazionale, in quanto permette di evitare la risoluzione del sistema (2.1) (particolarmente onerosa rispetto a quella del sistema (2.22), all'incirca in un rapporto 30:1) in quelle regioni il cui il moto può considerarsi ideale senza che venga alterata significativamente l'accuratezza del calcolo. Tuttavia, è bene far presente che all'interfaccia tra due regioni in cui si applicano diversi modelli di moto, pur in assenza di (probabili) discontinuità nella griglia computazionale, è necessario, al fine di garantire la continuità della soluzione, applicare particolari tecniche di accoppiamento, le quali si traducono in condizioni al contorno addizionali in genere molto onerose dal punto di vista computazionale.

2.6 Condizioni al contorno per le equazioni di Eulero e Navier-Stokes

Per quanto riguarda le condizioni al contorno da associare ai sistemi di equazioni di Navier-Stokes e di Eulero affinché il problema matematico risulti ben posto, occorre distinguere fra condizioni sulle superfici solide e condizioni a grande distanza (*far field conditions*).

Sulle superfici solide si assegnano, generalmente, condizioni di aderenza o di impermeabilità del corpo, a seconda che si impieghi il modello di moto viscoso o non viscoso; suzioni o soffiamenti possono essere introdotti se effettivamente presenti (meccanismi di controllo dello strato limite, ad esempio).

Per il campo lontano la trattazione è più complessa; comunque, a sufficiente distanza dal corpo,

vanno ritrovate le caratteristiche della corrente indisturbata (numero di Mach ed inclinazione della corrente asintotica, ad esempio).

A tal proposito sono molti gli approcci presenti in letteratura: a tutti è comunque comune l'osservazione che se le curve caratteristiche uscenti dal dominio di integrazione sono riflesse all'interno del campo dalle superfici di contorno viene danneggiato il processo di convergenza. Questo può essere provato rifacendosi alla teoria delle curve caratteristiche, la quale fornisce il numero di grandezze termofluidodinamiche che è possibile assegnare sulle superfici di contorno; un quadro riassuntivo della situazione, nel caso di flussi tridimensionali e comprimibili, è presentato nella Tabella 2.1, in cui si intendono con *inflow* ed *outflow* le superfici di ingresso ed uscita del flusso indisturbato.

Equation System	Compressible (5 variables)			
	Inflow		Outflow	
	Supersonic	Subsonic	Supersonic	Subsonic
Euler	5	4	0	1
Navier-Stokes	5	5	4	4

Tabella 2.1: Numero di condizioni al contorno da assegnare per le equazioni del moto

È utile sottolineare che a grande distanza dal corpo, anche se si stesse impiegando ovunque il modello di moto viscoso, è possibile trascurare con ottima approssimazione gli effetti viscosi, in particolare nel caso di moti con valori alti del numero di Reynolds, per cui è possibile applicare condizioni al contorno di tipo Euleriano.

2.7 Modelli a potenziale

Procedendo verso il basso nella gerarchia delle equazioni della fluidodinamica (gerarchia basata sull'ordine dell'approssimazione effettuata), si descrivono nel seguito i modelli a potenziale, che si ottengono introducendo opportune ipotesi restrittive a partire dalle equazioni di Eulero (2.22); questi modelli, pur avendo un campo di validità ridotto, possono consentire di realizzare, in molti casi, accurati calcoli di progetto, preliminare o avanzato, anche per configurazioni complesse, con un carico computazionale ridotto (approssimativamente) di un fattore > 5 rispetto a quello della soluzione delle equazioni di Eulero.

MODELLI A POTENZIALE NON LINEARE: *FULL POTENTIAL EQUATION* (FPE) E *SMALL PERTURBATION TRANSONIC EQUATION* (SPTE)

In riferimento ad un flusso non viscoso e nelle ipotesi in cui il teorema di Crocco assicura l'irrotazionalità del moto è possibile introdurre il potenziale di velocità Φ , combinare le equazioni della continuità e della quantità di moto e arrivare a descrivere il campo di moto mediante una sola equazione, definita *Full Potential Equation*, riportata di seguito nel caso bidimensionale e in forma non conservativa, [4],

$$(a^2 - u^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2uv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + (a^2 - v^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.24)$$

con $u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$; a è la velocità del suono, e può essere ottenuta dalla forma algebrica dell'equazione dell'energia

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2 + v^2}{2} = H = \text{cost}$$

Rispetto alle equazioni di Eulero è ovvio constatare la riduzione del numero delle incognite che da cinque (u, v, w, p, ρ) si riducono ad una (Φ), e la conseguente diminuzione del carico

computazionale (anche se un certo lavoro è necessario per ricavare, per derivazione numerica, le componenti della velocità).

Con il modello a potenziale non è però possibile affrontare lo studio di flussi inizialmente rotazionali, e le comunque soluzioni in presenza di onde d'urto curve di forte intensità perdono di accuratezza e diventano inaccettabili: l'esperienza ha infatti mostrato che in presenza di un'onda d'urto le soluzioni del modello a potenziale e di quello Euleriano si discostano significativamente se la componente normale all'urto del numero di Mach a monte M_{n1} differisce di molto dall'unità, [5], in quanto in questi casi la rotazionalità a valle dell'urto non può più essere trascurata.

Una ulteriore successiva semplificazione del modello matematico può essere ottenuta nell'ipotesi di piccole perturbazioni, supponendo quindi di trattare flussi attorno a corpi sottili e poco ricurvi, e a piccola incidenza: tuttavia non si ipotizza che gli effetti siano piccoli. A partire dalla (2.24) si perviene allora all'equazione detta *Small Perturbations Transonic Equation*, anch'essa non lineare, applicabile a campi transonici, [10, 4],

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \left[(\gamma + 1) M_\infty^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (2.25)$$

essendo ϕ il potenziale della perturbazione.

Si osserva qui esplicitamente che le soluzioni della (2.25) possono catturare, con ottima accuratezza, discontinuità come onde d'urto presenti nel campo di moto, che sono degli effetti *non piccoli* conseguenti a cause *piccole*: questa caratteristica deriva appunto dalla non linearità della SPTE.

In ogni caso comunque la soluzione delle (2.24, 2.25) pone alcuni problemi connessi alla non linearità e al carattere misto ellittico/iperbolico.

MODELLI A POTENZIALE LINEARE: LE EQUAZIONI DI PRANDTL-GLAUERT E DI LAPLACE

La linearizzazione dell'equazione (2.24) è l'equazione di Prandtl Glauert, [10, 4],

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.26)$$

mediante la quale, come è noto, si possono trattare campi solo subsonici o solo supersonici (non transonici); essa ha carattere ellittico per $M_\infty < 1$, iperbolico per $M_\infty > 1$. La (2.26) è applicabile solo a casi in cui sia verificata l'ipotesi di piccole perturbazioni. Nel caso supersonico le onde d'urto oblique (deboli) vengono risolte come onde di Mach, tutte inclinate di $\arcsin\left(\frac{1}{M_\infty}\right)$.

È notevole il fatto che quando si completa la semplificazione delle equazioni del moto ponendo nella (2.26) $M_\infty = 0$ (trattando quindi il caso di un campo di moto incomprimibile), ci si riconduce all'equazione di Laplace

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.27)$$

che invece è esatta, e valida per flussi attorno a corpi arbitrari a qualunque angolo di attacco.

È possibile estendere al campo comprimibile subsonico retto dalla (2.26) le soluzioni della (2.27), (similitudine subsonica): quest'estensione però ha senso solo nell'ipotesi di piccole perturbazioni anche se l'equazione di partenza (Laplace) è esatta. Il procedimento di similitudine può essere applicato, (Appendice C.6), anche al campo supersonico linearizzato a partire dalle soluzioni dell'equazione

$$-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.28)$$

(particolarizzazione dell'equazione di Prandtl-Glauert per $M_\infty = \sqrt{2} \simeq 1.41$). In definitiva, il problema del campo comprimibile lineare subsonico (o supersonico) può pertanto essere ricondotto a quello della soluzione dell'equazione di Laplace (o pseudo-Laplace) in un opportuno volume di controllo V delimitato dalla superficie S : in via abbastanza generale si tratta di risolvere un problema di Neumann per l'equazione di Laplace

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi &= 0 && \text{in } \mathcal{V} \\ \nabla\Phi \cdot \mathbf{n} &= \frac{\partial\Phi}{\partial n} = h(S) && \text{su } S\end{aligned}\tag{2.29}$$

e saranno illustrati nei Capitoli (4) e (5) metodi diversi, di largo uso in Aerodinamica Applicata, che comunque hanno il più basso valore del carico computazionale, soprattutto per configurazioni complesse.

2.8 Quadro riassuntivo dei modelli fluidodinamici

Può essere utile proporre (Fig. 2.7) un riassunto dei diversi modelli impiegati per la risoluzione di problemi fluidodinamici in campo aerospaziale, evidenziando le interconnessioni ed i rapporti gerarchici esistenti tra tutti i modelli descritti in questo capitolo.

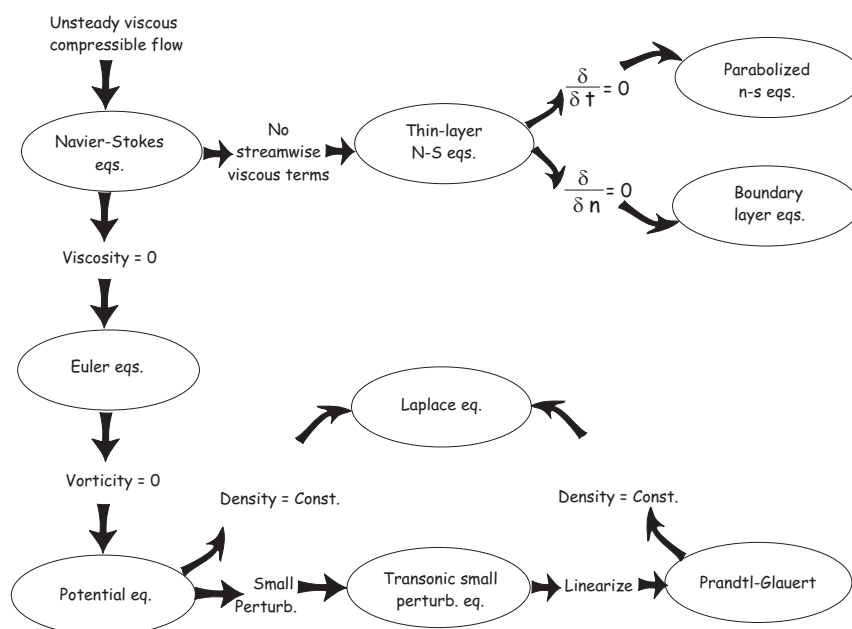


Figura 2.7: Quadro riassuntivo dei modelli fluidodinamici

In riferimento al campo non viscoso, le possibilità di impiego dei diversi modelli e le loro limitazioni sono riassunte nella Tabella 2.2, dove è riportata, in ordine di approssimazione crescente, la gerarchia delle equazioni che descrivono i modelli non viscosi, [10].

REGIME	SUBSONICO	TRANSONICO	SUPERSONICO
MODELLO			
Laplace	Sempre ($M_\infty = 0$)	No	No
Prandtl Glauert	$\tau, \alpha \ll 1$ ($M_\infty \neq 0$)	No	$\tau, \alpha \ll 1$
SPTE	$\tau, \alpha \ll 1$	$\tau, \alpha \ll 1$	$\tau, \alpha \ll 1$
FPE	Sempre	Urti deboli	Urti deboli
Eulero stazionario	Sempre	Sempre	Particolari procedure
Eulero instazionario	Sempre	Sempre	Sempre

Tabella 2.2: Validità dei modelli di moto non viscosi

2.9 Le equazioni modello di Burgers

Burgers propone lo studio di due equazioni non lineari (delle quali, in alcuni casi, è stato possibile calcolare una soluzione analitica) che presentano caratteristiche analoghe a quelle delle equazioni di Navier-Stokes ed Eulero e che offrono però, per la loro semplicità, la possibilità di sperimentare la validità e la bontà dei metodi numerici. Limitandosi in quest'ambito al caso unidimensionale, si propone per prima l'equazione di Burgers completa nell'incognita funzione $u(x, t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.30)$$

L'equazione (2.30) è parabolica, e può servire come modello per lo studio delle equazioni di strato limite o di Navier-Stokes.

Infatti in essa si individuano facilmente i termini instazionario, convettivo e viscoso.

Della (2.30) è stata calcolata, per opportune condizioni iniziali e al contorno, la soluzione analitica: in particolare, per un dominio $[-x_{\max}, x_{\max}]$, con condizioni al contorno

$$\begin{aligned} u(-x_{\max}, t) &= 1 \\ u(x_{\max}, t) &= 0 \end{aligned}$$

e condizioni iniziali di tipo instazionario

$$\begin{aligned} u_0(x) &= u(x, 0) = 1 \quad \text{per } -x_{\max} \leq x \leq 0 \\ u_0(x) &= u(x, 0) = 0 \quad \text{per } 0 \leq x \leq x_{\max} \end{aligned}$$

la soluzione analitica della (2.30), Fig. 2.8, è, [10]

$$u(x, t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{(x-\xi)}{t} \right] \exp(.5 Re G) d\xi}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(.5 Re G) d\xi}$$

$$\text{con } Re = \frac{1}{\mu} \text{ e } G = G(\xi ; x, t) = \int_0^\xi u_0(\xi') d\xi' + \frac{(x-\xi)^2}{2t}.$$

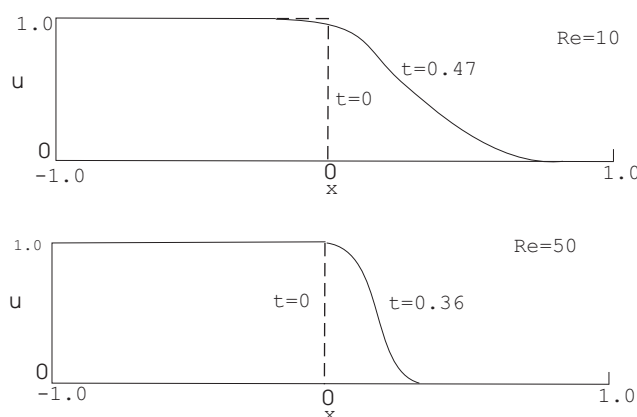


Figura 2.8: Soluzione dell'equazione di Burgers: caso viscoso

Nel caso non viscoso la (2.30) si scrive

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad (2.31)$$

rimanendo comunque non lineare ed assumendo carattere iperbolico. La (2.31) può rappresentare il moto di un'onda i cui punti possono viaggiare con differenti valori della velocità: in tal caso si può vedere che le curve caratteristiche tendono a unirsi, formando un unico fronte d'onda e dando vita a soluzioni discontinue, proprio come accade con le onde d'urto nei moti comprimibili.

L'analogia che esiste tra l'equazione di Burgers non viscosa e le equazioni di Eulero, unita alla sua semplicità, fa sì che convenga utilizzare la (2.31) per convalidare gli schemi numerici da usare per la risoluzione del sistema (2.21).

Anche per la (2.31) si conoscono soluzioni analitiche; per un dominio di tipo $[-x_{\max}, x_{\max}]$, con condizioni iniziali di tipo lineare e condizioni al contorno stazionarie

$$\begin{aligned} u(-x_{\max}, t) &= u_A \\ u(x_{\max}, t) &= u_B \end{aligned}$$

(con $u_B \neq u_A$) si ottiene la soluzione relativa alla *wave propagation*

$$u = u_A = \text{costante}$$

mentre per condizioni al contorno del tipo

$$\begin{aligned} u(-x_{\max}, t) &= u_0 \\ u(x_{\max}, t) &= -u_0 \end{aligned}$$

si ottiene una onda d'urto stazionaria, come mostrato in Fig. 2.9.

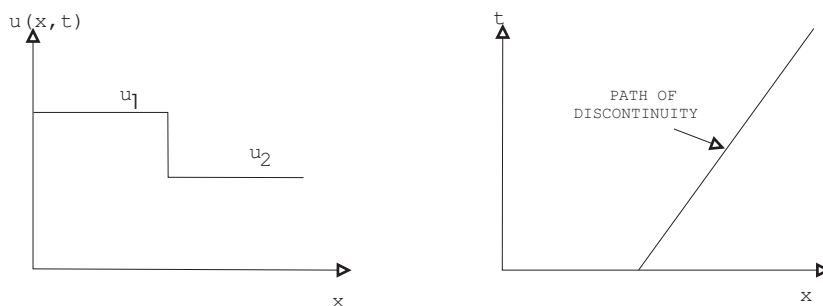


Figura 2.9: Soluzione dell'equazione di Burgers: caso non viscoso

Capitolo 3

Il trattamento delle geometrie di interesse aeronautico

3.1 Premessa

È fondamentale per un ingegnere aeronautico conoscere le basi e alcuni strumenti per il trattamento delle geometrie tipiche del proprio campo di interesse. In effetti, per le applicazioni professionali di progetto è indispensabile sapere descrivere in modo opportuno le forme degli oggetti su cui applicare le teorie ed i metodi studiati, nonché saper analizzare le loro caratteristiche geometriche peculiari; solo raramente queste forme sono “semplici”, o ammettono comunque una descrizione analitica in forma chiusa. Tutto questo viene in parte trattato nei corsi di Analisi, Geometria e Disegno; utili nozioni complementari possono essere acquisite in corsi che trattano questioni di Calcolo Numerico.

Si può aggiungere che il progettista aeronautico ha spesso a che fare con pacchetti grafici CAD, a volte molto complessi, associati ad opportuni elaboratori o a terminali con particolari caratteristiche grafiche.

Pertanto in quest’ambito si vogliono analizzare alcune questioni inerenti la descrizione della geometria, in riferimento alla progettazione aerodinamica; per semplicità si rimarrà in un ambito 2-D. Per quanto riguarda il trattamento delle geometrie invece si daranno anche alcuni accenni relativamente a forme 3-D.

Non si accennerà ad uno degli aspetti fondamentali della moderna analisi aerodinamica, la discretizzazione dello spazio attorno ad una assegnata configurazione: si rimanda per questo ad altre discipline.

3.2 La geometria dei profili alari

La geometria dei profili alari viene spesso trattata in termini di composizione di una linea media e di una distribuzione di spessore, [1], [11]; questi due componenti peraltro sono spesso definiti in modo non univoco. Dette $z_t(x)$ e $z_c(x)$ le distribuzioni di spessore e linea media, le coordinate (x, z) di un punto del profilo sono, Fig. 3.1,

$$\left. \begin{aligned} x_{u,l} &= x \mp z_t \sin \theta \\ z_{u,l} &= z_c \pm z_t \cos \theta \end{aligned} \right\} \textit{Metodo USA} \quad (3.1)$$

$$\left. \begin{aligned} x_{u,l} &= x \\ z_{u,l} &= z_c \pm z_t \end{aligned} \right\} \textit{Metodo Europeo} \quad (3.2)$$

ed i suffissi u e l si riferiscono al dorso ed al ventre: queste due descrizioni conducono a forme geometricamente differenti.

Spesso la forma del profilo nelle immediate vicinanze del bordo d’attacco viene descritta esplicitamente mediante il valore del raggio del cerchio osculatore nel punto $(0,0)$, ed il cui centro si pone sulla tangente alla linea media nel bordo d’attacco.

Se si ha una geometria definita per punti le definizioni di linea media e distribuzione di spessore che seguono dalle decomposizioni (3.1) e (3.2) sono diverse. In particolare, secondo il metodo USA la linea media è il luogo dei centri dei cerchi inscritti nel profilo, mentre secondo il metodo Europeo essa è il luogo dei punti medi delle secanti al profilo secondo rette perpendicolari all'asse x . La distribuzione di spessore segue poi da quella della linea media: nel metodo USA il semispessore coincide con il raggio dei cerchi inscritti, nel metodo Europeo con la distanza del punto del profilo dalla linea media, misurata lungo z .

Per numerosi profili, e comunque per quelli di più recente sviluppo, la geometria è definita per punti; esistono poi numerose famiglie di profili con descrizione analitica non definiti mediante linea media e spessore (profili Joukowski e Karman-Trefftz, ad esempio). In questi casi è possibile a posteriori, se necessario, risalire alle distribuzioni di linea media e spessore tramite le (3.1) e (3.2).

Resta il fatto fondamentale, e non solo concettuale, che le prestazioni di un profilo sono condizionate, in modo differente ma combinato, dagli effetti dello spessore e linea media. In tal senso, e al di là della forma specifica, i parametri determinanti sono

- lo spessore massimo e la relativa ascissa,
- la massima ordinata della linea media, che definisce la curvatura (o freccia massima), e la relativa ascissa.

Nel seguito tutte le dimensioni saranno riferite alla corda c .

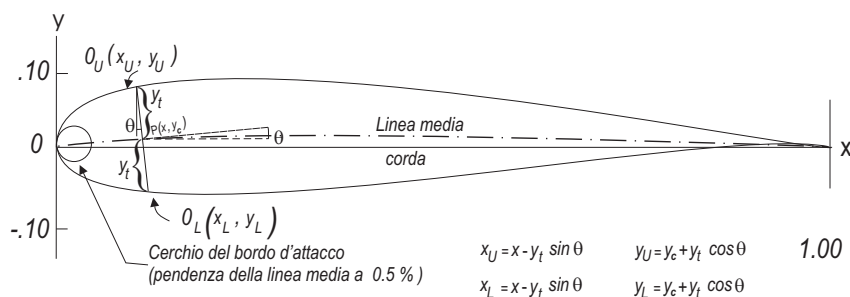


Figura 3.1: Descrizione della geometria dei profili NACA

3.2.1 Famiglie di profili alari delle serie NACA

Nello sviluppo della tecnologia dei profili la NACA ha compiuto un lavoro assolutamente centrale generando una grande quantità di geometrie adatte al volo: le cosiddette famiglie di profili NACA a quattro cifre (anni '30), cinque cifre (anni '35) e laminari (anni '40), che sono state e sono di fondamentale importanza nel disegno delle ali.

Una famiglia di profili è caratterizzata da un limitato numero di linee medie ed un limitato numero di distribuzioni di spessore (*Basic Mean Lines and Basic Thickness Forms*): combinando insieme una linea media ed uno spessore è possibile ottenere una grande quantità di geometrie di profili alari (di quella famiglia).

Di un certo numero di profili di ciascuna famiglia saranno disponibili

- la geometria;
- opportune distribuzioni di dati teorici che, combinati insieme secondo il metodo NACA, possono validamente descrivere il campo di moto Euleriano che si realizza sul profilo in diverse condizioni;
- una rilevante mole di dati sperimentali che ne descrivono il comportamento nella galleria del vento.

Le procedure (3.1, 3.2) sono valide per la determinazione della geometria. In particolare, la descrizione dei profili NACA a quattro e cinque cifre è completamente analitica, mentre per alcuni profili NACA laminari è analitica solo la descrizione della linea media.

L'argomento è esaurientemente trattato in [11]. Non si propongono quindi in dettaglio i cenni storici (che riguardano la "scoperta" della necessità di separare gli effetti della forma in pianta da quelli del profilo e le classiche esperienze di Gottingen, passando poi per i profili CLARK Y e GOTTINGEN). Può essere utile approfondire, oltre a questi aspetti, anche la caratterizzazione, dal punto di vista aerodinamico, delle diverse famiglie, evidenziandone le analogie e le diversità.

PROFILI NACA A QUATTRO E CINQUE CIFRE

Si tratta delle prime due famiglie generate dalle sistematiche indagini teoriche e sperimentali sviluppate dalla NACA a partire dagli anni '20 per le basse velocità di volo all'epoca consentite dalla tecnologia. Si riportano di seguito la nomenclatura e le relazioni necessarie per determinare le coordinate dei punti dei profili delle famiglie a 4 o 5 cifre. Si fa presente che comunque per questi profili la NACA fornisce tabelle che contengono, insieme ad altre informazioni, anche le coordinate di un certo numero di punti della linea media e della distribuzione di spessore.

NOMENCLATURA PER UN PROFILO NACA A QUATTRO CIFRE DEL TIPO mp_{xx}

- il gruppo mp individua la linea media; in particolare
 - m, in centesimi, è la freccia massima;
 - p, in decimi, è l'ascissa della freccia massima;
- xx è lo spessore percentuale (in centesimi)

NOMENCLATURA PER UN PROFILO NACA A CINQUE CIFRE DEL TIPO r_{ss}xx

- il gruppo r_{ss} individua la famiglia; in particolare;
 - r, in decimi, è uguale a 2/3 del coefficiente di portanza ideale o di progetto C_{lid} ;
 - ss, in centesimi, è il doppio dell'ascissa di massima freccia;
- xx, in centesimi, è lo spessore percentuale.

DISTRIBUZIONE DI SPESSORE PER I PROFILI NACA A QUATTRO O CINQUE CIFRE

Se $\tau = xx/100$ è lo spessore massimo del profilo, la distribuzione di spessore per il dorso e per il ventre per le famiglie a 4 e 5 cifre si calcola mediante la relazione

$$z_t = \frac{\tau}{.20} \left(.29690\sqrt{x} - .12600x - .35160x^2 + .28430x^3 - .10150x^4 \right) \quad (3.3)$$

mentre il bordo d'attacco va raccordato con un cerchio di raggio $r = 1.1019\tau^2$. Si osserva che questi profili hanno il bordo di uscita aperto, e che lo spessore massimo è al 30% della corda.

LINEA MEDIA

Per i profili a 4 cifre la linea media è costituita da due archi di parabola che hanno in comune il vertice nel punto (p, m) , essendo m la freccia massima e p la relativa ascissa; l'equazione della linea media è

$$\begin{aligned} z_c &= \frac{m}{p^2} (2px - x^2) & 0 \leq x \leq p \\ z_c &= \frac{m}{(1-p)^2} \left[(1-2p) + 2px - x^2 \right] & p \leq x < 1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

La linea media dei profili a 5 cifre è descritta come

$$\begin{aligned} z_c &= \frac{1}{6} k_1 \left[x^3 - 3mx^2 + m^2(3-m)x \right] & 0 \leq x \leq m \\ z_c &= \frac{1}{6} k_1 m^3 (1-x) & m \leq x < 1 \end{aligned} \quad (3.5)$$

dove m e k_1 , oltre a p , che è l'ascissa di freccia massima, si ricavano, per una serie di linee medie, dalla Tabella seguente, [11], pag. 116.

Mean-line designation	Position of camber p	m	k_1
210	0.05	0.0580	361.4
220	0.10	0.1260	51.64
230	0.15	0.2025	15.957
240	0.20	0.2900	6.643
250	0.25	0.3910	3.230

Tabella 3.1: Parametri numerici per le linee medie NACA a 5 cifre

LA FAMIGLIA DEI PROFILI NACA DELLA SESTA SERIE LAMINARE

Lo sviluppo della tecnologia dei profili laminari fu affrontato dalla NACA alla vigilia della seconda guerra mondiale, quando i progressi in campo propulsivo cominciavano a consentire velocità di volo elevate, comunque subsoniche, per le quali la penalità dovuta alla resistenza diventava troppo onerosa per ali con profili NACA a quattro o cinque cifre. L'obiettivo di avere profili con resistenza in alta velocità (e quindi in un limitato intervallo di valori del coefficiente di portanza centrato intorno al coefficiente di portanza di progetto C_{li}) inferiore rispetto ai profili convenzionali fu peraltro raggiunto dopo notevoli sforzi e tentativi. Infatti i profili che soddisfecero i requisiti di resistenza e contemporaneamente si rivelarono adatti a tutte le altre fasi del volo appartengono alla cosiddetta Sesta Serie Laminare: delle serie fino alla Sesta risultarono (e risultano) operativi solo quelli della Prima Serie, impiegati fondamentalmente dalla NACA per lo sviluppo delle sezioni delle pale delle eliche NACA.

In realtà un impiego importante della tecnologia dei profili laminari si ebbe negli anni '50 e '60, quando si utilizzarono profili della Sesta Serie per le superfici portanti dei velivoli transonici. La motivazione non è la laminarità del flusso, che, garantita in certe condizioni di volo subsonico, viene in genere completamente perduta quando il profilo attinge condizioni di volo transonico: si può mostrare che certi profili laminari in condizioni transoniche possono (ma è solo una possibilità!) assicurare prestazioni di buona qualità.

La forma della linea media di questi profili è analitica ma non bene approssimata, (cfr. (4.2.7), la distribuzione di spessore non è comunque analitica: pertanto la NACA (come peraltro fa per i profili a 4 e 5 cifre) fornisce in tabella coordinate (e pendenze) di diverse linee medie e diverse distribuzioni di spessore, dalla combinazione delle quali si può ottenere un certo numero di profili laminari.

Si riporta di seguito la nomenclatura che conduce alla caratterizzazione della geometria e delle prestazioni dei profili laminari della Sesta Serie NACA.

NOMENCLATURA

In realtà esistono numerose varianti di una nomenclatura base alla quale ci si riferirà qui, [11]. Può essere utile, per chiarezza, fare riferimento alla sigla di un generico profilo di questa famiglia, ad esempio il profilo NACA 65₃ - 218, $a = .8$.

La prima cifra della sigla -6- corrisponde alla famiglia, la seconda -5- è, in decimi, l'ascissa fino alla quale, nelle condizioni di progetto, il deflusso è laminare sul dorso e sul ventre. La semiestensione della sacca di bassa resistenza, verso l'alto e verso il basso, a partire dal coefficiente di portanza ideale, è indicata (in decimi) come suffisso della seconda cifra -3-: in sua assenza si deve intendere che l'estensione è inferiore al decimo. La prima cifra dopo il trattino indica, in decimi, il coefficiente di portanza C_{li} centro della sacca laminare -2-, le due ultime cifre, lette insieme, indicano, in centesimi, lo spessore del profilo. La forma della linea media è indicata mediante il valore di a assegnato dopo la virgola (in questo caso la linea media è quella relativa ad $a=.8$): in assenza di questa indicazione la linea media è quella relativa ad $a=1$.

LINEA MEDIA

Il valore di a indica, in decimi, l'ascissa fino alla quale il carico sulla linea media è costante, a partire dal bordo di attacco; dall'ascissa a e fino al bordo di uscita il carico decresce linearmente fino a 0: la linea media $a=1$ ha carico costante dal bordo di attacco al bordo di uscita.

La geometria si riferisce a $C_{li} = 1$ (ad $\alpha = 0$): i punti della linea media assegnata si determinano scalando tutte le ordinate di un fattore pari al valore assegnato di C_{li} .

SPESSORE

Le distribuzioni di spessore sono descritte dalla NACA per punti. Per un certo profilo la distribuzione di spessore è quella del profilo simmetrico di riferimento, *Basic Thickness Form*, la cui sigla si ottiene a partire dalla sigla assegnata ponendo $C_{li} = 0$. Per il profilo NACA 65₃ - 218, $a = .8$ la *Basic Thickness Form* sarà allora il profilo NACA 65₃ - 018.

DETERMINAZIONE DELLA GEOMETRIA

La combinazione di spessore e linea media, (3.1) o (3.2), determina la geometria del profilo assegnato.

3.2.2 Trattamento delle geometrie dei profili descritte in forma tabulare

Associata all'analisi aerodinamica, una descrizione opportuna della geometria è di fondamentale importanza: per geometrie assegnate o numericamente o analiticamente può essere indispensabile descrivere molto dettagliatamente il contorno della superficie nella regione dei bordi o in qualche tratto dove si prevede un comportamento fluidodinamico particolare.

In linea di principio è la fisica stessa del problema ad imporre di infittire la descrizione della geometria nelle regioni dove la curvatura è maggiore (spesso le variazioni più brusche delle grandezze fluidodinamiche si hanno laddove il valore della curvatura superficiale è grande, e si intuisce che per descrivere una funzione che presenta rapide variazioni è necessario un numero di punti adeguatamente elevato); inoltre per particolari condizioni iniziali od al contorno forti variazioni (od addirittura discontinuità, in campo non lineare) possono presentarsi anche in zone geometricamente molto regolari.

Infine, è spesso il "committente" del calcolo a richiedere soluzioni con particolari requisiti di dettaglio in certe parti del campo di moto.

Quando la geometria di un profilo è assegnata in forma tabulare sono disponibili le coordinate di un certo numero di punti opportunamente distribuiti. Questo numero può essere dell'ordine delle decine, come per i profili NACA della Sesta Serie Laminare o per i profili per basse velocità riportati in [12], delle centinaia, come nel caso dei profili moderni, o delle migliaia, come richiesto dalle macchine a controllo numerico che lavorano le superfici.

In ogni caso, in generale, per l'analisi aerodinamica

- è necessario un numero di punti dell'ordine delle centinaia;
- la distribuzione dei punti sulla superficie può essere diversa da quella assegnata;
- può essere necessario migliorare la qualità della descrizione geometrica per eliminare tutte quelle irregolarità che possono inficiare il comportamento del profilo.

È pertanto necessario trattare adeguatamente queste geometrie con strumenti matematici e numerici. Fondamentale in tal senso è la possibilità di interpolare una tabella assegnata con tecniche di tipo Spline, descritte in qualunque testo di Calcolo Numerico, [14].

Si vuole qui indicare come di solito viene trattata una geometria bidimensionale descritta mediante una tabella di punti prima di procedere all'analisi aerodinamica.

1. Preliminarmente, si descrive parametricamente la geometria di un profilo alare (o di ciascun componente di una geometria a più elementi) secondo un riferimento curvilineo, detto intrinseco, che parte dal bordo di uscita, Fig. 3.2; il parametro sarà l'ascissa curvilinea s che corre lungo la poligonale formata dai punti assegnati, ed ogni punto avrà coordinate $[x(s), z(s)]$.

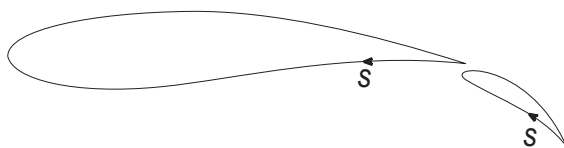


Figura 3.2: Il sistema di riferimento curvilineo per un elemento di un profilo

2. Si verifica la regolarità della distribuzione di curvatura; se necessario, si procede ad una “lisciatura” numerica della superficie assegnata, Fig. 3.3: poiché in questo caso si modifica la geometria, è necessario seguire procedure standard, comuni, in genere, a tutto il mondo aeronautico.

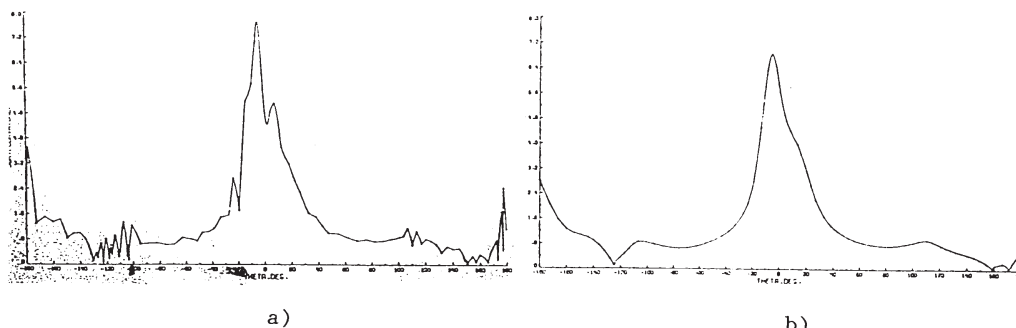


Figura 3.3: Curvatura intrinseca di un profilo alare in funzione dell'ascissa curvilinea a) senza e b) con lisciatura

3. Se opportuno, si procede ad una redistribuzione o ad un infittimento dei punti secondo a) la specifica dei metodi che si vogliono impiegare e b) i risultati che si prevede di ottenere.

Per le operazioni di cui ai punti 2) e 3) si ricorre, in genere, all'interpolazione Spline di tipo cubico, con le più opportune condizioni di chiusura.

Per i profili alari (o comunque forme sottili) una descrizione che fornisce un infittimento sui bordi che in generale risulta soddisfacente si ottiene facilmente con la procedura seguente.

1. Una preliminare suddivisione della corda mediante la legge detta del coseno genera una distribuzione di punti detta “alla Tchebytscheff”: per individuare M punti sulla corda (di lunghezza unitaria) si ha

$$x_i = .5(1 - \cos \theta_i), \quad \theta_i = (i - 1)\pi / (M - 1), \quad i = 1, M \quad (3.6)$$

2. I punti del contorno sono quelli corrispondenti (secondo il metodo Europeo ed Americano) ai punti della corda così determinati.

È da notare che sul cerchio questo metodo genera una distribuzione di punti equispaziati. Comunque altri tipi di infittimento possono essere pensati ed introdotti in modo agevole.

3.3 Forme 3-D

In campo tridimensionale è norma impiegare una discretizzazione della superficie ottenuta mediante pannelli a forma di quadrilatero sghembo, Fig. 3.4. Il problema dell'infittimento è ovviamente importante come nel caso 2-D, ma per la sua soluzione, fortemente dipendente dalla specifica

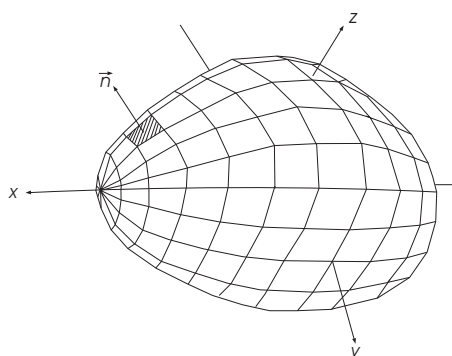


Figura 3.4: Discretizzazione di una forma 3-D

geometria, è impossibile pensare a regole generali (si pensi, ad esempio, alle differenze che esistono tra l'ala, la fusoliera e la presa d'aria, per rimanere in ambito velivolistico).

In relazione al metodo dei pannelli piani, ampiamente usato oggi dall'industria aeronautica, è interessante descrivere il modo di passare dalla geometria così come descritta mediante quadrilateri per il calcolo aerodinamico alla sua "interpretazione" da parte del solutore. Si fa l'ipotesi che la descrizione della geometria disponibile sia topologicamente equivalente ad un grigliato 2-D, eventualmente con degenerazioni dovute al tipo di geometria; è anche possibile che la geometria sia descritta mediante parti (*patches*) che la ricoprono, ognuna resa equivalente ad un grigliato 2-D.

Purtroppo per definire i pannelli piani non si può impiegare la descrizione di cui si dispone in quanto i quadrilateri risultano essere sghembi (in generale, per quattro punti dello spazio non passa un piano).

La procedura standard con la quale si genera la pannellazione effettiva che sarà "trattata" dal solutore viene qui illustrata: si mostrerà, Fig. 3.5, come viene costruito un pannello, a partire dai quattro punti assegnati, ad esempio A, B, C e D .

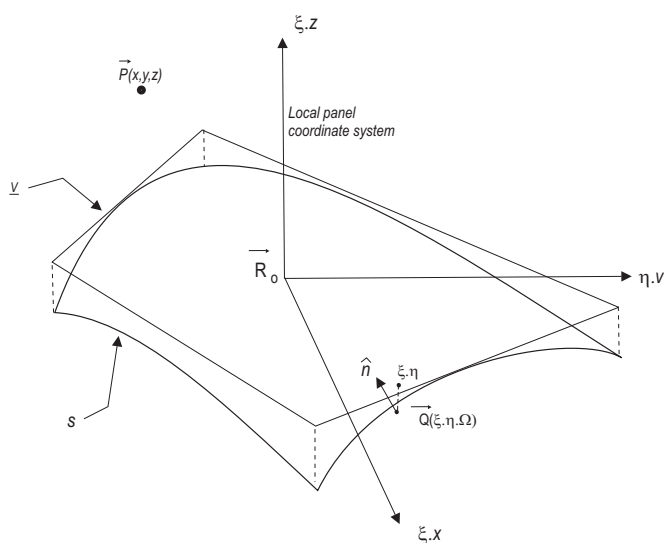


Figura 3.5: Generazione di un pannello quadrilatero

1. Si definisce il centroide del pannello come quel punto le cui coordinate sono la media delle

coordinate dei punti assegnati (in generale non complanari):

$$\begin{aligned} XP &= (XA + XB + XC + XD)/4 \\ YP &= (YA + YB + YC + YD)/4 \\ ZP &= (ZA + ZB + ZC + ZD)/4 \end{aligned} \quad (3.7)$$

2. Si assume come normale \mathbf{n} del pannello il versore del prodotto vettoriale tra le due diagonali del quadrilatero $ABCD$

$$\mathbf{n} = \text{vers}[(C - A) \wedge (D - B)] \quad (3.8)$$

applicato nel centroide.

3. Si assume come piano del pannello il piano di normale \mathbf{n} passante per il centroide.
4. Si ottengono i vertici del pannello proiettando i punti A, B, C e D sul piano del pannello (rispettivamente in A', B', C' e D').

Si rileva immediatamente il punto più delicato di questa procedura (peraltro universalmente accettata, e standardizzata, in ambito industriale): i pannelli adiacenti non hanno lati in comune, in generale.

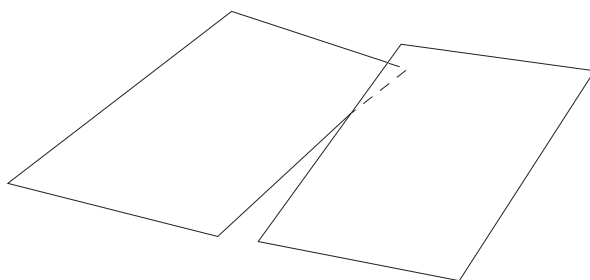


Figura 3.6: Perdita di connessione della superficie descritta a pannelli

Anche partendo da una geometria regolare, si arriva quindi ad una descrizione a pannelli che presenta, in generale, delle "fessure" tra pannello e pannello, Fig. 3.6: questo fatto viene "visto" dal solutore fluidodinamico, che, a causa della presenza di flussi spuri attraverso le fessure ("leakage flows"), calcolerà una soluzione sicuramente non bene approssimata.

Questo tipo di errore, dovuto esclusivamente ai difetti intrinseci nell'impiego di pannelli piani quadrilateri, è tanto più piccolo quanto più fine è la discretizzazione: peraltro un aumento del numero di pannelli presenta altri inconvenienti (in termini di un aumento non lineare del tempo di calcolo nei metodi a pannelli).

In (5.6.2) si accennerà alla descrizione di pannelli non planari, in forma di quadriche dello spazio, ed ai relativi vantaggi ed inconvenienti.

3.4 Esercizi

ESERCIZIO 1. Disegnare un profilo alare della famiglia a 4 cifre ed uno della famiglia a 5 cifre. Disegnare quindi, sovrapposti, due profili delle due famiglie aventi *a*) uguale spessore, *b*) uguale freccia massima, *c*) uguale posizione di freccia massima.

N.B.: il secondo lavoro prevede un minimo di meditazione.

ESERCIZIO 2. Sviluppare un codice di calcolo per la descrizione continua di geometrie bidimensionali assegnate per punti, applicando preliminarmente ai profili NACA a 4 e 5 cifre per una verifica dell'accuratezza, ed impiegandolo quindi per i profili laminari delle serie NACA.

ESERCIZIO 3: PRE - PROCESSING GEOMETRICO. Progettare un codice di calcolo per generare geometrie bidimensionali. Il codice va costruito progressivamente, aggiungendo di volta in volta la descrizione dei corpi che verranno presi in esame per l'analisi aerodinamica. Si suggerisce di prevedere un menù per la selezione del tipo di geometria da trattare, cominciando da uno o più dei seguenti oggetti, tutti di interesse aeronautico, Fig. 3.7:

- lastra piana;
- linee medie delle famiglie NACA a 4 e 5 cifre;
- linea media ad arco di cerchio;
- profili NACA a 4 e 5 cifre;
- profilo a sezione ellittica;
- profilo generato mediante le trasformazioni conformi di Joukowski o Karman-Trefftz;
- sezione di missile con ogiva ellittica, prevedendo che la parte poppiera possa essere chiusa o aperta;
- cilindro mancante di un settore circolare di 90° (la "torta"), (oppure un diedro concavo);
- geometria a più componenti (geometricamente non interferenti).

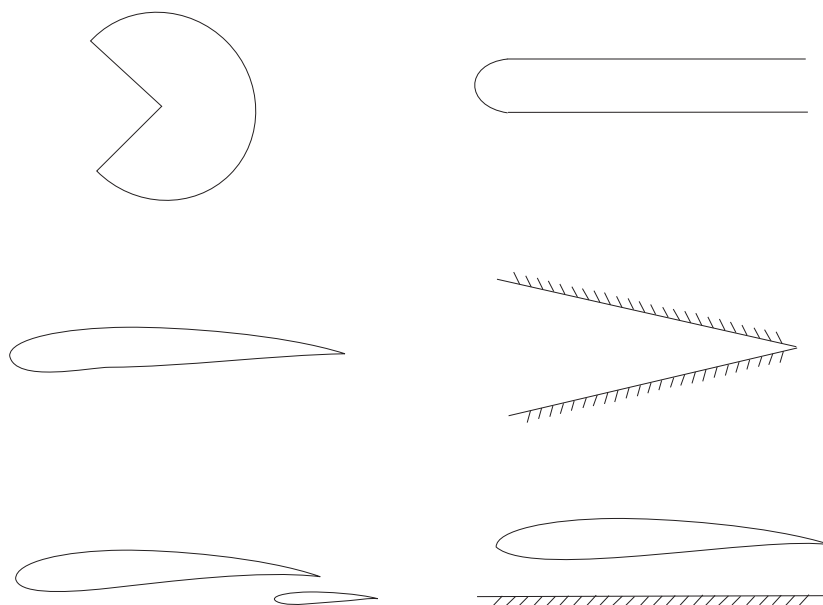


Figura 3.7: Alcuni oggetti bidimensionali di interesse aerodinamico

Prevedere inoltre la possibilità di generare l'immagine speculare della geometria assegnata rispetto ad una fondamentale prefissata.

Si preveda l'assegnazione del numero di punti con cui si descrive la geometria, oltre che di tutti i parametri necessari per la sua individuazione. Si suggerisce di partire dal bordo di uscita, spostandosi in senso orario.

Per la spaziatura dei punti del profilo prevedere almeno le due seguenti diverse modalità di suddivisione della corda:

- in parti uguali;

- con la legge del coseno (spaziatura alla Tchebytschef).

Muovendosi lungo la poligonale ottenuta congiungendo i punti con cui si è discretizzato il profilo (la cosiddetta pannellazione), determinare, tabulare e graficare in funzione dell'ascissa curvilinea s le grandezze

- $x(s)$;
- $z(s)$;
- $x'(s)$;
- $z'(s)$;
- $x''(s)$;
- $z''(s)$;
- $C(s)$

essendo $C(s)$ la curvatura intrinseca del profilo (le prime due grandezze costituiscono la descrizione parametrica della geometria, che è il modo più conveniente per trattare geometrie bidimensionali da un punto di vista operativo).

In relazione al generico i -esimo elemento della poligonale (detto più semplicemente pannello), determinare, tabulare e graficare in funzione di s le seguenti grandezze:

- l_i/l_{i-1} , essendo l la lunghezza del pannello;
- l_i/l_m , essendo l_m la lunghezza media dei pannelli (rapporto tra perimetro della poligonale e numero dei pannelli).

Si fa presente che nella valutazione delle derivate che intervengono nei calcoli suindicati si opera, di norma, per via numerica.

Sviluppare il codice tenendo presente la necessità di un suo interfacciamento con codici di analisi aerodinamica.

Parte II

**AERODINAMICA NON
VISCOSA INCOMPRESSIBILE**

Capitolo 4

Soluzioni potenziali approssimate

4.1 Introduzione

In questo capitolo si presenteranno modelli e metodi per la soluzione linearizzata del problema delle superfici portanti in campo incomprimibile. Il modello è quello, classico, di moto stazionario, non viscoso, incomprimibile ed irrotazionale retto dall'equazione di Laplace nell'incognito potenziale di velocità, la quale va complementata con le più opportune condizioni al contorno e di chiusura, ma limitatamente alla validità dell'ipotesi di piccole perturbazioni.

Alla base dei metodi linearizzati per ali vi sono una serie di assunzioni -geometriche ed operative- indispensabili perché sia verificato il fatto che le perturbazioni sono 'piccole'. Di fatto, in genere si ha a che fare con ali poco curve, poco spesse, che lavorano a piccoli angoli d'attacco: dunque con ali poco caricate, e cioè con piccoli coefficienti di portanza.

Si suppone poi che il campo di moto abbia direzioni preferenziali lungo le quali il moto è bidimensionale: questo è rigoroso per il profilo alare (la macchina "astratta" detta ala infinita), mentre è più o meno approssimato per l'ala. In particolare per le ali di allungamento alto o medio la direzione di bidimensionalità è quella longitudinale, quella trasversale per le ali a delta. Inoltre la fusoliera, tipico oggetto "non portante", è supposta affusolata.

Si tratterà dapprima il profilo sottile, quindi si affronteranno i casi dell'ala diritta, a freccia ed a delta. Per il profilo si evidenzieranno gli effetti di spessore, curvatura ed angolo d'attacco, mentre per le ali si evidenzieranno gli effetti dell'allungamento, dell'angolo di freccia e dello svergolamento: saranno quindi ottenute le più importanti informazioni relative all'influenza della forma in pianta e del tipo di profilo. Le soluzioni, di validità progettuale limitata a velocità di volo basse e ad angoli di attacco piccoli, sono comunque la base fondante del progetto di qualunque aeromobile e per tutte le condizioni di volo.

Per evitare che restino fuori dalla trattazione approssimata aspetti importanti dell'architettura di un velivolo (per la configurazione del velivolo l'effetto diedro per l'ala, la forma in pianta arbitraria, la configurazione completa con i piani orizzontali e con il piano verticale, per il profilo l'architettura a più componenti tipica dell'ipersostentazione) si tratterà anche l'impostazione della soluzione del problema del carico per via numerica approssimata basata su vortici.

Ovviamente è sempre implicitamente presente la Teoria Globale trattata in (1.6), con tutti i suoi fondamentali risultati.

4.2 Soluzioni potenziali approssimate 2-D

4.2.1 Introduzione

Sebbene oggi sia possibile valutare in modo molto accurato campi potenziali attorno a profili di forma arbitraria, ci si occuperà qui di metodi approssimati perché si ottengono in modo rapido valide soluzioni in forma chiusa, perché spesso si ricavano risultati con errori accettabili (minori del 5%), perché, infine, numerose soluzioni costituiscono la base di calcolo per le ali finite.

Generalmente il termine "approssimato" è riferito alle teorie lineari, o del primo ordine, a lungo utilizzate per il vantaggio non trascurabile di calcolare separatamente l'influenza dello spessore da

quello della curvatura e dell'angolo d'attacco.

Si presenterà di seguito la teoria lineare come prima approssimazione di una teoria generale del profilo sottile, con una formulazione che estende gli sviluppi di Lighthill, [21], e Van Dyke, [22], ricavando esplicitamente le espressioni delle velocità tangenziali del primo, secondo e terzo ordine per profili spessi, ricurvi e ad incidenza.

In pratica il calcolo analitico si effettua agevolmente solo per forme particolari, e gli esempi riportati nel par. (4.2.4) hanno, tra l'altro lo scopo di mostrare i limiti della teoria in corrispondenza dei bordi estremi, con la conseguente produzione delle forze di spinta e di resistenza, cf. (4.2.5).

Per la risoluzione numerica delle equazioni della Teoria del Profilo Sottile numerosi sono i procedimenti proposti, [23], [24], [25] e [26], per citare i più famosi, e lodevoli sono gli studi di [21] e [22] per estendere la validità del calcolo alle regioni dei bordi d'attacco e d'uscita. Ma da un lato anche lo sviluppo numerico non è applicabile a configurazioni arbitrarie, dall'altro, le correzioni dei bordi sono esatte solo per forme ellittiche e paraboliche. Di contro la semplice teoria lineare fornisce sovente risultati accurati per la portanza totale e per il momento di beccheggio, cf. (4.2.6). Un'applicazione per il calcolo della linea media di profili a deflusso laminare è presentata nel par. (4.2.7).

Dopo di aver illustrato la proprietà del punto neutro posteriore, cf. (4.2.8), come utilizzabile in moderne soluzioni numeriche di campi potenziali tridimensionali, si presenta il procedimento ingegneristico di [11], o metodo NACA, noto per la sua estrema semplicità e rapidità di svolgimento.

4.2.2 Teoria generale del profilo sottile: formulazione del problema

Si consideri il campo potenziale ed incomprimibile attorno ad un profilo alare di equazione

$$z = \tau g_{2,1}(x) \quad (4.1)$$

dove τ è un parametro d'ampiezza delle ordinate e gli indici 1,2 si riferiscono alle equazioni del ventre e del dorso rispettivamente, Fig. 4.1 (qui e nel seguito la corda del profilo è assunta unitaria, salvo esplicito avviso, come nel par. 4.2.4).

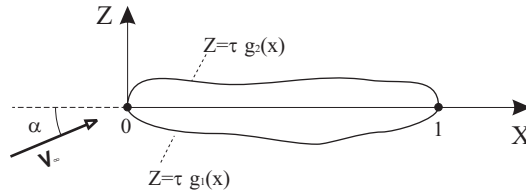


Figura 4.1: Schema del problema del flusso attorno ad un profilo

In generale una variazione di τ comporta una variazione simultanea dello spessore percentuale della curvatura e dell'angolo d'attacco; in particolare per i profili simmetrici τ è proporzionale allo spessore percentuale, per i profili portanti sottili è proporzionale all'angolo di attacco ed alla curvatura.

Il corpo ha superficie impermeabile ed è investito da una corrente asintotica formante un angolo α con l'asse delle x , eventualmente, ma non necessariamente, coincidente con la direzione della corda.

Il problema, già introdotto in 2.7, è di risolvere l'equazione di Laplace

$$\phi_{xx} + \phi_{zz} = 0 \quad (4.2)$$

nell'incognito potenziale di velocità scritto in forma normalizzata

$$\underline{V} = |\underline{V}_\infty| \underline{\nabla}\phi \quad (4.3)$$

con le condizioni al limite all'infinito

$$\phi(x, z) = \phi_\infty(x, z) = x \cos \alpha + z \sin \alpha \quad (4.4)$$

e la condizione del flusso tangenziale sul corpo (supposto impermeabile)

$$\left[\begin{array}{c} \phi_z(x, z) \\ \phi_x(x, z) \end{array} \right]_{z=\tau g_{2,1}(x)} = \tau g'_{2,1}(x) \quad (4.5)$$

Nella (4.5), così come nel seguito, con un apice si intenderà la derivazione rispetto a x .

Posto, per la linearità della (4.2)

$$\phi(x, z) = \phi_\infty(x, z) + \varphi(x, z) \quad (4.6)$$

essendo $\varphi(x, z)$ il potenziale della perturbazione, si è interessati a determinare una soluzione approssimata per la funzione φ supponendo che il profilo sia tanto sottile, poco ricurvo ed a piccola incidenza da consentire di imporre la (4.5) sull'asse $z = 0$ anziché sulla superficie del corpo.

All'uopo conviene assumere per la funzione $\varphi(x, z)$ uno sviluppo in serie di potenze del tipo

$$\varphi(x, z) = \tau \varphi_1(x, z) + \tau^2 \varphi_2(x, z) + \tau^3 \varphi_3(x, z) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \tau^k \varphi_k(x, z) \quad (4.7)$$

che risulta accettabile sempre che il corpo non sia eccessivamente tozzo, [22], pag. 73.

Corrispondentemente, pur possedendo l'espressione completa per la corrente asintotica, conviene scrivere la (4.4), con $\alpha = \tau \alpha_o$, come

$$\phi_\infty(x, z) \cong x \left(1 - \frac{\tau^2 \alpha_o^2}{2!} + \dots \right) + z \left(\tau \alpha_o - \frac{\tau^3 \alpha_o^3}{3!} + \dots \right) \quad (4.8)$$

Per la derivate ϕ_z e ϕ_x che compaiono nella (4.5), calcolate al limite per $z \rightarrow 0^\pm$ (a cui si intende che corrispondono gli indici 2 ed 1 rispettivamente), si ha

$$\begin{aligned} \phi_z(x, 0^\pm) &= \phi_{\infty_z}(x, 0^\pm) + \varphi_z(x, 0^\pm) = \sin \alpha + \varphi_z(x, 0^\pm) \cong \tau \alpha_o - \frac{\tau^3 \alpha_o^3}{3!} + \dots + \\ &+ \tau \left[\varphi_{1z}(x, 0^\pm) + \tau g_{2,1}(x) \varphi_{1zz}(x, 0^\pm) + \frac{\tau^2}{2!} g_{2,1}^2(x) \varphi_{1zzz}(x, 0^\pm) + \dots \right] + \\ &+ \tau^2 \left[\varphi_{2z}(x, 0^\pm) + \tau g_{2,1}(x) \varphi_{2zz}(x, 0^\pm) + \frac{\tau^2}{2!} g_{2,1}^2(x) \varphi_{2zzz}(x, 0^\pm) + \dots \right] + \\ &+ \tau^3 \left[\varphi_{3z}(x, 0^\pm) + \tau g_{2,1}(x) \varphi_{3zz}(x, 0^\pm) + \frac{\tau^2}{2!} g_{2,1}^2(x) \varphi_{3zzz}(x, 0^\pm) + \dots \right] + o(\tau^4) \end{aligned} \quad (4.9)$$

ed ancora

$$\begin{aligned} \phi_x(x, 0^\pm) &= \cos \alpha + \varphi_x(x, 0^\pm) \cong 1 - \frac{\tau^2 \alpha_o^2}{2!} + \dots + \tau \left[\varphi_{1x}(x, 0^\pm) + \tau g_{2,1}(x) \varphi_{1xz}(x, 0^\pm) + \dots \right] + \\ &+ \tau^2 \left[\varphi_{2x}(x, 0^\pm) + \tau g_{2,1}(x) \varphi_{2xz}(x, 0^\pm) + \dots \right] + o(\tau^3) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Imponendo la (4.5), con la (4.9) e (4.10), uguagliando membro a membro i termini di ordine τ , τ^2 , τ^3 , ..., si trova successivamente

$$\varphi_{1z}(x, 0^\pm) = g'_{2,1}(x) - \alpha_o \quad (4.11)$$

$$\varphi_{2z}(x, 0^\pm) = g'_{2,1}(x)\varphi_{1x}(x, 0^\pm) - g_{2,1}(x)\varphi_{1zz}(x, 0^\pm) \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{3z}(x, 0^\pm) = & g'_{2,1}(x) \left[\varphi_{2x}(x, 0^\pm) + g_{2,1}(x)\varphi_{1xz}(x, 0^\pm) - \frac{\alpha_o^2}{2} \right] + \frac{\alpha_o^3}{3!} + \\ & -g_{2,1}(x) \left[\varphi_{2zz}(x, 0^\pm) + \frac{1}{2}g_{2,1}(x)\varphi_{1zzz}(x, 0^\pm) \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

e così via.

Un altro modo di procedere, alternativamente, consiste, seguendo [22], nel porre

$$\phi(x, z) \cong x + \tau\phi_1(x, z) + \tau^2\phi_2(x, z) + \dots \quad (4.14)$$

sicchè, al limite, per $\tau \rightarrow 0$, (assenza di disturbo), la soluzione si riduce ad un flusso parallelo uniforme.

È verificare che con la (4.14) la (4.5) conduce agli stessi risultati (4.11), (4.12) e (4.13), essendo

$$\phi_1(x, z) = \varphi_1(x, z) + \alpha_o z \quad (4.15)$$

$$\phi_2(x, z) = \varphi_2(x, z) - \frac{\alpha_o^2}{2} x \quad (4.16)$$

$$\phi_3(x, z) = \varphi_3(x, z) - \frac{\alpha_o^3}{3} z \quad (4.17)$$

Si osserva facilmente come con la prima formulazione, eqq. (4.7) e (4.8), si hanno condizioni omogenee all'infinito, nel caso più generale di profilo spesso, ricurvo e ad incidenza, mentre con la (4.14) ciò non è più vero per $\alpha \neq 0$.

Si è comunque pervenuti a costruire i problemi potenziali per le successive approssimazioni.

Nell'ambito della teoria del primo ordine l'incognita funzione $\varphi_1(x, z)$ dovrà soddisfare il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \varphi_{1xx} + \varphi_{1zz} = 0 \\ \varphi_{1x} = \varphi_{1z} = 0 \\ \varphi_{1z}(x, 0^\pm) = g'_{2,1}(x) - \alpha_o \end{cases} \quad \begin{matrix} (r \rightarrow -\infty) \\ (0 \leq x \leq 1) \end{matrix} \quad (4.18)$$

Per la teoria del secondo ordine, analogamente, la funzione $\varphi_2(x, z)$ tenendo conto della prima delle (4.18), deve essere tale che

$$\begin{cases} \varphi_{2xx} + \varphi_{2zz} = 0 \\ \varphi_{2x} = \varphi_{2z} = 0 \\ \varphi_{2z}(x, 0^\pm) = [g_{2,1}(x)\varphi_{1x}(x, 0^\pm)]' \end{cases} \quad \begin{matrix} (r \rightarrow -\infty) \\ (0 \leq x \leq 1) \end{matrix} \quad (4.19)$$

Similmente, per la teoria del terzo ordine

$$\begin{cases} \varphi_{3xx} + \varphi_{3zz} = 0 \\ \varphi_{3x} = \varphi_{3z} = 0 \\ \varphi_{3z}(x, 0^\pm) = \left[g_{2,1}(x) \left(\varphi_{2x}(x, 0^\pm) + \frac{1}{2}g_{2,1}(x)g''_{2,1}(x) - \frac{\alpha_o^2}{2} \right) \right]' + \frac{\alpha_o^3}{3!} \end{cases} \quad \begin{matrix} (r \rightarrow -\infty) \\ (0 \leq x \leq 1) \end{matrix} \quad (4.20)$$

Si osservi che il problema della k-esima approssimazione si basa sulla conoscenza della (k-1)-esima soluzione.

Posto

$$m_k(x) = \frac{1}{2} [\varphi_{kz}(x, 0^+) - \varphi_{kz}(x, 0^-)] \quad (4.21)$$

$$n_k(x) = \frac{1}{2} [\varphi_{kz}(x, 0^+) + \varphi_{kz}(x, 0^-)] \quad (4.22)$$

si scrivono, in generale, le equazioni da risolvere per la k-esima approssimazione come

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{kxx} + \varphi_{kzz} = 0 \\ \varphi_{kx} = \varphi_{kz} = 0 \\ \varphi_{kz}(x, 0^+) = n_k(x) + m_k(x) \\ \varphi_{kz}(x, 0^-) = n_k(x) - m_k(x) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (r \rightarrow -\infty) \\ (0 \leq x \leq 1) \end{array} \quad (4.23)$$

Si ha a che fare, pertanto con una serie di problemi di Dirichlet in un dominio Ω la cui frontiera è il segmento (0-1) attraverso il quale la funzione φ_{kz} è discontinua.

4.2.3 Soluzione del problema del profilo sottile

PREMESSE

- Principio di simmetria

Se $f(\zeta)$ è una funzione olomorfa¹ da un lato del segmento (a, b) dell'asse reale e continua sino a questo segmento, essendo reali i suoi valori sul segmento stesso (Fig. 4.2), questa funzione è allora prolungabile analiticamente attraverso questo segmento, e nei punti simmetrici rispetto all'asse reale questa funzione avrà dei valori complessi coniugati.

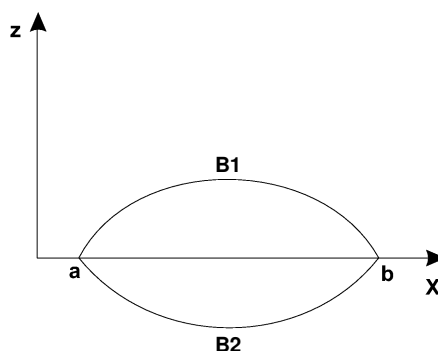


Figura 4.2: Principio di simmetria

Sia definita $f_1(\zeta)$ in B_1 ; si costruisca in B_2 (simmetrico di B_1 rispetto all'asse x) la funzione $f_2(\zeta)$ come

$$f_2(\zeta) = \bar{f}_1(\bar{\zeta})$$

Si dimostra facilmente che la f_2 è oloforma in B_2 ed inoltre si ha $f_1(\zeta) = f_2(\zeta)$ sul segmento (a, b) poiché ivi (per ipotesi) la f_1 assume valori reali. Per il Teorema di Riemann la f_2 costituisce il prolungamento analitico di f_1 attraverso (a, b) , il che dimostra il principio di simmetria.

¹Una funzione di una variabile complessa $f(\zeta)$ si dice olomorfa o regolare in un dominio B se essa è monodroma in B e se ivi possiede una derivata prima continua

- Formula di Cauchy

Sia $f(\zeta)$ una funzione olomorfa in un dominio chiuso e semplicemente connesso B , avente la curva l come contorno; il valore di $f(\zeta)$ in ogni punto interno al dominio è esprimibile mediante i suoi valori sul contorno tramite la formula

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(\zeta')}{\zeta' - \zeta} d\zeta'$$

Questa formula si estende anche al caso in cui B è un dominio infinito, con la condizione supplementare

$$\zeta \rightarrow \infty \Rightarrow f(\zeta) \rightarrow 0$$

LA SOLUZIONE GENERALE

Si definisca il potenziale complesso della perturbazione

$$F(\zeta) = \varphi(x, z) + i \psi(x, z)$$

e la velocità complessa della perturbazione

$$f(\zeta) \frac{dF(\zeta)}{d\zeta} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z} - i \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

oppure, in termini della sola $\varphi(x, z)$,

$$f(\xi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial z} = u - iv = u + iw$$

essendo u e v le componenti della velocità di perturbazione e

$$w = -v$$

Il problema è, dunque, il seguente: determinare una funzione olomorfa all'esterno del segmento $(0, 1)$, nulla all'infinito, la cui parte immaginaria assuma valori assegnati sui bordi superiori ed inferiori del segmento $(0, 1)$ ed in particolare

$$\begin{cases} \varphi_z(x, 0^+) = v^+(x) \\ \varphi_z(x, 0^-) = v^-(x) \end{cases}$$

Posto

$$f(\zeta) = f_1(\zeta) + f_2(\zeta)$$

dove f è l'incognita del problema, si ha

$$f(\zeta) = f_1(\zeta) + f_2(\zeta) = (u_1 + i w_1) + (u_2 + i w_2) = (u_1 + u_2) + i(w_1 + w_2)$$

e quindi

$$u = u_1 + u_2 \qquad e \qquad -v = w = w_1 + w_2$$

Le funzioni f_1 ed f_2 sono olomorfe all'esterno di $(0, 1)$, si annullano all'infinito e devono verificare le condizioni al contorno

$$\begin{cases} w_1^+ = -w_1^- = \frac{w^+ - w^-}{2} \\ w_2^+ = -w_2^- = \frac{w^+ + w^-}{2} \end{cases}$$

Si consideri, poi, la funzione

$$h(\zeta) = \sqrt{\frac{\zeta}{\zeta-1}}$$

che assume valori reali (positivi) per $\zeta = x > 1$ e sui bordi del segmento $(0, 1)$ diventa puramente immaginaria:

$$h^+(x) = -h^-(x) = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{x}{1-x}} = -i \sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

Si consideri ora il dominio B infinito rappresentato in Fig. 4.3 ed in questo si applichi la formula di Cauchy per la funzione $f_1(\zeta)h(\zeta)$ come

$$f_1(\zeta)h(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_1 \frac{f_1(\zeta')h(\zeta')}{\zeta' - \zeta} d\zeta'$$

(si noti che $h(\zeta) \rightarrow 1$ per $\zeta \rightarrow \infty$, e quindi $f_1(\zeta)h(\zeta) \rightarrow 0$ per $\zeta \rightarrow \infty$).

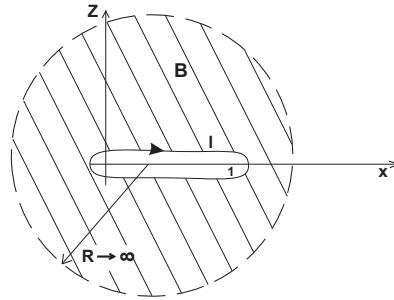


Figura 4.3: Dominio di applicazione della formula di Cauchy

Al limite per $l \rightarrow (0, 1)$ l'integrale fornisce

$$\begin{aligned} f_1(\zeta)h(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_0^1 \frac{f_1^+(\xi)h^+(\xi)}{\xi - \zeta} d\xi - \int_0^1 \frac{f_1^-(\xi)h^-(\xi)}{\xi - \zeta} d\xi \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_1^0 \frac{f_1^+(\xi) + f_1^-(\xi)}{\xi - \zeta} h^+(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{(u_1^+ + iw_1^+ + u_1^- + iw_1^-)}{\xi - \zeta} h^+(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{(u_1^+ + u_1^-)}{\xi - \zeta} h^+(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Quindi si ha

$$f_1(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\zeta-1}{\zeta}} \int_0^1 \frac{u_1^+ + u_1^-}{\xi - \zeta} \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} d\xi \quad (4.24)$$

da cui si deduce che sull'asse reale, per $|\zeta| > 1$, la $f_1(\zeta)$ assume valori reali. Quindi per il principio di simmetria si ha

$$\begin{cases} u_1(x, -z) = u_1(x, z) \\ w_1(x, -z) = -w_1(x, z) \end{cases} \quad (4.25)$$

Analoghe condizioni di simmetria possono esser ricavate per $f_2(\zeta)$; infatti tramite l'applicazione in B della formula di Cauchy per $f_2(\zeta)$, si ottiene al limite per $l \rightarrow (0, 1)$:

$$f_2(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f_2^+(\xi) - f_2^-(\xi)}{\xi - \zeta} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{u_2^+ + iw_2^+ - u_2^- - iw_2^-}{\xi - \zeta} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{u_2^+ - u_2^-}{\xi - \zeta} d\xi$$

Quindi per $|\zeta| > 1$ si trova che sull'asse reale la $f_2(\zeta)$ assume valori puramente immaginari, e per il principio di simmetria (applicato questa volta a $if_2(\zeta)$) si ha

$$\begin{cases} u_2(x, -z) = u_2(x, z) \\ w_2(x, -z) = -w_2(x, z) \end{cases} \quad (4.26)$$

A questo punto, sfruttando le condizioni espresse dalle (4.25), (4.26) e (4.24), è possibile scrivere la $f(\zeta)$ in termini della sola w sulla frontiera; invero applicando la formula di Cauchy ad $f_1(\zeta)$ nel dominio B si ha

$$\begin{aligned} f_1(\xi) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{u_1^+ + iw_1^+ + u_1^- + iw_1^-}{\xi - \zeta} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{2iw_1}{\xi - \zeta} d\xi \Rightarrow \\ &\Rightarrow f_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{w^+ - w^-}{\xi - \zeta} d\xi \end{aligned} \quad (4.27)$$

ed applicandola, invece, ad $f_2(\zeta)h(\zeta)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} f_2(\zeta)h(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{(f_2^+ + f_2^-)}{\xi - \zeta} h^+(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{u_2^+ + iw_2^+ + u_2^- + iw_2^-}{\xi - \zeta} h^+(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_1^0 \frac{2iw_2^+}{\xi - \zeta} h^+(\xi) d\xi = -\frac{i}{2\pi} \int_0^1 \frac{w^+ + w^-}{\xi - \zeta} \sqrt{\frac{\xi}{1-\zeta}} d\xi \Rightarrow \\ \Rightarrow f_2(\zeta) &= -\frac{i}{2\pi} \sqrt{\frac{\zeta-1}{\zeta}} \int_0^1 \frac{w^+ + w^-}{\xi - \zeta} \sqrt{\frac{\xi}{1-\zeta}} d\xi \end{aligned} \quad (4.28)$$

In definitiva, sommando le espressioni di f_1 e f_2 date dalle (4.27) e (4.28), si ottiene (dopo aver sostituito w con $-v$)

$$u - iv = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{v^+ - v^-}{\zeta - \xi} d\xi - \frac{i}{2\pi} \sqrt{\frac{\zeta-1}{\zeta}} \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \frac{(v^+ + v^-)}{\zeta - \xi} d\xi$$

Posto

$$m(x) = \frac{1}{2} [v(x, 0^+) - v(x, 0^-)] \quad , \quad n(x) = \frac{1}{2} [v(x, 0^+) + v(x, 0^-)]$$

si ha

$$u(x, z) - iv(x, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{m(\xi)}{\zeta - \xi} d\xi - \frac{i}{\pi} \sqrt{\frac{\zeta-1}{\zeta}} \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \frac{n(\xi)}{\zeta - \xi} d\xi$$

Questa procedura si applica al generico problema k -esimo, e pertanto la soluzione del problema (4.23), è

$$\varphi_{kx}(x, z) - i\varphi_{kz}(x, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{m_k(\xi)}{\zeta - \xi} d\xi - \frac{i}{\pi} \sqrt{\frac{\zeta-1}{\zeta}} \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \frac{n_k(\xi)}{\zeta - \xi} d\xi \quad (4.29)$$

La velocità tangenziale alla superficie del corpo, nella k -esima approssimazione, si ottiene passando al limite per $z \rightarrow 0^\pm$ l'espressione

$$V_k(x, z) = u_k(x, z) \cos(\tau g'_{2,1}(x)) + w_k(x, z) \sin(\tau g'_{2,1}(x)) \quad (4.30)$$

dove la componente assiale della velocità totale è data da

$$u_k(x, 0^\pm) = 1 + \sum_{j=1}^k \tau^j \phi_{jx}(x, 0^\pm) \quad (4.31)$$

mentre per la componente trasversale si ha

$$w_k(x, 0^\pm) = \sum_{j=1}^k \tau^j \phi_{jz}(x, 0^\pm) \quad (4.32)$$

Il procedimento esposto è generale ma conviene risolvere esplicitamente le prime tre approssimazioni.

SOLUZIONE DEL PRIMO ORDINE

Dalle (4.18), (4.21) e (4.22) si ricava

$$m_1(x) = \frac{1}{2} [g_2'(x) - g_1'(x)] \quad (4.33)$$

$$n_1(x) = \frac{1}{2} [g_2'(x) + g_1'(x)] - \alpha_o \quad (4.34)$$

mentre la (4.29) fornisce le componenti assiali e trasversali della velocità della perturbazione

$$\varphi_{1x}(x, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{m_1(\xi)}{x - \xi} d\xi + \begin{cases} 0 & (x < 0, x > 1) \\ \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{x}} \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \frac{n_1(\xi)}{x - \xi} d\xi & (0 < x \leq 1) \end{cases} \quad (4.35)$$

$$\varphi_{1z}(x, 0) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{x-1}{x}} \int_0^1 \frac{n_1(\xi)}{x - \xi} \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} d\xi \quad (x < 0, x > 1) \quad (4.36)$$

Se ora si indica con $C(x)$ la legge di variazione della linea media e con $T(x)$ quella del semispessore, risulta, Fig. 4.2.3,

$$g_2(x) = C(x) + T(x) \quad (4.37)$$

$$g_1(x) = C(x) - T(x) \quad (4.38)$$

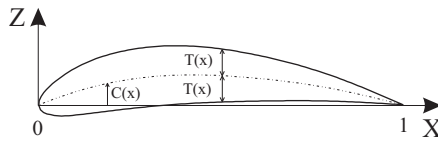


Figura 4.4: Definizione delle distribuzioni di spessore e curvatura

Pertanto la (4.33) e (4.34) forniscono

$$m_1(x) = T'(x) \quad (4.39)$$

$$n_1(x) = C'(x) - \alpha_o \quad (4.40)$$

e la (4.35) diventa

$$\varphi_{1x}(x, 0^\pm) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{T'(\xi)}{x - \xi} d\xi \pm \sqrt{\frac{1-x}{x}} \left[\alpha_o + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \frac{C'(\xi)}{x - \xi} d\xi \right] \quad (4.41)$$

Dalla (4.41), che è alla base del calcolo della teoria lineare, si osserva che è possibile separare il contributo dello spessore da quello della curvatura e dell'angolo d'attacco e, come si è già detto, tale risultato è stato a lungo utilizzato nell'analisi e nel disegno di profili alari. Nel par. (4.2.6) si mostrerà come l'equazione (4.41) sia anche ricavabile considerando distribuzioni lineari di sorgenti e di vortici lungo la corda.

La velocità tangenziale totale nell'ambito della teoria del primo ordine si può calcolare dalle equazioni (4.15), (4.30), (4.31), (4.32) e (4.41)

$$\frac{V_1}{V_\infty}(x, 0^\pm) = 1 + \tau \left(\frac{u_{1T}}{V_\infty} \pm \frac{u_{1C}}{V_\infty} \right) \quad (4.42)$$

nella quale si è indicato con u_{1T} la perturbazione assiale dovuta allo spessore ed u_{1C} quella dipendente dalla curvatura e dall'angolo d'attacco, rispettivamente primo e secondo termine al secondo membro della (4.41). Infine, dall'espressione esatta

$$Cp = 1 - \frac{V^2}{V_\infty^2} \quad (4.43)$$

segue il coefficiente di pressione locale Cp valutato con la teoria lineare

$$Cp_1(x, 0^\pm) = -2\tau \left(\frac{u_{1T}}{V_\infty} \pm \frac{u_{1C}}{V_\infty} \right) \quad (4.44)$$

SOLUZIONE DEL SECONDO ORDINE

Le equazioni (4.19), (4.21), (4.22) e (4.42) consentono di scrivere

$$m_2(x) = \frac{1}{2} [\varphi_{2z}(x, 0^+) - \varphi_{2z}(x, 0^-)] = \left[\frac{u_{1C}}{V_\infty} C(x) + \frac{u_{1T}}{V_\infty} T(x) \right]' = T_2'(x) \quad (4.45)$$

$$n_2(x) = \frac{1}{2} [\varphi_{2z}(x, 0^+) + \varphi_{2z}(x, 0^-)] = \left[\frac{u_{1T}}{V_\infty} C(x) + \frac{u_{1C}}{V_\infty} T(x) \right]' = C_2'(x) \quad (4.46)$$

Si constata che nella teoria del secondo ordine non è più valido il principio di sovrapposizione degli effetti, e che ci si può riferire ad un profilo fittizio, con spessore e linea media entro le parentesi quadre della (4.45) e (4.46).

Dalla (4.29) si ottiene per $0 \leq x \leq 1$

$$\varphi_{2x}(x, 0^\pm) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{T_2'(\xi)}{x - \xi} d\xi \pm \sqrt{\frac{1-x}{x}} \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \frac{C_2'(\xi)}{x - \xi} d\xi \quad (4.47)$$

mentre, per la (4.16) e (4.47) sarà

$$\phi_{2x}(x, 0^\pm) = \varphi_{2x}(x, 0^\pm) - \frac{\alpha_0^2}{2} = \frac{u_{2T}}{V_\infty} \pm \frac{u_{2C}}{V_\infty} \quad (4.48)$$

con

$$\frac{u_{2T}}{V_\infty} = \frac{1}{\tau} \int_0^1 \frac{T_2'(\xi)}{x - \xi} d\xi \pm \frac{\alpha_0^2}{2} \quad (4.49)$$

$$\frac{u_{2C}}{V_\infty} = \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{1-x}{x}} \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \frac{C_2'(\xi)}{x - \xi} d\xi \quad (4.50)$$

L'espressione della velocità tangenziale totale, nella teoria del secondo ordine, è quindi

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{V_\infty}(x, 0^\pm) &= 1 + \tau \left(\frac{u_{1T}}{V_\infty} \pm \frac{u_{1C}}{V_\infty} \right) + \\ &+ \tau^2 \left[\frac{u_{2T}}{V_\infty} \pm \frac{u_{2C}}{V_\infty} + (C(x) \pm T(x))(C'(x) \pm T'(x)) + \frac{1}{2} (C'(x) \pm T'(x))^2 \right] \end{aligned} \quad (4.51)$$

Ponendo la (4.51) sinteticamente come

$$\frac{V_2}{V_\infty}(x, 0^\pm) = 1 + \tau f_1(x, 0^\pm) + \tau^2 f_2(x, 0^\pm) \quad (4.52)$$

il coefficiente di pressione, al secondo ordine, è

$$Cp_2(x, 0^\pm) = -2\tau f_1(x, 0^\pm) - 2\tau^2 \left[f_2(x, 0^\pm) + \frac{1}{2}f_1^2(x, 0^\pm) \right] \quad (4.53)$$

SOLUZIONE DEL TERZO ORDINE

Similmente ai casi precedenti si ricava di seguito

$$m_3(x) = \left[C(x) \frac{u_{2C}}{V_\infty} + T(x) \frac{u_{2T}}{V_\infty} + C(x)T(x)C''(x) + \frac{1}{2}C^2(x)T''(x) + \frac{1}{2}T^2(x)T''(x) \right]' = T_3'(x) \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} n_3(x) &= \left[C(x) \frac{u_{2T}}{V_\infty} + T(x) \frac{u_{2C}}{V_\infty} + C(x)T(x)T''(x) + \frac{1}{2}C^2(x)C''(x) + \frac{1}{2}T^2(x)C''(x) \right]' + \frac{\alpha_o^3}{3!} = \\ &= C_3'(x) - \frac{\alpha_o^3}{3!} \end{aligned} \quad (4.55)$$

Per le funzioni $T_3(x)$ e $C_3(x)$ vale quanto detto per le distribuzioni fittizie $T_2(x)$ e $C_2(x)$. La (4.29) diventa

$$\varphi_{3x}(x, 0^\pm) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{T_3'(\xi)}{x-\xi} d\xi \pm \sqrt{\frac{1-x}{x}} \left[-\frac{\alpha_o^3}{3!} + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \frac{C_3'(\xi)}{x-\xi} d\xi \right] = \frac{u_{3T}}{V_\infty} \pm \frac{u_{3C}}{V_\infty} \quad (4.56)$$

La velocità tangenziale al terzo ordine si scrive, quindi, come

$$\begin{aligned} \frac{V_3}{V_\infty}(x, 0^\pm) &= \frac{V_2}{V_\infty}(x, 0^\pm) + \tau^3 \left\{ \frac{u_{3T}}{V_\infty} \pm \frac{u_{3C}}{V_\infty} + \left(\frac{u_{1T}}{V_\infty} \pm \frac{u_{1C}}{V_\infty} \right) \left[(C(x) \pm T(x)) \times \right. \right. \\ &\quad \times (C''(x) \pm T''(x)) + \frac{1}{2}(C'(x) \pm T'(x))^2 \left. \right] + (C(x) \pm T(x)) \times \\ &\quad \times \left[(C'(x) \pm T'(x)) \left(\frac{u'_{1T}}{V_\infty} \pm \frac{u'_{1C}}{V_\infty} \right) + \frac{1}{2}(C(x) \pm T(x)) \times \right. \\ &\quad \left. \left. \left(\frac{u''_{1T}}{V_\infty} \pm \frac{u''_{1C}}{V_\infty} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.57)$$

o, più brevemente,

$$\frac{V_3}{V_\infty}(x, 0^\pm) = 1 + \tau f_1(x, 0^\pm) + \tau^2 f_2(x, 0^\pm) + \tau^3 f_3(x, 0^\pm) \quad (4.58)$$

Una volta determinata la distribuzione delle velocità secondo la (4.58) il campo delle pressioni, al terzo ordine, si calcola con la relazione

$$\begin{aligned} Cp_3(x, 0^\pm) &= -2\tau f_1(x, 0^\pm) - 2\tau^2 \left[f_2(x, 0^\pm) + \frac{1}{2}f_1^2(x, 0^\pm) \right] + \\ &\quad -2\tau^3 \left[f_3(x, 0^\pm) + f_1(x, 0^\pm)f_2(x, 0^\pm) \right] \end{aligned} \quad (4.59)$$

4.2.4 Alcuni risultati particolari

Per comodità di calcolo in questo paragrafo le variabili e le funzioni saranno riferite all'intervallo $-1 \leq x \leq +1$, senza assumere nuovi simboli. Si valutano le velocità tangenziali per alcune forme di profili utilizzando i risultati precedenti. Per lo sviluppo degli integrali ci si può riferire all'Appendice A o al par. (4.2.6).

PROFILO ELLITTICO

L'equazione degli spessori è

$$z = \pm \tau \sqrt{1 - x^2} \quad (4.60)$$

da cui

$$\frac{u_{1T}}{V_\infty} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{T'(\xi)}{x - \xi} d\xi = 1 \quad (4.61)$$

e

$$\frac{u_{1C}}{V_\infty} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \alpha_o \quad (4.62)$$

La soluzione del primo ordine per l'ellisse diventa

$$\frac{V_1}{V_\infty}(x, 0^\pm) = 1 + \tau \pm \alpha \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad (4.63)$$

Al secondo ordine si ha

$$T_2(x) = T(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\frac{u_{2T}}{V_\infty}(x) = 1 - \frac{\alpha_o^2}{2}$$

$$C_2(x) = \alpha_o(1 - x) \quad (4.64)$$

$$\frac{u_{2C}}{V_\infty}(x) = \alpha_o \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

sicchè la velocità tangenziale al secondo ordine è

$$\frac{V_2}{V_\infty}(x, 0^\pm) = 1 + \tau \pm \alpha \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \pm \tau \alpha \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\tau^2}{2} \frac{x^2}{1-x^2} \quad (4.65)$$

Per la teoria del terzo ordine si ha invece

$$T_3(x) = \left(1 - \frac{\alpha_o^2}{2}\right) \sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{u_{3T}}{V_\infty}(x) = 1 - \frac{\alpha_o^2}{2}$$

$$\frac{u_{3C}}{V_\infty}(x) = \alpha_o \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{\alpha_o^3}{3!} \quad (4.66)$$

Si scriva, per brevità, la velocità tangenziale al terzo ordine per $\alpha = 0$ come

$$\frac{V_3}{V_\infty}(x, 0^\pm) = 1 + \tau - \frac{\tau^2}{2} \frac{x^2}{1-x^2} - \frac{\tau^3}{2} \frac{x^2}{1-x^2} \quad (4.67)$$

Gli sviluppi asintotici ottenuti sono singolari nell'intorno dei punti di ristagno ($x = \pm 1$), dove la pendenza del profilo diventa elevata e lo sviluppo in serie (4.7) viene a cadere.

Dal confronto tra le soluzioni approssimate e la soluzione esatta per l'ellisse (derivante la trasformazioni conformi)

$$\frac{V}{V_\infty}(x) = (1 + \tau) \frac{\sqrt{1-x^2} \cos \alpha \pm (1-x) \sin \alpha}{\sqrt{1-x^2 + \tau^2 x^2}} \quad (4.68)$$

riportate in Tab. 4.1 per $\alpha = 0$ e $\tau = 0.05$ e 0.15 , si constata, in generale, che i risultati diventano inadeguati per distanze dai bordi di ordine τ^2 , che è poi il raggio dei bordi di attacco e di uscita. È notevole comunque che la velocità massima venga calcolata esattamente già al primo ordine.

Si può osservare, inoltre, come la soluzione del terzo ordine non migliori l'accuratezza del calcolo nella regione prossima al bordo d'attacco, mentre già con lo sviluppo del secondo ordine nelle regioni regolari l'errore percentuale è dell'ordine di 10^{-4} al massimo.

x/c	$\tau = 0.05$			$\tau = 0.15$		
	V/V_∞ soluz.esatta	V/V_∞ 2 ordine	V/V_∞ 3 ordine	V/V_∞ soluz.esatta	V/V_∞ 2 ordine	V/V_∞ 3 ordine
-0.9998	0.39001	-2.07406	-2.23026	0.152010	-26.96656	-31.18404
-0.998	0.824163	0.738437	0.722859	0.44736	-1.65406	-2.07467
-0.995	0.939853	0.925936	0.919733	0.63956	0.033430	-0.134055
-0.99	0.990774	0.988436	0.985358	0.792039	0.59592	0.512811
-0.9808	1.018297	1.018382	1.016802	0.918058	0.86544	0.822757
-0.9238	1.042441	1.042723	1.042359	1.081357	1.084507	1.074683
-0.8314	1.047074	1.047201	1.047061	1.122087	1.124815	1.121038
-0.708	1.048690	1.048743	1.048680	1.137213	1.138693	1.136997
-0.556	1.049452	1.049440	1.049412	1.144254	1.144966	1.144211
-0.382	1.049775	1.049786	1.049775	1.147796	1.148077	1.147789
-0.194	1.049948	1.049951	1.049948	1.149494	1.149560	1.149494
0	1.05	1.05	1.05	1.15	1.15	1.15

Tabella 4.1: Confronto tra velocità esatta ed approssimata - Ellisse, $\alpha = 0$

Il problema di rendere uniformemente validi i risultati è stato affrontato da numerosi autori, citati nell'introduzione, con criteri diversi, sia pure, in pratica, limitatamente al secondo ordine e per bordi di attacco ellittici e parabolici. Nell'ambito della teoria del primo ordine la soluzione (4.63) diventa uniformemente valida se modificata come

$$\frac{V}{V_\infty}(x) = \frac{\frac{V_1}{V_\infty}(x, 0^\pm)}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} \quad (4.69)$$

dove dz/dx è la pendenza del profilo. Così per l'ellisse ad $\alpha = 0$ si ha, per la (4.60),

$$\frac{V}{V_\infty}(x) = \frac{(1 + \tau)\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2 + \tau^2 x^2}} \quad (4.70)$$

che coincide con la (4.68)

La correzione (4.69), che risulta approssimata per $\alpha \neq 0$ o per forme distinte dall'ellisse, può essere utilizzata, come si vedrà, anche per la teoria del secondo ordine, per profili non eccessivamente curvi.

Per i bordi parabolici Van Dyke usa la tecnica detta del *matching*, [22], ma questa richiede che le soluzioni "esterne" siano ottenute analiticamente, e ciò è possibile per configurazioni semplici, per le quali, tutto sommato, si può conoscere la soluzione esatta.

PROFILO AD ARCO DI CERCHIO

Come secondo esempio si consideri un profilo ad arco di cerchio, di equazione

$$C(x) = 1 - x^2 \quad (-1 \leq x \leq +1)$$

Valutando la velocità per $\alpha = 0$ con la teoria del primo ordine si ricava, successivamente

$$\begin{aligned} \frac{u_{1C}}{V_\infty}(x) &= 4\sqrt{1-x^2} \\ \frac{V_1}{V_\infty}(x) &= 1 \pm 4\tau\sqrt{1-x^2} \end{aligned} \quad (4.71)$$

dove τ indica la curvatura massima.

Con la teoria del secondo ordine invece si calcola

$$\frac{V_2}{V_\infty} = 1 \pm \tau \frac{u_{1C}}{V_\infty} + \tau^2 \left[\frac{u_{2T}}{V_\infty} + C(x)C''(x) + \frac{1}{2}C'^2(x) \right] = 1 \pm 4\tau\sqrt{1-x^2} + 4\tau^2(1-2x^2) \quad (4.72)$$

In Tab. 4.2 si presenta un confronto tra le soluzioni lineari e del secondo ordine e la soluzione esatta, ottenuta da [27] con trasformazioni conformi. Qui si può osservare che con la teoria lineare l'errore percentuale massimo è di 0.2% per $\tau = 0.02$ e di 0.6% per $\tau = 0.04$.

Inoltre se si calcola il coefficiente di portanza per integrazione della distribuzione di pressione al primo ordine C_{p1}

$$C_{p1} = \mp 8\tau\sqrt{1-x^2} = -2\tau \frac{u_{1C}}{V_\infty} \quad (4.73)$$

si ricava

$$C_l = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (C_{p1}(x, 0^-) - C_{p1}(x, 0^+)) dx = 4\pi\tau \quad (4.74)$$

che coincide con il valore esatto (si osservi che in questo caso la corda vale 2).

x/c	$\tau = 0.02$			$\tau = 0.04$		
	V/V_∞ soluz.esatta	V/V_∞ 1 ordine	V/V_∞ 2 ordine	V/V_∞ soluz.esatta	V/V_∞ 1 ordine	V/V_∞ 2 ordine
-1	0.998	1	0.998	0.994	1	0.9936
-0.9808	1.014	1.0156	1.014	1.025	1.031	1.025
-0.9238	1.030	1.030	1.0288	1.057	1.061	1.0565
-0.8314	1.044	1.044	1.044	1.086	1.089	1.086
-0.708	1.056	1.056	1.056	1.113	1.113	1.113
-0.556	1.067	1.066	1.0666	1.135	1.133	1.135
-0.382	1.075	1.074	1.075	1.152	1.147	1.1515
0	1.081	1.080	1.081	1.166	1.160	1.166

Tabella 4.2: Confronto tra velocità esatta ed approssimata - Arco di parabola, $\alpha = 0$

È facile verificare che con la teoria del secondo ordine non si modifica il valore della (4.74).

Non è sorprendente che le velocità non siano singolari sul bordo d'attacco ($x = -1$): ciò è dovuto al fatto che per il profilo ad arco di cerchio l'angolo d'attacco ideale, cfr. (4.2.6), è nullo. La singolarità compare invece nella distribuzione di velocità per $\alpha \neq 0$; in tal caso al contributo della (4.71) va aggiunto il termine $\pm \alpha \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{1}{2}}$, di cui corrisponde il carico "addizionale", cfr. (4.2.6), ed il coefficiente di portanza "addizionale" $2\pi\alpha$, mentre la (4.74) definisce il coefficiente di portanza "basico", o ideale.

PROFILO BICONVESSO SIMMETRICO

Un altro esempio significativo è dato dal profilo biconvesso simmetrico, per il quale è

$$T(x) = 1 - x^2 \quad (-1 \leq x \leq +1)$$

e la soluzione lineare si calcola come

$$\frac{u_{1T}}{V_\infty} = -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\xi d\xi}{x - \xi} = \frac{1}{\pi} \left(4 - 2x \log \frac{1+x}{1-x} \right)$$

e quindi

$$\frac{V_1}{V_\infty}(x, 0^\pm) = 1 + \frac{2}{\pi} \tau \left(2 - x \log \frac{1+x}{1-x} \right) \pm \alpha \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad (4.75)$$

Passando alla soluzione del secondo ordine si ha

$$\begin{aligned} T_2(x) &= \frac{2}{\pi} (1 - x^2) \left(2 - x \log \frac{1+x}{1-x} \right) \\ \frac{u_{2T}}{V_\infty} &= 1 - 3x^2 - \frac{1}{\pi^2} \log^2 \frac{1+x}{1-x} + \frac{3}{\pi^2} \left(2 - x \log \frac{1+x}{1-x} \right) - \frac{\alpha_o^2}{2} \\ C_2(x) &= \alpha(1-x) \sqrt{1-x^2} \\ \frac{u_{2C}}{V_\infty} &= \frac{\alpha_o}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \log \frac{1+x}{1-x} - \frac{2}{\pi} \alpha_o \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left(x \log \frac{1+x}{1-x} - 2 \right) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{V_\infty}(x, 0^\pm) &= \frac{V_1}{V_\infty}(x, 0^\pm) + \tau^2 \left[\frac{3}{\pi^2} \left(2 - x \log \frac{1+x}{1-x} \right)^2 - \frac{1}{\pi^2} \log^2 \frac{1+x}{1-x} + \right. \\ &\quad \left. -(1-x^2) \right] + \frac{\alpha^2}{2} \mp \frac{\tau \alpha}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left[(1+2x) \log \frac{1+x}{1-x} - 4 \right] \end{aligned} \quad (4.76)$$

La soluzione del terzo ordine richiederebbe calcoli eccessivamente laboriosi, e se si considera il trascurabile vantaggio che può apportare alla già valida soluzione del secondo ordine, Fig. 4.5, si comprende perché, nella ricerca, ci si è fermati al massimo a sviluppi del secondo ordine.

Per quanto detto precedentemente si può giustificare, poi, l'impiego della teoria lineare nell'analisi di profili a bordo aguzzo. È però importante studiare le conseguenze delle singolarità, come si vedrà nel prossimo paragrafo.

4.2.5 Le forze di spinta e di resistenza dei bordi

Si è osservato più volte come le soluzioni asintotiche nella teoria del profilo sottile diano contributi singolari sui bordi sia arrotondati che aguzzi. Si vuol far vedere innanzitutto come la errata valutazione della distribuzione superficiale delle velocità, e quindi delle pressioni, con la teoria lineare dia luogo a valori non nulli della resistenza, in contrapposizione al principio di D'Alembert.

Nelle ipotesi poste la resistenza d , se esiste, discende dalla integrazione della distribuzione di pressione, essendo

$$d = \int_l (p - p_\infty) \sin \left(\frac{dz}{dx} - \alpha \right) ds \quad (4.77)$$

Nella (4.77) l'integrale curvilineo è esteso al perimetro l del corpo in esame. Segue immediatamente

$$C_d = \int_l C_p \sin \left(\frac{dz}{dx} - \alpha \right) ds \quad (4.78)$$

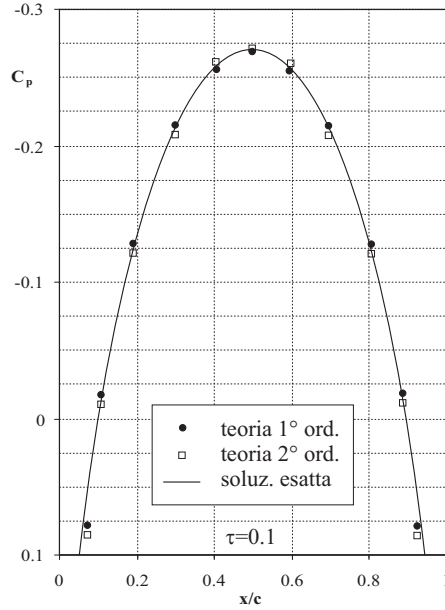


Figura 4.5: Profilo biconvesso simmetrico, $\alpha = 0$

Con soluzioni del primo ordine la (4.78) diventa

$$C_d = \int_0^1 C_p(x, 0^+) \left(\frac{dz}{dx} - \alpha \right) dx - \int_0^1 C_p(x, 0^-) \left(\frac{dz}{dx} - \alpha \right) dx \quad (4.79)$$

e nel caso di lastra piana ad incidenza, stanti le (4.41) e (4.44), dalla (4.79) segue

$$C_d = 4\alpha^2 \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx = 2\pi\alpha^2 \quad (4.80)$$

È stato dimostrato in modi diversi, [16] e [17] tra gli altri, che il paradosso di D'Alembert deve continuare a sussistere in flusso potenziale perché sul bordo di attacco di una lastra piana si produce una forza di spinta uguale e contraria alla resistenza (4.80) ora calcolata. Usando la notazione

$$C_x = -C_d = -2\pi\alpha^2 \quad (4.81)$$

per il coefficiente di spinta (o di forza tangenziale), e poiché la distribuzione di velocità sulla lastra è, per piccoli angoli di incidenza ($\alpha \cong \sin \alpha$)

$$\frac{V}{V_\infty} = 1 \pm \alpha \sqrt{\frac{1-x}{x}} \quad (4.82)$$

l'ascissa del punto di ristagno x_{rist} , con l'ipotesi $x_{rist} \ll 1$ sarà

$$x_{rist} = \alpha^2 \quad (4.83)$$

ovvero

$$C_x = -2\pi x_{rist} \quad (4.84)$$

che esprime la proporzionalità della forza di spinta alla distanza del punto di ristagno dal bordo d'attacco.

Se si considera che l'effetto della incidenza su di un profilo arrotondato, con la teoria lineare, è identico a quello della lastra piana, si può verificare immediatamente che la (4.81) è anche valida per un corpo arrotondato ad incidenza. Considerando un bordo d'attacco parabolico, Fig. 4.6, di equazione

$$\frac{z}{2R} = \pm \left(\frac{x}{2R} \right)^{1/2}$$

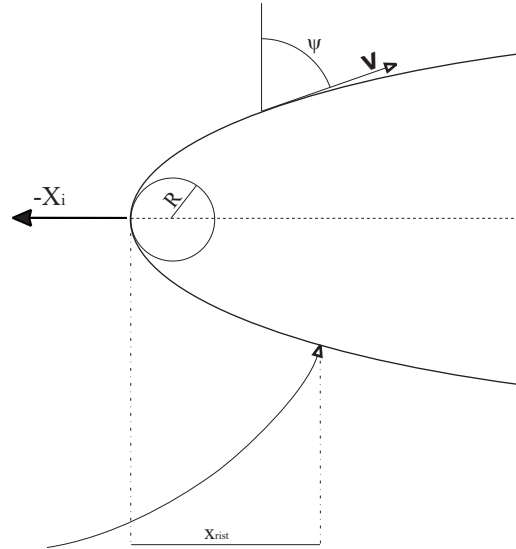


Figura 4.6: Profilo con bordo di attacco parabolico

con le posizioni

$$\tan \psi = \frac{z}{R} \quad \cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + (z/R)^2}} \quad \sin \psi = \frac{z/R}{\sqrt{1 + (z/R)^2}}$$

la distribuzione di velocità superficiale calcolata da Durand, [16], si scrive

$$\frac{V}{V_\infty} = (1 + \tau) \cos \alpha \sin \psi \pm 2 \sin \alpha \left(1 + \frac{1}{\tau} \right) \cos \psi \quad (4.85)$$

In accordo con teoria lineare ($\tau \ll 1$, $\cos \alpha \cong 1$, $\sin \alpha \cong \alpha$ e con $1/\tau = (1/2R)^{1/2}$) la (4.85) diventa

$$\frac{V}{V_\infty} = \frac{\sqrt{2x/R} \pm \sqrt{1/2R} 2\alpha}{\sqrt{1 + 2x/R}} \quad (4.86)$$

ed è facile controllare che anche per un bordo arrotondato la coordinata assiale del punto di ristagno è proporzionale al quadrato dell'angolo d'attacco.

In breve, la forza di spinta si rende necessaria per mantenere attaccato un flusso potenziale attorno al bordo d'attacco: quando a causa della viscosità la corrente separa si ha un sensibile aumento della resistenza, come si vedrà nello studio delle ali a delta.

Un secondo caso tipico da esaminare è il profilo simmetrico ad incidenza nulla. Dalla (4.79) sarà allora

$$C_d = 2\tau \int_0^1 C_p(x) T'(x) dx$$

Per un profilo Joukowski simmetrico la distribuzione degli spessori, almeno fino al secondo ordine, è espressa da

$$T(x) = 4(1-x)\sqrt{x-x^2} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

e si ricava di seguito

$$\frac{V}{V_\infty}(x, 0^\pm) = 1 + \tau(3 - 4x) \quad (4.87)$$

$$Cp_1(x, 0^\pm) = -2\tau(3 - 4x)$$

$$C_d = -2\pi\tau^2 \quad (4.88)$$

La (4.88) è un altro paradosso dovuto ai limiti della teoria linearizzata in corrispondenza dei bordi: [28] e [29] hanno in modo diverso dimostrato che sul bordo d'attacco dei profili arrotondati si produce una forza resistente uguale e contraria alla spinta (4.88).

Il procedimento indicato non è sviluppabile con le soluzioni di ordine superiore perché appaiono integrali divergenti sui bordi, come si può controllare considerando termini successivi nella (4.79) ed introducendo in luogo della (4.87) la (4.53) o la (4.59).

4.2.6 Distribuzioni lineari di singolarità

Si dimostra che l'equazione (4.41) deriva dal campo indotto da distribuzioni lineari di singolarità, disposte a lungo la corda. Così il contributo dello spessore sulla velocità tangenziale

$$\frac{u_{1T}}{V_\infty}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{T'(\xi)}{x - \xi} d\xi \quad (4.89)$$

è ricavabile associando la perturbazione prodotta dal corpo, supposto molto sottile, simmetrico e ad incidenza nulla, ad una distribuzione lineare di sorgenti, mentre l'influenza della curvatura e dell'angolo d'attacco

$$\frac{u_{1C}}{V_\infty}(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \left\{ \alpha_o + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \frac{C'(\xi)}{x-\xi} d\xi \right\} \quad (4.90)$$

si calcola materializzando il disturbo di un profilo di spessore nullo, a piccola curvatura ed incidenza, con una distribuzione lineare di vortici.

SPESSORE

Per verificare la (4.89) si osserva che il potenziale della sorgente è una nota soluzione dell'equazione di Laplace, così come il potenziale di una distribuzione di sorgenti. Detta $\sigma(\xi)$ l'incognita intensità delle sorgenti distribuite sulla corda, la componente verticale di velocità indotta é, Fig. 4.7,

$$w(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\sigma(\xi)z dx}{(x - \xi)^2 + z^2} \quad (4.91)$$

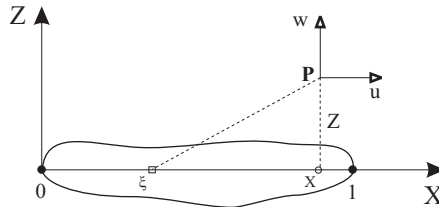


Figura 4.7: Velocità indotta da una sorgente elementare disposta sulla corda

La condizione del flusso tangenziale sulla corda anziché sulla superficie del corpo si scrive

$$\frac{w}{V_\infty}(x, 0^\pm) = \pm T'(x) \quad (4.92)$$

Un valore non nullo estraibile dalla (4.91) esiste per $z \rightarrow 0^\pm$ ed $x \rightarrow \xi$; si ha

$$\frac{w}{V_\infty}(x, 0^\pm) = \pm \frac{\sigma(x)}{2} \quad (4.93)$$

da cui

$$\sigma(x) = 2V_\infty T'(x) \quad (4.94)$$

che esprime l'incognita intensità locale della sorgente in funzione della forma del profilo. Tale possibilità la si riscontra solo con distribuzioni lineari di singolarità ed anche in campo supersonico.

La componente assiale della velocità perturbata

$$u(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \sigma(\xi) \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + z^2} d\xi \quad (4.95)$$

si identifica, pertanto, per $z \rightarrow 0^\pm$ e per la (4.94), con la (4.89).

Quando l'integrale nella (4.89) non può essere risolto direttamente il calcolo si può sviluppare con la trasformazione di variabili, Fig. 4.8,

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \\ \xi &= \frac{1}{2}(1 - \cos \theta_o) \end{aligned} \quad (4.96)$$

ed assumendo che

$$T'(\xi) = \frac{1}{\sin \theta_o} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\theta_o) + B_n \sin(n\theta_o) \quad (4.97)$$

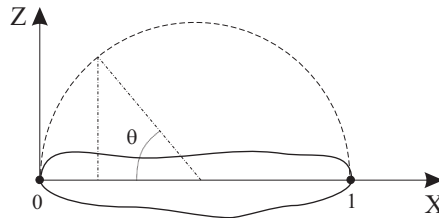


Figura 4.8: Trasformazione di variabili di Tchebycheff

Sul bordo d'attacco si intende, in luogo della (4.97),

$$T'(\xi) = \frac{1}{\sin \theta_o} \sqrt{2R/c} \quad (4.98)$$

dove R è il raggio di curvatura del bordo d'attacco.

Risultano utili, anche nei capitoli successivi, le identità

$$\int_0^\pi \frac{\cos(n\theta_o)}{\cos \theta_o - \cos \theta} d\theta_o = \pi \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta} \quad (4.99)$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin(n\theta_o) \sin \theta_o}{\cos \theta_o - \cos \theta} d\theta_o = \pi \cos(n\theta) \quad (4.100)$$

$$I_n(\theta) = \int_0^\pi \frac{\sin(n\theta_o) d\theta_o}{\cos \theta_o - \cos \theta} = \frac{2[1 + (-1)^n]}{n+1} + 2 \cos \theta I_{n-1} - I_{n-2} \quad (4.101)$$

per $n = 3, 4, \dots$ essendo

$$I_1 = \log \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \quad (4.102)$$

$$I_2 = 4 + 2 \cos \theta \log \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \quad (4.103)$$

La (4.89) diventa, quindi

$$\frac{u_{1T}}{V_\infty}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta} + \frac{B_n}{\pi} I_n(\theta) \right) \quad (4.104)$$

CURVATURA ED ANGOLO D'ATTACCO (la teoria di Glauert)

Si consideri ora, il campo indotto da una distribuzione di vortici lungo la linea media di un profilo così poco curvo da poter ritenere, Fig. 4.9, $\gamma(s_o) \cong \gamma(\xi)$, dove γ è l'incognita circolazione locale.

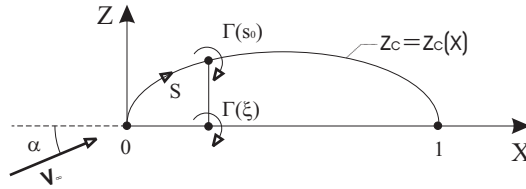


Figura 4.9: Schema per una distribuzione di vortici sulla corda

La componente normale della velocità della perturbazione si scrive, dalla nota legge di induzione aerodinamica, come

$$\frac{w}{V_\infty}(x, 0^\pm) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\gamma(\xi)/V_\infty}{x - \xi} d\xi \quad (4.105)$$

e per $z \rightarrow 0^\pm$ discende

$$\frac{u_{1C}}{V_\infty}(x) = \pm \frac{\gamma(x)}{2V_\infty} \quad (4.106)$$

La condizione del flusso tangenziale da soddisfare sulla corda anziché sulla linea media è

$$C'(x) - \alpha = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{u_{1C}/V_\infty(\xi)}{x - \xi} d\xi \quad (4.107)$$

Posto

$$C'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\theta) \quad (4.108)$$

è immediato controllare che l'espressione

$$\frac{u_{1C}}{V_\infty}(x) = (\alpha - c_o) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\theta) = \frac{\gamma(x)}{2V_\infty} \quad (4.109)$$

per la componente assiale della velocità perturbata, stante la (4.99) e (4.100), verifica la (4.107) e che dopo alcuni passaggi coincide con la (4.90).

Si osservi inoltre come la (4.109) soddisfi la condizione di Joukowski di vorticità nulla sul bordo di uscita.

La portanza, il momento di beccheggio rispetto al bordo di attacco e quello rispetto al fuoco (il punto a 1/4 della corda), positivi se cabranti, si ricavano dalle relazioni

$$l \cong \rho V_\infty \int_0^1 \gamma(\xi) d\xi \quad (4.110)$$

$$m_{LE} = -\rho V_\infty \int_0^1 \gamma(\xi) \xi d\xi \quad m_{c/4} = -\rho V_\infty \int_0^1 \gamma(\xi) (\xi - c/4) d\xi \quad (4.111)$$

È risultato di particolare interesse applicativo studiare la condizione per cui nello sviluppo in serie che compare nella (4.109) è $\alpha = c_o$. Il carico locale che ne risulta, indipendente dall'incidenza e funzione univoca della forma del profilo, è definito "basico"; l'angolo d'attacco $\alpha = c_o$ ed il corrispondente coefficiente di portanza prendono il nome di angolo d'attacco ideale α_{id} e di coefficiente di portanza ideale, o di progetto C_{lid} .

Per $\alpha \neq c_o$ ci sarà il contributo del primo termine della (4.109), con carico infinito sul bordo d'attacco: tale contributo è definito "carico addizionale", dà un momento nullo rispetto al fuoco, eq. (4.114), ed un coefficiente di portanza addizionale dipendente dalla differenza $\alpha - \alpha_{id}$.

Sostituendo i valori forniti dalla (4.106) e (4.109) si ha il coefficiente di portanza

$$C_l = 2\pi \left(\alpha - c_o + \frac{c_1}{2} \right) = 2\pi (\alpha + \alpha_{zl}) \quad (4.112)$$

con la definizione di angolo di portanza nulla

$$\alpha_{zl} = \frac{c_1}{2} - c_o \quad (4.113)$$

Il coefficiente di momento di beccheggio rispetto al fuoco è, inoltre,

$$C_{m_{\frac{x}{4}}} = -\frac{\pi}{4} (c_1 - c_2) \quad (4.114)$$

ed è costante al variare dell'incidenza. I coefficienti c_o e c_n , ottenuti con la usuale tecnica di Fourier, valgono

$$c_o = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi C'(x) d\theta \quad (4.115)$$

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi C'(x) \cos(n\theta) d\theta \quad (4.116)$$

e possono essere agevolmente calcolati con eventuale integrazione numerica.

Riguardo al gradiente della retta di portanza $C_{l\alpha} = \partial C_l / \partial \alpha$, i profili usualmente impiegati presentano valori effettivi che si discostano leggermente da 2π , la differenza essendo dovuta all'effetto dello spessore. Come si può vedere dalla Tab.4.3, dove ne è riportato il rapporto tra valore sperimentale e valore teorico 2π per diverse famiglie di profili NACA, le discrepanze sono contenute entro limiti assai modesti.

Profilo	spessore 6%	spessore 10%	spessore 15%
4 cifre	.99	.99	.96
serie 230	.989	.985	.967
serie 63	1.00	1.03	1.07
serie 64	.99	1.00	1.03
serie 65	.97	.99	1.02
serie 66	.95	.96	.97

Tabella 4.3: Rapporto tra valore sperimentale e valore teorico di $C_{l\alpha}$ per linee medie NACA

Circa l'angolo di portanza nulla α_{zl} , finché la curvatura del profilo è piccola ($z_c/c < 0.04$) anche la (4.113) è in ottimo accordo con i dati sperimentali, l'angolo di portanza nulla cresce proporzionalmente alla curvatura, ed è, in pratica, indipendente dallo spessore, Figg. (4.10) e

(4.11). Quando la curvatura è eccessiva e nel caso di profili multilappati la teoria lineare non è utilmente impiegabile per la valutazione delle caratteristiche globali, che vengono in genere ad essere sovrastimate.

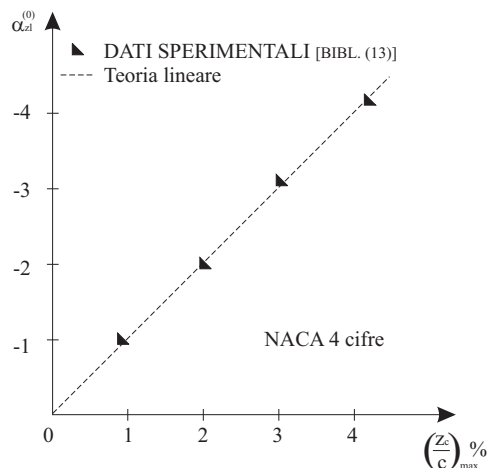


Figura 4.10: [11]

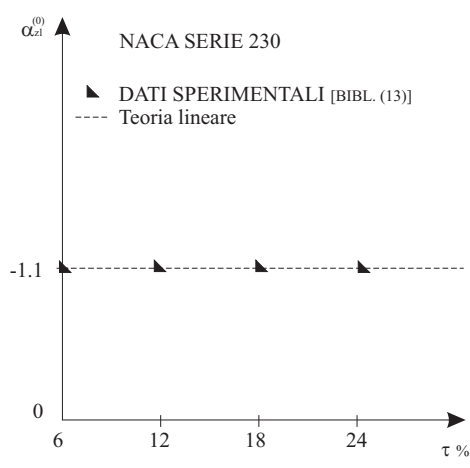


Figura 4.11: [11]

4.2.7 La linea media dei profili laminari

Il problema diretto dell'aerodinamica (problema di analisi) consiste nella determinazione del campo di moto nota la geometria del corpo intorno al quale il fluido scorre. Il problema di *design*, o problema inverso, consiste invece nell'assegnare alcune condizioni del campo di moto e determinare la geometria del corpo che le soddisfa. È chiaro l'interesse ingegneristico: un tipico problema di *design* è la determinazione della geometria del profilo alare che produce un'assegnata distribuzione di pressione.

Tra i pochi esempi di successo in tale direzione si considera la determinazione della geometria della famiglia di linee medie utilizzate nella 6^a serie di profili NACA laminari.

Una volta nota la distribuzione di spessore (e cioè il profilo simmetrico) che consente, in condizioni di incidenza nulla, l'arretramento della zona di ricompressione con gradiente sfavorevole e quindi condizioni di flusso laminare su buona parte del profilo, si pone il problema di mantenere il flusso laminare in condizioni portanti. Infatti, se si pone il profilo ad incidenza la presenza del carico addizionale distrugge il *plateau* di pressione sul dorso con un avanzamento del picco di espansione che comporta un rapido innesco della turbolenza.

Il problema è stato superato determinando una linea media che, all'angolo di attacco ideale α_{id} , abbia una distribuzione di vorticità, e quindi di carico, costante lungo la prima parte della corda (fino all'ascissa $x = a$), e linearmente decrescente fino a 0 nella seconda parte, Fig. 4.12: applicando il principio di sovrapposizione degli effetti i *plateau* di pressione ottenuti nel caso simmetrico vengono mantenuti sebbene con valori di pressione diversi tra dorso e ventre, ottenendo così la portanza desiderata.

Si illustra il procedimento matematico che consente la determinazione della linea media $a = 1$, cioè con vorticità costante lungo tutta la corda.

Sono incognite l'equazione della linea media $z(x)$ e l'angolo di attacco ideale α_{id} mentre è assegnata la vorticità costante γ_{id} , il cui valore è direttamente legato al coefficiente di portanza che si vuole ottenere (C_{lid}). Infatti in base al teorema di Kutta-Joukowski è

$$l = l_{id} = \rho V_{\infty} \Gamma_{id} = \rho V_{\infty} \int_0^c \gamma_{id} dx = \rho V_{\infty}^2 c \frac{\gamma_{id}(x)}{V_{\infty}} = C_{lid} \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 c \quad (4.117)$$

da cui

$$\frac{\gamma_{id}(x)}{V_{\infty}} = \frac{C_{lid}}{2} \quad (4.118)$$

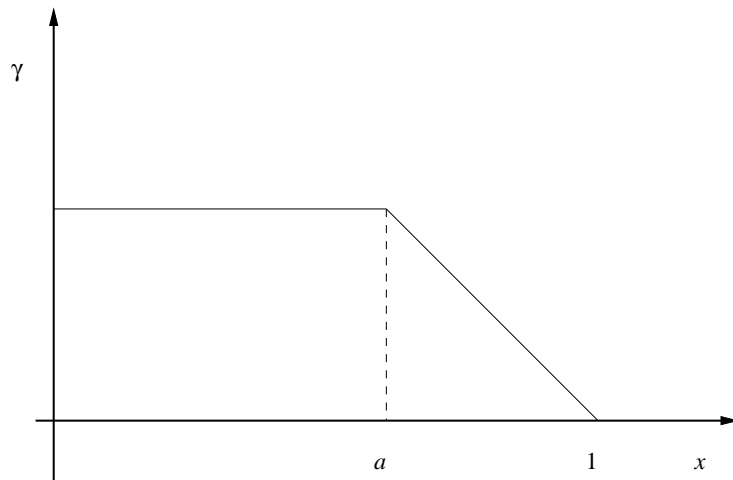


Figura 4.12: Distribuzione di vorticità obiettivo della procedura di *design*

La condizione al contorno nella teoria del profilo infinitamente sottile (4.107) si scrive quindi

$$\frac{dz}{dx} = \alpha_{id} + \frac{C_{lid}}{4\pi} \int_0^1 \frac{d\xi}{\xi - x} \quad (4.119)$$

e l'integrazione di questa equazione fornisce l'equazione della linea media desiderata.

L'integrale, o meglio il valor principale dell'integrale nell'equazione (4.119), può essere calcolato come segue. È

$$\int_0^1 \frac{d\xi}{\xi - x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{x-\epsilon} \frac{d\xi}{\xi - x} + \int_{x+\epsilon}^1 \frac{d\xi}{\xi - x} \right] \quad (4.120)$$

e ricordando che una primitiva della funzione integranda è $\ln|\xi - x|$ si ottiene

$$\int_0^1 \frac{d\xi}{\xi - x} = \ln(1 - x) - \ln x \quad (4.121)$$

e quindi

$$\frac{dz}{dx} = \alpha_{id} + \frac{C_{lid}}{4\pi} [\ln(1 - x) - \ln x] \quad (4.122)$$

L'integrazione della (4.122) porta a

$$z(x) = \alpha_{id}x + \frac{C_{lid}}{4\pi} [-x \ln x + x - (1 - x) \ln(1 - x) + (1 - x)] + k \quad (4.123)$$

La costante di integrazione k e l'angolo di incidenza ideale α_{id} si calcolano imponendo che l'ordinata della linea media valga 0 ad $x = 0$ e $x = 1$, ottenendo

$$k = -\frac{C_{lid}}{4\pi}, \quad \alpha_{id} = 0 \quad (4.124)$$

Riassumendo, un carico costante lungo la corda per un dato $C_l = C_{lid}$ si ottiene all'angolo di incidenza $\alpha = \alpha_{id} = 0$ con la linea media di equazione

$$z(x) = -\frac{C_{lid}}{4\pi} [x \ln x + (1 - x) \ln(1 - x)] \quad (4.125)$$

È interessante notare che:

- le ordinate della linea media essendo proporzionali al C_{lid} , tutte le linee medie della famiglia $a = 1$ si possono ottenere scalando l'ordinata della linea media calcolata con $C_{lid} = 1$ in base al richiesto C_{lid} ;
- la pendenza della linea media (equazione (4.122)) è singolare in $x = 0$ e $x = 1$ (bordi di attacco e d'uscita), dove la Teoria del Profilo Sottile al primo ordine è in difetto.

Con un procedimento analogo è possibile determinare le linee medie con $a \neq 1$, [11]; in questo caso

- α_{id} non è nullo ed è proporzionale al C_{lid} ;
- la sovrapposibilità degli effetti della Teoria del Profilo Sottile al primo ordine, utilizzata per determinare la soluzione, consente di costruire altre linee medie come combinazione lineare di linee medie preesistenti, ad esempio le linee medie ($a = 1, C_{lid} = 0.4$) e ($a = 0.5, C_{lid} = 0.5$).

4.2.8 Teoria del Punto Neutro Posteriore

Per un profilo sottile ad $\alpha = 0$, il coefficiente di portanza (4.112) diventa

$$C_l = -2\pi \left(c_o - \frac{c_1}{2} \right) \quad (4.126)$$

Si approssimi ora la (4.108) come

$$C'(x) = c_o + c_1 \cos \theta \quad (4.127)$$

(una ben precisa linea media!). Calcolata nel punto a 3/4 della corda ($\theta = 120^\circ$), la (4.127) dà

$$\left[C'(x) \right]_{x=\frac{3}{4}c} = c_o - \frac{c_1}{2} \quad (4.128)$$

e confrontando la (4.126) e la (4.128) discende che il coefficiente di portanza del profilo è uguale a quello di una lastra piana tangente al contorno della linea media nel punto a 3/4 della corda. Questa proprietà, mostrata per la prima volta da Pistolesi, definisce il punto a 3/4 della corda come secondo punto caratteristico o “punto neutro posteriore”, essendo il primo punto caratteristico, o punto neutro anteriore, il fuoco.

Ovviamente la stessa proprietà sussiste per la lastra piana quando si sostituisce la distribuzione vorticoso continua con un unico vortice di intensità Γ concentrato ad un quarto della corda. Si ha infatti, per il punto distante h dal fuoco,

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{h} \quad (4.129)$$

mentre, essendo per il teorema di Kutta-Joukowski

$$\Gamma = cC_l \frac{1}{2} V_\infty \quad (4.130)$$

risulta

$$C_l = 4\pi \frac{w}{V_\infty} \frac{h}{c} \quad (4.131)$$

Per la lastra piana $w/V_\infty = \cos t = \sin \alpha \cong \alpha$, sicchè dalla (4.131) si perviene alla espressione $C_l = 2\pi\alpha$ se $h/c = 1/2$. In altri termini, la condizione al limite valutata nel punto posizionato a 3/4 della corda dal bordo d'attacco dà luogo, con un unico vortice disposto nel fuoco, alla stessa circolazione o portanza del profilo realizzabile con una distribuzione vorticoso continua (ed allo stesso momento focale nullo): Sotto questo aspetto la Teoria del Punto Neutro Posteriore è stata utilizzata, con successo, nella teoria della superficie portante approssimata.

Un modo di mostrare la proprietà del punto neutro posteriore generalizzando la procedura con l'impiego di più vortici discreti (*Vortex Lumped Method*) consiste nel dividere la lastra in N

intervalli uguali (ma non necessariamente!) e discretizzando l'incognita circolazione $\gamma(\xi)$ mediante N vortici, posti nei punti

$$\xi_j = (j - 1 + \delta)h \quad (0 < \delta < 1, 1 \leq j \leq N) \quad (4.132)$$

essendo stavolta $h = 1/N$ la lunghezza del generico intervallo.

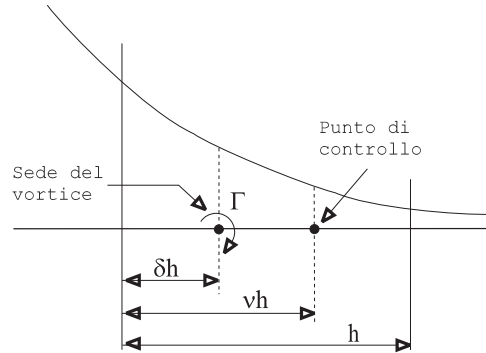


Figura 4.13: Schema di calcolo dell'induzione del vortice per un generico pannello

Si calcoli ora il campo indotto nei punti di controllo (Fig. 4.13)

$$x_i = (i - 1 + \nu)h \quad (0 < \nu < 1, 1 \leq i \leq N) \quad (4.133)$$

dove, per la condizione al limite del flusso tangenziale, si suppone noto il *downwash* w_i .

In formulazione matriciale

$$[W] = [A][\Gamma] \quad (4.134)$$

e gli elementi della matrice $[A]$, o coefficienti di influenza, sono dati da

$$a_{ij} = \frac{1}{\lambda + \Delta} \quad \lambda = i - j \quad \Delta = \nu - \delta \quad (4.135)$$

Fin qui non c'è alcuna indicazione sulla scelta di ν, δ e Δ ; si può solo affermare che il vettore soluzione Γ non dipende da ν e da δ individualmente, ma dalla loro differenza Δ .

Per il caso di lastra piana la portanza ed il momento di beccheggio rispetto al bordo d'attacco sono

$$l = 2\pi \sin \alpha \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \cong 2\pi \alpha \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \quad (4.136)$$

$$m_{LE} = \frac{l}{4} = \frac{\pi}{2} \alpha \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \quad (4.137)$$

mentre con la discretizzazione prima introdotta si ha

$$l = 2\rho V_\infty^2 h \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_j}{2V_\infty} \quad (4.138)$$

$$m_{LE} = 2\rho V_\infty^2 h^2 \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_j}{2V_\infty} (j - 1 + \delta) \quad (4.139)$$

Per $N = 2$ la soluzione della (4.134) con $w_i = c \cos t = \alpha$ è

$$\bar{\Gamma}_1 = \frac{\Gamma_1}{2V_\infty} = \pi \alpha \Delta(\Delta + 1); \quad \bar{\Gamma}_2 = \frac{\Gamma_2}{2V_\infty} = -\pi \alpha \Delta(\Delta - 1) \quad (4.140)$$

con Γ_1 e Γ_2 positivi per $0 < \Delta < 1$ e $\Gamma_1 > \Gamma_2$ solo se $\Delta > 0$. Perché quindi sia verificata la condizione di Joukowski sul bordo d'uscita $\Gamma(1) = 0$ Δ deve essere positivo, cioè il punto sede del vortice deve precedere il corrispondente punto di controllo.

Dalla (4.138), per le (4.140) segue, con $h = 1/2$,

$$l = 2 \pi \alpha \rho V_\infty^2 \Delta \quad (4.141)$$

ed analogamente, dalla (4.139),

$$m_{LE} = \frac{1}{2} \pi \alpha \rho V_\infty^2 2 \pi \alpha \Delta \left[\delta + \frac{1}{2}(1 - \Delta) \right] \quad (4.142)$$

Confrontando la (4.141) e (4.142) con i valori esatti (4.136) e (4.137) si ottiene

$$\Delta = \frac{1}{2} \quad \delta = \frac{1}{4} \quad \nu = \frac{3}{4} \quad (4.143)$$

Analoghi risultati sono invero attendibili qualunque sia N , come dimostrato in [30]. Valori diversi dalle (4.143) non consentono una valida approssimazione sulla distribuzione di velocità, come si può osservare dalla Fig. 4.14.

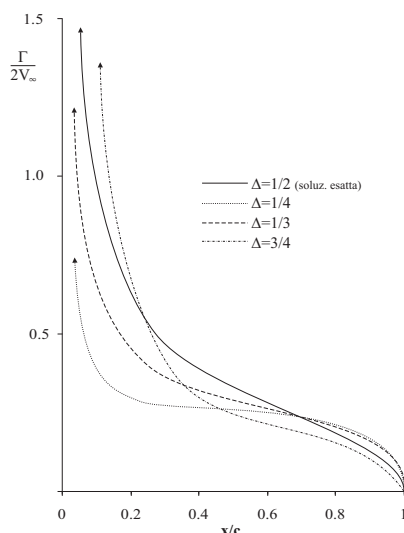


Figura 4.14: Metodo del Punto Neutro Posteriore: dipendenza della soluzione dalla distanza tra sede del vortice e punto di controllo

La generalizzazione di questa procedura a linee medie consente il calcolo di soluzioni accurate che mettono in conto l'effetto della curvatura senza linearizzazioni.

4.2.9 Metodo ingegneristico di Abbott - Metodo NACA

Non si può sorvolare, parlando di procedimenti approssimati, sul metodo ingegneristico di Abbott, o metodo NACA, [11], che costituisce una felice sintesi di teorie lineari ed esatte ed è operativamente utile per il calcolo in modo rapido, della velocità intorno ai profili delle famiglie NACA.

Nello sviluppo della teoria del primo ordine si è visto che la distribuzione di velocità su di un profilo alare può essere calcolata come somma di tre contributi indipendenti:

- i) una distribuzione di velocità corrispondente allo spessore, ad angolo d'attacco nullo;
- ii) una distribuzione di velocità "basica" (quindi non singolare), corrispondente alla linea media all'angolo d'attacco ideale α_{id} ;

iii) una distribuzione di velocità “addizionale” dipendente dall’incidenza $\alpha - \alpha_{id}$.

L’inconveniente di questa formulazione, che tra l’altro ignora la dipendenza della distribuzione della velocità addizionale dalla forma del profilo ed assume una legge di variazione lineare di detta velocità con l’incidenza, consiste essenzialmente nell’errata inaccettabile valutazione del campo in prossimità dei bordi di attacco e di uscita.

Pur continuando ad impiegare il principio di sovrapposizione degli effetti, Abbott ha calcolato con il metodo (analitico ed esatto) di [19], per numerose forme simmetriche standard di profili NACA, le distribuzioni di velocità ad $\alpha = 0$, indicate con v/V_∞ e le distribuzioni di velocità per $C_l = 1$ in modo da ottenere l’incremento di velocità $\Delta V_a/V_\infty$ rispetto al caso ad $\alpha = 0$, ovviando così all’inconveniente su indicato. Infine, il contributo della linea media, espresso da $\Delta v/V_\infty$, è stato calcolato con la teoria lineare al coefficiente di portanza C_{lid} (ed è quindi non singolare).

Così la velocità totale può essere scritta come

$$\frac{V}{V_\infty} = \frac{v}{V_\infty} \pm \frac{\Delta v}{V_\infty} \pm \frac{\Delta v_a}{V_\infty} \frac{(C_l - C_{lid})}{C_{l_0}} \quad (4.144)$$

dove $C_{l_0} = 1$ per tutti i profili NACA riportati in [11]. Gli incrementi di velocità dovuti alla curvatura ed all’angolo di attacco sono uguali ed opposti sul dorso (segno +) e sul ventre (segno -), come indica la teoria lineare.

Il procedimento è dunque di tipo ingegneristico, ma risulta sufficientemente valido ed estremamente agevole soprattutto quando si voglia determinare la distribuzione di carico su di un profilo corrispondente ad un assegnato coefficiente di portanza.

Si riportano di seguito, da [11], i dati per generare la geometria di un certo numero di profili laminari della Serie 63: nella Tab. 4.4 è presentato lo spessore del profilo NACA 63₂ - 015, in Tab. 4.5 la linea media con $a = 1$. I dati relativi alle tre distribuzioni basiche di velocità che accompagnano le informazioni geometriche consentono il calcolo delle soluzioni con il metodo NACA.

4.2.10 Riepilogo dei risultati della Teoria del Profilo Sottile

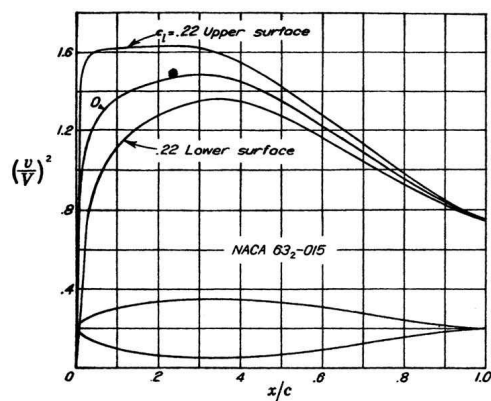
Quando spessore, curvatura ed angolo d’attacco sono sufficientemente piccoli si possono ritenere abbastanza validi i risultati della Teoria del Profilo Sottile, che possono essere così sintetizzati.

- Per simulare il campo di moto a potenziale è possibile sostituire al profilo distribuzioni di singolarità lungo la corda, imponendo, in maniera approssimata, la condizione di flusso tangenziale sui punti della corda anzichè sul profilo. La soluzione consisterà nella sovrapposizione degli effetti di spessore (simulati da una distribuzione di sorgenti) e di curvatura ed angolo d’attacco (simulabili mediante una distribuzione di vortici). La velocità sarà approssimativamente tangente al profilo, ed è rispettata la condizione di flusso regolare al bordo d’uscita, dove il carico si annulla. Invece al bordo d’attacco la velocità è in genere singolare a causa dei contributi (combinati) della linea media e dell’angolo d’attacco (lo spessore non dà singolarità).
- La rotazione del flusso intorno al bordo d’attacco genera -in questa regione- una forza in avanti, detta forza di spinta. È grazie alla forza di spinta che si può spiegare come anche per la lastra piana ad incidenza vale il Paradosso di D’Alembert.

Per spessore nullo (una lamina o, meglio, la linea media di un profilo) valgono questi risultati.

- Il carico lungo il profilo, influenzato dalla forma del profilo e dall’angolo d’attacco, è non singolare sul bordo d’attacco solo ad un preciso valore dell’angolo d’attacco α_{id} (che dipende dalla forma del profilo), la cui importanza è fondamentale: in concreto, per lavorare in condizioni “ideali” ciascun profilo dell’ala -nelle condizioni di crociera del velivolo- deve lavorare ad angoli d’attacco molto prossimi all’ α_{id} della sua linea media (è in questa condizione che viene minimizzata la resistenza detta di profilo). Il carico per $\alpha = \alpha_{id}$ viene comunemente detto carico basico (sul profilo, da non confondere con l’omonimo carico lungo l’apertura alare dovuto allo svergolamento).

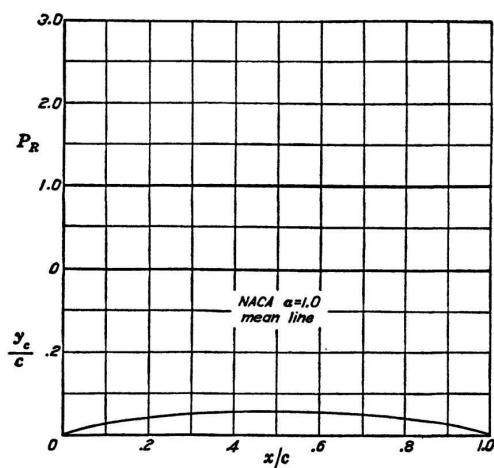
THEORY OF WING SECTIONS



x (per cent c)	y (per cent c)	$(v/V)^2$	v/V	$\Delta v_a/V$
0	0	0	0	1.918
0.5	1.204	0.600	0.775	1.513
0.75	1.462	0.822	0.907	1.379
1.25	1.878	0.938	0.969	1.182
2.5	2.610	1.105	1.051	0.903
5.0	3.648	1.244	1.115	0.674
7.5	4.427	1.315	1.147	0.557
10	5.055	1.360	1.166	0.484
15	6.011	1.415	1.190	0.388
20	6.693	1.446	1.202	0.330
25	7.155	1.467	1.211	0.286
30	7.421	1.481	1.217	0.251
35	7.500	1.475	1.214	0.222
40	7.386	1.446	1.202	0.196
45	7.099	1.401	1.184	0.174
50	6.665	1.345	1.160	0.153
55	6.108	1.281	1.132	0.135
60	5.453	1.220	1.105	0.118
65	4.721	1.155	1.075	0.102
70	3.934	1.085	1.042	0.088
75	3.119	1.019	1.009	0.076
80	2.310	0.953	0.976	0.063
85	1.541	0.894	0.946	0.051
90	0.852	0.839	0.916	0.039
95	0.300	0.789	0.888	0.026
100	0	0.750	0.866	0

L.E. radius: 1.594 per cent c NACA 63₂-015 Basic Thickness FormTabella 4.4: I dati relativi al profilo NACA 63₂ - 015, da [11]

APPENDIX II



$c_{l_i} = 1.0 \quad \alpha_i = 0^\circ \quad c_{m_i} = -0.250$				
x (per cent c)	y_c (per cent c)	dy_c/dx	P_R	$\Delta v/V = P_R/4$
0	0			
0.5	0.250	0.42120	1.000	0.250
0.75	0.350	0.38875		
1.25	0.535	0.34770		
2.5	0.930	0.29155		
5.0	1.580	0.23430		
7.5	2.120	0.19995		
10	2.585	0.17485		
15	3.365	0.13805		
20	3.980	0.11030		
25	4.475	0.08745		
30	4.860	0.06745		
35	5.150	0.04925		
40	5.355	0.03225		
45	5.475	0.01595		
50	5.515	0		
55	5.475	-0.01595		
60	5.355	-0.03225		
65	5.150	-0.04925		
70	4.860	-0.06745		
75	4.475	-0.08745		
80	3.980	-0.11030		
85	3.365	-0.13805		
90	2.585	-0.17485		
95	1.580	-0.23430		
100	0			

Data for NACA Mean Line $a = 1.0$ Tabella 4.5: I dati relativi alla linea media laminare con $a = 1$, da [11]

- Per $\alpha \neq \alpha_{id}$ il carico basico viene incrementato con un contributo -carico addizionale sul profilo, singolare sul bordo d'attacco- che dipende dalla differenza $\alpha - \alpha_{id}$ e non dalla forma del profilo: in pratica, è il carico agente su una lastra piana ad angolo d'attacco $\alpha - \alpha_{id}$.
- Le velocità sul profilo si ottengono sommando (sul dorso) e sottraendo (sul ventre), in senso algebrico, la metà del carico al valore della velocità asintotica.
- Esiste un angolo d'attacco α_{zl} , detto angolo di portanza nulla, che dipende dalla forma del profilo, per il quale si annulla la portanza: in prima approssimazione α_{zl} è proporzionale al valore della freccia massima.
- Per una fissata geometria il coefficiente di portanza dipende solo dall'angolo di attacco, la dipendenza è lineare e il gradiente della retta di portanza $C_{l\alpha}$ vale 2π .
- Il momento della forza aerodinamica (la portanza, in questo caso) rispetto al punto che dista $1/4c$ dal bordo d'attacco (detto fuoco) è costante con l'angolo d'attacco, e quindi con la portanza. Il momento calcolato rispetto ad un polo diverso dal fuoco varierà linearmente con l'angolo d'attacco.
- Il punto che dista $3/4c$ dal bordo d'attacco -detto punto neutro posteriore- gode di particolari proprietà.
- Le linee medie di maggior interesse sono state disegnate per realizzare assegnate distribuzioni di carico. Grande importanza assume la linea media dei profili NACA detti laminari, (4.2.7) e Fig. 4.2.9: essa è tale che il carico all'angolo d'attacco ideale è costante su tutta la linea media (o su parte di essa, a partire dal bordo d'attacco e fino ad un punto a partire dal quale decresce linearmente fino ad annullarsi nel bordo di uscita).

4.2.11 Inferenza della Teoria del Profilo Sottile sul funzionamento dei profili alari

Un modo molto utile per progettare o comprendere il funzionamento di un profilo alare è di valutare l'effetto combinato dello spessore e della linea media (in modo consistente con la combinazione di linea media e distribuzione di spessore per descrivere la geometria del profilo): diventa quindi importante l'ausilio della Teoria del Profilo Sottile, insieme con le sue interpretazioni.

Ovviamente per un profilo con bordo d'attacco arrotondato non esiste alcuna singolarità sul bordo d'attacco, per nessun valore dell'angolo d'attacco, contrariamente a quanto prevede la Teoria del Profilo Sottile: in tal senso è notevole il modo in cui il metodo NACA riesce a determinare, in modo praticamente esatto, la velocità sui profili delle famiglie NACA impiegando per il contributo della linea media il risultato della Teoria del Profilo Sottile all'angolo d'attacco ideale.

Si nota qui che l'angolo di portanza nulla di un profilo coincide praticamente con quello della sua linea media.

La posizione dello spessore massimo lungo la corda influenza fortemente la distribuzione di velocità in condizioni ideali (e cioè ad assetti di crociera): arretrando spessore massimo verso il bordo di uscita arretra anche la cresta, e non cambiano significativamente i valori della velocità massima sul dorso e sul ventre. Si intuisce poi che arretrando l'ascissa di massimo spessore si assottiglia la forma del bordo d'attacco, e questo ha una forte influenza sul comportamento del profilo alle alte incidenze, quando gli effetti della viscosità diventano importanti².

²Si ricorda che lo spessore massimo dei profili NACA a 4 e 5 cifre si trova esattamente al 30% della corda, mentre per i profili laminari è spostato verso il bordo di uscita, in dipendenza dell'estensione di flusso laminare che si intende avere.

4.3 L'ala diritta: la teoria della linea portante

4.3.1 Impostazione della teoria

Come si è visto in (4.2), per i profili di piccolo spessore e poco ricurvi è possibile, agli effetti del calcolo della velocità e della pressione nei vari punti della superficie, sostituire l'ala, supposta infinita, con un unico strato di filamenti vorticosi, distribuiti con continuità lungo la corda.

Nel caso dell'ala finita è necessario, per l'esistenza della velocità indotta e per poter ancora ritenere valido il teorema di Kutta-Joukowski, supporre piccole le componenti della perturbazione rispetto alla velocità asintotica, con la conseguente linearizzazione del problema.

La variazione della portanza, e quindi della circolazione, lungo l'apertura, associata alla validità dei teoremi di Helmholtz, porta all'esistenza dei vortici liberi, la cui intensità è retta dalla formula (1.27), che, per l'ipotesi assunta, si disporranno secondo la direzione della velocità asintotica, e quindi praticamente nel piano alare: come specificato al paragrafo (1.7) questa assunzione è necessaria per rendere lineare e risolvere in forma diretta (non iterativa) la teoria vorticoso dell'ala.

Poiché per il teorema di Munk sono nulli gli effetti dei vortici aderenti se paralleli ad una ed una sola direzione (ali a freccia nulla o trascurabile, rastremazione non eccessiva, grande allungamento), si giunge a sostituire l'ala con una linea portante, perpendicolare alla direzione della velocità asintotica e consistente con un vortice connesso con circolazione variabile³.

I limiti di applicabilità della teoria si sono, quindi, delineati: in effetti si suppone che ciascuna sezione operi indipendentemente dalle altre (secondo le leggi del flusso 2-D), eccezion fatta per l'angolo di incidenza indotta (flusso "quasi" 2-D). Ciò sarà praticamente vero se l'ala, non molto caricata, ha forte allungamento, non ci siano lungo l'apertura rapide variazioni della corde e dello svergolamento e non si abbia freccia pronunciata. In queste ipotesi regioni di bidimensionalità si hanno effettivamente nelle regioni centrali di una semiala, lontano cioè dalla fusoliera e dall'estremità.

4.3.2 Equazioni fondamentali

La distribuzione della portanza lungo l'apertura di un'ala si può calcolare in base all'equazione integrale di Prandtl

$$C_l(y) = C_{l\alpha}(y)[\alpha(y) - \alpha_i(y)] \quad (4.145)$$

dove

$$\alpha_i(y) = \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma(y')}{dy'} \frac{dy'}{y - y'} \quad (4.146)$$

Nella (4.145) l'angolo d'attacco $\alpha(y)$ è misurato rispetto alla retta di portanza nulla del profilo all'ascissa y : se si misurano gli angoli rispetto alle corde occorre mettere in conto l' $\alpha_{zl}(y)$.

La (4.145) dice che il coefficiente di portanza in una generica sezione dell'ala è funzione lineare dell'incidenza effettiva $\alpha = \alpha - \alpha_i$, mentre la (4.146), che si ricava facilmente dalla legge di induzione aerodinamica, esprime l'ovvio legame tra l'angolo di incidenza indotta e la circolazione Γ^4 .

L'integrando della (4.146) è singolare per $y = y'$, e si conviene di prendere come valore dell'integrale il valore principale: si escludono cioè dall'intervallo di integrazione due tratti di uguale ampiezza $\pm\epsilon$, a destra ed a sinistra del punto singolare y' , facendo poi tendere ϵ a zero.

Le (4.145) e (4.146) possono essere viste come un sistema integro-differenziale, che può essere risolto per via diretta o per via indiretta.

Quando la integrazione della (4.146) è diretta il sistema è risolvibile con procedimenti di approssimazioni successive: storicamente, in assenza di elaboratore elettronico, si procedeva con metodi numerici o grafici lunghi e spesso incerti.

³Il Prof. Losito usava far notare che non c'è nessun motivo razionale per mettere in qualche relazione la posizione della linea portante con la linea dei fuochi dell'ala.

⁴Si fa presente che nella (4.146) si assume che l'induzione sulla linea portante sia metà di quella infinitamente a valle (nel piano di Trefftz), in accordo con la Teoria Globale del paragrafo (1.6).

La risoluzione indiretta è il modo più elegante e nello stesso tempo più comodo, e consiste nell'impiego di opportuni sviluppi in serie della circolazione Γ o di altra funzione equivalente. Con le posizioni

$$y = \frac{b}{2} \cos \theta \quad (4.147)$$

$$\gamma = \frac{\Gamma}{b V_\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\theta) \quad (4.148)$$

la (4.146), con semplici calcoli, diventa

$$\alpha_i = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta} \quad (4.149)$$

e la (4.145) si scrive, tenendo conto che per il teorema di Kutta-Joukowski

$$\Gamma = c C_l \frac{1}{2} V_\infty \quad (4.150)$$

$$\gamma(\theta) = \frac{c C_{l\alpha}}{2 b} \alpha - \frac{c C_{l\alpha}}{2 b} \frac{1}{2 \sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \sin(n\theta) \quad (4.151)$$

che tramite la 4.147 può anche scriversi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\theta) \left(1 + \frac{c C_{l\alpha}}{4 b} \frac{n}{\sin \theta} \right) = \frac{c C_{l\alpha}}{2 b} \alpha \quad (4.152)$$

dove in genere $c, C_{l\alpha}$ ed α sono funzioni note di θ : il problema è di determinare i coefficienti a_n soddisfacenti la (4.152).

Se la quantità entro parentesi fosse indipendente da θ sarebbe possibile valutare i coefficienti a_n . Così ad esempio, nel caso di ala ellittica ($c = c_r \sin \theta$) a profilo ed angolo d'attacco costanti l'espressione in parentesi diventa

$$1 + \frac{c_r C_{l\alpha}}{4 b} n \quad (4.153)$$

e con la tecnica di Fourier si ricava

$$a_n \left(1 + \frac{c_r C_{l\alpha}}{4 b} n \right) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{c_r C_{l\alpha}}{2 b} \alpha \sin \theta \sin(n\theta) d\theta \quad (4.154)$$

L'integrale a secondo membro ammette valori diversi da zero solo per $n = 1$, avendosi

$$a_1 = \frac{\frac{c_r C_{l\alpha}}{2b} \alpha}{1 + \frac{c_r C_{l\alpha}}{4b}} \quad (4.155)$$

e la (4.148), per la (4.155), diventa allora

$$\gamma = a_1 \sin \theta = \frac{\frac{c_r C_{l\alpha}}{2b} \alpha}{1 + \frac{c_r C_{l\alpha}}{4b}} \sin \theta \quad (4.156)$$

che dice che la circolazione varia ellitticamente lungo l'apertura. Si ritrova così un risultato fondamentale, acquisito più volte ed in diverse maniere.

Per altri casi non è possibile utilizzare la tecnica di Fourier, né, in ogni modo, valutare in forma chiusa i coefficienti a_n (tranne il caso inutile $c C_{l\alpha} = k \sin \theta$). Ciò comporta un duplice svantaggio (importante prima dell'introduzione dell'elaboratore elettronico nella tecnologia del calcolo numerico):

1. il calcolo dei coefficienti a_n direttamente della circolazione γ deve essere effettuato tramite sistemi di equazioni;
2. non conoscendo un'espressione (sia pure maggiorata) per i coefficienti a_n è impossibile calcolare, in generale, la somma dei resti n -esimi e quindi l'errore che si commette quando ci si arresta ad un certo termine della serie; non rimane, in pratica, che effettuare un'indagine (numerica) caso per caso, per stabilire la convergenza del processo e quindi il numero dei termini della serie necessario per dare una sufficiente precisione.

Risulterà conveniente riformulare in modo opportuno il problema retto dalle (4.145) e (4.146) in modo da individuare il contributo addizionale e, separatamente, quello basico, cfr. (4.3.3), e quello antisimmetrico, cfr. (4.3.3), qualora fossero non nulli: il carico risultante sarà poi una combinazione opportuna di questi tre diversi tipi di distribuzione di carico.

Vi sono numerosi procedimenti di calcolo delle (4.145) e (4.146) con il metodo dello sviluppo in serie, e tutti conducono alla risoluzione di un sistema di equazioni lineari. Fra questi è da preferire, e non solo per l'eleganza dell'impostazione e per la razionalità del metodo, il procedimento di Multhopp: è questo senz'altro il procedimento più valido di risoluzione del problema della linea portante, ed impiegabile almeno nella fase di progetto preliminare dell'ala.

4.3.3 Metodo di Multhopp

Le equazioni da risolvere sono le (4.145) e (4.146). Γ deve essere una funzione continua, nulla agli estremi dell'ala, positiva per α positivo. Passando a variabili adimensionali si pone (Cap. 1)

$$\gamma = \gamma(\eta) = \frac{\Gamma}{bV_\infty} = \frac{cC_l}{2b} \quad \eta = \frac{y}{b/2} = \cos \theta \quad (4.157)$$

e si assume

$$\gamma = \sum_{\mu=1}^m a_\mu \sin(\mu\theta) \quad (4.158)$$

I coefficienti a_μ si determinano dalla relazione

$$a_\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(\theta) \sin(\mu\theta) d\theta \quad (4.159)$$

Multhopp ha sviluppato la formula di quadratura, simile al meccanismo di quadratura di Gauss,

$$\int_{-1}^{+1} f(\eta) d\eta = \frac{\pi}{m+1} \sum_{n=1}^m f(\eta_n) \sin \theta_n \quad (4.160)$$

dove $\theta_n = \frac{n\pi}{m+1}$ e $\eta_n = \cos\left(\frac{n\pi}{m+1}\right)$. La (4.159) può essere integrata mediante la (4.160), e si ottiene

$$a_\mu = \frac{2}{m+1} \sum_{n=1}^m \gamma(\theta_n) \sin(\mu\theta_n) \quad (4.161)$$

e sostituendo la (4.161) nella (4.158), con $\gamma_n = \gamma(\theta_n)$, si ha

$$\gamma(\theta) = \frac{2}{m+1} \sum_{n=1}^m \gamma_n \sum_{\mu=1}^m \sin(\mu\theta_n) \sin(\mu\theta) \quad (4.162)$$

La (4.162) dice che è possibile esprimere la circolazione γ in funzione dei valori γ assunti alle stazioni $\eta_n = \cos \frac{n\pi}{m+1}$, corrispondenti alle $m+1$ parti in cui si è divisa l'ala. L'angolo di incidenza indotta si scrive

$$\alpha_i = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{d\gamma}{d\eta'} \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{d\gamma}{d\theta'} \frac{d\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta} \quad (4.163)$$

Dalla (4.162) si ha

$$\frac{d\gamma}{d\theta} = \frac{2}{m+1} \sum_{n=1}^m \gamma_n \sum_{\mu=1}^m \mu \sin(\mu\theta_n) \cos(\mu\theta) \quad (4.164)$$

ed essendo

$$\int_0^\pi \frac{\cos(n\theta')}{\cos\theta' - \cos\theta} d\theta' = \pi \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}$$

si ha

$$\alpha_{i\nu} = \frac{1}{m+1} \sum_{n=1}^m \gamma_n \sum_{\mu=1}^m \frac{\mu \sin(\mu\theta_n) \sin(\mu\theta_\nu)}{\sin\theta_\nu} \quad (4.165)$$

Ponendo

$$\left. \begin{aligned} b_{\nu\nu} &= \frac{1}{(m+1) \sin\theta_\nu} \sum_{\mu=1}^m \mu \sin^2(\mu\theta_\nu) \\ b_{\nu n} &= -\frac{1}{(m+1) \sin\theta_\nu} \sum_{\mu=1}^m \mu \sin(\mu\theta_n) \sin(\mu\theta_\nu) \end{aligned} \right\} \quad (4.166)$$

la (4.163) diventa

$$\alpha_{i\nu} = b_{\nu\nu} \gamma_\nu - \left(\sum_{n=1}^m b_{\nu n} \gamma_n \right)^* \quad (4.167)$$

e l'asterisco indica che nella sommatoria si esclude il valore $n = \nu$.

Le sommatorie a secondo membro delle (4.166) possono scriversi

$$\sum_{\mu=1}^m \mu \sin^2(\mu\theta_\nu) = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^m \mu [1 - \cos^2(\mu\theta_\nu)] \quad (4.168)$$

$$\sum_{\mu=1}^m \mu \sin(\mu\theta_n) \sin(\mu\theta_\nu) = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^m \mu \left\{ \cos[\mu(\theta_n - \theta_\nu)] - \cos[\mu(\theta_n + \theta_\nu)] \right\} \quad (4.169)$$

Dall'uguaglianza

$$\sum_{\mu=1}^m \mu \cos(\mu x) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\mu=1}^m \mu e^{i\mu x} \right\}$$

dove Re è la parte reale del numero complesso; posto $z = e^{ix}$, si ha

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^m \mu \cos(\mu x) &= \operatorname{Re} \left\{ z \frac{d}{dz} \sum_{\mu=1}^m z^\mu \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{mz^{m+1} - (m+1)z^m + 1}{z + \frac{1}{z} - 2} \right\} = \\ &= \frac{m \cos[(m+1)x] - (m+1) \cos(\mu x) + 1}{2(\cos x - 1)} \end{aligned} \quad (4.170)$$

Tenendo conto della (4.168), (4.169), (4.170) e delle relazioni trigonometriche

$$\begin{aligned} \sin[(m+1)(\theta_n + \theta_\nu)] &= \sin[(m+1)(\theta_n - \theta_\nu)] = 0 \\ \cos[(m+1)(\theta_n + \theta_\nu)] &= \cos[(m+1)(\theta_n - \theta_\nu)] = (-1)^{n-\nu} \end{aligned}$$

le (4.166) diventano

$$b_{\nu\nu} = \frac{m+1}{4 \sin\theta_\nu} \quad ; \quad b_{\nu n} = \frac{\sin\theta_n}{(\cos\theta_n - \cos\theta_\nu)^2} \frac{1 - (-1)^{n-\nu}}{2(m+1)}$$

oppure

$$\begin{cases} b_{\nu\nu} = \frac{m+1}{4 \sin \theta_\nu} \\ b_{\nu n} = \frac{\sin \theta_n}{(m+1)(\cos \theta_n - \cos \theta_\nu)^2} & \text{per } |n - \nu| = 1, 3, 5, \dots \\ b_{\nu n} = 0 & \text{per } |n - \nu| = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (4.171)$$

Dalle (4.171) si osserva che, una volta scelto il numero dei punti, $b_{\nu\nu}$ e $b_{\nu n}$ sono delle costanti che si possono facilmente calcolare. Ricordando che

$$\gamma_\nu = \frac{\Gamma_\nu}{bV_\infty} = \frac{c_\nu(C_{l\alpha})_\nu}{2b}(\alpha_\nu - \alpha_{i\nu})$$

dalla (4.167) e ponendo

$$b_\nu = b_{\nu\nu} + \frac{2b}{c_\nu(C_{l\alpha})_\nu}$$

si ricava finalmente il sistema fondamentale

$$b_\nu \gamma_\nu = \alpha_\nu + \left(\sum_{n=1}^m b_{\nu n} \gamma_n \right)^* \quad (4.172)$$

di m equazioni in m incognite.

Essendo $b_{\nu n} = 0$ per $|n - \nu|$ pari, il sistema fornisce i valori di γ_ν con ν dispari a mezzo dei valori di γ_n con n pari ed inversamente. Multhopp suggerisce, allora, un procedimento di iterazione: partendo da valori plausibili di γ_ν^0 per ν pari si ricavano i valori di γ_ν^1 per ν dispari; da questi si deducono i γ_ν^1 per ν pari e da questi i γ_ν^2 per ν dispari, e così. Ad esempio, come approssimazione zero per valori pari dell'indice per $m = 15$ si potrebbero usare i valori di γ determinati per risoluzione diretta con $m = 9$.

In definitiva il procedimento che si è esposto dettagliatamente è basato sul concetto di esprimere l'angolo di incidenza indotta α_i in determinati punti dell'apertura mediante i valori di γ negli stessi punti, scrivendo tramite i suddetti valori di γ gli integrali definiti che servono al calcolo dell' α_i (quadratura meccanica secondo Gauss).

Multhopp osserva che la migliore scelta dei punti dell'ala in cui determinare la circolazione, e quindi la portanza locale, è di collegarli ai punti di una semicirconferenza ($y = \frac{b}{2} \cos \theta$) che la dividono in parti uguali. I motivi di ciò sono tre:

1. metà dei coefficienti della somma che rappresenta approssimativamente il *downwash* dell'ala è nullo;
2. il sistema dell'equazioni che si ricava può essere calcolato iterativamente;
3. si realizza una concentrazione di punti verso le estremità alari, laddove si verifica una più accentuata variazione della circolazione.

I vantaggi che il metodo di Multhopp presentava rispetto ad altri metodi, in assenza dell'elaboratore elettronico, erano:

- a) i coefficienti delle equazioni, stabilito il numero di punti, sono calcolati una volta per sempre, qualunque sia l'ala cui ci si riferisce (non così i metodi di Lotz e di Glauert);
- b) dovendo risolvere dei sistemi di equazioni tanto vale considerare come incognite le circolazioni o altre grandezze equivalenti, e non i coefficienti dello sviluppo in serie;
- c) quando si desidera un più alto grado di precisione, aumentando il numero dei punti non occorre ripetere tutto il lavoro, come invece succede con il metodo di Glauert.

La formula di quadratura ed il procedimento stesso di Multhopp sono stati ripresi da più studiosi, come, tra gli altri, Weissinger e De Joung, come si vedrà, analizzando i metodi della Superficie Portante Approssimata e lo stesso Multhopp nella formulazione del suo metodo associato alla teoria della superficie portante.

È facile ora trovare i valori dei coefficienti di portanza, resistenza indotta e di rollio. Per il primo è, in generale,

$$C_L S \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 = \int_{-b/2}^{b/2} l \, dy = \int_{-b/2}^{b/2} \rho_\infty V_\infty \Gamma \, dy; \quad \Rightarrow \quad C_L = \mathcal{R} \int_{-1}^{+1} \gamma(\eta) d\eta \quad (4.173)$$

Applicando la formula di quadratura (4.160) si ricava

$$C_L = \frac{\pi \mathcal{R}}{m+1} \sum_{n=1}^m \gamma_n \sin \theta_n \quad (4.174)$$

Per quanto riguarda la resistenza indotta si ha, analogamente,

$$\begin{aligned} C_{Di} &= \mathcal{R} \int_{-1}^1 \gamma(\eta) \alpha_i(\eta) \, d\eta = \frac{\pi \mathcal{R}}{m+1} \sum_{\nu=1}^m \gamma_\nu \alpha_{i\nu} \sin \theta_\nu = \\ &= \frac{\pi \mathcal{R}}{m+1} \sum_{\nu=1}^m \gamma_\nu \left\{ b_{\nu\nu} \gamma_\nu - \left(\sum_{n=1}^m b_{\nu n} \gamma_n \right)^* \right\} \sin \theta_\nu \end{aligned} \quad (4.175)$$

Il coefficiente di momento di rollio si scriverà infine come

$$C_M = \frac{\pi \mathcal{R}}{m+1} \sum_{n=1}^m \gamma_n \sin \theta_n \cos \theta_n \quad (4.176)$$

CARICO SIMMETRICO E CARICO ANTISIMMETRICO

In riferimento alla decomposizione del carico in parte simmetrica (1.16) ed antisimmetrica (1.17) del paragrafo (1.5.1), il sistema (4.172) può essere scisso in due sistemi, il primo, relativo alla distribuzione simmetrica, con $\alpha_\nu = \alpha_{m+1-\nu}$ e $\gamma_\nu = \gamma_{m+1-\nu}$, mentre per il secondo, relativo alla distribuzione antisimmetrica, è $\alpha_\nu = -\alpha_{m+1-\nu}$ e $\gamma_\nu = -\gamma_{m+1-\nu}$. Nel primo caso il sistema assume l'espressione

$$b_\nu \gamma_\nu = \alpha_\nu + \sum_{n=1}^{\frac{m+1}{2}} B_{\nu n} \gamma_n \quad \left(\nu = 1, 2, \dots, \frac{m+1}{2} \right) \quad (4.177)$$

dove $B_{\nu n} = b_{\nu n} + b_{\nu, m+1-\nu}$ e $B_{\nu, \frac{m+1}{2}} = b_{\nu, \frac{m+1}{2}}$, mentre per la distribuzione antisimmetrica il sistema diventa

$$b_\nu \gamma_\nu = \alpha_\nu + \sum_{n=1}^{\frac{m-1}{2}} C_{\nu n} \gamma_n \quad \left(\nu = 1, 2, \dots, \frac{m-1}{2} \right) \quad (4.178)$$

con $C_{\nu n} = b_{\nu n} - b_{\nu, m+1-n}$

Questa decomposizione è utilissima per risolvere in modo molto più efficiente il problema della determinazione del carico, e va sistematicamente applicata. Infatti ci si riduce a determinare separatamente i due diversi carichi sulla semiala dimezzando (all'incirca) il rango dei due sistemi di equazioni rispetto al problema del carico non decomposto: la soluzione dei due sistemi ridotti è molto più rapida della soluzione del sistema non ridotto.

Nel caso di distribuzione simmetrica le (4.174) (4.175) si riducono a

$$C_L = \frac{\pi \mathcal{R}}{m+1} \left(\gamma_{\frac{m+1}{2}} + 2 \sum_{n=1}^{\frac{m-1}{2}} \gamma_n \sin \theta_n \right) \quad (4.179)$$

$$\begin{aligned}
C_{Di} = & \frac{\pi R}{m+1} \left\{ \gamma_{\frac{m+1}{2}} \left(b_{\frac{m+1}{2}, \frac{m+1}{2}} \gamma_{\frac{m+1}{2}} - \sum_{n=1}^{\frac{m+1}{2}} B_{\frac{m+1}{2}, n} \gamma_n \right) + \right. \\
& \left. + 2 \sum_{\nu=1}^{\frac{m-1}{2}} \gamma_{\nu} \left[b_{\nu\nu} \gamma_{\nu} - \left(\sum_{n=1}^{\frac{m+1}{2}} B_{\nu n} \gamma_n \right)^* \right] \sin \theta_{\nu} \right\} \quad (4.180)
\end{aligned}$$

e il coefficiente di momento di rollio è nullo.

CARICO BASICO E CARICO ADDIZIONALE

Si trattano separatamente questi due tipi di carico, entrambi simmetrici.

Carico basico

Si premette che per distribuzioni simmetriche la (4.177) può sempre ricondursi alla forma

$$\alpha_{\nu} = \sum_{n=1}^{\frac{m+1}{2}} a_{\nu n} \gamma_n \quad \nu = 1, 2, \dots, \frac{m+1}{2} \quad (4.181)$$

nella quale gli $a_{\nu n}$ rappresentano i coefficienti di influenza in quanto collegano la circolazione in ogni punto n al downwash in ogni punto ν e sono solo funzioni della geometria dell'ala.

Per semplicità si consideri il caso di quattro punti sulla semiapertura, prendendo cioè $m = 7$: le incognite γ del problema sono quindi 4. Non è possibile comunque ottenere la distribuzione del carico basico su di un'ala svergolata direttamente dalla (4.181), poiché i 4 valori di α_{ν} per ciascuna stazione non sono generalmente noti: infatti non è nota la condizione di portanza nulla dell'ala, in concreto, l' α_{zL} , e così come scritto compaiono 5 incognite. Però i 4 valori di α_{ν} sono collegati fra di loro dalla conoscenza della distribuzione dello svergolamento, e quindi solo una incognita (l' α in una sezione di riferimento) deve aggiungersi alle 4 incognite principali (i 4 carichi).

Per ottenere una quinta equazione si può ricorrere alla (4.179), che dà la portanza totale, in questo caso nulla, in termini dei 4 carichi. Così

$$C_L = \frac{\pi R}{8} \left(\gamma_4 + 2 \sum_{n=1}^3 \gamma_n \sin \theta_n \right) = 0 \quad (4.182)$$

e con la (4.181) si ottiene un sistema di 5 equazioni in 5 incognite:

$$\begin{cases} \gamma_4 + 2 \sum_{n=1}^3 \gamma_n \sin \theta_n = 0 \\ \epsilon_{\nu} + (\alpha_o)_{rif} = \sum_{n=1}^4 a_{\nu n} \gamma_n \quad (\nu = 1, 2, 3, 4) \end{cases} \quad (4.183)$$

Il procedimento si può però semplificare. Quando si uguaglia a zero la (4.182) è possibile esprimere un carico in funzione degli altri tre (le incognite scendono a quattro). D'altra parte, poiché nella sezione di riferimento lo svergolamento ϵ_{ν} è nullo, si può eliminare un'equazione ed un'incognita (l'angolo di riferimento) sottraendo un'equazione dalle rimanenti. Si giunge, così, in definitiva, ad un sistema di 3 equazioni in 3 incognite, la cui forma dipende dalla sezione scelta come riferimento. Se, come è usuale, si prende per riferimento la sezione alla radice, allora è

$$\alpha_{\nu_o} = \alpha_{4_o} + \epsilon_{\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3) \quad (4.184)$$

dove ϵ_{ν} è l'angolo di svergolamento alla stazione ν rispetto alla stazione 4.

Carico addizionale

È possibile ora considerare l'ala formata da profili tutti allo stesso angolo di attacco. Poiché l'intensità del carico addizionale varia direttamente con l'angolo d'attacco, basterà considerare solo angoli d'attacco unitari. L'equazione (4.181) diventa

$$1 = \sum_{n=1}^{\frac{m+1}{2}} a_{\nu n} \frac{\gamma_n}{\alpha} \quad (4.185)$$

e la risoluzione della (4.185) fornisce i valori della circolazione (per radiante) γ_n/α negli $(m+1)/2$ punti scelti sulla semiala.

4.3.4 Risultati della teoria della linea portante

Si riassumono e si discutono qui brevemente i risultati della teoria della linea portante.

COEFFICIENTE DI PORTANZA

Con l'assunzione di Prandtl (4.148) si ottiene, in generale,

$$C_L = \mathcal{R} \int_0^\pi \gamma(\theta) \sin \theta \, d\theta = \frac{\pi}{2} \mathcal{R} a_1 \quad (4.186)$$

Nel caso di ala ellittica, a profilo ed incidenza costanti, si ricava, tenendo conto della (4.155)

$$C_{L\alpha} = \frac{C_{l\alpha}}{1 + \frac{C_{l\alpha}}{\pi \mathcal{R}}} \quad (4.187)$$

e per $C_{l\alpha} = 2\pi$ (profili infinitamente sottili e con piccola curvatura)

$$C_{L\alpha} = 2\pi \frac{\mathcal{R}}{2 + \mathcal{R}} \quad (4.188)$$

Una correzione è stata introdotta da Jones, il quale ha fatto notare esplicitamente come la tridimensionalità dell'ala sviluppa un minor incremento di velocità, e quindi di portanza, di quanto la (4.188) indichi. Il fattore correttivo di Jones è espresso come

$$E = \frac{\text{semiperimetro dell'ala}}{\text{apertura alare}} \quad (4.189)$$

($E > 1$ sempre) e la (4.189) diventa

$$C_{L\alpha} = 2\pi \frac{\mathcal{R}}{2 + E \mathcal{R}} \quad (4.190)$$

L'influenza del tipo di profilo impiegato potrebbe essere introdotta nella (4.190), a partire dalla (4.187) considerando il rapporto $k = C_{l\alpha_{eff}}/2\pi$ tra il valore effettivo del gradiente della retta di portanza del profilo ($C_{l\alpha_{eff}}$) ed il valore teorico (2π), e che è stato riportato nella Tab. 4.3 di (4.2) per diversi tipi di profili della serie NACA. Con tale correzione si viene a tener conto indirettamente anche dell'influenza dello spessore. La (4.190) assume pertanto la forma

$$C_{L\alpha} = 2\pi k \frac{\mathcal{R}}{2k + E \mathcal{R}} \quad (4.191)$$

Per forme in pianta diverse da quella ellittica il valore del $C_{L\alpha}$ dovrà essere valutato caso per caso. In particolare, per un'ala non svergolata basterà risolvere l'equazione (4.185) e calcolare la (4.179) sostituendo alle γ le γ/α ottenute. Per un'ala svergolata occorrerà determinare preliminarmente il carico basico, come descritto precedentemente, e valutare il carico addizionale relativo all'ala (non più svergolata) ad un angolo d'attacco unitario.

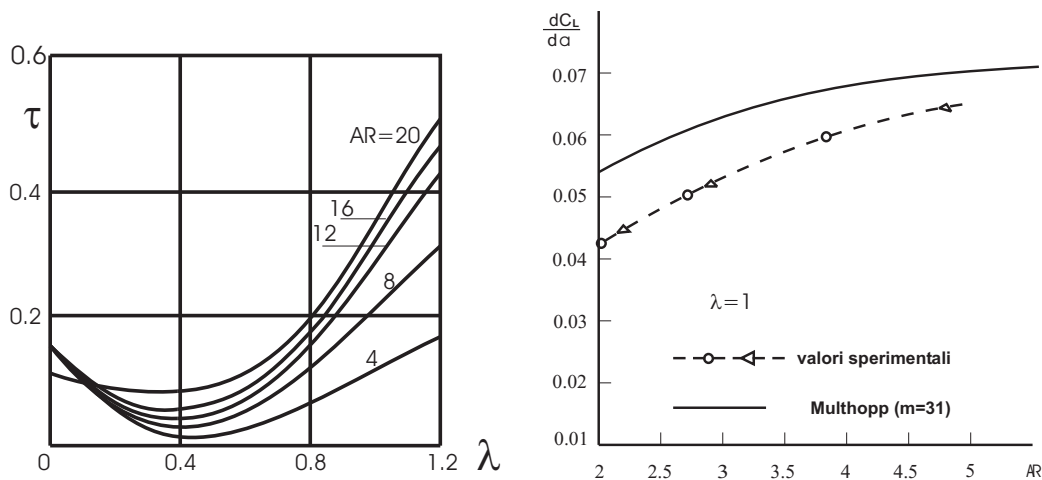


Figura 4.15: Parametro di correzione per il $C_{L\alpha}$ Figura 4.16: Confronto tra i valori teorico e sperimentale per il $C_{L\alpha}$

Per ali rettangolari ed ali rastremate, non svergolate, l'espressione del $C_{L\alpha}$ può ridursi ad una forma del tipo della (4.191) come

$$C_{L\alpha} = 2\pi k \frac{AR}{2k(1 + \tau) + E AR} \quad (4.192)$$

dove il fattore correttivo τ è funzione dell'allungamento e del rapporto di rastremazione, qualitativamente presentato in Fig. 4.15. In Fig. 4.16 si riporta un confronto tra valore teorico e valore sperimentale per il $C_{L\alpha}$ al variare dell'allungamento.

COEFFICIENTE DI RESISTENZA INDOTTA

È

$$C_{Di} = AR \int_0^\pi \gamma(\theta) \alpha_i(\theta) \sin \theta d\theta \quad (4.193)$$

Nell'ambito della teoria di Prandtl, tenendo conto della (4.149) si ha

$$C_{Di} = \frac{AR}{2} \int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^2 \sin^2(n\theta) d\theta = \frac{\pi AR}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^2 \quad (4.194)$$

Se ne conclude che la minima resistenza indotta (secondo la Teoria di Prandtl) corrisponde alla distribuzione ellittica della portanza, nel qual caso la (4.194), per la (4.155), diventa

$$C_{Di} = \frac{\pi AR}{4} a_1^2 = \frac{C_L^2}{\pi AR} \quad (4.195)$$

Per distribuzioni della circolazione diversa da quella ellittica si ha invece

$$C_{Di} = \frac{K C_L^2}{\pi AR} \quad (4.196)$$

essendo $K (> 1)$ un parametro dipende dalla forma in pianta (in particolare da allungamento e rapporto di rastremazione, Fig. 4.17, e, come si vedrà in seguito, dalla freccia). La (4.196) è equivalente alla (1.23), con opposto significato dei parametri k_m (il fattore di Oswald) e K (reciproco del fattore di Oswald).

Si nota esplicitamente che ponendo $L = W$ (il peso del velivolo), e se q è la pressione dinamica di riferimento, l'espressione della resistenza indotta diventa

$$D_i = \frac{K W^2}{\pi q b^2}$$

(relazione equivalente alla (1.21) e si evidenzia come la resistenza indotta sia praticamente funzione dell'apertura piuttosto che della superficie alare.

Spesso si scrive la (4.196) nella forma

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi(eb)^2/S} \quad (4.197)$$

e l'apertura ridotta (eb) viene chiamata apertura effettiva, mentre $(eb)^2/S$ prende il nome di allungamento effettivo. L'apertura alare effettiva dipende, ovviamente, dalla forma delle estremità alari nella vista frontale, dipendendo da questa la posizione del centro del vortice di estremità, ed inoltre la possibilità (maggiore o minore) che le schiere vorticosi subiscano il *rolling-up* nelle immediate vicinanze delle ali⁵.

Si riporta in Fig. 4.18 la polare per tre ali con $AR = 3$ e diverse forme d'estremità (nella vista frontale). Forme d'estremità aguzze (*sharp*), del tipo C o B, mostrano un'apertura effettiva

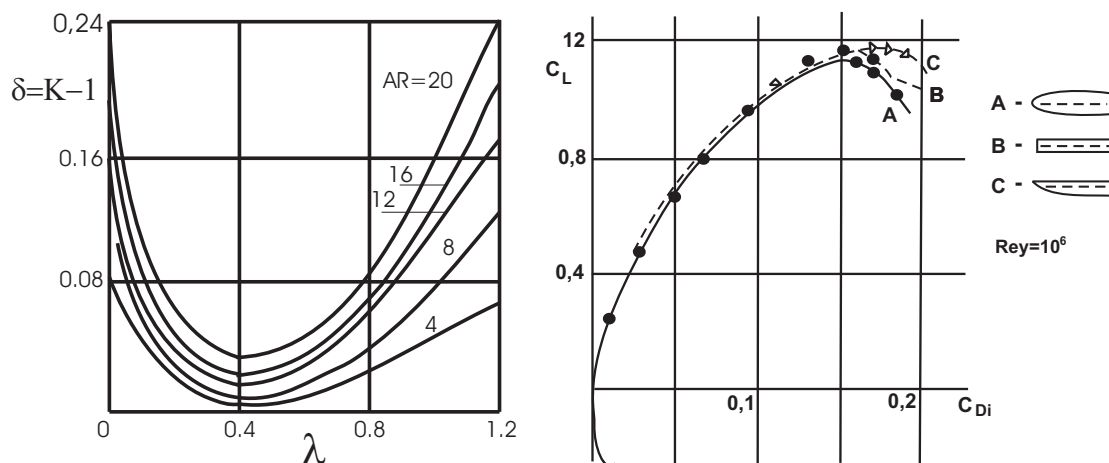


Figura 4.17: Fattore di correzione per la resistenza indotta dell'ala rastremata sulla caratteristica aerodinamica

maggiore di quelle arrotondate (del tipo A), mentre per mantenere i vortici d'estremità lontani, gli uni dagli altri, quanto più a valle possibile è necessario utilizzare forme non troppo sbazzate. Ad esempio il tipo di estremità ellittica si mostra meno efficace della forma rettangolare.

L'influenza delle taniche di estremità si può riportare ad un incremento dell'apertura alare e ad un "effetto schermo": esperienze indicano che risultano effettive ai fini dell'incremento dell'apertura alare solo le metà dei diametri delle taniche, avendosi un aumento netto dell'allungamento

$$\frac{\Delta AR}{AR} = 0,5 \frac{\Delta b}{b} \quad (4.198)$$

dove $\Delta b = d$, essendo d il diametro della tanica. La eventuale diminuzione di resistenza indotta potrebbe comportare, però, di conseguenza un aumento della resistenza parassita (dovuta all'interferenza negli spigoli tra taniche ed estremità alari).

Per ali svergolate Glauert fornisce per il coefficiente di resistenza indotta l'espressione generale

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi AR u} + C_L(C_{l\alpha} \epsilon)v + (C_{l\alpha} \epsilon)^2 w \quad (4.199)$$

dove ϵ è lo svergolamento all'estremità alare, ed rappresentando

u l'effetto della forma in pianta sulla resistenza indotta;

v il fattore di resistenza indotta dovuto ad uno svergolamento lineare quando $C_L \neq 0$;

⁵Si ricordi che nella teoria della linea portante è nullo il *rolling-up* a valle dell'ala

w il fattore di resistenza indotta dovuto ad uno svergolamento lineare quando $C_L = 0$.

I fattori di resistenza u, v, w sono funzioni, ovviamente, dell'allungamento, del rapporto di rastremazione, della freccia e del numero di Mach, Fig. 4.19.

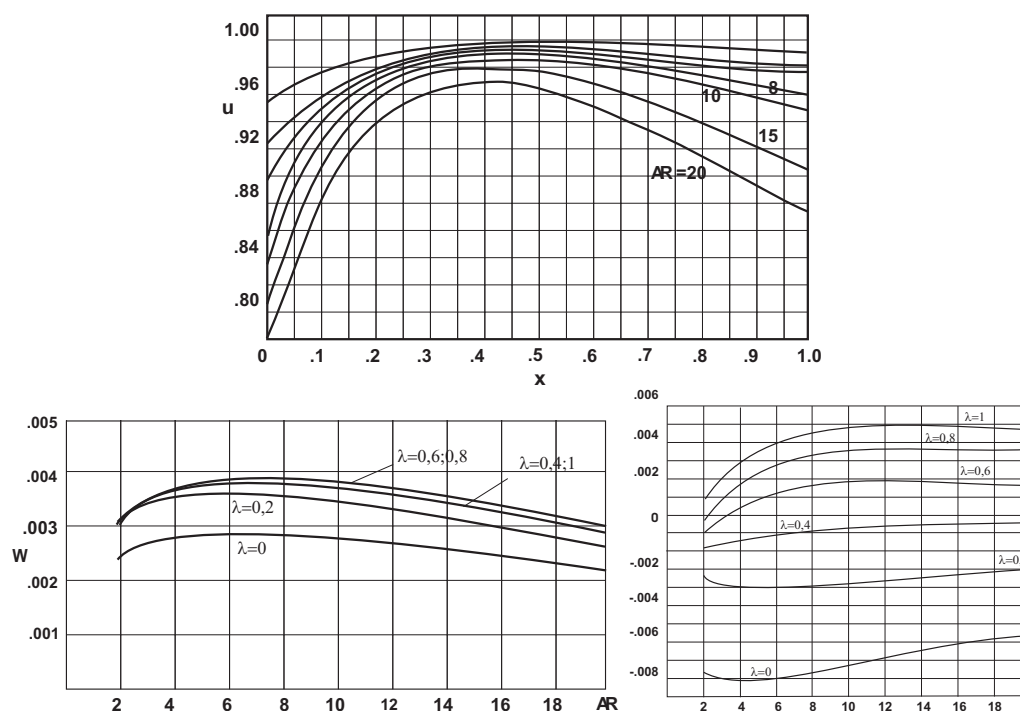


Figura 4.19: Fattori di resistenza per la polare indotta

4.3.5 Considerazioni su ala ellittica e carico ellittico

Con la dicitura “ala a forma in pianta ellittica” si intende un’ala (diritta) la cui distribuzione di corde $c(y)$ lungo l’apertura obbedisce alla legge

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad (4.200)$$

ovvero

$$c(y) = c_r \sqrt{1 - \eta^2} \quad , \quad \eta = y/b/2 \quad (4.201)$$

Le (4.200), (4.201) descrivono un’ellisse i cui diametri sono l’apertura alare b e la corda in mezzaria: si fa comunque presente che velivoli con distribuzione di corde di tipo ellittico non presentano in genere un’ellisse come forma in pianta, Fig. 4.20.

Se

- le corde di tutti i profili sono complanari (ala non svergolata geometricamente),
- tutti i profili dell’ala, ancorché di corda di lunghezza differente, hanno la stessa forma (ala non svergolata aerodinamicamente),
- le condizioni di volo sono tali da assicurare che il valore del numero di Mach di volo è basso in misura tale da garantire piccoli effetti di comprimibilità,
- si trascurano gli effetti della viscosità,



Figura 4.20: Forma in pianta di tipo ellittico

allora un risultato fondamentale è che la distribuzione di carico è anch'essa ellittica, [1], pag. 260:

$$\gamma = a_1 \sqrt{1 - \eta^2} \quad (4.202)$$

a_1 è una costante adimensionale, funzione della geometria della pianta ellittica (e dunque della corda alla radice e dell'apertura) e della caratteristica aerodinamica del profilo.

Un'ala ellittica non svergolata nè geometricamente nè aerodinamicamente realizza dunque un carico ellittico, un carico cioè che ha lo stesso andamento delle corde: quindi il coefficiente di portanza di ciascun profilo dell'ala è lo stesso. Inoltre la velocità indotta sulla linea portante è costante.

La soluzione dell'ala ellittica, una classica ed importante soluzione della Fisica Matematica, è basilare in Aerodinamica Applicata. Essa ha due proprietà notevolissime, le seguenti.

- La resistenza indotta è minima: a parità di allungamento un'ala a forma in pianta non ellittica (non svergolata) avrà resistenza indotta maggiore;
- Il carico alare relativo ad una forma in pianta qualunque è una perturbazione, più o meno forte, del carico ellittico relativo all'ala ellittica di uguale apertura e superficie (ala ellittica equivalente): si può parlare di proprietà di attrazione del carico dell'ala ellittica rispetto ad una modifica della geometria (ad esempio, un cambiamento della forma in pianta o l'inserimento di una legge di svergolamento)⁶.

Comunque la forma in pianta ellittica ha alcuni inconvenienti importanti (ad esempio, la distribuzione ellittica del carico può essere critica in condizioni prossime allo stallo, ed inoltre i costi costruttivi sono maggiori rispetto a forme in pianta con i bordi dell'ala rettilinei). Come detto all'inizio nel paragrafo (1.5.1), il progettista aerodinamico deve in genere ricorrere a dei compromessi per ottenere una distribuzione di carico che sia soddisfacente dal punto di vista della resistenza indotta e di tutti gli altri aspetti aerodinamici dell'ala e dei profili per ottenere alla fine una distribuzione di carico prossima a quella ellittica per la maggior parte dell'apertura alare ed escluse le estremità pur non essendo la forma in pianta ellittica (come mostrato, per un caso importante, in Fig. 4.21). In particolare, si può operare su forma in pianta (allungamento, rastremazione), svergolamento, scelta dei profili lungo l'apertura (curvatura, spessore), disegno dell'estremità alare.



Figura 4.21: Schema del carico aerodinamico in crociera per l'ala del Boeing 747

⁶Nel modello di Prandtl il meccanismo di attrazione che esercita il carico ellittico può essere spiegato se si va a vedere come si modifica la vorticità libera a fronte della modifica della geometria.

4.4 L'ala a freccia: la teoria della superficie portante approssimata

4.4.1 Impostazione della teoria

L'estensione della teoria di Prandtl al caso di ali a freccia viene comunemente indicata, nella letteratura, come teoria della superficie portante approssimata. In effetti il modello che si assume è il seguente.

1. L'ala si sostituisce con un unico vortice aderente, disposto lungo la linea dei fuochi (a freccia), con circolazione variabile.
2. Contribuiscono al *downwash* nel generico punto del campo sia il vortice aderente a freccia (come esige il teorema di Munk), sia la schiera dei vortici liberi.
3. La condizione al limite del flusso tangenziale viene realizzata nei limiti della Teoria del Punto Neutro Posteriore, con considerazioni, cioè, di flusso bidimensionale.

Si vede quindi come, anche in questo caso, la teoria fa prevalere l'influenza dell'apertura rispetto a quella della corda e consente pertanto di valutare le caratteristiche aerodinamiche delle ali a freccia con grande allungamento, senza forti variazioni della geometria (discontinuità) lungo l'apertura, con la limitazione iniziale che le linee dei fuochi siano rettilinee. Si osservi, però, che per il calcolo della distribuzione del carico lungo l'apertura e della resistenza indotta, del centro di pressione e delle altre caratteristiche la teoria della superficie portante approssimata si fa ancor oggi preferire, nella pratica ingegneristica, a metodi di calcolo più complessi (teoria della superficie portante esatta), per ali con allungamento $AR \geq 2$, rastremazioni non spinte ($\lambda \geq .2$) e frecce non eccessive ($\Lambda \leq 45^\circ$).

4.4.2 Sviluppo delle equazioni

Il procedimento, come per la Teoria di Prandtl, inizia ricavando l'equazione che collega il *downwash* del generico punto del campo all'incognita distribuzione di circolazione (o di carico); si impone poi la condizione al limite nel punto neutro posteriore di ogni sezione dell'ala e il problema si riduce alla risoluzione matematica dell'equazione ottenuta.

DOWNWASH INDOTTO DALLA SCHIERA DEI VORTICI LIBERI

Con riferimento alla Fig. 4.22 il *downwash* nel punto $P(x, y)$ del piano è fornito da

$$dw(x, y) = \frac{d\Gamma}{4\pi h} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \quad (4.203)$$

ed essendo

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= \frac{x - \bar{x}}{[(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2]^{1/2}} \\ \cos \theta_2 &= \frac{1}{h} \\ h &= \frac{y - \bar{y}}{|\bar{y}| \operatorname{tg} \Lambda} \\ \bar{x} &= |\bar{y}| \operatorname{tg} \Lambda \end{aligned}$$

sostituendo ed integrando si ottiene il *downwash* nel punto P indotto dalla schiera di vortici liberi:

$$w(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{1}{y - \bar{y}} \left[1 + \frac{x - |\bar{y}| \operatorname{tg} \Lambda}{\sqrt{(x - |\bar{y}| \operatorname{tg} \Lambda)^2 + (y - \bar{y})^2}} \right] \Gamma'(\bar{y}) d\bar{y} \quad (4.204)$$

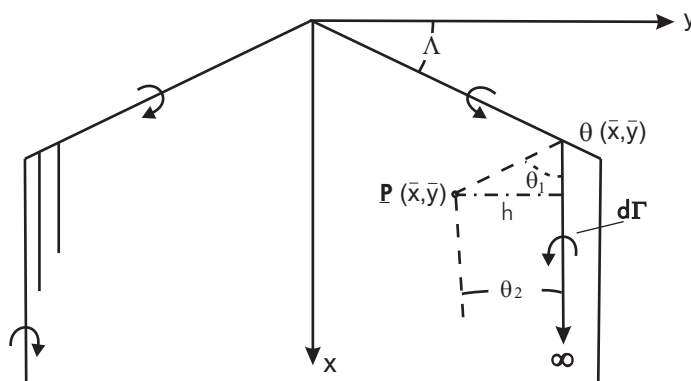


Figura 4.22: Ala a freccia: induzione della vorticità libera

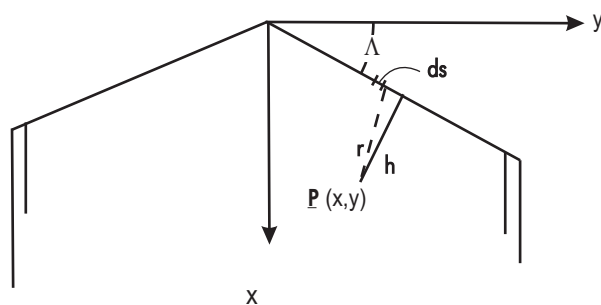


Figura 4.23: Ala a freccia: induzione del vortice aderente

DOWNWASH INDOTTO DAL VORTICE ADERENTE

Con riferimento e con le notazioni della Fig. 4.23 si ha notoriamente

$$dw(x, y) = \frac{\Gamma h ds}{4\pi r^3} \quad (4.205)$$

Ora, avendosi

$$s = \frac{\bar{y}}{\cos \Lambda} \quad r = \sqrt{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2}$$

ed inoltre per la semiala destra e per quella sinistra, rispettivamente,

$$h = x \cos \Lambda - y \sin \Lambda \quad h = x \cos \Lambda + y \sin \Lambda$$

sostituendo nella (4.205) ed integrando si ottiene

$$w(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^0 \frac{(x \cos \Lambda + y \sin \Lambda) \Gamma(\bar{y}) d\bar{y}}{\cos \Lambda [(x - |\bar{y}| \tan \Lambda)^2 + (y - \bar{y})^2]^{3/2}} + \frac{1}{4\pi} \int_0^{b/2} \frac{(x \cos \Lambda - y \sin \Lambda) \Gamma(\bar{y}) d\bar{y}}{\cos \Lambda [(x - |\bar{y}| \tan \Lambda)^2 + (y - \bar{y})^2]^{3/2}} \quad (4.206)$$

IL DOWNWASH TOTALE

Il *downwash* totale nel punto $P(x, y)$ sarà dato dalla somma delle (4.204) e (4.206). Gli integrali nella (4.206), risolti per parti, assumono la forma della (4.207), ed essendo $\Gamma(b/2) = 0$ si avrà

$$\begin{aligned}
 w(x, y) = & \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{-b/2}^{b/2} \frac{1}{y - \bar{y}} \left[1 + \frac{x - |\bar{y}|tg\Lambda}{\sqrt{(x - |\bar{y}|tg\Lambda)^2 + (y - \bar{y})^2}} \right] \Gamma'(\bar{y}) d\bar{y} + \right. \\
 & - \int_{-b/2}^0 \frac{\left(\frac{\bar{y}}{\cos^2 \Lambda} + xtg\Lambda - y \right) \Gamma'(\bar{y}) d\bar{y}}{(x + y t g \Lambda) \sqrt{(x + \bar{y} t g \Lambda)^2 + (y - \bar{y})^2}} + \\
 & \left. - \int_0^{b/2} \frac{\left(\frac{\bar{y}}{\cos^2 \Lambda} - xtg\Lambda - y \right) \Gamma'(\bar{y}) d\bar{y}}{(x - y t g \Lambda) \sqrt{(x - \bar{y} t g \Lambda)^2 + (y - \bar{y})^2}} + \frac{2 t g \Lambda \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 - y^2 t g^2 \Lambda} \Gamma(0) \right\} \quad (4.207)
 \end{aligned}$$

Come mostrato in [31], nella (4.207) la presenza del punto singolare $y = \bar{y}$, non comporta difficoltà, ottenendosi sempre un valore finito dopo l'integrazione, e si ha

$$\begin{aligned}
 w(x, y) = & \frac{2}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\Gamma'(\bar{y}) d\bar{y}}{y - \bar{y}} + \\
 & + \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^0 \left[\frac{\sqrt{(x + \bar{y} t g \Lambda)^2 + (y - \bar{y})^2}}{(x + y t g \Lambda)(y - \bar{y})} \frac{1}{y - \bar{y}} + \frac{2 t g \Lambda \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 - y^2 t g^2 \Lambda} \right] \Gamma(\bar{y}) d\bar{y} \quad (4.208) \\
 & + \frac{1}{4\pi} \int_0^{b/2} \left[\frac{\sqrt{(x - \bar{y} t g \Lambda)^2 + (y - \bar{y})^2}}{(x - y t g \Lambda)(y - \bar{y})} - \frac{1}{y - \bar{y}} \right] \Gamma(\bar{y}) d\bar{y}
 \end{aligned}$$

Per quanto detto prima la (4.208) deve essere calcolata nei punti di controllo, posti, per ogni stazione y , a $3/4$ della corda, per i quali

$$x = \frac{c}{2} + |y| t g \Lambda \quad (4.209)$$

Con l'usueta adimensionalizzazione delle variabili

$$\frac{y}{b/2} = \eta \quad ; \quad \gamma = \frac{\Gamma}{bV_\infty} \quad (4.210)$$

si può verificare, [31], come, tenendo conto delle (4.209) e (4.210), la (4.208) assume la forma

$$\left(\frac{w}{V_\infty} \right)_\eta = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma'(\bar{\eta}) d\bar{\eta}}{\eta - \bar{\eta}} + \frac{b/c}{2\pi} \int_{-1}^1 L(\eta, \bar{\eta}) \gamma'(\bar{\eta}) d\bar{\eta} \quad (4.211)$$

dove $L(\eta, \bar{\eta})$ è una funzione della geometria dell'ala (tramite le grandezze $(b/c$ e $tg\Lambda)$, nonché delle ascisse η ed $\bar{\eta}$).

La risoluzione della (4.211) viene ottenuta con la stessa formula di quadratura e scelta dei punti lungo l'apertura del metodo di Multhopp (cf. 4.3.2), e conduce ad una formula finale

$$\alpha_\nu = \sum_{n=1}^m a_{\nu n} \gamma_n \quad \nu = 1, \dots, m,$$

del tutto analoga a quella (4.181) per la teoria della linea portante. Anche qui è conveniente distinguere il caso simmetrico da quello antisimmetrico; per il primo caso si ha

$$\alpha_\nu = \sum_{n=1}^{(m+1)/2} a_{\nu n} \gamma_n \quad \left(\nu = 1, 2, \dots, \frac{m+1}{2} \right) \quad (4.212)$$

ed i coefficienti di influenza a_{vn} ed \underline{a}_{vn} sono funzioni univoche della geometria dell'ala nei punti di controllo lungo l'apertura scelti nel modo citato.

Il procedimento ora sviluppato viene indicato nella letteratura come metodo di Weissinger, [32], mentre lo sviluppo numerico e l'espressione (4.212) sono risultati dello studio di De Young nel cui citato lavoro sono riportati i valori dei coefficienti \underline{a}_{vn} per $m = 7$ e per ali a corda variabile linearmente lungo l'apertura.

In modo del tutto uguale a quanto detto nel paragrafo (4.3.3) è possibile distinguere (e calcolare) il carico basico da quello addizionale.

4.4.3 Risultati della teoria della superficie portante approssimata

L'espressione del coefficiente di portanza è ovviamente la stessa (4.174) ricavata col metodo di Multhopp

$$C_L = \frac{\pi AR}{m+1} \sum_{n=1}^m \gamma_n \sin \theta_n$$

mentre si possono ripetere le stesse considerazioni per il calcolo del gradiente della retta di portanza.

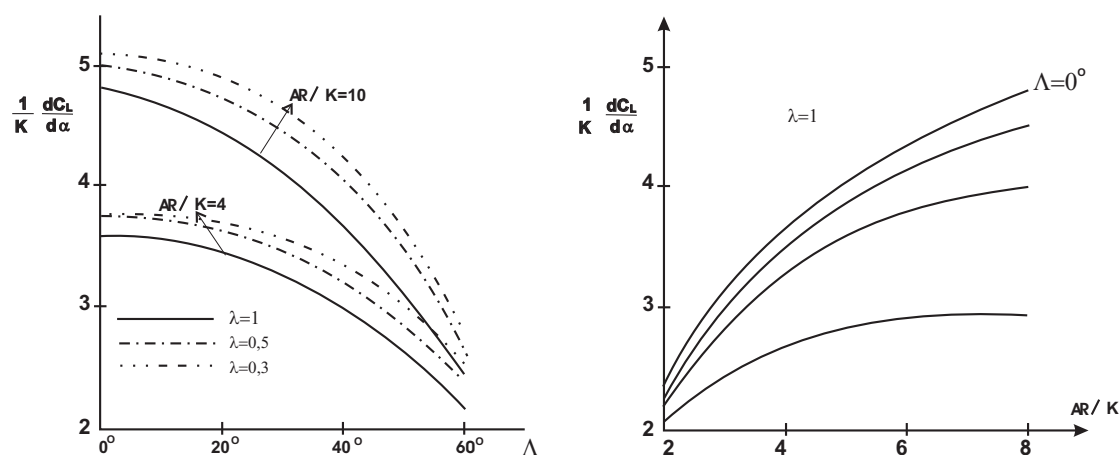


Figura 4.24: Effetti di angolo di freccia, rastremazione ed allungamento sul $C_{L\alpha}$

In Fig. 4.24 sono riportati i valori del $dC_L/d\alpha$ in funzione dell'angolo di freccia, dell'allungamento e del rapporto rastremazione (nei diagrammi il parametro k che compare è quello già introdotto e discusso precedentemente uguale rapporto del valore effettivo del $dC_l/d\alpha$ del profilo impiegato al valore teorico 2π). È facile osservare che l'effetto della freccia è di ridurre, per ogni AR e λ , il valore del gradiente della retta di portanza dell'ala, e l'effetto si esalta con la freccia e si riduce col diminuire dell'allungamento e del rapporto di rastremazione.

La Fig. 4.25 riguarda la distribuzione del carico basico, riferito al prodotto $\epsilon \bar{c}$ tra l'angolo di svergolamento d'estremità ϵ e la corda media geometrica $\bar{c} = \frac{S}{b}$. Si vede come la freccia ha scarsa influenza sul carico basico; comunque si ha una leggera diminuzione del carico basico col crescere della freccia e le variazioni si esaltano con l'aumentare dell'allungamento. A pari freccia, poi, il carico basico diminuisce col diminuire dell'allungamento, mentre la rastremazione ha scarsa influenza, tranne che verso le estremità alari, dove le variazioni sono più marcate e si esaltano con la freccia e con l'aumentare dell'allungamento.

In Fig. 4.26 viene mostrato l'effetto della freccia sulla distribuzione del carico addizionale: si constata uno spostamento del carico verso le estremità alari, tanto più accentuato quanto maggiore è la freccia. Tale inconveniente viene ad essere ridotto o eliminato con la rastremazione dell'ala, o, come è ovvio, con l'opportuno svergolamento delle estremità.

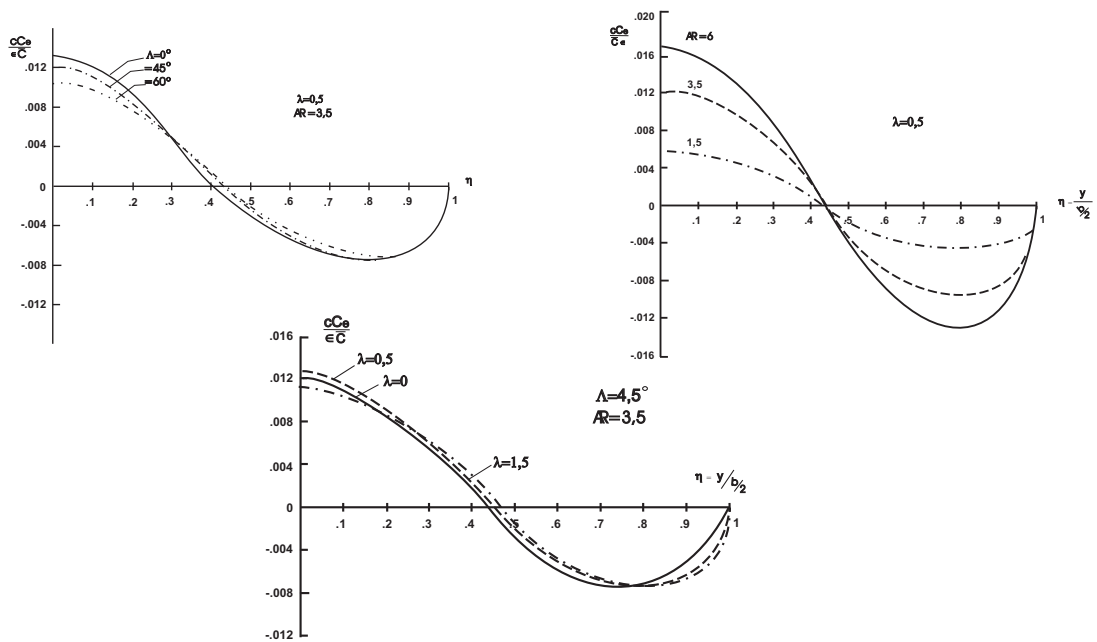


Figura 4.25: Effetto della freccia sul carico basico

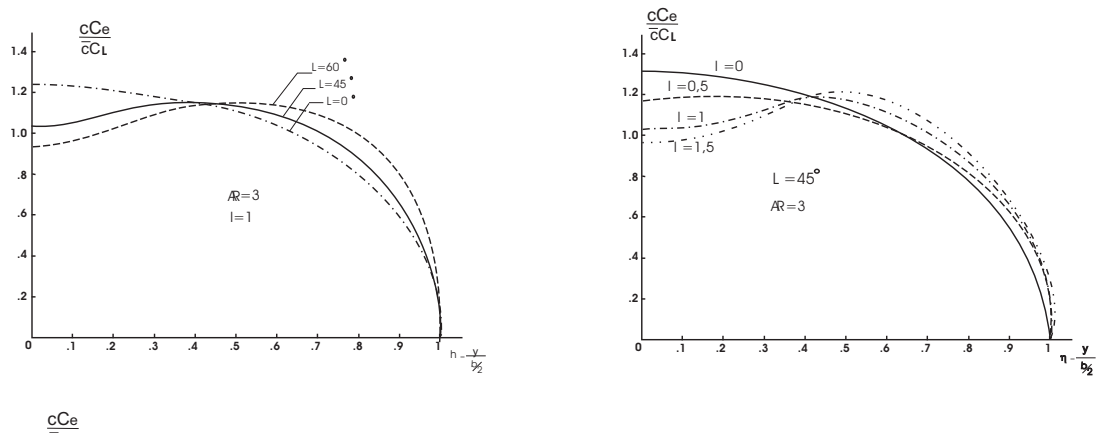


Figura 4.26: Effetto di freccia e rastremazione sul carico addizionale

Per il calcolo del coefficiente di resistenza indotta vale la formula analoga a quella ottenuta col metodo di Multhopp:

$$C_{Di} = \frac{\pi AR}{m+1} \sum_{\nu=1}^m \gamma_{\nu} \alpha_{i\nu} \sin \theta_{\nu} \quad (4.213)$$

C'è, però, da osservare che in questo caso, diversamente dalla Teoria di Prandtl, la forma in pianta dell'ala "esiste", in quanto è stato necessario introdurre il punto neutro posteriore: occorre quindi indicare un punto in cui valutare il *downwash*. Per un vortice (aderente) rettilineo l'angolo di incidenza indotta viene valutato ad 1/4 della corda, ma per il vortice aderente a freccia una tale valutazione non è più possibile. Si tiene allora conto del noto risultato di [33], secondo cui la resistenza indotta di un'ala può essere calcolata considerando per angolo indotto la metà di quello che si ha all'infinito a valle, dovuto solo ai vortici liberi, e quindi potrà scriversi per $\alpha_{i\nu}$

$$\alpha_{i\nu} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\gamma'(\theta) d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_{\nu}} \right\} = b_{\nu\nu} \gamma_{\nu} - \sum_{n=1}^m b_{\nu n} \gamma_n \quad (4.214)$$

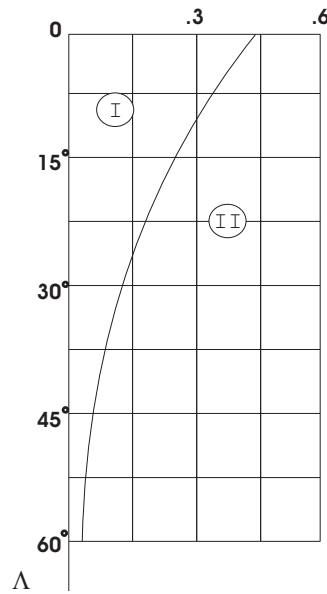


Figura 4.27: Realizzazione del carico ellittico mediante combinazione di freccia e rastremazione

ed il calcolo viene fatto con un procedimento uguale a quello mostrato per la linea portante.

L'equazione (4.213) assume perciò la forma

$$C_{Di} = \frac{\pi \mathcal{AR}}{m+1} \sum_{\nu=1}^m \gamma_{\nu} \left(b_{\nu\nu} \gamma_{\nu} - \sum_{n=1}^m b_{\nu n} \gamma_n \right) \sin \theta_{\nu}$$

del tutto uguale a quella (4.175) ottenuta con il metodo di Multhopp. Ovviamente vale sempre il risultato che alla distribuzione ellittica corrisponde il minimo della resistenza indotta; una distribuzione ellittica (più precisamente quasi ellittica) può ottenersi, come si è visto, rastremando le ali; la rastremazione necessaria sarà, per quanto detto, funzione dell'angolo di freccia. Nella Fig. 4.27 è riportato l'andamento del rapporto di rastremazione λ in funzione dell'angolo di freccia tale da realizzare una distribuzione quasi ellittica, indipendentemente dall'allungamento.

Nella stessa figura si distingue la regione (II), caratterizzata da spostamenti del carico verso le estremità all'aumentare dell'allungamento, dalla regione (I), per la quale il carico si sposta verso la radice con l'aumentare dell'allungamento.

Il parametro u , (cui è legata l'apertura ridotta), definito, cioè, da

$$u = \frac{1}{\pi \mathcal{AR}} \frac{C_L^2}{C_{Di}} \quad (4.215)$$

è l'unico parametro importante, ai fini della resistenza indotta, per le ali non svergolate. Per le ali svergolate varrà la già nota relazione di Glauert (4.199)

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi \mathcal{AR} u} + C_L (C_{l\alpha} \epsilon) v + (C_{l\alpha} \epsilon)^2 w \quad (4.216)$$

nella quale i fattori u, v, w , sono funzioni di $\mathcal{AR}, \lambda, \Lambda$ (si ripropone il significato dei tre fattori di resistenza indotta: u rappresenta l'effetto della forma in pianta, v e w rappresentano l'effetto di uno svergolamento lineare quando $C_L \neq 0$ e $C_L = 0$, rispettivamente).

Per $\lambda > 0.4$ l'effetto della freccia è di ridurre il valore di u dal valore unitario e la riduzione è tanto più forte quanto più grande è la freccia e maggiore è l'allungamento. Per valori minori del rapporto di rastremazione l'effetto della freccia si riduce in modo significativo. Si riportano a titolo di esempio la Fig. 4.28 per $\lambda < 0.4$ e la Fig. 4.29 per $\lambda = 1$. Le curve sono facilmente interpretabili.

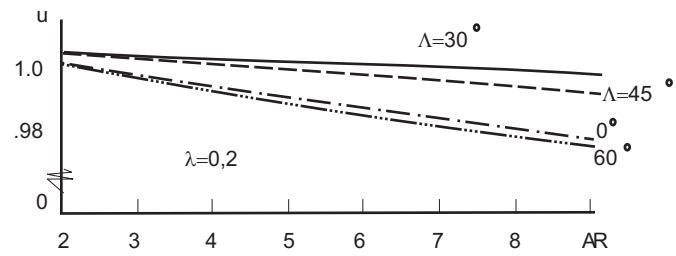
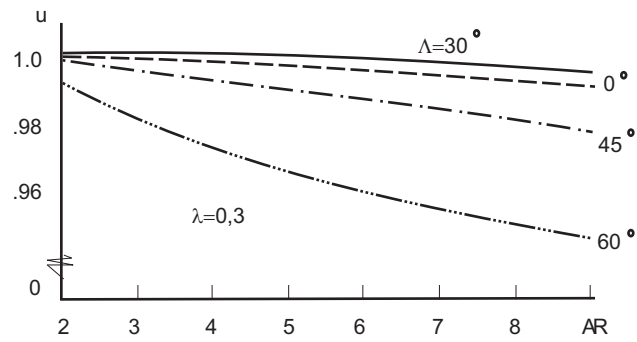


Figura 4.28: Fattore di resistenza u per bassa rastremazione

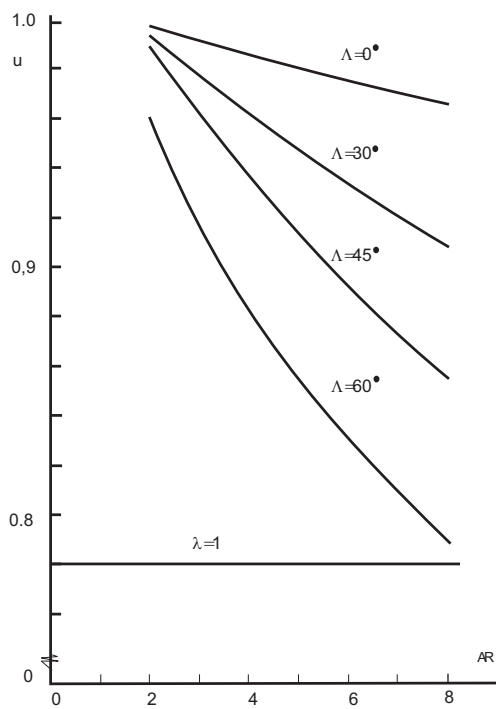


Figura 4.29: Fattore di resistenza u per alta rastremazione

4.5 Ala a delta alle basse velocità di crociera: la Teoria di Jones

4.5.1 Introduzione

Per le ali a delta, che presentano valori molto bassi dell'allungamento, il ricorso alle ipotesi alla base della Teoria di Prandtl (che già per l'ala a freccia perdevano parte della loro validità), non è pensabile: anzi il modello di Jones, che riesce a spiegare il funzionamento di un'ala di allungamento molto basso, assume ipotesi "opposte". In concreto, la Teoria di Jones è accurata quando $\mathcal{AR} \rightarrow 0$ così come la Teoria di Prandtl è accurata quando $\mathcal{AR} \rightarrow \infty$.

La teoria di Jones si costruisce per un flusso a potenziale nelle ipotesi di piccole perturbazioni, e dunque si applica alle condizioni di volo di crociera alle basse velocità di volo. Si introducono preliminarmente alcuni concetti utili concetti utilizzati da Jones nella costruzione della teoria.

4.5.2 Calcolo dell'energia associata ad un campo potenziale e Massa Addizionale Apparente

Si consideri il flusso a potenziale armonico nell'interno di un volume V delimitato dalla superficie S , composta da una superficie esterna Σ , fissa, e da una superficie interna σ (anche se composta da più superfici), corrispondente al corpo in movimento. In un flusso incomprimibile l'energia cinetica del fluido, se \bar{q} è il vettore velocità locale, sarà

$$E = \frac{\rho}{2} \int_V |\bar{q}|^2 d\tau = \frac{\rho}{2} \int_V (\nabla\Phi)^2 d\tau \quad (4.217)$$

Riferendosi alla forma ridotta della Prima Identità di Green (B.3), la (4.217) diventa

$$E = \frac{\rho}{2} \int_S \Phi \frac{\partial\Phi}{\partial n} dS = \frac{\rho}{2} \int_\sigma \Phi \frac{\partial\Phi}{\partial n} d\sigma + \frac{\rho}{2} \int_\Sigma \Phi \frac{\partial\Phi}{\partial n} d\Sigma \quad (4.218)$$

Si consideri ora che per $\Sigma \rightarrow \infty$ \bar{q} deve essere uguale a zero su Σ , e cioè, indipendentemente dalla posizione specifica di Σ all'infinito, si dovrà avere $\Phi = C$.

Dall'equazione di continuità si ricava

$$\int_V \nabla \cdot \bar{q} d\tau = \int_S \bar{n} \cdot \nabla\Phi dS = \int_\sigma \frac{\partial\Phi}{\partial n} d\sigma + \int_\Sigma \frac{\partial\Phi}{\partial n} d\Sigma = 0 \quad (4.219)$$

od anche

$$\int_\sigma C \frac{\partial\Phi}{\partial n} d\sigma + \int_\Sigma C \frac{\partial\Phi}{\partial n} d\Sigma = 0 \quad (4.220)$$

Perciò

$$E = \frac{\rho}{2} \int_\sigma (\Phi - C) \frac{\partial\Phi}{\partial n} d\sigma + \frac{\rho}{2} \int_\Sigma (\Phi - C) \frac{\partial\Phi}{\partial n} d\Sigma \quad (4.221)$$

Ma

per $\Sigma \rightarrow \infty$ $(\Phi - C) = \epsilon \rightarrow 0$, per cui

$$\int_\Sigma (\Phi - C) \frac{\partial\Phi}{\partial n} d\Sigma \rightarrow \epsilon \int_\Sigma \frac{\partial\Phi}{\partial n} d\Sigma = -\epsilon \int_\sigma \frac{\partial\Phi}{\partial n} d\sigma \quad (4.222)$$

L'integrale nella (4.222) è una costante finita, indipendente dalla posizione di Σ , mentre $\epsilon \rightarrow 0$. Pertanto

$$E = \frac{\rho}{2} \int_\sigma (\Phi - c) \frac{\partial\Phi}{\partial n} d\sigma \quad (4.223)$$

ed essendo $\nabla \cdot \bar{q} = 0$ su σ

$$\int_{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma = 0 \quad (4.224)$$

segue finalmente

$$E = \frac{\rho}{2} \int_{\sigma} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma \quad (4.225)$$

dove σ è la superficie del corpo che si muove in un fluido infinito in quiete all'infinito.

Vi è un'interpretazione molto utile ed interessante dell'espressione (4.225) dell'energia associata a flussi potenziali.

Si consideri un corpo solido, in quiete in un campo potenziale; durante la fase di accelerazione dovrà essere presente una forza esterna per accelerare la massa del corpo, ma si dovrà accelerare anche la massa di fluido. Dalla semplice osservazione che l'energia cinetica di ciascuna particella è proporzionale al quadrato della velocità locale, la quale, a sua volta, è proporzionale alla velocità del corpo, discende che è possibile calcolare l'energia necessaria per accelerare un corpo in un fluido ideale come

$$\frac{1}{2} (M + M') V_{\infty}^2$$

dove M è la massa del corpo ed M' è la Massa Addizionale Apparente che, per la (4.225) si scrive come

$$M' = \frac{\rho_{\infty}}{V_{\infty}^2} \int_{\sigma} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma$$

In altri termini, se una forza F esterna agisce su di un corpo di massa M questo ha la stessa accelerazione e si muove nel fluido esattamente come se si muovesse nel vuoto se la sua massa fosse la "massa totale apparente" $M + M'$. Questo (solido) concetto di Meccanica del Continuo, di largo impiego in ambito navale, risale al diciannovesimo secolo.

Dalle considerazioni precedenti discende inoltre che la Massa Addizionale Apparente dipende dall'orientazione del corpo: per ogni corpo, vi sono tre assi principali mutuamente ortogonali tali che se si determina la Massa Addizionale Apparente quando il corpo si muove in ciascuna di queste direzioni, il suo valore può essere dedotto per moti in ogni altra direzione arbitraria⁷. Solo per moti in queste tre direzioni, che definiscono i cosiddetti "assi di traslazione permanente" il vettore quantità di moto $(M + M')V_{\infty}$ ha la direzione di V_{∞} ; per moti in queste direzioni non vi sono momenti o coppie che agiscono sul corpo o mentre per tutte le altre direzioni v'è sempre una coppia che fa ruotare il corpo.

Ovviamente per corpi con certi tipi di simmetria le tre fondamentali masse apparenti si riducono a due (corpi di rivoluzione), mentre per la sfera vi sarà una sola Massa Addizionale Apparente, indipendente dalla direzione del moto.

4.5.3 La teoria delle ali di piccolo allungamento: teoria di Jones

In caso di forte freccia o allungamento molto basso l'ipotesi di flusso bidimensionale, utilizzata nella teoria delle ali di grande allungamento (Teoria di Prandtl) o di freccia non elevata (Teoria di Weissinger), viene a cadere: più precisamente viene a cadere l'ipotesi di bidimensionalità per i piani paralleli al piano $x - z$.

In questo caso è possibile però assumere l'ipotesi che sia bidimensionale il flusso intorno a ciascuna sezione trasversale nei piani paralleli ad $(y - z)$, perpendicolari alla direzione della corrente: l'origine della portanza appare allora diversa.

La teoria si riferisce ad un'ala molto sottile (una lamina) la cui estensione trasversale deve aumentare lungo l'asse longitudinale; l'angolo di attacco deve essere piccolo. Si consideri allora una lastra piana triangolare, investita dalla corrente ad un angolo d'attacco α . Con riferimento ad una terna fissa, solidale al fluido indisturbato, il campo di velocità in un piano che taglia l'ala ad una distanza x dalla punta è quello bidimensionale intorno ad una lastra piana investita da una

⁷È evidente il carattere tensoriale che ha Massa Addizionale Apparente.

corrente ortogonale $V_\infty \sin \alpha \cong V_\infty \alpha$. Osservata in questo piano, la larghezza della lastra, e quindi la scala del campo di velocità, aumenta continuamente mentre l'ala attraversa il piano di riferimento, ed aumenta continuamente l'energia cinetica associata al campo.

Detta $m'(x)$ la Massa Addizionale Apparente relativa alla lastra posta all'ascissa x , l'incremento della scala del campo di velocità dà luogo ad una variazione lungo x di $m'(x)$ cui corrisponde la portanza locale

$$l(x) = V_\infty \alpha \frac{d[m'(t)]}{dt} = V_\infty^2 \alpha \frac{d[m'(x)]}{dx} \quad (4.226)$$

Per una lastra piana investita da una corrente ortogonale a potenziale si scrive, [34],

$$m' = \pi \rho_\infty y_1^2 \quad (4.227)$$

dove $y_1 = y_1(x)$ definisce il bordo d'attacco dell'ala e $2y_1$ è l'apertura locale della lastra. La (4.226) per la (4.227) diventa

$$l = 4 \pi \alpha \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 y_1 \frac{dy_1}{dx} \quad (4.228)$$

per cui il coefficiente locale di portanza è

$$C_l = \frac{l}{1/2 \rho_\infty V_\infty^2 \cdot 2y_1} = 2\pi \alpha \frac{dy_1}{dx} \quad (4.229)$$

Si osservi che la teoria fornisce una portanza solo per ali per cui dy_1/dx è diverso da zero; è esclusa pertanto la semplice ala rettangolare. Ad ogni modo il discorso è valido solo se le variazioni non sono brusche.

Occorre ora tenere che il moto è instazionario, per cui il teorema di Bernoulli assume la forma

$$\frac{p}{\rho_\infty} + \frac{V^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \text{costante}$$

mentre la velocità V sopra e sotto, in punti omologhi della lastra, è la stessa in modulo. Inoltre, come indica la teoria bidimensionale potenziale, φ è distribuito ellitticamente lungo l'apertura come

$$\varphi = V_\infty \alpha \sqrt{y_1^2 - y^2} \quad (4.230)$$

Il salto di pressione in due punti corrispondenti dell'ala (sul dorso e sul ventre) si scriverà allora

$$\Delta p = 2\rho_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 2\rho_\infty V_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dx} \quad (4.231)$$

e quindi

$$\Delta p = 2\rho_\infty V_\infty^2 \alpha \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 - y^2}} \frac{dy_1}{dx} \quad (4.232)$$

Si ottiene che sui bordi dell'ala il salto di pressione è singolare, analogamente a quanto si verifica sui bordi d'attacco dei profili sottili nella teoria di Glauert, Fig. 4.30, dalla quale si vede pure come nella realtà la viscosità elimini la singolarità. Inoltre la pressione è costante lungo le linee radiali uscenti dal vertice del triangolo (linee a $y/y_1 = \text{cost}$) e perciò il centro di pressione coincide col baricentro della forma in pianta.

La distribuzione del carico lungo l'apertura sarà fornita da

$$\frac{dL}{dy} = \int_0^{x_{max}} \Delta p dx = \int_0^{x_{max}} 2\rho_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial x} V_\infty dx = 2\rho_\infty V_\infty [\varphi]_{x=x_{max}} = 2\rho_\infty V_\infty^2 \alpha \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2} \quad (4.233)$$

Ne deriva che la distribuzione di carico dL/dy varia ellitticamente lungo l'apertura, ed è indipendente dalla forma in pianta: la resistenza indotta assume allora il valore minimo (ala "ottima").

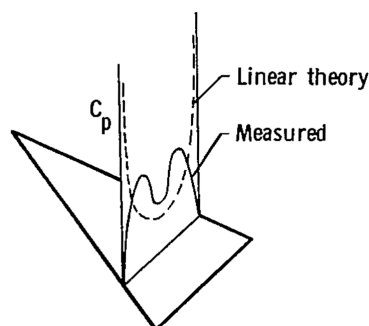


Figura 4.30: Distribuzione di pressione teorica -secondo Jones- e sperimentale sull'ala a delta

La portanza si otterrà integrando la (4.233) con le usuali notazioni e trasformazioni di variabili:

$$L = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{dL}{dy} dy = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \alpha b^2 \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \alpha b^2 \quad (4.234)$$

Risulta che la portanza dipende solo dall'apertura, e non dalla superficie alare.

Si ricavano poi le espressioni fondamentali di Jones

$$C_L = \frac{\pi}{2} \mathcal{R} \alpha \quad (4.235)$$

$$C_{D_i} = \frac{C_L^2}{\pi \mathcal{R}} = C_L \frac{\alpha}{2} \quad (4.236)$$

e si evidenzia la previsione corretta del gradiente della retta di portanza (per il quale la Teoria di Prandtl per $\mathcal{R} \rightarrow 0$ fornisce un valore doppio). La forza aerodinamica giace a metà tra la normale alla superficie alare e la normale alla corrente. La resistenza indotta vale

$$D_i = \frac{L^2}{\pi b^2 \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}} \quad (4.237)$$

La teoria di Jones risulta valida, a confronto con teoria potenziali tridimensionali e con dati sperimentali, per un'ampia serie di forme del bordo di attacco di ali di $\mathcal{R} \cong 1$, Fig. (4.31).

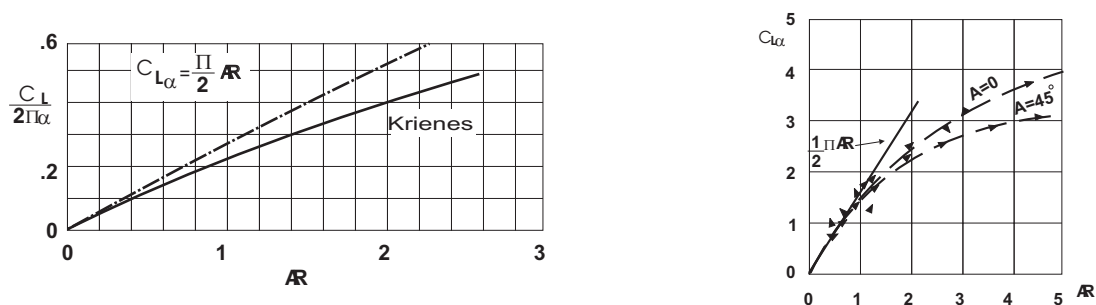


Figura 4.31: Confronti tra la Teoria di Jones, la Teoria di Krienes ed i dati sperimentali

I risultati precedenti sono validi finché $dy_1/dx \neq 0$, ma dy_1/dx non deve essere molto grande affinché la corrente possa considerarsi bidimensionale nei piani paralleli a $(y - z)$.

La teoria non consente di calcolare le regioni d'ali del tipo mostrato in Fig. 4.32. Si avrebbe infatti nelle porzioni dove l'ala si restringe una portanza negativa con picchi negativi infiniti sui bordi; d'altra parte in tali regioni (dietro la sezione di massima apertura) deve essere soddisfatta sia la condizione di Kutta-Joukowski (della velocità finita sui bordi d'uscita) sia la condizione del flusso tangenziale. Si deve allora supporre che esista, a valle della della sezione di massima apertura, una

schiera di vortici paralleli che partono da tale sezione e che si estendono fino all'infinito a valle. Tale schiera di vortici costituisce il prolungamento dei vortici che rappresentano la discontinuità del potenziale nella parte anteriore dell'ala e la sua distribuzione laterale è tale da dare un *downwash* uniforme uguale a $V_\infty \alpha$ sull'intera ampiezza della scia; inoltre la condizione di Kutta-Joukowski sarà soddisfatta nella regione coperta dalla schiera di vortici paralleli indipendentemente dalla forma dei bordi di uscita. Ora la differenza di pressione (tra dorso e ventre) è proporzionale a

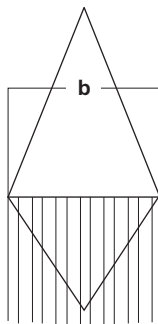


Figura 4.32: Forma in pianta per la quale non è valida la Teoria di Jones

$\partial\varphi/\partial x$, che d'altra parte scompare in un sistema di vortici paralleli; pertanto non si sviluppa alcuna portanza nella parte posteriore dell'ala.

4.6 Oltre le teorie semplici: metodi a reticolo di vortici

I metodi a reticolo di vortici, (*Vortex Lattice Methods*, VLM's) costituiscono uno strumento per il calcolo approssimato -per via numerica- di carichi e prestazioni aerodinamiche di configurazioni anche complesse. Essi consentono di ottenere con tempi di calcolo ridotti risultati sufficientemente accurati per l'impiego nella fase di progetto preliminare di un aeromobile. Sviluppati a partire dal 1960, divenuti operativi intorno al 1970, questi metodi sono stati impiegati nella progettazione dei più importanti velivoli già da quell'epoca (Concorde, Boeing 747) e fino al giorno d'oggi⁸.

Un VLM è la combinazione tra le teorie di linea e superficie portante approssimata (Prandtl e Weissinger rispettivamente) ed il metodo a vortici concentrati per linee medie, (*Vortex Lumped Method*, (4.2.8)): limitati quindi al campo non viscoso linearizzato (retto, in qualche modo, da un problema di Neumann per l'equazione di Laplace nell'incognito potenziale di velocità), questi metodi si possono quindi applicare a condizioni di volo livellato, volo derapato e manovra nelle quali non siano presenti regioni più o meno estese di flusso separato, né onde d'urto normali (e dunque in campi sub- e supersonici non viscosi).

La geometria del velivolo può essere descritta in modo abbastanza semplice, ma completo, Fig. 4.33. Le superfici considerate non portanti -la fusoliera, ad esempio- si possono definire in modo non troppo accurato. Le superfici portanti (ala, piani orizzontali e verticali) sono modellate come fogli infinitamente sottili, e vanno definite con accuratezza.

Tutte le superfici vengono partizionate in elementi piani quadrilateri su ciascuno dei quali si dispone un vortice a ferro di cavallo che si estende nel flusso a valle come descritto dai teoremi di Helmholtz, Fig. 4.34. L'intensità di tali vortici varia da pannello a pannello, sia longitudinalmente che trasversalmente, e, una volta calcolata risolvendo un problema di Neumann, già fornisce la distribuzione superficiale di carico nell'approssimazione di corpo sottile e permette la determinazione della forza aerodinamica elementare esercitata su ciascun vortice. A questo punto

- mediante opportune sommatorie si calcolano forze e momenti, e quindi per proiezione portanza e resistenza indotta;

⁸Sono stati prodotti codici per applicazioni anche per il campo supersonico basati sul vortice supersonico, singolarità analoga alla sorgente ed alla doppietta supersonica trattate nel paragrafo (C.6)

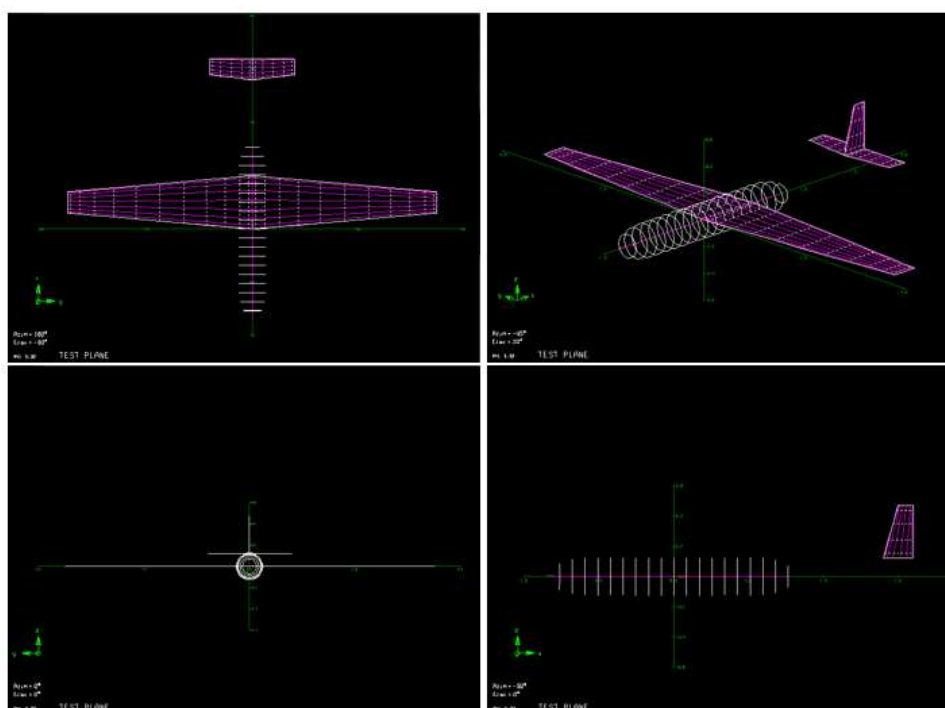


Figura 4.33: Schematizzazione di un velivolo per il VLM

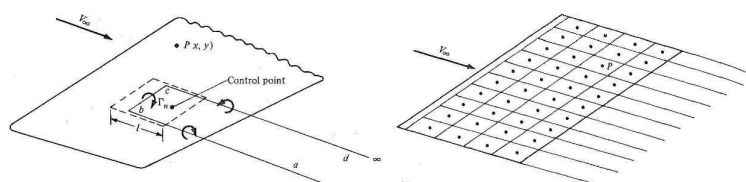


Figura 4.34: Schematizzazione del sistema vorticoso su di una superficie portante

- rapportando le forze elementari all'estensione dei relativi pannelli si ricava la distribuzione superficiale di carico.

Un metodo a reticolo di vortici può essere visto anche come l'estensione a campi tridimensionali del metodo a vortici concentrati per linee medie, rispetto al quale aggiunge ulteriori approssimazioni causate dall'introduzione di alcune arbitrarietà (motivate in modo euristico). La principale di queste consiste nel ricorrere alla proprietà del punto neutro posteriore per imporre la condizione al contorno: la cosa non ha un fondamento rigoroso, essendo la relativa teoria rigorosamente 2-D (e comunque il ricorso al punto neutro posteriore sembra essere la scelta meno irrazionale...).

Con l'introduzione del VLM si è avuto un decisivo passo in avanti nella tecnologia del calcolo aerodinamico rispetto alle teorie alari di Prandtl e Weissenger, le quali consentono il calcolo del carico -integrato in direzione assiale- di una superficie portante planare isolata (o poco di più). I metodi a reticolo di vortici offrono due grandi vantaggi: da un lato, come già detto, forniscono la distribuzione di carico sull'intera superfici di un aeromobile, dall'altro si può trattare il velivolo completo o la compresenza di più velivoli, in modo da poter trattare qualunque interferenza aerodinamica (si pensi alle interazioni tra ali ed impennaggi, come pure al volo in formazione od al rifornimento in volo).

I risultati più importanti di questi metodi sono quindi

- le distribuzioni di carico sulle superfici portanti e non portanti;
- le caratteristiche di portanza delle diverse superfici portanti (non necessariamente rappresentate da rette);
- le polari indotte (e quindi il fattore di Oswald per singole superfici portanti);
- le derivate di stabilità.

4.6.1 Struttura del metodo

Esistono numerose varianti a partire da un concetto base: l'elemento armonico incognito impiegato per modellare la soluzione del problema di Neumann per l'equazione di Laplace mediante imposizione della condizione al contorno in un certo numero di punti, detti punti di controllo, è il vortice a staffa elementare, opportunamente disposto nello spazio. Ciascun vortice, classicamente, ha una parte aderente ed una parte libera, allineata con la direzione della corrente asintotica.

Nell'applicazione la superficie dell'aeromobile viene approssimata opportunamente: per un'ala si può utilizzare la forma in pianta o -molto più efficacemente- la superficie media, mentre per le parti fusiformi (o per oggetti fusiformi isolati) si può ricorrere anche a schemi semplificati⁹.

La superficie così approssimata viene opportunamente partizionata in pannelli quadrilateri piani (non necessariamente complanari), la "forma" dei quali segue abbastanza fedelmente la forma della superficie (ad esempio, i pannelli relativi ad una superficie portante rastremata a freccia saranno quadrilateri rastremati a freccia). Sulla linea a 1/4 di ciascun quadrilatero si dispone la parte aderente di un vortice a staffa, di intensità incognita mentre la parte libera è disposta lungo la direzione di V_∞ ; i punti medi delle linee ad 1/4 sono detti punti-vortice, i punti medi delle linee a 3/4 sono detti punti di controllo.

Se ci si limita alla forma in pianta rettangolare ed alla relativa discretizzazione, l'induzione w del vortice a staffa "semplice", di intensità Γ e contenuto nel piano $(x - y)$, in un punto arbitrario $P(x, y)$ del piano che lo contiene (induzione ovviamente normale al piano), è, Fig. 4.35:

$$w(x, y) = \frac{\Gamma}{4\pi} \left(\frac{1}{y-y_a} - \frac{1}{y-y_b} \right) \quad x = x_a$$

$$w(x, y) = \frac{\Gamma}{4\pi} \left\{ \frac{1}{y-y_a} \left[1 + \frac{\sqrt{(x-x_a)^2 + (y-y_a)^2}}{x-x_a} \right] - \frac{1}{y-y_b} \left[1 + \frac{\sqrt{(x-x_a)^2 + (y-y_b)^2}}{x-x_a} \right] \right\} \quad x \neq x_a$$

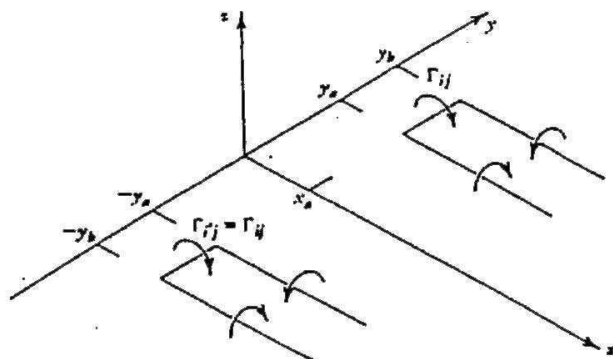


Figura 4.35: Induzione di un vortice a staffa "semplice" nel piano che lo contiene

⁹Sono stati sviluppati comunque metodi a vortici che operano sulla geometria reale completa: oggi non sono più impiegati in quanto sostituiti da metodi a pannelli che risolvono in modo esatto il campo di moto.

In generale i vortici hanno una forma “a freccia”, e non giacciono in un unico piano; le induzioni vanno calcolate anche in punti fuori del piano che contiene il vortice che induce, e pertanto l’induzione non è normale a tale piano, ed infine occorre determinare la componente dell’induzione perpendicolare all’elemento che contiene il punto in cui si valuta l’induzione. Per tutte le diverse forme geometriche plausibili di vortice di intensità $|\Gamma| = 1 \text{ m}^2/s$ e comunque disposti nello spazio si sono calcolate, una volta per tutte, le induzioni della velocità in un punto arbitrario dello spazio per vortici (dalla legge di Biot-Savart). Si tratterà poi di sviluppare una sequenza di operazioni vettoriali, a volte abbastanza complicate, per calcolare le velocità indotte da ciascun vortice in due distinti punti di ciascun pannello:

- nel punto di controllo (per il quale interessa solo la componente normale all’ elemento);
- nel punto-vortice, per la determinazione del *downwash* sul vortice aderente: qui pertanto interessa l’induzione effettiva nei termini delle tre componenti cartesiane della velocità indotta nel riferimento degli assi-velivolo.

Si perviene quindi a diverse matrici di influenza (quattro matrici di scalari nel caso più generale).

La condizione di Neumann si impone annullando in tutti i punti di controllo la velocità normale all’elemento, data dalla somma dall’induzione normale di tutti i vortici e dalla componente normale della velocità asintotica. Il sistema di equazioni risultante è ovviamente lineare, e la relativa soluzione porta alla determinazione delle intensità dei vortici che risolvono il problema di Neumann discretizzato. Per un problema con N pannelli, e quindi N vortici, detta \mathbf{v}_{ij} la velocità indotta dal vortice Γ_j (di intensità unitaria) nel punto di controllo del pannello i di normale \mathbf{n}_i , l’induzione normale è riunita all’interno del matrice di influenza \mathbf{v}^n

$$\mathbf{v}^n = \begin{bmatrix} v_{11}^n & v_{12}^n & \cdots & v_{1N}^n \\ v_{21}^n & v_{22}^n & \cdots & v_{2N}^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{N1}^n & v_{N2}^n & \cdots & v_{NN}^n \end{bmatrix} \quad (4.238)$$

essendo $\mathbf{v}_{ij}^n = \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{n}_i$, ed il problema algebrico da risolvere sarà¹⁰

$$\mathbf{v}\Gamma + \mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (4.239)$$

dove Γ è il vettore delle incognite contenente le intensità dei vortici Γ_j , e \mathbf{n} è il vettore dei versori normali ai pannelli.

Una volta noto lo schema vorticoso che rappresenta l’inferenza della geometria nel campo di moto asintotico nelle fissate condizioni di volo, un’adeguata fase di *post-processing* consente di calcolare tutti i dati aerodinamici. Occorrerà riferirsi adesso al sistema dei punti-vortice ed al segmento al quarto di ciascun pannello, per il quale si diranno l e \mathbf{l} rispettivamente la lunghezza ed il versore. La forza aerodinamica è data dalla somma -vettoriale- delle forze che insistono sulla parte aderente di tutti i vortici, ciascuna delle quali si determina ricorrendo al teorema di Kutta-Joukowski: per questo è necessario determinare la velocità *effettiva* in ciascuno dei punti-vortice in quanto la forza che insiste sull’elemento vorticoso è ortogonale ad essa, Fig. 4.36 e non alla velocità asintotica (come per le Teorie di Linea e Superficie Portante).

In riferimento al pannello i -esimo, l’intensità efficace del vortice i -esimo è $\Gamma_i l_i$, il *downwash* totale \mathbf{w}_i , calcolabile a partire dalle matrici di induzione relative a questi punti, è

$$\mathbf{w}_i = \sum_{j=1}^N w_{ij} \Gamma_j \quad (4.240)$$

e quindi la velocità effettiva, composizione (vettoriale) tra la velocità asintotica ed il *downwash* indotto da ciascun vortice, sarà $\mathbf{V}_i^{eff} = \mathbf{V}_\infty + \sum_{j=1}^N \mathbf{w}_{ij} \Gamma_j$. La forza sul pannello i -esimo sarà quindi data dal prodotto vettoriale

¹⁰limitatamente al caso di superfici impermeabili

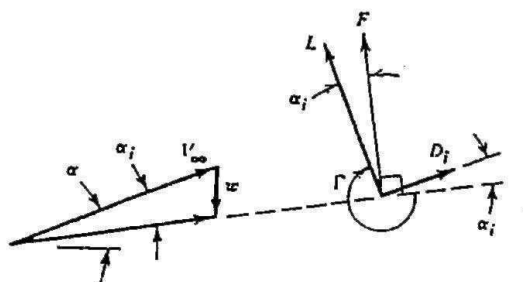


Figura 4.36: Costruzione della velocità effettiva in un punto sede del vortice aderente

$$\mathbf{F}_i = \rho \mathbf{V}_i^{eff} \wedge (l_i \Gamma_i) \mathbf{l}_i \quad (4.241)$$

ed un ordinario processo di sommatoria fornirà la forza aerodinamica \mathbf{F} . La forza aerodinamica sarà decomposta in resistenza indotta, portanza e forza laterale. La polare indotta (che per una superficie portante isolata è parabolica e fornisce il coefficiente di Oswald per confronto con l'ala ellittica) darà anche l'eventuale resistenza indotta a portanza nulla. I momenti di beccheggio, rollio ed imbardata sono relativi a poli prefissati. Le derivate di stabilità si possono determinare variando la geometria (azionamento delle superfici mobili, ad esempio) ed i parametri del volo (angoli di attacco, rollio e derapata).

La distribuzione del carico puntuale sulle superfici si può desumere sia dal rapporto tra l'intensità della forza agente su ciascun pannello e la relativa superficie sia (in modo più appropriato) dalle distribuzioni dell'intensità dei vortici in direzione assiale e lungo l'apertura.

Un VLM presenta un carico computazionale contenuto, rispetto ai metodi a pannelli con singolarità distribuite. Il numero di vortici da usare dipende dalla richiesta di accuratezza della soluzione (distribuzioni di carico e coefficienti aerodinamici) e dalla complessità della geometria: per la semiala, tipicamente 25 pannelli in direzione longitudinale e 15 pannelli lungo l'apertura sono ritenuti sufficienti a fornire le più utili informazioni nelle prime fasi di un progetto, quando le caratteristiche già fissate dell'ala sono poche e si vuole valutare in modo veloce e preciso la prestazione al variare di altri parametri di progetto.

4.7 Il metodo semiempirico di Schrenk

INTRODUZIONE

È opportuno notare come in sede di progetto preliminare sia molto utile disporre di metodi di calcolo che, sia pure approssimati, consentano di valutare rapidamente carichi (e prestazioni) in sede di prima approssimazione. L'impiego di metodi rigorosi può essere successivo, una volta effettuato lo studio preliminare e scartato un certo numero di proposte iniziali.

Per calcolare rapidamente le caratteristiche aerodinamiche delle ali sono stati escogitati molti metodi pratici, i quali partendo da assunzioni e dati teorici e semiempirici, riescono a fornire le soluzioni, spesso con sorprendente precisione. Le impostazioni originarie dei vari autori sono state corrette o completate da altri ricercatori che hanno fornito suggerimenti pratici (diagrammi, formule di correzione, ecc.) atti a rendere ancora più preciso il calcolo, in tempo relativamente breve (1/2 ora). La presenza della macchina elettronica non ha variato questo procedimento logico ed ingegneristico.

Da un punto di vista storico sono degni di citazione, tra gli altri, i metodi di Anderson, Diederich e Schrenk, ma solo il metodo di Schrenk mantiene una sua attualità "didattica", legata all'immediatezza applicativa unita ad una accettabile accuratezza.

IL CARICO ADDIZIONALE

Per ali diritte di forma in pianta generica, a basse velocità e sempre trascurando gli effetti viscosi, il metodo più semplice per stimare velocemente la distribuzione di carico è il metodo di Schrenk. Questo metodo ha un fondamento teorico abbastanza riposto, ma rigoroso ed importante.

Si è visto il peso che ha la distribuzione delle corde sulla distribuzione di carico (uguale al peso che ha la distribuzione del coefficiente di portanza). Si è visto inoltre che per l'ala ellittica il carico segue rigorosamente la distribuzione delle corde, e che questo non è più vero per altri tipi di forma in pianta: per esempio per l'ala rettangolare (corda costante lungo y) il carico non risulterà costante, bensì decrescente verso le estremità.

Si verifica cioè che se si altera la distribuzione delle corde di un'ala ellittica la conseguente alterazione del carico è minore di quella delle corde: in effetti la variazione di coefficiente di portanza lungo l'apertura è tale da opporsi all'alterazione del carico dipendente dalla variazione delle corde secondo un meccanismo che tende ad "attrarre" la nuova distribuzione di carico verso quella ellittica. Tale meccanismo è abbastanza preciso, e spiegabile nell'ambito della semplice modellistica per l'ala finita di Prandtl. È la variazione di vorticità libera che modula la distribuzione di carico in modo che resti "attratta" verso il carico ellittico.

L'ipotesi fondamentale di Schrenk consiste nel valutare il carico addizionale lungo l'apertura semplicemente come media tra la distribuzione $c(y)$ delle corde effettive dell'ala in esame e la distribuzione c_{ell} delle corde di un'ala ellittica avente la stessa area in pianta e la stessa apertura dell'ala in esame. Il carico addizionale secondo Schrenk vale

$$cC_{l_{a1}} = \frac{c + c_{ell}}{2} = \frac{c}{2} + \frac{2S}{\pi b} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b/2}\right)^2} = \frac{c}{2} + \frac{2S}{\pi b} \sqrt{1 - \eta^2} \quad (4.242)$$

ed il suffisso $a1$ sta ad indicare che, come è semplice mostrare, a questo carico corrisponde $C_L = 1$. Il carico addizionale ad un generico valore del coefficiente di portanza C_L sarà quindi $cC_{l_{a1}} C_L$

La corrispondente distribuzione adimensionale di carico γ_{a1} vale allora

$$\gamma_{a1}(\eta) = \frac{cC_{l_{a1}}}{2b} = \frac{c + c_{ell}}{4b} \quad (4.243)$$

L'ipotesi di Schrenk ha, per così dire, una giustificazione: si osserva facilmente come per grandi valori dell'allungamento la distribuzione addizionale sia proporzionale alla distribuzione delle corde, mentre per bassi valori dell'allungamento, invece, il carico (come peraltro risulta con la teoria di Jones) tende alla distribuzione ellittica. Pertanto il metodo di Schrenk si applica con successo ad ali di basso ed alto allungamento.

Qualora lo spessore percentuale sia variabile lungo l'apertura, nella (4.242) si dovrà usare una corda effettiva \bar{c}

$$\bar{c} = c \frac{C_{l_\alpha}}{\bar{C}_{l_\alpha}} \quad (4.244)$$

dove \bar{C}_{l_α} è il valore medio dei gradienti delle rette di portanza dei profili

$$\bar{C}_{l_\alpha} = \frac{2}{S} \int_0^{b/2} cC_{l_\alpha} dy \quad (4.245)$$

Si fa notare, per inciso, che la (4.242) deve essere corretta in corrispondenza delle estremità alari, laddove il carico deve essere nullo: ciò comporta che la valutazione, alle estremità, è necessariamente approssimata. Un esempio della costruzione grafica del carico addizionale secondo Schrenk è riportato in Fig. 4.37.

IL CARICO BASICO

Per quanto riguarda poi il carico basico, detto ϵ_y l'angolo di svergolamento formato tra la retta di portanza nulla alla stazione y e la retta di portanza nulla alla radice, l'angolo di attacco locale cui corrisponde il carico basico sarà

$$\left[\alpha_y \right]_{C_{l_b}} = \epsilon_y - \left[\alpha \right]_{C_L=0} \quad (4.246)$$

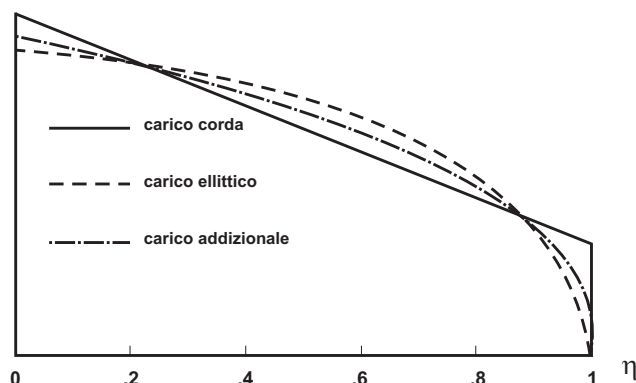


Figura 4.37: Calcolo del carico su un'ala trapezia con il metodo di Schrenk

dove l'angolo di portanza nulla dell'ala è espresso da

$$[\alpha]_{C_L=0} = \frac{2}{S} \int_0^{b/2} c \epsilon_y dy \quad (4.247)$$

Per poter integrare la (4.247) occorre conoscere la legge $\epsilon_y = \epsilon_y(y)$. Si osservi che nel calcolo non si deve tener conto della eventuale variazione $C_{l\alpha} = C_{l\alpha}(y)$, avendone già tenuto conto, con la (4.245), nella determinazione del carico addizionale. La presenza di flap ed alettoni può essere messa in conto come un caso di improvviso svergolamento.

L'altra assunzione di Schrenk consiste nel valutare il carico base cC_{l_b} come media tra il carico base dell'ala svergolata in esame ed il carico base di un'ala non svergolata (che è nullo): in altri termini si dimezza il valore corrispondente allo svergolamento.

Ciò può essere spiegato nella maniera che segue: a parità di C_L totale un'ala svergolata ha un maggior carico e quindi circolazione verso la mezzeria, il cui effetto è di aumentare l'angolo d'attacco reale verso le estremità, contrastando con l'azione dello svergolamento.

In prima (e buona) approssimazione l'azione di contrasto si può ritenere dell'ordine del 50%. In conclusione, si ha per il carico base

$$cC_{l_b} = cC_{l_{\alpha}} \frac{1}{2} (\epsilon_y - [\alpha]_{C_L=0}) \quad (4.248)$$

Pertanto il carico totale sarà

$$cC_l = cC_{l_{\alpha}} C_L + cC_{l_b} \quad (4.249)$$

Un'estensione del metodo di Schrenk alle ali a freccia, proposta da Pope ed Haney, [35], conduce alla formula

$$\left(\frac{cC_l}{\bar{c}C_L} \right)_{\Lambda \neq 0} = \left(\frac{cC_l}{\bar{c}C_L} \right)_{\Lambda=0} - \left(1 - \frac{y}{b/2} \right) [2(1 - \cos \Lambda)] \quad (4.250)$$

valida, eventualmente, anche per ali a freccia variabile lungo l'apertura.

Una volta stimato il carico, è possibile stimare la distribuzione del coefficiente di portanza lungo l'apertura e la vorticità libera mediante le (1.15), (1.27).

4.8 Ala finita: un compendio

Si presentano qui alcuni risultati fondamentali dalla teoria linearizzata, nella quale il modo di lavorare di un'ala può essere analizzato come prolungamento del comportamento di un profilo (o di un'ala infinita). Le differenze ci sono, e sono comunque sostanziali. Anche l'ala ha una caratteristica di portanza che presenta un tratto lineare. Il gradiente della retta di portanza dipende dall'allungamento e dalla freccia. Se ci si riferisce ad un'ala formata da profili infinitamente sottili

($C_{l\alpha} = 2\pi$), diritta e con carico ellittico, vale la relazione (ricavabile dalla Teoria di Prandtl, e quindi valida per grandi allungamenti)

$$C_{L\alpha} = 2\pi \frac{\mathcal{R}}{2 + \mathcal{R}} \quad (4.251)$$

In generale, se il profilo dell'ala ha un gradiente della retta di portanza $C_{l\alpha}$ allora il carico ellittico porta ad un gradiente della retta di portanza dell'ala dato da

$$C_{L\alpha} = \frac{C_{l\alpha}}{1 + \frac{C_{l\alpha}}{\pi \mathcal{R}}} \quad (4.252)$$

I risultati precedenti sono stati corretti per tenere conto dei limiti del modello di Prandtl. In particolare, l'ipotesi di flusso bidimensionale sui profili dell'ala è certamente poco valida alle estremità alari, anche agli alti allungamenti, ed il flusso reale, tridimensionale, deve prevedere una riduzione delle espansioni. Una formula abbastanza generale è

$$C_{L\alpha} = 2\pi \frac{\mathcal{R}}{2 + E\mathcal{R}} \quad (4.253)$$

nella quale compare il fattore di Jones E , certamente minore di 1.

Per distribuzioni di carico non ellittiche i risultati della Teoria della Linea Portante vengono corretti poi in modo analogo.

Ai piccoli allungamenti la teoria di Prandtl sovrastima di molto la portanza, e l'espressione valida per $\mathcal{R} \rightarrow 0$, dalla Teoria di Jones, è,

$$C_{L\alpha} = \frac{\pi}{2} \mathcal{R} \quad (4.254)$$

Una correlazione abbastanza completa dei dati sperimentali relativi a moltissime ali, di svariata forma in pianta, ha portato alla formula

$$C_{L\alpha} = 2\pi \frac{\mathcal{R}}{2 + \sqrt{4 + \mathcal{R}^2}} \quad (4.255)$$

che per ali di bassissimo ed elevato allungamento fornisce i risultati delle relazioni di Jones (4.254) e Prandtl (4.251), rispettivamente.

La freccia produce una riduzione del $C_{L\alpha}$ che in prima approssimazione può essere determinata con la legge del coseno.

Per la resistenza indotta dalla portanza e in assenza di carico basico l'espressione che lega i coefficienti di portanza e resistenza è la classica polare parabolica

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{e\pi \mathcal{R}} \quad (4.256)$$

dove per e , fattore di Oswald, risulta $e = 1$ per distribuzione di carico ellittica, altrimenti $e < 1$.

Capitolo 5

Soluzioni potenziali “esatte”: i metodi a pannelli

5.1 Soluzioni teoriche

Il calcolo delle forze e dei momenti aerodinamici agenti su uno o più corpi immersi in un fluido in movimento può essere effettuato quando sia nota la distribuzione degli sforzi esercitati dal fluido sulla superficie: occorre la conoscenza del campo di moto.

Nelle ipotesi di moto incomprimibile irrotazionale non viscoso stazionario il sistema di equazioni di Navier-Stokes si riduce -si veda al paragrafo (2.7)- all'equazione di Laplace nell'incognita Φ , il potenziale della velocità \mathbf{V} ($\mathbf{V} = \nabla\Phi$). La condizione al contorno su superfici solide consiste in generale nell'assegnazione -in modo appropriato- della sola componente normale della velocità, della quale nel caso di superfici impermeabili si impone l'annullamento. Quando si trattano campi di moto illimitati è necessario imporre la condizione che il disturbo indotto dal corpo nel campo di moto sia evanescente all'infinito a monte.

I procedimenti generali di risoluzione del campo potenziale incomprimibile attorno ad un profilo alare, quali la tecnica delle variabili separate, il metodo delle distribuzioni continue o discrete di singolarità, il metodo delle variabili complesse, non conducono a risultati esatti in senso analitico se non per forme particolari del corpo; e lo stesso vale per geometrie 3-D. Esempi tipici di tali risultati sono a) la sfera, b) l'ovoide di Rankine, c) il cilindro circolare.

L'impiego di variabili complesse ha avuto successo con la teoria delle trasformazioni conformi, consentendo di ricavare geometrie adatte per le applicazioni, i profili teorici di Joukowski, Karman-Trefftz, Von Mises, discussi in molti testi di Aerodinamica, [16], [17], [18], ad esempio: il principio comune è che il flusso attorno a questi profili è collegato, con trasformazione conforme, al flusso attorno al cilindro circolare, che è noto. Le limitazioni geometriche dei profili teorici sono eliminabili con l'artificio di Theodorsen e Garrick, [19] utilizzando la trasformazione intermedia del profilo in un “quasi cerchio”, ma, poiché ciò si realizza con la trasformazione inversa di Joukowski, il corpo non deve avere alcuna discontinuità nella pendenza superficiale se non sul bordo d'uscita. Il metodo di Theodorsen, generalizzato con la trasformazione di Karman-Trefftz, è stato a lungo il punto di riferimento per il calcolo di profili alari, e l'avvento degli elaboratori elettronici ne ha solo reso più rapido lo svolgimento, [20]. Purtroppo all'inconveniente di non operare direttamente nel piano fisico si aggiunge l'impossibilità di applicazione generale per forme geometriche a più componenti (profili multiflappati), e, soprattutto, di estensione a flussi tridimensionali. Per questi motivi non ci si soffermerà in questo capitolo sui procedimenti basati sulla teoria delle trasformazioni conformi.

5.2 Soluzioni numeriche: i metodi a pannelli

I metodi a pannelli sono associati al metodo integrale di soluzione del problema, Fig. 5.1,

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi &= 0 && \text{in } \mathcal{V} \\ \nabla\Phi \cdot \mathbf{n} &= \frac{\partial\Phi}{\partial n} = h(S) && \text{su } S\end{aligned}\tag{5.1}$$

introdotto nel paragrafo (2.7), che descrive il flusso potenziale incomprimibile stazionario attorno a corpi di forma arbitraria.

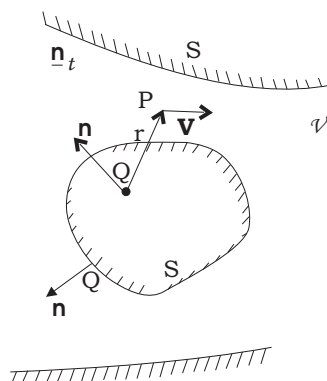


Figura 5.1: Il dominio di calcolo del problema di Neumann

Quando il campo di moto è illimitato un'ulteriore condizione è che, infinitamente a monte,

$$\Phi(P) = \Phi_\infty$$

e Φ_∞ non deve necessariamente descrivere condizioni uniformi.

Il problema (5.1) ammette soluzioni con certe condizioni su h abbastanza poco restrittive: comunque deve (dovrebbe...) essere verificata la condizione (B.2). Per l'unicità della soluzione il discorso è più complicato. Nel caso bidimensionale comunque l'unicità della soluzione può essere associata alla specificazione di un'ulteriore condizione (si può, per esempio, porre un vincolo sulla circolazione della velocità attorno al contorno).

Essendo l'equazione di Laplace lineare, per essa è valido il principio di sovrapposizione: se $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ sono n sue soluzioni, allora la somma

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_n$$

è anch'essa una sua soluzione. Questa fondamentale proprietà permette di affermare che un qualsiasi campo di moto, per quanto complesso, può essere ottenuto dalla sovrapposizione di un certo numero di campi di moto elementari, purché siano valide le ipotesi di irrotazionalità ed incomprimibilità.

Quasi sempre si imposta la soluzione del problema (5.1) (associandovi le più adeguate condizioni di chiusura) evitando di calcolare esplicitamente il potenziale Φ , e valutandone direttamente le derivate, e quindi la velocità: si ricava quindi il coefficiente di pressione mediante la relazione

$$C_p = 1 - \left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2\tag{5.2}$$

ottenuta dall'applicazione del teorema di Bernoulli.

Il problema del flusso potenziale si intende qui risolto in modo "esatto" nel senso che è esatta la sua formulazione (equazione esatta e condizioni al contorno imposte sulla geometria effettiva), ma la soluzione dovrà prevedere tutte le limitazioni insite nelle tecniche numeriche, limitazioni che spesso possono condurre ad errori inaccettabili: si parlerà pertanto di metodi "esatti".

In questo capitolo ci si propone di fornire un'impostazione generale della soluzione di campi fluidodinamici con i metodi a pannelli, i più importanti ed attuali dei quali (dal punto di vista concettuale e da quello applicativo) saranno descritti in dettaglio.

In generale, i metodi a pannelli sono specificamente impiegabili per il calcolo di flussi potenziali subsonici e supersonici; comunque molte e diverse sono le loro applicazioni nell'ambito dell'aerodinamica. Si citano qui quelle che sembrano più significative:

- calcolo di campi di moto subsonici, ottenuti a partire dalla soluzione incomprimibile mediante metodi di similitudine;
- calcolo del campo di moto esterno come base di una valutazione degli effetti della viscosità mediante metodi di strato limite;
- calcolo del flusso non viscoso equivalente (Equivalent Inviscid Flow, EIF), alla base dei metodi di interazione potenziale/viscoso forte o debole;
- individuazione di una soluzione di partenza per metodi di calcolo più complessi (ad esempio, la soluzione numerica delle equazioni di Eulero o di Navier - Stokes);
- determinazione di soluzioni di confronto per modelli fluidodinamici non viscosi più complessi (i modelli comprimibili a potenziale o le equazioni di Eulero).

Applicazioni dei metodi a pannelli possono comunque essere incontrate in altri campi (ad esempio, nell'Elettrostatica), quando comunque il problema è retto dall'equazione di Laplace.

Ci si può porre la domanda se e quali siano i metodi di calcolo alternativi a quelli dei pannelli: in realtà, da un punto di vista strettamente operativo, metodi di analisi che abbiano la stessa efficacia non ne esistono, per molti motivi. Si ricordano comunque le trasformazioni conformi (in una opportuna formulazione inversa), la soluzione numerica diretta dell'equazione di Laplace (ad esempio, con metodi alle differenze finite), le soluzioni, esatte ed approssimate, del problema linearizzato.

Comunque, qualora si fosse interessati alla determinazione della soluzione in moltissimi punti del campo di moto, e non solo sulla superficie del corpo e in un ristretto numero di punti del campo, allora la soluzione numerica diretta dell'equazione di Laplace può essere, probabilmente, più veloce della soluzione con il metodo integrale.

Per lo studio dei metodi a pannelli si può fare riferimento ad un'estesa bibliografia; informazioni di base possono essere trovate in [36], [37].

5.3 Metodi di distribuzione superficiale di singolarità e formulazione integrale

Nei metodi integrali di soluzione del problema (5.1) si assume che il potenziale nel campo sia determinato da una o più distribuzioni armoniche di singolarità esterne al campo di moto (interne al contorno del corpo in esame o disposte sulle superfici); queste distribuzioni non devono necessariamente essere tutte incognite, in quanto alcune possono essere assegnate a priori.

Le modalità di soluzione del problema (5.1) con il metodo dei pannelli sono molte: la qualità della soluzione può essere diversa da metodo a metodo, in dipendenza delle caratteristiche geometriche degli oggetti in esame - spessore, curvatura, presenza di bordi (angolosi o a cuspidi) e di concavità pronunciate, eventuale mancanza di connessione (corpi aperti) - e del tipo di flusso (se portante o non portante, ad esempio).

Conviene qui anticipare che è stata da tempo dimostrata l'opportunità di evitare l'impiego di distribuzioni di singolarità interne, non superficiali: questo sia per motivi di accuratezza numerica - è semplice verificare numericamente che è conveniente disporre le singolarità quanto più possibile vicino al campo di moto - sia per l'impossibilità in certi casi di formulare correttamente il problema, come, ad esempio, per la semplice geometria di Fig. 5.2: pertanto ci si riferirà nel seguito esclusivamente alle distribuzioni superficiali di singolarità.

Una volta imposto a priori che la soluzione verifichi l'equazione di Laplace in tutto il campo (data l'armonicità delle distribuzioni impiegate), l'intensità delle distribuzioni di singolarità incognite deve essere calcolata imponendo solo che sia verificata la condizione di Neumann sulla superficie;



Figura 5.2: Geometria non trattabile aerodinamicamente con singolarità interne

ci si riconduce pertanto a dover risolvere un'equazione integrale, del tipo detto di Fredholm di seconda specie.

Una trattazione generale può essere impostata assumendo di voler usare due diverse distribuzioni di singolarità, una di doppiette e una di sorgenti: è evidente che con questa scelta si include comunque anche il caso che si voglia considerare una distribuzione di vortici se si tiene presente l'equivalenza tra una distribuzione di vortici ed una di doppiette di un ordine superiore.

L'opportunità di assumere distribuzioni di doppiette o di vortici dipende dal tipo di flusso che si sta analizzando. Occorre infatti considerare che, se è vero in generale che il trattamento di una distribuzione di ordine superiore pone maggiori problemi analitici, lavorare con la vorticità può dare notevolissime complicazioni a causa del carattere vettoriale di questo tipo di singolarità: conviene pertanto impiegare distribuzioni di doppiette in campo tridimensionale e distribuzioni di vortici in campo bidimensionale (dove la vorticità è associata ad una sola direzione, quella perpendicolare al campo di moto, e quindi il suo carattere vettoriale nella sostanza perde di significato).

Dette $\sigma(Q)$ e $\mu(Q)$, con $Q \in S$, le intensità (arbitrarie) delle distribuzioni superficiali rispettivamente di sorgenti e di doppiette, si ha, Fig. 5.3,

$$\Phi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\sigma(Q)}{r} dS - \frac{1}{4\pi} \int_S \mu(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS$$

essendo $n = |\mathbf{n}|$, con \mathbf{n} versore normale alla superficie (nel seguito verrà impiegato anche il versore tangente \mathbf{t}), e $r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{r} = Q - P$, dove P è il punto del dominio in cui si valuta l'induzione e Q un generico punto della superficie.

La condizione di Neumann per il problema (5.1) in un punto di S si scrive

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = h(S) = \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\sigma(Q)}{r} dS - \frac{1}{4\pi} \int_S \mu(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS \right] \quad (5.3)$$

ed è questa l'equazione integrale che deve essere soddisfatta dalle funzioni $\sigma(Q)$ e $\mu(Q)$ (che possono essere entrambe incognite).

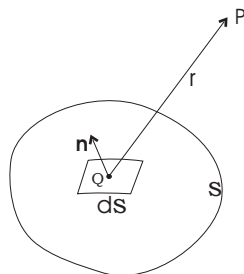


Figura 5.3: Calcolo dell'induzione di una singolarità in un punto del campo

5.4 Alcune considerazioni sulla Terza Identità di Green

In Appendice (B) si sono riportate le tre Identità di Green, di importanza centrale nell'impostazione e nello sviluppo dei metodi a pannelli. Si sviluppano ora alcune considerazioni a partire dalla Terza

Identità nella sua restrizione per funzioni armoniche (B.8), che qui si riscrive:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial \Phi}{\partial n} \frac{1}{r} dS - \frac{1}{4\pi} \int_S \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (5.4)$$

Introducendo il potenziale semplice Φ_s (la sorgente) ed il potenziale doppio Φ_μ (la doppietta)

$$\Phi_s = \frac{1}{4\pi r} \quad \Phi_\mu = \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi_s = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right)$$

si può porre la (B.8) nella forma

$$\Phi(P) = \int_S \left[(\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi) \Phi_s - \Phi (\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi_s) \right] dS = \int_S \left[(\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi) \Phi_s - \Phi \Phi_\mu \right] dS \quad (5.5)$$

Conviene inoltre richiamare alcune considerazioni che sono state sviluppate in precedenza, assumendo ora e nel seguito che \mathbf{V} sia il vettore velocità, e premettendo che, detto \mathbf{t} un *opportuno* versore tangente alla superficie, si ha, Fig. 5.4,

$$\mathbf{V} = V_n \mathbf{n} + V_t \mathbf{t}$$

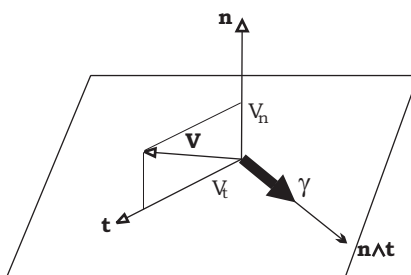


Figura 5.4: Una decomposizione del vettore velocità

Riguardo le discontinuità che le distribuzioni di singolarità introducono attraverso la superficie che le supporta, si indicheranno con i suffissi e ed i rispettivamente l'esterno e l'interno di S (e cioè il campo di moto e l'interno del corpo), mentre $V_{ne} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_e$, $V_{ni} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_i$, $V_{te} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{t}_e$, $V_{ti} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{t}_i$. Nei paragrafi (C.4 e C.3) è mostrato poi che

- una distribuzione di sorgenti introduce una discontinuità nel valore della componente normale della velocità ($\sigma = \Delta V_n = V_{ne} - V_{ni}$);
- una distribuzione di vortici introduce una discontinuità nel valore della componente tangenziale velocità ($\gamma = \Delta V_t = V_{te} - V_{ti}$);
- una distribuzione di doppiette introduce una discontinuità nel valore del potenziale ($\mu = \Phi_e - \Phi_i$).

È inoltre opportuno richiamare anche la proprietà di equivalenza tra due distribuzioni di vortici e di doppiette, le quali inducono lo stesso campo di velocità se è verificata punto per punto la relazione $\gamma = \mathbf{n} \wedge \nabla \mu$ (e si è già detto che in base a questo principio è la stessa cosa, ma solo in teoria, lavorare con una distribuzione di vortici o con una distribuzione di doppiette di ordine superiore). Si vogliono ora introdurre alcune fondamentali conseguenze delle (B.8, 5.5).

UNA PRIMA CONSIDERAZIONE

Dalla (5.5) si ha che un potenziale armonico può sempre essere determinato da una combinazione di due opportune distribuzioni superficiali di singolarità, una di sorgenti, di intensità $\sigma = \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi = V_n(Q)$, un'altra di doppiette, di intensità $\mu = \Phi(Q)$, con $Q \in S$.

Si osservi che l'assegnazione dell'intensità della distribuzione superficiale di sorgenti così come indicato implica necessariamente che l'intensità della distribuzione di doppiette coincida con il valore superficiale del potenziale: questo risultato è alla base dei metodi a pannelli basati sulla Terza Identità di Green.

UNA SECONDA CONSIDERAZIONE

Alla luce delle proprietà prima richiamate si può scrivere

$$\sigma = \Delta V_n = V_{ne} - V_{ni} = V_n = V_{ne} \Leftrightarrow V_{ni} = 0$$

Si supponga allora di voler risolvere il problema *interno* (relativo ad un flusso immaginario)

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= 0 \quad \text{all' esterno di } \mathcal{V} \quad (\text{i.e. nel corpo}) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n_i} &= 0 \quad \text{sulla superficie interna del corpo} \end{aligned} \tag{5.6}$$

consistente nel determinare una funzione $\Phi = \Phi_i$ armonica all'esterno del volume di controllo (e dunque all'interno del corpo immerso nella corrente) che verifichi la condizione (di Neumann) che la velocità normale sia nulla: in virtù della terza proprietà ricavata dalla Prima Identità di Green sulle funzioni armoniche si ha che questo problema ammette la soluzione $\Phi = \Phi_i = \text{costante}$.

Se si tiene presente peraltro che $\mu = \Delta \Phi = \Phi_e - \Phi_i = \Phi_e$, allora $\Phi_i = 0$ (il valore di Φ sulla superficie interna del contorno è nullo), si può concludere che il potenziale è nullo (all'esterno del campo di moto e dunque) all'interno del corpo.

Si può concludere che per risolvere il problema (5.1) utilizzando una assegnata distribuzione di sorgenti $\sigma = V_n$ e una incognita distribuzione di doppiette si può imporre la condizione che Φ_i sia nullo anziché la condizione di Neumann della (5.1): si passa dunque a risolvere un problema del tipo di Dirichlet, e si parlerà di un "metodo sul potenziale interno".

UNA TERZA CONSIDERAZIONE

L'aver assunto $\sigma = V_n$ e $\Phi = \mu$ ha un'importante conseguenza. Essendo

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{n} \wedge \nabla \mu = \mathbf{n} \wedge \nabla \Phi = \mathbf{n} \wedge \mathbf{V} = \mathbf{n} \wedge (V_t \mathbf{t} + V_n \mathbf{n}) = \mathbf{n} \wedge \mathbf{t} V_t$$

$$|\boldsymbol{\gamma}| = |\mathbf{n} \wedge \mathbf{t} V_t| = |V_t|$$

si ha che la vorticità $\boldsymbol{\gamma}$ giace sulla superficie, Fig. 5.4, e la sua intensità coincide con il valore della componente tangenziale della velocità. Si osserva qui esplicitamente che questa proprietà è valida anche nel caso di superfici permeabili (purché ovviamente il problema sia ben posto).

Se poi si tiene presente che

$$\boldsymbol{\gamma} = \Delta V_t = V_{te} - V_{ti} = V_{te} \quad \Rightarrow V_{ti} = \frac{\partial \Phi}{\partial t_i} = 0$$

si può concludere che il problema di Neumann (5.1) può essere risolto imponendo una condizione sulla velocità tangenziale del flusso interno.

La cosa è importante in sè, e presenta molti vantaggi, dal punto di vista numerico, se si impiega una distribuzione incognita di vortici invece che di doppiette: infatti in tal modo si ha un sistema di equazioni la cui matrice dei coefficienti è ben condizionata, al contrario di quella che si avrebbe imponendo direttamente la condizione di Neumann, in quanto la diagonale principale risulta essere dominante. È peraltro evidente che imporre $V_{ti} = 0$ su S equivale a risolvere un problema di Dirichlet.

IN RIFERIMENTO AL POTENZIALE DI PERTURBAZIONE

È sicuramente conveniente operare, dal punto di vista applicativo, introducendo una decomposizione del potenziale in una parte “asintotica” ed in una di perturbazione. Assumendo come parte asintotica il potenziale del flusso uniforme (che è armonico) si ha $\Phi = \Phi_\infty + \varphi$ (per un flusso uniforme a incidenza α il potenziale (armonico) è $\Phi_\infty = x \cos \alpha + z \sin \alpha$).

Il problema di Neumann (5.1) può essere allora scritto come

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= 0 && \text{in } \mathcal{V} \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} &= h(S) - \frac{\partial \Phi_\infty}{\partial n} && \text{su } S \end{aligned} \quad (5.7)$$

e la (B.8) può essere scritta come

$$\Phi_\infty(P) + \phi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{\partial \Phi_\infty}{\partial n} \frac{1}{r} - \Phi_\infty \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS + \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{1}{r} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS$$

mentre dall'essere Φ_∞ armonico segue che

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{1}{r} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS = \int_S \left[(\mathbf{n} \cdot \nabla \phi) \phi_s - \phi (\mathbf{n} \cdot \nabla \phi_s) \right] dS = \int_S \left[(\mathbf{n} \cdot \nabla \phi) \phi_s - \phi \phi_\mu \right] dS$$

Si vede quindi che tutte le considerazioni svolte per il potenziale totale Φ possono essere riprese per il potenziale della perturbazione; in particolare, essendo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_\infty}{\partial n} + \frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{n} + v_n = h(S)$$

l'intensità della distribuzione di sorgenti da assegnare è

$$\sigma = \frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla \phi = v_n = h(S) - \mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{n}$$

Inoltre l'intensità della distribuzione di doppiette coincide con il valore del potenziale della perturbazione ($\phi = \mu$) e l'intensità della vorticità equivalente coincide con il valore assoluto della componente tangenziale della velocità di perturbazione:

$$\begin{aligned} \gamma &= \mathbf{n} \wedge \nabla \mu = \mathbf{n} \wedge \nabla \phi = \mathbf{n} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{n} \wedge (v_n \mathbf{n} + v_t \mathbf{t}) = \mathbf{n} \wedge v_t \mathbf{t} \\ |\gamma| &= |\mathbf{n} \wedge v_t \mathbf{t}| = |v_t| \end{aligned}$$

Limitatamente al campo bidimensionale, la vorticità γ ($= \gamma \mathbf{j}$, dove \mathbf{j} è il versore dell'asse trasversale y) può essere trattata come una grandezza scalare, e questa relazione fornisce direttamente il valore della componente tangenziale della velocità una volta nota la vorticità superficiale (ovvero l'intensità della distribuzione di doppiette) come

$$V_t = V_{\infty t} + \gamma$$

È quindi possibile ottenere la velocità tangenziale senza ricorrere alla relativa matrice di influenza.

Per quanto riguarda il problema interno, si ha che

$$\sigma = \Delta v_n = v_n = v_{ne} = v_{ne} - v_{ni} \Rightarrow v_{ni} = 0$$

e quindi la soluzione del problema *interno*

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{all' esterno di } \mathcal{V} \quad (\text{i.e. nel corpo})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n_i} = 0 \quad \text{sulla superficie interna del corpo}$$

ammetterà la soluzione $\phi = \phi_i = \text{costante}$. Se poi si tiene presente che il potenziale asintotico è continuo, per le note proprietà delle distribuzioni di doppiette si ha che il potenziale interno della perturbazione è nullo ($\phi_i = \phi = 0$): imporre questa condizione equivale a risolvere il problema di Neumann (5.7).

È semplice infine mostrare come si riconduce questo problema ad un problema di Dirichlet per il potenziale interno della perturbazione.

CONCLUSIONI

La soluzione teorico/numerica del problema (5.1) può seguire due diverse impostazioni, con differenti peculiarità e, di conseguenza, differenti qualità:

- mediante distribuzioni arbitrarie di doppiette e sorgenti (non necessariamente diverse da zero);
- mediante distribuzioni assegnate di doppiette o di sorgenti.

Per ognuno di questi approcci si possono generare poi differenti metodi, ognuno con le proprie caratteristiche. In tal senso si fornisce nel seguito un quadro sintetico delle caratteristiche comuni dei metodi a pannelli, indicando quindi quelli più diffusi, distinguendo i metodi basati sull'Identità di Green da quelli basati su distribuzioni arbitrarie; saranno sviluppati nei capitoli successivi alcuni dei metodi qui introdotti.

5.5 I metodi a pannelli

Nei metodi a pannelli la soluzione dell'equazione integrale (5.3) viene effettuata per via numerica. I punti salienti di un generico metodo a pannelli possono essere indicati nel modo seguente:

1. scelta del tipo delle diverse singolarità che si impiegano;
2. discretizzazione del contorno in elementi (piccoli) di forma opportuna, detti pannelli;
3. scelta delle leggi di variazione superficiale delle distribuzioni di singolarità sui pannelli secondo opportuni parametri;
4. scelta delle più opportune condizioni ausiliarie di chiusura;
5. riduzione (in genere per via analitica) dell'equazione integrale (5.3) e delle condizioni ausiliarie ad un sistema di equazioni lineari aventi come incognite i parametri (solo quelli incogniti!) delle leggi di distribuzione di singolarità;
6. soluzione del sistema di equazioni e determinazione delle distribuzioni di singolarità;
7. calcolo del campo di moto laddove si è interessati e calcolo dei coefficienti aerodinamici globali.

È necessario rimandare a trattazioni specialistiche per uno studio dettagliato di tutti questi punti. Si possono comunque fornire in quest'ambito alcune informazioni a carattere del tutto generale, facendo peraltro esplicitamente presente che molte di queste informazioni potranno risultare più chiare dopo che si sia effettuato lo studio dettagliato di alcuni degli argomenti trattati successivamente.

1. Il tipo di singolarità da impiegare dipende dal tipo di flusso (se bidimensionale o tridimensionale, se portante o non portante) e dalle caratteristiche del campo di moto (e quindi, in definitiva, dal corpo la cui aerodinamica si intende analizzare e dall'angolo di attacco).
2. Si possono avere pannelli piani -il caso più semplice, Fig. 5.5, ripresa dal paragrafo (3.3)- o curvi, descritti da leggi diverse (nel caso più semplice, elementi di un paraboloide); si tenga peraltro presente che il calcolo dei parametri che individuano una discretizzazione a pannelli curvi è molto più complesso rispetto al caso dei pannelli piani (e comporta un tempo di calcolo in genere non trascurabile): quest'aspetto interviene nella valutazione sulla convenienza, nell'economia complessiva del calcolo, dell'impiego di metodi di ordine superiore allo scopo di ridurre il numero di pannelli.

È da notare che, mentre nel caso bidimensionale la schematizzazione del contorno con elementi piani fornisce una descrizione poligonale approssimata, ma continua, per superfici tridimensionali l'impiego di pannelli piani quadrilateri introduce, nel caso di geometrie arbitrarie,

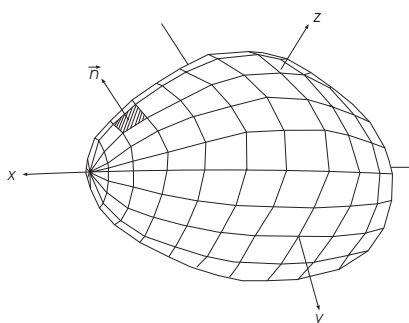


Figura 5.5: Discretizzazione di una superficie con pannelli piani

una perdita di connessione nella descrizione della superficie: questo fatto può introdurre errori numerici particolarmente importanti in certi casi, per la presenza dei cosiddetti 'leakage flows'.

3. Per una distribuzione di sorgenti non è richiesto (e quindi non conviene imporre) alcun requisito di continuità, come mostrato, per il caso bidimensionale, in Fig. 5.6, ed è pertanto possibile utilizzare distribuzioni costanti a tratti. Per la vorticità occorre invece assumere

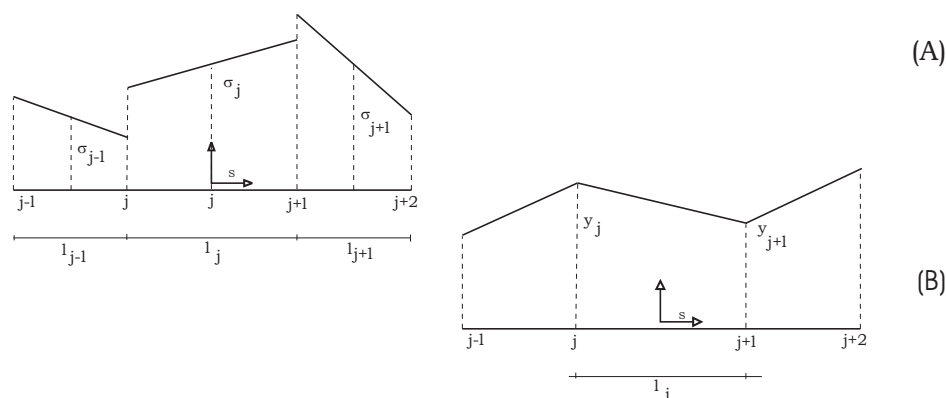


Figura 5.6: Distribuzioni lineari di sorgenti (A) e vortici (B) in campo 2-D

una distribuzione almeno lineare, Fig. 5.6, (o, per l'equivalenza tra vortici e doppiette, Fig. 5.7, una distribuzione quadratica per le doppiette): può essere infatti delicato lavorare con una distribuzione discontinua di vortici perché ciò significa introdurre vortici concentrati di intensità finita agli estremi dei pannelli (e questo comporta errori numerici non trascurabili nella soluzione).

D'altra parte, una distribuzione costante 3-D di doppiette equivale a un anello vorticoso costituito da un vortice chiuso, che corre lungo il bordo del pannello (in caso bidimensionale, due vortici controrotanti uguali ed opposti disposti agli estremi del pannello), mentre una distribuzione linearmente variabile continua di doppiette equivale a una vorticità costante (quindi superficialmente discontinua) sui pannelli: pertanto si può sostituire la vorticità linearmente variabile con continuità solo con una distribuzione quadratica di doppiette.

Occorre comunque tenere presente che non ha senso impiegare distribuzioni di singolarità e discretizzazioni della geometria aventi ordine di accuratezza non omogeneo (ad esempio, distribuzioni di singolarità quadratiche e pannelli piani) in quanto dominerebbe l'accuratezza della schematizzazione di ordine più basso. Inoltre si deve considerare che il numero di

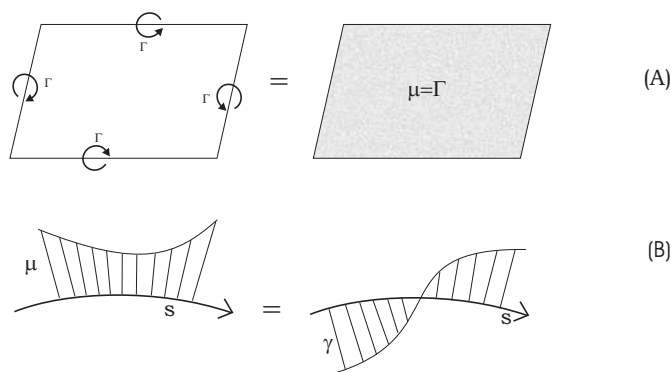


Figura 5.7: Equivalenza doppiette-vortici: A) caso 3-D, B) caso 2-D

operazioni necessarie per valutare l'induzione di una distribuzione di singolarità cresce almeno di un ordine di grandezza al crescere dell'ordine della distribuzione.

4. La qualità della soluzione, in termini di accuratezza e di rispondenza al modello fisico matematico che si è assunto, dipende fortemente dal tipo di eventuali condizioni aggiuntive che è necessario, in certi casi, introdurre (ad esempio, per flussi portanti bidimensionali e per flussi tridimensionali).
5. La costruzione del sistema di equazioni lineari è, dal punto di vista computazionale, la fase più onerosa per metodi a pannelli di ordine superiore in campo tridimensionale. In realtà, assieme alla costruzione del sistema di equazioni si procede anche alla costruzione delle matrici ausiliarie di influenza per il calcolo della velocità tangenziale: ora in campo bidimensionale c'è solo una matrice ausiliaria, mentre in caso tridimensionale ve ne sono tre, e ciascuna di queste ha lo stesso carico computazionale della matrice del sistema di equazioni (e inoltre il numero dei pannelli è maggiore di almeno un ordine di grandezza).

Un problema operativo non trascurabile, anzi fondamentale quando si analizzano configurazioni complesse, è la necessità di disporre di adeguata memoria di massa per l'allocazione dei dati.

6. Non c'è un metodo di soluzione del sistema di equazioni che sia superiore in tutti i casi e in tutti i sensi. Un parametro che sicuramente interviene nella valutazione è il tempo di calcolo, legato al rango della matrice, che dipende a sua volta dal numero di pannelli (in campo bidimensionale questo numero è di ordine 10^2 , e diventa di ordine $10^3 - 10^4$ per flussi tridimensionali): all'aumentare del numero di equazioni diventa sempre più conveniente impiegare i metodi iterativi rispetto a quelli diretti, ma la scelta può dipendere dalle caratteristiche dall'elaboratore che si utilizza.

Inoltre un'indicazione può venire dal tipo di applicazione che si sta facendo del calcolo del flusso potenziale: ad esempio, per certe formulazioni della tecnica iterativa di interazione potenziale/viscoso è conveniente calcolare, una tantum, la matrice inversa della matrice del sistema di equazioni, anche se l'operazione di inversione è molto più onerosa della soluzione di un sistema.

Ulteriori importanti fattori possono essere *a*) la scelta delle singolarità impiegate e *b*) il modo di imporre la condizione di Neumann; questi due fattori condizionano pesantemente il grado di determinazione della matrice del sistema, [14] (ad esempio, se si formula direttamente la condizione di Neumann, per distribuzioni di sorgenti il sistema risulta sempre ben condizionato, nel caso di vorticità è vero il contrario): è noto che i metodi iterativi di soluzione possono essere scarsamente convergenti, e anche i metodi diretti non sono tutti equivalenti, dal punto di vista della stabilità, [14].

7. Tutti i calcoli preliminari per queste due fasi finali, che hanno un carico computazionale abbastanza ridotto, sono già stati effettuati nelle fasi precedenti 2 e 5.

Negli anni tra il 1960 ed il 1990 le industrie aerospaziali hanno fatto grandi investimenti per sviluppare codici di calcolo a pannelli per l'analisi aerodinamica di velivoli completi in campo subsonico e supersonico, ad esempio [38].

DISTRIBUZIONI SUPERFICIALI INCOGNITE DI SORGENTI O VORTICI

In questo e nel successivo paragrafo si citano alcuni tra i metodi più importanti impiegati per la soluzione di campi bidimensionali (si ricorda che in questo caso si impiegano distribuzioni di vortici e non di doppiette, e che le distribuzioni di sorgenti sono continue a tratti mentre quelle di vortici devono essere continue su tutta la superficie). I metodi qui richiamati saranno descritti in seguito.

- Metodo Douglas - Neumann per il campo non portante determinato da un flusso asintotico uniforme, basato su una distribuzione di sorgenti, [39].
- Metodo Douglas - Neumann per il flusso di base di pura circolazione, [40], generato da una assegnata distribuzione di vortici uniforme (di intensità unitaria), anch'esso basato su una distribuzione di sorgenti (è bene osservare che anche questa soluzione è non portante).
- Metodo Douglas - Neumann per il campo portante (è una combinazione dei due metodi ora citati, quando si consideri incognita l'intensità della distribuzione di vortici, e se ne determini in modo univoco il valore imponendo un vincolo sulla circolazione).
- Metodo basato su una distribuzione variabile di vortici e una uniforme (incognita) di sorgenti, [41].
- Metodo delle singolarità simmetriche, [42], in cui si assumono distribuzioni di sorgenti e vortici tali che per ciascuna di esse l'intensità in punti corrispondenti del dorso e del ventre sia uguale (si fa presente che in questo metodo è presente un meccanismo di controllo -di fondamentale importanza- dell'intensità delle sorgenti, la quale non può quasi mai divergere).

Si dovrebbero anche citare i metodi basati sulla sola distribuzione di vortici: ma si può allora pensare, per un problema di Neumann con $V_n = 0$, di avere assunto $\sigma = V_n$, ricadendo quindi nell'applicazione della Terza Identità di Green.

DISTRIBUZIONI SUPERFICIALI ASSEGNATE DI SORGENTI O VORTICI

Come si è visto, la Terza Identità di Green consente di affermare che il valore di un potenziale armonico in un dominio può essere ottenuto come somma di due diverse distribuzioni superficiali, una di sorgenti (di intensità pari al valore della derivata normale del potenziale), l'altra di doppiette (di intensità pari al valore del potenziale). È altresì evidente che nella risoluzione di un problema di Neumann o di Dirichlet non è possibile assegnare entrambe le distribuzioni. Conviene inoltre ricordare che le forme funzionali per la descrizione delle distribuzioni sono le stesse che si hanno per i metodi basati su distribuzioni arbitrarie di singolarità.

I vantaggi che si possono avere usando il metodo basato sulla Terza Identità di Green possono essere riassunti nel modo seguente:

- eliminazione di fenomeni di instabilità della soluzione numerica causata, spesso, dal valore elevato che le distribuzioni di sorgenti - se non "controllate" come in questo caso - possono assumere per corpi molto sottili ad alta incidenza;
- l'intensità delle distribuzioni di singolarità è direttamente legata alla perturbazione, e quindi sono eliminati possibili errori residui;
- l'esistenza di una relazione diretta tra l'intensità delle singolarità e la velocità sulla superficie può semplificare i calcoli e offrire procedure alternative di calcolo;

- oltre che con una procedura basata sulla condizione di Neumann sulla velocità normale si può risolvere il problema (5.1) imponendo condizioni direttamente sul potenziale interno oppure sulla velocità tangenziale interna, e queste procedure alternative possono essere convenienti.

Questi aspetti potranno comunque essere valutati ed apprezzati concretamente solo dopo che siano stati sviluppati ed applicati estensivamente uno o più metodi basati sulle distribuzioni arbitrarie di singolarità.

Si fa presente che nell'analisi aerodinamica (che si riconduce al problema di Neumann) si assegna l'intensità della distribuzione di sorgenti e si determina quella della vortici; viceversa, per un problema di *design* ci si riconduce al problema di Dirichlet: quando si assegna la desiderata distribuzione di velocità tangenziale si assegna anche la relativa distribuzione di vortici, cfr. par. 4, e quindi il valore del potenziale sulla superficie.

Limitandosi in quest'ambito al problema di Neumann, è allora da ritenersi assegnata la distribuzione di sorgenti, che sarà

- $\sigma = h(s)$ (in riferimento al potenziale totale)
- $\sigma = h(s) - V_{\infty n}$ (in riferimento al potenziale della perturbazione)

In entrambi questi casi la vorticità è rappresentativa della velocità tangenziale: $\gamma = \mathbf{V}_t$ nel primo caso, $\gamma = \mathbf{v}_t$ nel secondo caso.

Per calcolare l'incognita distribuzione di vortici si può procedere in una delle seguenti maniere, [43], [44], [45]:

- imporre il valore della derivata normale del potenziale sulla superficie;
- imporre che il valore del potenziale all'interno del corpo sia costante;
- imporre che la velocità tangenziale sulla parte interna della superficie sia nulla.

È opportuno notare che il contributo dell'assegnata distribuzione di sorgenti nel sistema di equazioni compare come parte del termine noto.

Poiché in questo caso si tratta di un metodo a vortici, è ragionevole supporre che la prima procedura, contrariamente alle altre due, possa condurre ad un sistema di equazioni mal condizionato.

METODI BASATI SULLA SOLA DISTRIBUZIONE DI VORTICI

Un metodo che assume la sola distribuzione (incognita) di vortici può essere riguardato come basato sulla Terza Identità di Green in termini di potenziale totale se le superfici sono impermeabili; infatti in questo caso $h(S) = 0$, e quindi $\sigma(P) = 0 \quad \forall P \in S$. Su ciascun punto della superficie allora l'intensità della vorticità coincide con il valore della velocità tangenziale; inoltre il potenziale all'interno del corpo assume valore identicamente nullo, e quindi lo stesso accade per il valore della velocità tangenziale.

Particolare rilievo sembra assumere in campo bidimensionale il metodo di Oeller, nel quale la distribuzione di vortici viene determinata imponendo che sul contorno del corpo il valore della funzione di corrente sia costante.

5.6 I metodi a pannelli basati sulla Terza Identità di Green

5.6.1 La soluzione generale del problema

Si riprendono qui, e si ampliano, alcuni dei contenuti dei paragrafi precedente. La trattazione è consistente con quanto implementato nel noto codice PMARC/CMARC, di largo uso nell'Aerodinamica applicata, per l'analisi ed il disegno, in campo aerospaziale.

Per lo scopo di questo paragrafo si descrive schematicamente, in Fig. 5.8, il problema matematico costituito dall'equazione di Laplace e dalle condizioni al contorno.

Un corpo di forma arbitraria, delimitato dalla superficie S_B , è racchiuso in un volume \mathcal{V} di frontiera esterna S_∞ . Le condizioni al contorno sono applicate sulle superfici S_B e S_∞ , la normale \mathbf{n} è definita rivolta verso l'esterno della regione \mathcal{V} di interesse. È definita anche la superficie S_W che descrive la scia: S_W viene assunta come superficie (infinitamente) sottile. È quindi $S = S_B + S_\infty + S_W$.

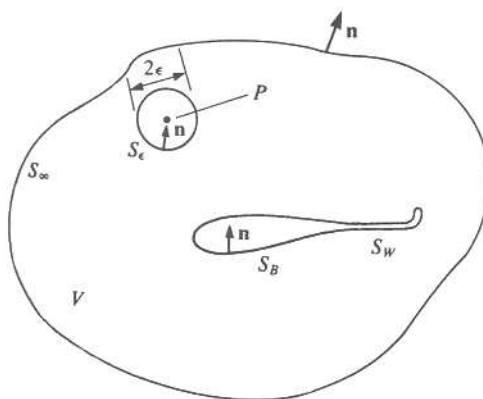


Figura 5.8: Descrizione del problema del moto a potenziale

È possibile ottenere una soluzione generale del problema descritto applicando le identità di Green al volume \mathcal{V} .

Si assuma $A = \frac{1}{r}$, dove r è la distanza da un generico punto $P(x, y, z)$, e sia Φ è il potenziale di velocità (armonico) in \mathcal{V} . La Seconda Identità di Green (B.5) diventa allora

$$\int_S \left(\frac{1}{r} \nabla \Phi - \Phi \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (5.8)$$

mentre la Terza Identità (B.8) si scrive

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{1}{r} \nabla \Phi - \Phi \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (5.9)$$

Si supponga adesso di essere interessati al campo di moto interno ad S_B e quindi al *potenziale interno* Φ_i ; in tal caso il punto P risulta esterno ad S_B , ed applicando la (5.8) si ha

$$0 = \frac{1}{4\pi} \int_{S_B} \left(\frac{1}{r} \nabla \Phi_i - \Phi_i \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{n} dS \quad (5.10)$$

in cui il vettore \mathbf{n} è orientato verso l'esterno da S_B . Sommando le equazioni (5.9) e (5.10) si ottiene un'espressione analoga alla (5.9), ma che include l'influenza del potenziale interno:

$$\Phi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_B} \left[\frac{1}{r} \nabla (\Phi - \Phi_i) - (\Phi - \Phi_i) \nabla \frac{1}{r} \right] \cdot \mathbf{n} dS + \frac{1}{4\pi} \int_{S_W + S_\infty} \left(\frac{1}{r} \nabla \Phi - \Phi \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{n} dS \quad (5.11)$$

Il contributo al potenziale dato dall'integrale esteso alla superficie S_∞ , considerata lontana da S_B , può essere scritto come

$$\Phi_\infty(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_\infty} \left(\frac{1}{r} \nabla \Phi - \Phi \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{n} dS \quad (5.12)$$

Esso dipende dal sistema di riferimento scelto: ad esempio, in un riferimento inerziale in cui il corpo si muove in una corrente uniforme, può essere considerato costante nella regione; inoltre,

essendo la superficie S_W della scia sottile, $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ risulta essere continua attraverso essa, ed il suo contributo al secondo integrale della (5.11) svanisce. La (5.11) diventa allora

$$\Phi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_B} \left[\frac{1}{r} \nabla(\Phi - \Phi_i) - (\Phi - \Phi_i) \nabla \frac{1}{r} \right] \cdot \mathbf{n} dS + \frac{1}{4\pi} \int_{S_W} \Phi \nabla \frac{1}{r} \cdot \mathbf{n} dS + \Phi_\infty(P) \quad (5.13)$$

Analogamente alla (5.9), la (5.13) fornisce il valore di $\Phi(P)$ in termini dei valori di Φ e $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ al contorno, riconducendo quindi il problema alla determinazione di queste quantità.

Introducendo le grandezze

$$\begin{aligned} -\mu &= \Phi - \Phi_i \\ -\sigma &= \frac{\partial\Phi}{\partial n} - \frac{\partial\Phi_i}{\partial n} \end{aligned}$$

chiamate rispettivamente *intensità di doppietta* e *intensità di sorgente*, la (5.13) diventa

$$\Phi(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_B} \left[\sigma \left(\frac{1}{r} \right) - \mu \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{n} \right] dS + \frac{1}{4\pi} \int_{S_W} \mu \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{n} dS + \Phi_\infty(P) \quad (5.14)$$

L'intensità di doppietta μ presente nell'integrale esteso alla superficie S_W è la differenza tra il potenziale sulle superfici superiore ed inferiore della scia: nel caso di scia di spessore nullo risulta essere $\mu = -\Delta\Phi$. Il vettore \mathbf{n} è la normale alla superficie, orientata nella direzione della doppietta. Sostituendo $\mathbf{n} \cdot \nabla$ con $\frac{\partial}{\partial n}$ si ha

$$\Phi(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_B} \left[\sigma \left(\frac{1}{r} \right) - \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS + \frac{1}{4\pi} \int_{S_W} \left[\mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS + \Phi_\infty(P) \quad (5.15)$$

E' immediato notare dalla (5.15) che sorgenti e doppiette soddisfano la condizione al contorno $\Phi(P) = \Phi_\infty$ per $r \rightarrow \infty$, mentre per $r \rightarrow 0$ il nucleo della loro induzione diventa singolare, da cui il loro nome di *singularità*.

Dunque, per ottenere il potenziale di velocità nella regione \mathcal{V} , occorre determinare l'intensità della distribuzione di doppiette e di sorgenti sulla superficie; tale combinazione di singularità non è unica, ma verrà opportunamente scelta in base allo specifico problema fisico. Casi particolari si hanno in cui un problema è modellato con una distribuzione superficiale di sole doppiette o di sole sorgenti, per ottenere le quali occorre imporre rispettivamente

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial n} = \frac{\partial\Phi}{\partial n} \quad \text{su } S_B$$

oppure

$$\Phi_i = \Phi \quad \text{su } S_B$$

La soluzione generale richiede l'integrazione delle soluzioni elementari su tutta la superficie S su cui sono distribuite, in quanto ogni singularità influenza l'intero campo di moto. Per ottenere la soluzione di uno specifico problema fluidodinamico è quindi necessario trovare la distribuzione dell'intensità delle singularità tale da soddisfare le condizioni al contorno. Assegnando il potenziale sulla superficie del corpo si parla di un problema del tipo di *Dirichlet*; tale tecnica è largamente usata per risoluzioni numeriche nei metodi a pannelli. In alternativa, seguendo un approccio più fisico e diretto, si può assegnare direttamente la velocità normale sulle superfici solide, andando quindi ad affrontare un problema del tipo di *Neumann*; in tal caso la velocità nel campo di moto è ottenuta per derivazione del potenziale:

$$\nabla\Phi = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_B} \sigma \nabla \left(\frac{1}{r} \right) dS + \frac{1}{4\pi} \int_{S_B+S_W} \mu \nabla \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS + \nabla\Phi_\infty \quad (5.16)$$

E' inoltre possibile l'impiego di entrambe le condizioni nella risoluzione di uno stesso problema, assegnando la condizione di Neumann su alcune superfici e la condizione di Dirichlet sulle altre.

5.6.2 La modellazione nei metodi a pannelli

Per motivi di accuratezza numerica delle soluzioni è opportuno operare con il potenziale di perturbazione, per cui $\Phi = \Phi_\infty + \varphi$; inoltre per un flusso uniforme è

$$\Phi_\infty = U_\infty x + V_\infty y + W_\infty z \quad (5.17)$$

avendo introdotto le componenti della velocità asintotica.

Nel caso si voglia imporre una condizione al contorno di tipo di Neumann, la condizione da soddisfare sulla superficie del corpo sarà

$$\nabla(\phi + \Phi_\infty) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (5.18)$$

Si suppone di trattare corpi impermeabili. La scia viene modellata come una distribuzione di doppiette o, equivalentemente, con un piano di vortici.

Si ricorda che la condizione al contorno che esprime l'annullamento del disturbo infinitamente lontano dal corpo è automaticamente soddisfatta dalle singolarità qui considerate.

Neumann

La condizione di Neumann (5.3) per il problema (5.1) in un punto di S si scrive

$$\left(\frac{1}{4\pi} \int_{body+wake} \mu \nabla \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS - \frac{1}{4\pi} \int_{body} \sigma \nabla \left(\frac{1}{r} \right) dS + \nabla \Phi_\infty \right) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (5.19)$$

Inoltre per la chiusura del problema matematico, e quindi per garantire l'unicità delle soluzioni, occorrono considerazioni il più possibile basate sulla fisica del problema (ad esempio, sull'ammontare della circolazione attorno ad opportuni circuiti intorno alla superficie S_B).

Dal punto di vista dell'Analisi Matematica l'equazione (5.19) è da imporre su tutti i punti della superficie. Dal punto di vista numerico essa viene imposta in un certo numero di punti sulla superficie opportunamente individuati, e si ridurrà ad un sistema di equazioni algebriche.

Dirichlet

Bisogna notare che se per una superficie chiusa la condizione al contorno è quella di flusso normale nullo (5.18) e se all'interno del corpo non sono presenti singolarità, il potenziale interno è costante,

$$\Phi_i = cost \quad (5.20)$$

ed il suo valore può essere imposto nullo.

Per una condizione al contorno del tipo di Dirichlet bisogna imporre il valore del potenziale all'interno della superficie S_B . Tramite la (5.20) quindi la condizione (5.18) di flusso normale nullo sulla superficie è imposta come

$$\Phi_i = (\phi + \Phi_\infty)_i = cost$$

Distribuendo le singolarità sulla superficie e ponendo il punto $P(x, y, z)$ al suo interno, la (5.15) conduce all'espressione del potenziale interno

$$\Phi_i(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{body+wake} \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_{body} \sigma \left(\frac{1}{r} \right) dS + \Phi_\infty = cost \quad (5.21)$$

Questa equazione, che è alla base dei metodi basati sull'imposizione indiretta della condizione al contorno, può portare a diversi tipi di soluzioni. Supponendo che $\Phi_i = (\phi + \Phi_\infty)_i = 0$, l'equazione 5.21 può essere risolta sulla superficie S_B , ma la distribuzione di singolarità risultante includerà il potenziale Φ_∞ e avrà quindi elevata intensità. Se si impone invece $\Phi_i = (\phi + \Phi_\infty)_i = \Phi_\infty$, l'equazione (5.21) può essere scritta come

$$\frac{1}{4\pi} \int_{body+wake} \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_{body} \sigma \left(\frac{1}{r} \right) dS = 0 \quad (5.22)$$

Si ricorda che, come mostrato nel paragrafo (5.4), affinché la (5.22) sia valida, deve essere

$$\sigma = \mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_\infty \quad (5.23)$$

con \mathbf{n} rivolto verso l'interno della superficie.

Unicità della soluzione e trattamento della scia

Si considera ora un'ala portante con la relativa scia, come schematizzato in Fig. 5.9. I vortici

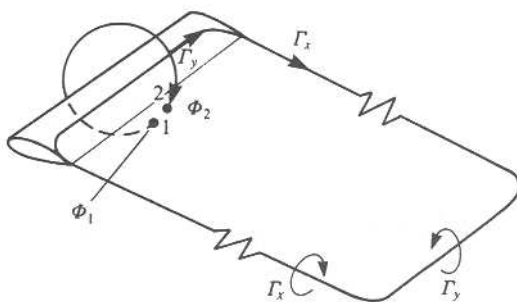


Figura 5.9: Sistema vorticoso creato da un'ala finita in moto stazionario

aderenti sono schematizzati per semplicità come un'unica linea vorticoso di intensità Γ che, in base ai teoremi di Helmholtz, non può nascere o terminare in un fluido; è allora possibile scrivere

$$\frac{\partial \Gamma_x}{\partial x} = \frac{-\partial \Gamma_y}{\partial y}$$

da cui, come mostrato in Fig. 5.9, si ha che il problema è modellato con un unico vortice chiuso di intensità costante. La circolazione è data da

$$\Gamma = \int_1^2 \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \quad (5.24)$$

dove i punti 1 e 2 sono riferiti alle superfici inferiore e superiore della scia, supposta sottile.

Inoltre, essendo la circolazione ad una generica sezione alare pari a Γ , deve esistere una discontinuità del potenziale al bordo di uscita pari a

$$\phi_2 - \phi_1 = \Gamma$$

Da quanto detto risulta che occorre modellare opportunamente la scia in modo tale da garantire la continuità della circolazione oltre l'ala, e ciò può essere fatto imponendo l'intensità della scia al bordo di uscita dell'ala e la sua geometria (posizione e forma). L'intensità della scia al bordo di uscita può essere fissata imponendo la condizione di Kutta bidimensionale

$$\gamma_{TE} = 0$$

che può essere riscritta, ricordando che nel caso bidimensionale risulta $\frac{\partial \mu(x)}{\partial x} = -\gamma(x)$, come

$$\mu_{TE} = \text{cost} = \mu_w$$

oppure

$$\mu_u - \mu_l = \mu_w$$

ed ancora, in termini di circolazione

$$\Gamma_u - \Gamma_l = \Gamma_w$$

e cioè μ è costante nella scia ed è uguale al valore assunto al bordo di uscita. Per la determinazione della forma della scia bisogna assumere che essa non genera portanza, non essendo solida.

La forza aerodinamica $\Delta \mathbf{F}$ generata da un *vortex sheet* di intensità γ è, in base al teorema di Kutta-Joukowski

$$\Delta \mathbf{F} = \rho \mathbf{v} \times \gamma \quad (5.25)$$

Poiché da questa relazione discende che $\Delta \mathbf{F} = 0$ solo se la velocità locale è parallela al vettore vorticità γ , si ottiene la condizione per la geometria della scia

$$\mathbf{v} \times \gamma_w = 0$$

oppure

$$\gamma_w \parallel \mathbf{v} \quad (5.26)$$

Volendo una rappresentazione della scia costituita da uno strato di doppiette bisogna notare che $\gamma_w = -\nabla \mu_w$; se la scia non genera forza aerodinamica risulta

$$\mathbf{v} \times \nabla \mu_w = 0,$$

da cui si ottiene la condizione per i pannelli di scia, in termini di doppiette:

$$\mu_w = \text{cost}$$

I bordi dei pannelli risultano inoltre paralleli alla velocità locale, in base alla (5.26); questa condizione, da cui dipende notevolmente la bontà della soluzione, è però difficile da soddisfare, perché la velocità locale non è inizialmente nota. Un metodo per definire la forma iniziale della scia consiste nel supporre che essa lasci l'ala secondo la bisettrice dell'angolo al bordo di uscita; complicazioni possono però nascere per le porzioni di scia lontane dal bordo di uscita.

La soluzione numerica

Una volta assicurata la chiusura del problema, è possibile ricondurlo ad un sistema di equazioni algebrico lineare discretizzando le superfici e le relative distribuzioni di singolarità.

Una generica superficie è quindi suddivisa in porzioni, i *pannelli*, descritte da funzioni del tipo $z = f(x, y)$ in un sistema di riferimento locale; nel processo di discretizzazione i pannelli sono definiti mediante polinomiali di ordine tanto più elevato quanto maggiore è l'accuratezza voluta per la rappresentazione della geometria vera. A causa di una complessità computazionale fortemente crescente, le polinomiali più utilizzate sono comunque di primo e secondo ordine, rispettivamente nella forma

$$z = a_0 + b_1x + b_2y$$

e

$$z = a_0 + b_1x + b_2y + c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2$$

con a , b , c costanti. Questo processo di discretizzazione in pannelli, solitamente quadrangolari, può essere fonte di errori dovuti, oltre all'approssimazione con cui è rappresentata la geometria reale, alla presenza di fessure tra di essi, tali da dare origine a flussi spuri, detti *leakage flows*.

La distribuzione di singolarità viene anch'essa suddivisa in elementi pannelli, coincidenti con quelli in cui è stata suddivisa la superficie, sui quali l'intensità della singolarità può essere assunta costante (ordine zero), linearmente variabile (primo ordine) o parabolica (secondo ordine), analogamente a quanto avviene per la geometria. Non ha senso comunque impiegare distribuzioni di singolarità e discretizzazione della geometria aventi ordine di accuratezza non omogeneo, in quanto sarebbe determinante l'accuratezza della schematizzazione di ordine più basso.

L'elemento tridimensionale più semplice risulta essere allora il pannello quadrilatero, definito da superficie piana e bordi rettilinei, con intensità di singolarità costante. L'utilizzo di elementi di questo tipo permette di avere notevole semplicità di calcolo, a scapito però di un maggior numero di pannelli sulla superficie.

Supponendo che la superficie del corpo sia suddivisa in N pannelli superficiali e N_W pannelli di scia, la condizione al contorno (sia essa di Neumann o di Dirichlet) può essere imposta nei *control*

points dei pannelli; per quanto riguarda la condizione di Dirichlet, i *control points* devono essere posti nel corpo, dove $\Phi_i = \Phi_\infty$; in molti casi però essi possono essere lasciati sulla superficie (verso l'interno). Considerando ad esempio la condizione di Dirichlet, questa può essere riscritta come

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{4\pi} \int_{surf. \ panel} \mu \mathbf{n} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) dS + \sum_{l=1}^{N_W} \frac{1}{4\pi} \int_{wake \ panel} \mu \mathbf{n} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) dS + \sum_{k=1}^N \frac{1}{4\pi} \int_{surf. \ panel} \sigma \left(\frac{1}{r} \right) dS = 0 \quad (5.27)$$

Per ogni *control point* occorre tenere in conto l'influenza di tutti i pannelli di superficie e di scia. Gli integrali presenti nella (5.27) sono estesi al singolo pannello, e rappresentano ognuno l'influenza del pannello sul punto P . Per elementi di intensità di singolarità unitari quest'influenza dipende dalla sola geometria del pannello e risulta essere

$$\frac{1}{4\pi} \int_{1,2,3,4} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS \Big|_k \equiv C_k \quad (5.28)$$

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{1,2,3,4} \left(\frac{1}{r} \right) dS \Big|_k \equiv B_k \quad (5.29)$$

rispettivamente per doppietta e sorgente costanti, avendo indicato con 1, 2, 3, 4 gli angoli dei pannelli (*corner points*) e con k il pannello k -esimo. I coefficienti C_k e B_k sono detti *coefficienti di influenza*: essi sono funzione della sola geometria del pannello e della posizione del punto P .

L'equazione (5.27) può essere scritta allora, per ogni punto interno P , nella forma

$$\sum_{k=1}^N C_k \mu_k + \sum_{l=1}^{N_W} C_l \mu_l + \sum_{k=1}^N B_k \sigma_k = 0 \quad (5.30)$$

che è equivalente alla condizione al contorno.

Se l'intensità delle sorgenti è stata assegnata ($\sigma = \mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_\infty$) e sono stati calcolati i coefficienti di influenza B_k , l'ultimo termine a primo membro della (5.30) è noto e può essere passato a destra nell'equazione.

Inoltre, imponendo la condizione di Kutta, le doppiette di scia possono essere scritte in termini delle doppiette di superficie μ_k , incognite; infatti, se μ_u e μ_l sono le intensità delle doppiette di due corrispondenti pannelli sul dorso e sul ventre al bordo di uscita del corpo e μ_t è l'intensità della doppietta sul pannello di scia adiacente, dalla condizione di Kutta risulta $\mu_t = \mu_u - \mu_l$; da ciò si ricava l'influenza del generico elemento di scia

$$C_t \mu_t = C_t (\mu_u - \mu_l)$$

che può essere sostituita nella (5.30) ponendo

$$A_k = C_k \quad \text{se il pannello non è al T.E.}$$

$$A_k = C_k \pm C_t \quad \text{se il pannello è al T.E.}$$

da cui

$$\sum_{k=1}^N A_k \mu_k = - \sum_{k=1}^N B_k \sigma_k \quad (5.31)$$

L'equazione (5.31), scritta per gli N *control points*, conduce ad un sistema di N equazioni lineari nelle N incognite intensità di doppiette superficiali μ_k

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_N \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1N} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{N1} & b_{N2} & \dots & b_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_N \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

La soluzione numerica di questo sistema è generalmente stabile perché in questa trattazione la distribuzione incognita di μ è relativamente piccola, in quanto legata al solo potenziale di perturbazione. Occorre ricordare che il termine a secondo membro è noto, mentre la matrice dei coefficienti risulta completa; la bontà della soluzione del problema è quindi anche legata alla bontà della risoluzione del sistema (5.32). Ottenute le intensità di doppiette incognite, le velocità tangenziali sul singolo pannello sono, nel suo riferimento locale (l, m, n)

$$v_l = -\frac{\partial\mu}{\partial n}, \quad v_m = -\frac{\partial\mu}{\partial m}$$

mentre la velocità normale è $q_n = -\sigma$. Le suddette derivazioni vengono eseguite numericamente facendo uso dei valori sui pannelli adiacenti.

La velocità totale, ancora nel riferimento locale del pannello k-esimo, è

$$V_k = (V_{\infty l}, V_{\infty m}, V_{\infty n})_k + (v_l, v_m, v_n)_k$$

la cui componente normale sarà ovviamente nulla. La pressione può essere calcolata usando l'equazione (5.2) che, scritta per il singolo pannello, diventa

$$C_{P_k} = 1 - \frac{V_k^2}{V_\infty^2}$$

Il contributo di un pannello al coefficiente di forza aerodinamica, scritto in forma vettoriale, è

$$\Delta C_{F_k} = \frac{-C_{P_k} \Delta S_k}{S} \cdot \mathbf{n}_k$$

che scomposto lungo tre assi ortogonali e sommando le sue componenti nelle direzioni di interesse sugli N pannelli fornisce i coefficienti aerodinamici cercati.

Nel paragrafo 5.6.2 sono stati introdotti i concetti basilari dei metodi a pannelli.

5.6.3 Il metodo a pannelli per flussi instazionari

Per un flusso incomprimibile l'equazione della continuità non include la dipendenza dal tempo, la quale deve essere introdotta attraverso le condizioni al contorno. Il metodo risolutivo proposto nel paragrafo 5.6.2 per flussi stazionari può quindi essere adattato al caso di flussi instazionari semplicemente modificando la condizione al contorno sulle superfici solide e l'equazione di Bernoulli, che dovrà essere usata nella sua forma instazionaria. Inoltre, la scia risulterà più complessa rispetto al caso stazionario.

Nei metodi a pannelli instazionari la soluzione del flusso a potenziale è inclusa in un *time-stepping loop*, a partire dal tempo $t = 0$; durante ogni *time step* del ciclo l'intensità dell'ultima riga di pannelli di scia generata viene calcolata usando la condizione di Kutta, mentre l'intensità dei precedenti pannelli rimane invariata.

Si vogliono ora illustrare i passi fondamentali del procedimento risolutivo, presentati nel diagramma di flusso di Fig. 5.10. Si considerano elementi di singolarità di tipo sorgenti e doppiette costanti distribuite sulla superficie del corpo ed una condizione al contorno di tipo di Dirichlet, la quale, come visto nel paragrafo 5.6.2, si riduce a

$$\sum_{k=1}^N C_k \mu_k + \sum_{l=1}^{N_w} C_l \mu_l + \sum_{k=1}^N B_k \sigma_k = 0 \quad (5.33)$$

e deve essere soddisfatta ad ogni istante di tempo t (comunque quanto si dirà sarà facilmente adattabile a condizioni al contorno di tipo di Neumann).

Occorre ora introdurre un sistema di riferimento inerziale $0, X, Y, Z$ ed un sistema di riferimento o, x, y, z solidale al corpo. Supponendo che siano note traiettoria e velocità sul corpo, la condizione di annullamento della velocità sul corpo diventa

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = (\mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_{\text{rel}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \quad (5.34)$$

in cui $\mathbf{r} = (x, y, z)$ è il vettore posizione di un generico punto nel riferimento mobile, e \mathbf{V}_0 , \mathbf{V}_r , $\boldsymbol{\Omega}$ sono rispettivamente la velocità dell'origine del riferimento solidale al corpo, la velocità relativa e la velocità angolare del riferimento corpo.

Imponendo una condizione al contorno di tipo di Dirichlet la (5.34) darà l'intensità delle sorgenti:

$$\sigma = -\mathbf{n} \cdot (\mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_{rel} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \quad (5.35)$$

Discretizzando la superficie, l'intensità dei pannelli di scia adiacenti al bordo di uscita sarà legata a quella dei corrispondenti pannelli di superficie mediante la condizione di Kutta

$$\mu_{w,l} = (\mu_u - \mu_l)_t \quad (5.36)$$

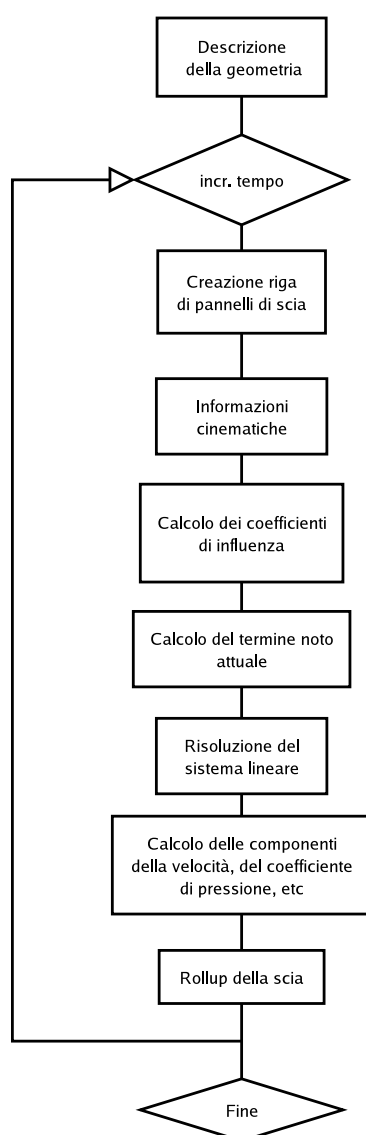


Figura 5.10: Diagramma di flusso per metodi a pannelli instazionari

Si supponga ora che al tempo $t = 0$ i due sistemi di riferimento coincidano; il calcolo inizia al tempo $t = \Delta t$, con Δt durata dei *time step*, in cui viene generata una prima riga di pannelli di scia. La lunghezza, in direzione della velocità, dei pannelli di scia adiacenti al bordo di uscita è

solitamente pari a $0.2 \div 0.3$ volte lo spazio percorso dal bordo di uscita in un *time step*, data da $V_\infty \cdot \Delta t$.

A questo punto la scia consiste di una sola riga di pannelli; la condizione al contorno per il *control point* dell' i -esimo pannello è influenzata dagli N pannelli superficiali e dagli N_w pannelli di scia fin qui generati, ed appare nella forma

$$\sum_{k=1}^N C_{ik} \mu_k + \sum_{l=1}^{N_w} C_{il} \mu_l + \sum_{k=1}^N B_{ik} \sigma_k = 0 \quad (5.37)$$

che per la condizione di Kutta si riduce a

$$\sum_{k=1}^N A_{ik} \mu_k = - \sum_{k=1}^N B_{ik} \sigma_k \quad t = \Delta t \quad (5.38)$$

nelle sole incognite intensità di doppiette superficiali, con $A_{ik} = C_{ik}$ per pannelli non al bordo di uscita e $A_{ik} = C_{ik} \pm C_{il}$ per pannelli al bordo di uscita, i quali rilasciano pannelli di scia.

Durante il secondo *time step* il bordo di uscita risulterà spostato in avanti ed una nuova riga di pannelli di scia può essere creata considerando la nuova posizione del bordo di uscita. La riga di pannelli precedentemente creata al tempo $t - \Delta t$ rimarrà momentaneamente nella sua posizione rispetto al riferimento inerziale, in modo da generare una superficie di scia continua.

Dunque, ad ogni *time step* successivo al primo, vengono rilasciati altri pannelli di scia, di cui è nota l'intensità dai *time step* precedenti. L'influenza dei pannelli di scia precedentemente rilasciati deve allora essere inclusa nella condizione al contorno: non sarà allora più valida la (5.38), che resta valida solo per il primo *time step*, ma la condizione al contorno andrà considerata nella forma

$$\sum_{k=1}^N A_{ik} \mu_k + \sum_{l=1}^{M_w} C_{il} \mu_l + \sum_{k=1}^N B_{ik} \sigma_k = 0 \quad t = \Delta t \quad (5.39)$$

M_w è il numero di pannelli di scia che influenzano la condizione al contorno: non include quindi i pannelli della riga appena generata, ovvero quelli dell'ultima riga della scia. Poiché anche l'intensità delle sorgenti è nota dalla conoscenza della cinematica del moto, il secondo ed il terzo termine della (5.39) sono noti; il sistema generato dalla suddetta equazione, scritta per gli N pannelli superficiali, può allora essere risolto.

Nel caso in cui la geometria del corpo resti invariata, l'inversione della matrice è necessaria una sola volta e non deve essere ripetuta ad ogni *time step*; nel caso in cui il numero di pannelli è elevato, può essere conveniente dal punto di vista computazionale iterare per una nuova soluzione nel tempo invece di conservare in memoria una matrice inversa di grandi dimensioni.

Ottenute le intensità delle doppiette incognite, possono calcolarsi le componenti tangenziali e normali della velocità di perturbazione sui pannelli, cf. par. (5.6.2)

$$v_l = -\frac{\partial \mu}{\partial n} \quad v_m = -\frac{\partial \mu}{\partial m} \quad v_n = \sigma$$

mentre la velocità totale al k -esimo *control point* sarà data dalla somma della velocità cinematica e dalla velocità di perturbazione

$$\mathbf{V}_k = [U(t), V(t), W(t)]_k \cdot (l, m, n)_k + (v_l, v_m, v_n)_k \quad (5.40)$$

ed il coefficiente di pressione sarà dato dalla relazione

$$C_p = 1 - \frac{V^2}{v_{ref}^2} - \frac{2}{v_{ref}^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (5.41)$$

in cui V è la velocità locale del fluido, $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \mu}{\partial t}$ per $\phi_i = 0$, $\mathbf{v}_{ref} = (\mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$.

La forza aerodinamica su un elemento di area ΔS_k sarà

$$\Delta \mathbf{F}_k = -C_{p,k} \left(\frac{1}{2} \rho v_{ref}^2 \right)_k \Delta S_k \mathbf{n}_k \quad (5.42)$$

Nota la velocità locale, i *corner points* dei pannelli di scia possono essere mossi con essa, essendo la scia priva di carico aerodinamico. Per ottenere il *rollup* della scia, ad ogni *time step* viene calcolata la velocità indotta (u, v, w) in ogni *corner point* dei pannelli di scia nel sistema di riferimento inerziale, ottenendo spostamenti pari a

$$(\Delta x, \Delta y, \Delta z)_i = (u, v, w)_i \Delta t \quad (5.43)$$

5.6.4 Calcolo della resistenza indotta mediante l'analisi nel piano di Trefftz

Oltre che mediante l'integrazione delle pressioni sui pannelli, portanza e resistenza indotta possono essere calcolate facendo uso dell'analisi nel piano di Trefftz. Il vantaggio maggiore di questa tecnica consiste nell'utilizzo di un minor numero di pannelli di quanti richiesti dall'integrazione delle pressioni per avere un'accuratezza accettabile.

Considerando il caso di flusso incomprimibile non viscoso, in cui la vorticità è confinata in uno strato sottile, l'equazione di bilancio della quantità di moto fornisce, in termini delle grandezze sulle superfici esterne del volume di controllo di Fig. 5.11, la forza aerodinamica come

$$\mathbf{F} = \iint \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS + \iint \frac{\rho}{2} V^2 \mathbf{n} dS. \quad (5.44)$$

dalla quale, se il volume di controllo è molto grande, si ricava la resistenza indotta

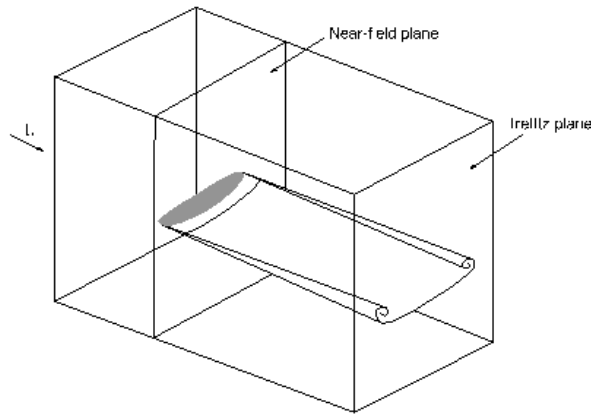


Figura 5.11: Volume di controllo per il calcolo della resistenza indotta

$$D_i = \frac{\rho}{2} \iint (v^2 + w^2 - u^2) dS \quad (5.45)$$

mediante una formula in cui sono presenti le sole componenti della velocità di perturbazione sulla superficie posteriore del volume di controllo della Fig. 5.11.

Nonostante la resistenza sia espressa in termini della velocità di perturbazione nel piano di Trefftz, nascono delle difficoltà dovute al fatto che la velocità deve essere calcolata su un'area molto estesa e molto lontana dall'ala. Queste difficoltà possono essere superate proiettando la scia, così come calcolata in una sezione a valle più o meno prossima all'ala, fino al piano di Trefftz, nella direzione della corrente. Nell'ipotesi di flusso potenziale incomprimibile nel piano ortogonale alla corrente, è possibile scrivere

$$D_i = \frac{\rho}{2} \iint_{Trefftz} (v^2 + w^2) dS = -\frac{\rho}{2} \int_{wake} \Delta \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dl = -\frac{\rho}{2} \int_{wake} \Gamma V_n dl \quad (5.46)$$

in cui Γ è la circolazione alla corrispondente stazione sull'ala e V_n è la velocità indotta dalla scia normale alla traccia della scia. Utilizzando questa tecnica, si evitano i problemi numerici che si hanno in presenza di vortici a grande distanza dal corpo; infatti, per seguire adeguatamente l'andamento del vortice, si rende necessario un numero molto elevato di pannelli di scia, e quindi di pannelli di superficie, rendendo oneroso il calcolo dal punto di vista computazionale. Inoltre, difficilmente si riesce ad ottenere una forma regolare dei vortici molto lontano dal corpo, dopo numerosi *time steps*, specie per scie non predefinite.

5.7 Il metodo Douglas-Neumann in campo 2-D

COEFFICIENTI DI INFLUENZA DI UNA DISTRIBUZIONE UNIFORME DI SORGENTI

Si vogliono calcolare i coefficienti di influenza di una distribuzione di sorgenti costante su ciascun pannello. Si tratta, in concreto, di calcolare, nel riferimento intrinseco del pannello i -esimo, le espressioni della componente normale $A_{i,j}$ e di quella tangenziale $B_{i,j}$ della velocità $\mathbf{V}_{i,j}$ indotta nel pannello i -esimo dalla distribuzione di sorgenti posta sul pannello j -esimo, Fig. 5.12. Le matrici $\{A\}$ e $\{B\}$ vengono definite le matrici di influenza normale e tangenziale.

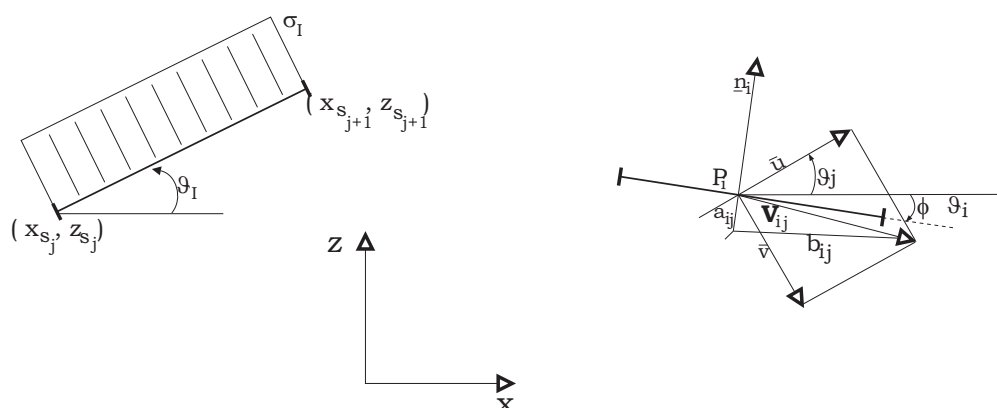


Figura 5.12: Schema per il calcolo dei coefficienti di influenza

Se ϑ_i e ϑ_j sono gli angoli formati con l'asse x rispettivamente dal pannello che contiene il punto di controllo e da quello inducente, è semplice ricavare le espressioni di $A_{i,j}$ e $B_{i,j}$ a partire da quelle di u e v (componenti della velocità indotta calcolate nel riferimento intrinseco del pannello inducente).

CAMPI BASICI A 0° E 90° - IL CAMPO NON PORTANTE

Nella sua impostazione originaria, il problema del campo non portante 2-D viene risolto nel metodo Douglas-Neumann, a partire dalle soluzioni V^0 e V^{90} (campi di base, oppure Onset field nella terminologia anglosassone), relative ai due flussi asintotici uniformi \mathbf{V}_∞^0 e \mathbf{V}_∞^{90} alle incidenze di 0° e 90° , allineati quindi con gli assi x e z rispettivamente.

Per la determinazione dei campi di base occorre trovare la distribuzione di sorgenti che annulla, nei punti di controllo, la componente normale del flusso asintotico; occorre quindi risolvere i sistemi di equazioni lineari

$$\{A\}\{\sigma^0\} + \{V_\infty^0 \cdot \mathbf{n}\} = \{0\}$$

$$\{A\}\{\sigma^{90}\} + \{V_\infty^{90} \cdot \mathbf{n}\} = \{0\}$$

negli incogniti vettori $\{\sigma^0\}$ e $\{\sigma^{90}\}$. Le relative velocità tangenziali si calcolano come

$$\{V_t^0\} = \{V_\infty^0 \cdot \mathbf{t}\} + \{B\}\{\sigma^0\}$$

$$\{V_t^{90}\} = \{V_\infty^{90} \cdot \mathbf{t}\} + \{B\}\{\sigma^{90}\}$$

È importante notare che

- il campo relativo ad un'incidenza α arbitraria può essere calcolato come combinazione lineare dei campi di base V^0 e V^{90} secondo i coefficienti $\cos \alpha$ e $\sin \alpha$;
- la soluzione è non portante in quanto nè il flusso uniforme nè la distribuzione di sorgenti è in grado di produrre circolazione;
- comunque il problema del flusso ad incidenza può essere risolto in alternativa calcolando direttamente la distribuzione di sorgenti che annulla la componente normale della velocità effettiva V_∞ risolvendo il sistema

$$\{A\}\{\sigma\} + \{V_\infty \cdot \mathbf{n}\} = \{0\}$$

e quindi calcolando la velocità tangenziale come

$$\{V_t\} = \{V_\infty \cdot \mathbf{t}\} + \{B\}\{\sigma\}$$

- questo discorso sul campo non portante può essere esteso al caso 3-D, per il quale occorre introdurre il campo (laterale) indotto da un flusso asintotico uniforme all'infinito ed orientato secondo l'asse di beccheggio (asse y), nonché trattare adeguatamente la discretizzazione di una superficie con pannelli quadrilateri e le distribuzioni superficiali di sorgenti, [36]: il campo ad angolo di attacco α ed angolo di derapata β può quindi essere calcolato come opportuna combinazione dei tre campi di base asintoticamente allineati con gli assi x, z e y .
- le matrici di influenza per i campi a 0° e 90° (ed eventualmente per il campo laterale) sono sempre le stesse.

FLUSSI INTERNI

È possibile estendere l'applicazione del metodo ora discusso al caso di flussi interni (ad esempio, Fig. 5.13, un condotto a sezione variabile oppure un gomito). Si facciano quindi tutte le considerazioni che permettono una tale estensione (occorre che nella sezione più a monte il flusso sia uniforme, e basta far "capire" al metodo che la condizione al contorno deve essere imposta sulla faccia interna). Deve peraltro essere evidente che una tale soluzione ha limiti di validità ben definiti.

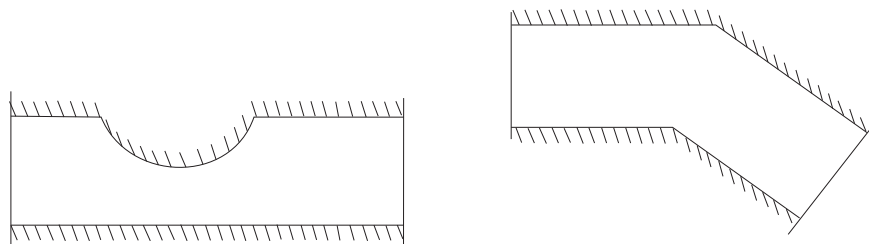


Figura 5.13: Il caso del condotto

IL CAMPO DI PURA CIRCOLAZIONE

Si formulano qui una serie di considerazioni che conducono alla soluzione del problema del campo portante bidimensionale con il metodo Douglas-Neumann.

Si comincia col notare che quando si sostituisce una distribuzione di sorgenti con una di vortici l'ortogonalità tra le rispettive induzioni consente di estendere facilmente i risultati del paragrafo 1 (e cioè il calcolo dei coefficienti di influenza) alla nuova distribuzione.

Per procedere gradualmente verso la soluzione del problema del campo portante è poi particolarmente utile, come fase intermedia, introdurre il campo di moto V^C indotto da una distribuzione di vortici di intensità unitaria, costante su tutto il contorno, e da una distribuzione di sorgenti incognita: considerato come terzo campo di base, esso consente di risolvere il problema del campo portante in modo semplice ed elegante, pur se con i limiti intrinseci del metodo a distribuzione di sorgenti non controllata.

Il campo ora introdotto viene definito di pura circolazione in quanto non presenta moto traslatorio all'infinito; la circolazione risultante attorno al corpo è evidentemente quella indotta dalla vorticità.

Sulle basi del par. 1 è semplice verificare che le espressioni delle velocità ("asintotiche") normali e tangenziali indotte dalla distribuzione di vortici (supposta di intensità unitaria) nel punto di controllo i -esimo sono rispettivamente $\sum_j (-B_{i,j})$ e $\sum_j A_{i,j}$. Pertanto il sistema di equazioni che risolve il problema di Neumann in questo caso è $\{A\}\{\sigma^C\} + \{\sum_j (-B_{i,j})\} = 0$ mentre la velocità tangenziale nei punti di controllo si calcola come

$$\{V_t^C\} = \{\sum_j A_{i,j}\} + \{B\}\{\sigma^C\}$$

È importante notare che il campo in esame

- dal punto di vista logico, gioca lo stesso ruolo dei due campi V^0 e V^{90} ;
- è univocamente determinato dal valore dell'intensità della vorticità;
- presenta una circolazione (indotta unicamente dalla vorticità uniforme) di intensità Γ^c pari al perimetro del contorno: $\Gamma^c = p$;
- non ha portanza: c'è sì circolazione, ma manca il flusso traslatorio.

Nel caso di profili a più componenti la trattazione è concettualmente lievemente diversa: è facile convincersi che occorre introdurre un numero di flussi circolatori di base uguale al numero degli elementi.

Storicamente il metodo Douglas-Neumann venne sviluppato impiegando dapprima come campo di pura circolazione quello generato da un vortice concentrato di intensità unitaria posizionato (ovviamente!) all'interno del corpo (con modifica come nel caso prima descritto per profili a più componenti). In effetti, il campo di pura circolazione generato con l'impiego di un vortice concentrato interno è in teoria indipendente dalla posizione del vortice stesso. È solo per motivi numerici che la qualità della soluzione cambia con il punto di applicazione del vortice.

IL CAMPO PORTANTE

Sembra evidente che la sovrapposizione del campo non portante ad incidenza α e del campo di pura circolazione relativo ad una vorticità di intensità unitaria è un campo di moto che

- verifica la condizione di flusso tangenziale;
- ha una portanza $l = \rho V_\infty \Gamma^c = \rho V_\infty p$;
- non verifica, in generale, nessuna altra condizione in nessun punto particolare del profilo.

Si deve allora procedere ad imporre, in un qualunque modo, una condizione di regolarità in un punto del profilo individuando il valore di un coefficiente moltiplicativo della circolazione di base, e quindi della vorticità di base del campo di pura circolazione: la sovrapposizione del campo non

portante ad incidenza α e di questo particolare campo di pura circolazione è la soluzione, unica, del problema del flusso portante, in quanto è asintoticamente corretta, e verifica sia la condizione di Neumann sulla superficie che la condizione di chiusura.

Ora, per una distribuzione di sorgenti o di vortici è noto che si possono avere difficoltà insormontabili se si vuole calcolare il campo di moto sul bordo del supporto della distribuzione stessa: nel metodo a pannelli è questo il caso del bordo di uscita della geometria in esame, coincidente sempre con un *corner point*. Pertanto con il metodo Douglas-Neumann si dovrà imporre la condizione di regolarità lontano dal bordo di uscita. Fra le diverse possibilità esistenti, la più conveniente, da diversi punti di vista e per tutte le forme possibili di bordo di uscita (angoloso, a cuspidi, continuo od aperto), è risultata essere l'imporre che il valore della velocità - in modulo - nei due *control point* adiacenti al bordo di uscita sia lo stesso. È facile convincersi che ciò equivale ad imporre che il flusso si separa dal profilo lungo la bisettrice del bordo di uscita (o qualcosa di simile, nel caso dei corpi aperti); se poi la lunghezza dei pannelli adiacenti al bordo di uscita è la stessa, la vorticità al bordo di uscita è nulla.

Dal punto di vista operativo, detto k il coefficiente moltiplicativo (incognito) della circolazione di base Γ^c , la velocità tangenziale in un generico punto di controllo sarà

$$V_t = V_t^0 \cos \alpha + V_t^{90} \sin \alpha + kV_t^c$$

e, se 1 ed N sono gli indici dei pannelli adiacenti al bordo di uscita (primo ed ultimo, con la pannellazione più logica come ordinamento), il valore di k , e quindi la soluzione del problema portante, si può calcolare risolvendo l'equazione lineare di primo grado nell'incognita k

$$V_{t1} + V_{tN} = 0$$

Si ricorda che tutto quanto esposto in questo paragrafo vale solo in campo 2-D.

LIMITI DI VALIDITÀ

Il metodo Douglas-Neumann ha delle forti limitazioni per quanto riguarda l'applicabilità a profili alari ed ali; esso comunque è molto "didattico", elegante nella formulazione, comunque valido in campo non portante (e largamente applicato per questo per flussi tridimensionali).

Giova preliminarmente ricordare che il tipo di singolarità e di distribuzioni che si possono impiegare nella soluzione del problema del campo portante e non portante può essere arbitrario.

Il metodo Douglas-Neumann impiega una distribuzione variabile di sorgenti e una distribuzione uniforme di vortici entrambe incognite. Questa scelta di per sè pone tutta una serie di limitazioni (sulle quali occorre indagare così come indicato negli Esercizi) che sono intrinseche nel metodo: in sintesi, lasciare le sorgenti senza alcun vincolo, libere di assumere valori non confinati, è in realtà abbastanza delicato, specie in presenza di una distribuzione di vortici uniformemente distribuita.

Per rendersi conto delle implicazioni sottese all'uso delle singolarità proprie del metodo Douglas-Neumann, basta considerare

- che l'intensità di una distribuzione arbitraria di sorgenti in prossimità di un bordo aguzzo può divergere, e inoltre
- qual'è l'andamento reale del carico su un profilo sottile portante (tutt'altro che uniformemente distribuito lungo la corda!).

Nel metodo Douglas-Neumann succede allora un fatto poco "simpatico", anzi particolarmente preoccupante quando si trattano profili sottili (e quindi con bordi poco arrotondati) e molto caricati. La distribuzione di sorgenti va a divergere ai bordi per due motivi fondamentali:

- perché ci sono i bordi aguzzi;
- perché essa deve assumersi il compito di dare il carico che realmente esiste sul profilo modificando in modo opportuno il carico (costante) che dà la vorticità; ora l'unica maniera in cui delle sorgenti possono simulare un carico aerodinamico è quello di generare un effetto doppietta, per cui la tendenza della distribuzione di sorgenti sarà quella di assumere segni opposti sul dorso e sul ventre, ed intensità crescente al diminuire dello spessore.

È ovvio che la soluzione numerica perde di accuratezza via via che l'intensità delle singolarità cresce (metodi più accurati saranno quelli in cui l'andamento delle singolarità è controllato, e quanto più uniforme possibile). Dal punto di vista pratico gli errori di arrotondamento sono responsabili del cattivo funzionamento di questo metodo, che è teoricamente esatto.

Un riscontro semplice ed immediato dell'influenza che gli effetti numerici hanno sull'accuratezza del metodo Douglas-Neumann è dato dall'indice di condizionamento, [14], della matrice $\{A\}$ (che dipende esclusivamente dalla geometria, dal tipo di pannellazione e di modellazione delle singolarità, e non dall'incidenza).

CENNI SULLE TECNICHE DI ORDINE SUPERIORE

Le considerazioni esposte nel precedente paragrafo valgono quale che sia la modellazione della distribuzione di sorgenti che si impiega nel metodo Douglas-Neumann (per la distribuzione di vortici problemi non ce ne sono in quanto uniforme); ora la scelta di una distribuzione costante a tratti fatta fin qui è in effetti una pessima simulazione della distribuzione reale (anzi, la peggiore), pur se di semplice ed economica trattazione.

Sembra naturale poter migliorare l'accuratezza del metodo assumendo una distribuzione linearmente variabile di sorgenti: i relativi coefficienti di influenza potrebbero essere calcolati facilmente.

La cosa in realtà è un poco più complessa in quanto, Fig. 5.14, se si assumesse una distribuzione linearmente variabile continua di sorgenti il numero di parametri da cui dipende la distribuzione (e quindi il numero di incognite relative) supera di una unità (per ciascun componente del profilo) il numero di pannelli: questo darebbe difficoltà nella chiusura del sistema di equazioni. C'è da considerare poi che la continuità è un vincolo abbastanza forte a causa della grande variabilità che le sorgenti possono avere in questo metodo, e che in realtà per le sorgenti, al contrario della vorticità, è possibile evitare questo requisito: una discontinuità in una distribuzione di singolarità equivale all'introduzione di una singolarità concentrata dello stesso tipo nel punto di discontinuità e una tale circostanza, da evitarsi assolutamente nel caso della vorticità, è innocua per le sorgenti. Il metodo di Hess di ordine superiore, [46], consiste nell'assumere una distribuzione di sorgenti

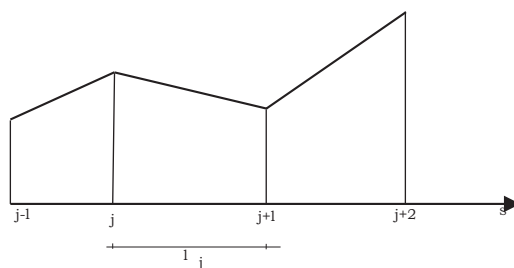


Figura 5.14: Una distribuzione linearmente variabile di singolarità

discontinua, linearmente variabile: la pendenza su un pannello è uguale a quella che nel punto di controllo ha la tangente alla parabola interpolante l'intensità della distribuzione sul pannello stesso e sui due pannelli contigui, Fig. 5.15. Con semplici considerazioni si verifica che il numero delle incognite relative alle sorgenti è sempre uguale a quello dei pannelli.

Estrapolando le considerazioni precedenti, si possono poi proporre altri metodi di ordine superiore assumendo distribuzioni paraboliche, cubiche o del quarto ordine sempre con lo stesso numero di incognite.

A questo punto la cosa si complica molto: è possibile mostrare, [46], che in realtà non ha nessun senso migliorare l'ordine della distribuzione di sorgenti se si continua a lavorare con pannelli rettilinei (che sono evidentemente la più semplice discretizzazione di una geometria piana, e dunque ne forniscono una descrizione molto approssimativa: in campo tridimensionale comunque si fa di peggio!); esiste un'inconsistenza tra utilizzo di pannelli piani e singolarità di ordine superiore che di fatto vanifica completamente i vantaggi che si volevano avere. Si dovrebbe operare allora con

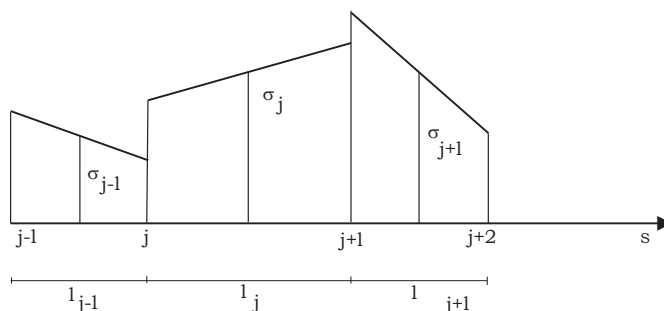


Figura 5.15: Variazione dell'intensità delle sorgenti nel metodo di Hess di ordine superiore

pannelli curvi (al secondo ordine parabolici o ellittici, poi cubici e così via), e la cosa si complica moltissimo.

Convieni a questo punto chiedersi quali vantaggi può presentare l'impiego di tecniche di ordine superiore nel metodo Douglas-Neumann: dovrebbe essere chiaro, dall'analisi delle sperimentazioni numeriche proposte negli Esercizi, che in effetti non si possono avere miglioramenti decisivi nella qualità dei risultati, in quanto le limitazioni del metodo sono intrinsecamente connesse alla scelta del tipo di distribuzioni di singolarità; il vantaggio (?) è nel fatto che, a parità di accuratezza, con un metodo "higher order" si utilizzano assai meno pannelli.

L'interrogativo è doveroso per le seguenti cause.

- Si potrebbe supporre che la riduzione del numero dei pannelli comporti una riduzione del tempo di calcolo, e questo non è detto in quanto i calcoli sono più complicati (addirittura la fase della pannellazione, che per pannelli piani è "senza tempo", nel caso dei pannelli curvi è significativamente onerosa: in campo tridimensionale il tempo impiegato in questa fase è confrontabile con quello necessario a costruire le matrici, ed entrambi possono essere uguali o superiori al tempo di soluzione del sistema).
- La soluzione viene calcolata in un numero "piccolo" di punti, per cui per le applicazioni successive (calcoli di strato limite, ad esempio) occorre procedere ad interpolazioni (anche esse da effettuarsi con tecniche higher order) che appesantiscono i codici aumentando i tempi di calcolo.

Le esperienze che si sono sviluppate hanno indicato, in sintesi estrema, la scarsa convenienza ad impelagarsi nelle tecniche prima espote (per tacere del fatto che spesso è stata verificata la veridicità dello slogan "Higher order Higher error" per indicare le difficoltà di messa a punto ed impiego); tali tecniche sono abbastanza in disuso, e l'interesse si è spostato verso altri metodi sostanzialmente diversi.

5.7.1 Esercizi

ESERCIZIO 1. IL CAMPO NON PORTANTE. Sviluppare un codice di calcolo per costruire e risolvere il sistema di equazioni per il campo non portante a 0° e 90° e per determinare il campo di moto. Estendere l'applicabilità di tale codice a campi non portanti ad incidenza (o mediante combinazione dei campi a 0° e 90° oppure in modo diretto).

Proporre ed effettuare tutti i confronti con soluzioni esatte di cui si è a conoscenza, analizzando quindi molto accuratamente le caratteristiche delle soluzioni attorno a più corpi, aerodinamici e non (anche, e forse soprattutto, riguardo l'andamento dell'intensità delle distribuzioni di singolarità).

In termini di codifica, una certa attenzione deve essere posta per il termine diagonale, a meno che non lo si assegni direttamente.

ESERCIZIO 2. Studiare la differenza tra le soluzioni non portanti di corpi aperti e chiusi: il caso della sezione di un missile con ogiva ellittica.

In applicazione alla “torta” o, più semplicemente, al diedro concavo, si evidenzi il comportamento della soluzione nella regione del vertice. (che si può dire circa la soluzione esatta in questa regione?).

Si proponga e si tratti infine il più semplice dei flussi che si pensa possa essere analizzato con il metodo presente.

ESERCIZIO 3. FLUSSI INTERNI. Calcolare con il metodo Douglas-Neumann il flusso all'interno di un assegnato condotto bidimensionale. Anche in questo caso effettuare un'indagine sulle soluzioni esatte di cui si dispone per convalidare la soluzione. Sulla base dell'Esercizio 12 si calcoli la portata attraverso diverse sezioni del condotto, verificando se si mantiene costante.

ESERCIZIO 4. IL CAMPO DI PURA CIRCOLAZIONE. Estendere al campo di pura circolazione il codice di calcolo e le analisi parametriche per il flusso non portante a 0° e 90° .

ESERCIZIO 5. Costruire il campo di pura circolazione impiegando un vortice concentrato interno, analizzando le caratteristiche della soluzione numerica al variare del punto sede del vortice. Studiare quindi l'effetto della posizione del vortice al variare dell'angolo di attacco. Che cosa accade, dal punto di vista teorico e da quello numerico, se il vortice viene posizionato all'esterno del corpo?

ESERCIZIO 6. IL CAMPO PORTANTE. Analizzare la maniera di imporre per un metodo a pannelli del tipo Douglas-Neumann la condizione di Kutta al bordo di uscita. Per un'assegnata incidenza, combinare insieme i campi a 0° e 90° ed il campo di pura circolazione utilizzando quindi la condizione di Kutta per scalare opportunamente l'intensità della vorticità distribuita. Riformulare tutte le considerazioni già discusse nel caso non portante, e riproporre tutti gli Esercizi relativi: l'allievo curi in modo particolare l'aspetto della convalida del codice per le diverse applicazioni. Individuare tutti i possibili *test - case* per il codice che risolve il campo portante.

Riformulare il problema per il caso in cui sia assegnato il coefficiente di portanza invece dell'angolo di attacco. Che si può dire circa la possibilità di impiegare qualche profilo delle famiglie NACA come *test-case*?

ESERCIZIO 7. In riferimento ad una famiglia di profili alari, studiare l'andamento della intensità totale della distribuzione di sorgenti al bordo di uscita al variare dello spessore, della curvatura, dell'angolo di attacco e del numero di pannelli: cercare di mettere in relazione le eventuali particolarità riscontrate con il tipo di distribuzioni che si stanno impiegando. Può essere utile prevedere il calcolo dell'indice di condizionamento della matrice dei coefficienti.

Le considerazioni svolte sui limiti di validità del metodo Douglas-Neumann in campo non portante possono essere estese anche alle soluzioni portanti? Esistono ulteriori limitazioni?

Formulare quindi le considerazioni che si ritengono più opportune sull'effetto che può avere l'ordine di grandezza del valore delle singolarità sull'accuratezza del metodo (che, si ricorda, è “esatto”). Trarre infine delle conclusioni operative sull'applicabilità del metodo.

ESERCIZIO 8. UNIFICAZIONE DEI CAMPI DI BASE. Modificare il codice del campo portante utilizzando insieme una sola distribuzione di sorgenti costante a tratti sui pannelli ed una distribuzione uniforme incognita di vortici: a differenza del metodo dei tre campi di base, la condizione di Neumann e la condizione di Kutta vanno imposte simultaneamente. Data la linearità del problema, la soluzione ottenuta con il metodo precedente e quella attuale dovrebbero essere identiche.

ESERCIZIO 9. IMPIEGO DI SINGOLARITÀ CONCENTRATE. Analizzare che cosa accade quando nel calcolo dei coefficienti di influenza oltre una certa distanza relativa tra punto e pannello inducente si sostituisce la distribuzione con una singolarità concentrata nel suo punto di controllo. Quali possono essere i vantaggi e quali gli inconvenienti di una simile procedura (nella pratica ampiamente utilizzata in campo tridimensionale)? Qual'è il miglior criterio per decidere la distanza minima a partire dalla quale è conveniente fare questa sostituzione?

ESERCIZIO 10. PROFILI A PIÙ COMPONENTI. Estendere l'applicabilità del codice sviluppato per il campo portante a geometrie a più componenti. Per la convalida sono disponibili in letteratura, [13] e Fig. 5.16, alcuni *test - case* ottenuti mediante trasformazioni conformi. L'Allievo cerchi comunque di verificare autonomamente la correttezza della sua formulazione.

ESERCIZIO 11. LINEE DI CORRENTE SUL CORPO. In relazione al codice di cui sopra, individuare i punti di ristagno sul corpo, tabulando quindi, a partire dal punto di ristagno anteriore,

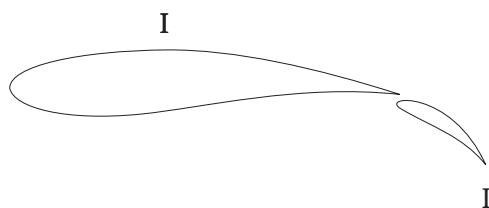


Figura 5.16: Un profilo a due componenti di Williams, [13]

le due linee di corrente (dorsale e ventrale) che corrono sul corpo.

ESERCIZIO 12. OFF - BODY POINTS. In relazione ad un metodo a pannelli, come calcolare la velocità in un assegnato punto del campo di moto? Individuato un modo, interfacciarlo con i codici tipo Douglas-Neumann per il campo portante e non. Si suggerisce di calcolare preliminarmente nel punto assegnato -*utilizzando lo stesso software impiegato nella costruzione delle matrici*- le righe di influenza in riferimento agli assi coordinati, calcolando quindi le componenti della velocità dalle (note) distribuzioni di singolarità.

ESERCIZIO 13. LINEE DI CORRENTE NEL CAMPO. Proporre e discutere un metodo che, partendo da quanto sviluppato nell'Esercizio precedente, permetta di individuare la linea di corrente che parte da (o arriva a) un assegnato punto del campo di moto. Analizzare i limiti di validità del metodo proposto, soprattutto per quel che riguarda la sua consistenza. Effettuare infine, se possibile, uno studio di quello che succede all'interno del corpo.

T trattare quindi come caso particolare la linea di corrente che parte dal bordo di uscita (se ben definito!): tale linea è il prolungamento delle due linee di corrente dorsale e ventrale dell'Esercizio 11. Che si può dire nel caso di corpi aperti?

5.8 Metodi con distribuzioni variabili di vortici per il campo portante

5.8.1 Considerazioni preliminari

In generale il problema del campo potenziale portante o non portante si può risolvere impiegando insieme arbitrarie distribuzioni di sorgenti e di doppiette, con la condizione che se il campo è portante non si utilizzi la sola distribuzione di sorgenti.

Esiste inoltre un'importante equivalenza tra il campo indotto da una distribuzione di vortici di un certo ordine e il campo indotto da una distribuzione di doppiette di ordine superiore; tale relazione di equivalenza viene applicata

- per risolvere campi bidimensionali mediante distribuzioni arbitrarie di sorgenti e vortici (in questo caso già l'impiego di una vorticità *lineare* equivale all'impiego di una distribuzione *quadratica* di doppiette),
- per risolvere campi tridimensionali che possono ricadere nell'ambito delle teorie di superficie portante sostituendo lo schema di vortici a staffa con una distribuzione di doppiette (evitando quindi le complicazioni cui si va incontro in campo tridimensionale nel trattare un'entità vettoriale).

Sono stati sviluppati quindi numerosi metodi con particolari diverse distribuzioni di singolarità, ognuno con le sue peculiarità, vantaggi, inconvenienti.

Si fa presente intanto che è possibile sviluppare un metodo di calcolo di campo portante che impieghi solo vorticità. Una tale scelta gode della particolare proprietà che l'intensità locale della vorticità coincide con l'intensità della velocità; ciò può risultare utile sia per economizzare tempo di calcolo che per imporre le più opportune condizioni di chiusura esattamente al bordo di uscita.

Un aspetto centrale per la soluzione del problema portante, che deve essere considerato con attenzione per ciascun metodo, è il modo di imporre che il flusso attorno al bordo di uscita sia regolare (condizione di Kutta): un buon modo per fare questo è, come già visto, imporre l'annullamento della vorticità al bordo di uscita, ma non è sempre possibile imporre questa condizione in modo esplicito, neanche quando si lavora con la sola vorticità.

Si illustrano nel seguito i metodi più impiegati al giorno d'oggi in campo bidimensionale. Si ipotizza che si abbia un profilo (o in generale un oggetto) ad un solo componente, chiuso (salvo esplicita indicazione).

5.8.2 Metodi con sola vorticità costante a tratti - Il metodo di Oeller

In questo caso il numero di incognite, che coincide con il numero di parametri che individuano la distribuzione di singolarità, è uguale al numero dei pannelli. Se si vuole procedere allora alla soluzione del problema imponendo condizioni di Neumann sul contorno del profilo il numero di equazioni relativo alla condizione al contorno eguaglia il numero di incognite: non c'è possibilità, a meno di artifici, di imporre una condizione al bordo di uscita, ed il problema sembra malposto.

Il metodo di Oeller, [47], risolve in modo diverso il problema del flusso potenziale portante attorno a profili alari: esso si basa sulla considerazione che la superficie di un corpo impermeabile immerso in un campo bidimensionale non viscoso costituisce una linea di corrente, e quindi su di essa la funzione di corrente Ψ è costante.

La presenza del corpo viene simulata mediante una distribuzione di vortici costante a tratti, ed imponendo che la funzione di corrente (somma di un'aliquota relativa al flusso uniforme asintotico ed un'altra relativa alla vorticità) sia costante sul contorno del profilo; in riferimento alla Fig. 5.17, questa condizione può essere espressa mediante la seguente equazione integrale:

$$\psi = V_\infty(z \cos \alpha - x \sin \alpha) - \frac{1}{2\pi} \int_s \gamma(s') \ln[r(s, s')] ds' \quad (5.47)$$

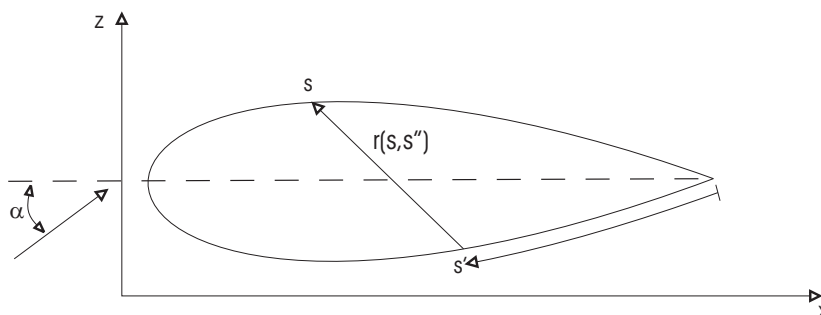


Figura 5.17: Schema per l'induzione nel metodo di Oeller

Si noti che il valore della funzione di corrente è incognito.

L'integrale viene sostituito da una sommatoria, e la 5.47 viene imposta al centro di ciascun pannello, pervenendo quindi ad un sistema di equazioni lineari del tipo

$$\Psi = V_\infty(z_{c_i} \cos \alpha - x_{c_i} \sin \alpha) - \sum_{j=1}^N K_{ij} \gamma_j \quad (i = 1, \dots, N) \quad (5.48)$$

con N numero di pannelli, che va completato aggiungendo una (sola) condizione per imporre la regolarità del flusso attorno al bordo di uscita (condizione di Kutta): il sistema risulta chiuso perché le incognite sono in numero di $N + 1$, cioè tante quante le equazioni.

Si fa presente che in questo caso il valore locale della vorticità coincide con il valore della velocità tangenziale: questa proprietà è importante perché

- si evita di dover calcolare una matrice di influenza per la valutazione della velocità;
- la condizione di Kutta diventa una condizione sulla vorticità al bordo di uscita.

In [47] si presenta la trattazione formale del metodo, contenente una utile interessante discussione sul modo più opportuno di imporre la condizione di Kutta.

Si è già detto in precedenza dell'esigenza che la vorticità, ancorché variabile, debba essere continua per non andare incontro a seri inconvenienti per l'accuratezza della soluzione. Il metodo di Oeller invece riesce ad essere accurato in quanto non viene in nessun punto effettuato in modo diretto il calcolo della velocità indotta dalla distribuzione di vortici, e la velocità tangenziale è calcolata in base al valore della vorticità: conviene addirittura valutare la velocità proprio nel *corner point* (che in altri metodi, ad esempio Douglas-Neumann, sono più che critici) in quanto occorre e basta una semplice operazione di media pesata, che non ha implicazioni di errore numerico.

5.8.3 Metodi con sola vorticità lineare variabile

Riprendendo alcune considerazioni dei paragrafi precedenti, è semplice verificare che è possibile risolvere il problema del flusso portante con una distribuzione di vortici linearmente variabile e continua. In prima battuta, osservando che si ha un numero di incognite che supera di una unità il numero dei pannelli, si comprende che è possibile imporre le condizioni sulla velocità normale al centro dei pannelli ed in aggiunta una equazione che esprime la condizione di Kutta: quest'ultima equazione avrà la forma

$$\gamma_1 + \gamma_N = 0$$

e quindi sarà una condizione (lineare) che esprime l'annullarsi in media della vorticità al bordo di uscita.

Per lo sviluppo di un metodo così strutturato è necessario calcolare preliminarmente la velocità indotta in un punto dalla distribuzione lineare, su un segmento, di una singolarità del primo ordine (sorgente o vortice).

5.8.4 Vorticità linearmente variabile e distribuzione uniforme di sorgente

È ben evidente che per un metodo con questo tipo di distribuzioni si introduce qualche inconveniente (ad esempio, la vorticità non è più rappresentativa della velocità tangenziale), e la distribuzione di sorgenti non sembra essere strettamente necessaria: in effetti, sarebbe semplice verificare numericamente che l'intensità della sorgente è non nulla solo nel caso di corpi aperti, per i quali un metodo così fatto assume importanza e sostituisce i metodi a soli vortici.

Si è introdotta, rispetto al caso del paragrafo precedente, un'altra incognita, e quindi è possibile e conveniente imporre la condizione di Kutta nella forma

$$\gamma_1 = \gamma_N = 0$$

che fornisce le due equazioni necessarie alla chiusura del problema di Neumann in questo caso.

Questo metodo può essere studiato con maggiori dettagli in [41].

5.8.5 Il metodo delle singolarità simmetriche

Si pensi di avere effettuato una discretizzazione a pannelli della geometria in esame in maniera tale che ad ogni pannello del dorso corrisponda un pannello del ventre pressappoco simile (questa condizione non è strettamente necessaria, anzi il metodo che si va ad esporre funziona abbastanza bene purché sia pari il numero pannelli; conviene porsi comunque nelle condizioni ottimali, se possibile).

Il metodo in oggetto, proposto in [42], prevede l'impiego di una incognita distribuzione di vortici e di una incognita distribuzione di sorgenti ognuna simmetrica, nel senso che i valori delle due distribuzioni sono uguali in punti omologhi del dorso e del ventre.

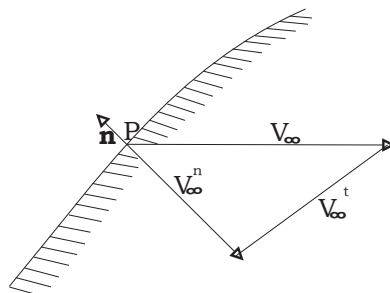


Figura 5.18: Assegnazione dell'intensità della distribuzione di sorgenti

Per vorticità linearmente variabile sono allora uguali i valori nei *corner point* omologhi del dorso e del ventre, ed è facile verificare che, se N è il numero (pari) dei pannelli, si hanno $N/2 + 1$ incognite. Per la distribuzione (costante o variabile, comunque discontinua) di sorgenti sono in ogni caso uguali i valori nei *control point* omologhi, e si hanno $N/2$ incognite. In totale si hanno $N + 1$ incognite: occorre quindi imporre la condizione di regolarità al bordo di uscita in modo che dia una sola equazione di chiusura.

È possibile analizzare teoricamente a priori le caratteristiche del metodo delle singolarità simmetriche al variare della geometria e dell'angolo d'attacco se si tengono presenti gli inconvenienti delle soluzioni ottenute con il metodo Douglas-Neumann: in questo caso c'è una forma di controllo dell'intensità delle sorgenti tale da non farla divergere per generare qualcosa di simile ad una doppietta; inoltre la variabilità (simmetrica) della vorticità può garantire una giusta distribuzione del carico lungo la corda.

Nell'esperienza dell'estensore di queste note, limitata peraltro al campo 2-D, il metodo delle singolarità simmetriche si rende abbastanza nettamente preferibile agli altri metodo a pannelli per l'accuratezza in condizioni diverse e la duttilità, in una parola per la sua robustezza.

5.8.6 I metodi con distribuzione assegnata di sorgenti

Tali metodi per il campo portante, [45], prevedono l'impiego di una vorticità linearmente variabile, incognita e di una distribuzione (costante o variabile a tratti, comunque discontinua) di sorgenti di intensità assegnata e pari in ogni punto di controllo al valore del flusso normale asintotico, Fig.5.18:

I vantaggi che una tale scelta può offrire sono bene evidenti se si considera il fatto che la distribuzione di sorgenti è "controllata".

Inoltre ci si può facilmente rendere conto che anche la vorticità risulterà abbastanza "confinata": si tenga presente che il termine noto delle equazioni che esprimono l'imposizione della condizione di Neumann in un punto di controllo è piccolo - il flusso normale asintotico è già "neutralizzato" dalla distribuzione di sorgenti - e quindi è limitato il lavoro che deve svolgere la vorticità.

Le caratteristiche di questo metodo non si esauriscono solo in una migliore accuratezza per la soluzione aerodinamica. Si richiamano infatti le seguenti proprietà.

- L'intensità della vorticità in un punto della superficie del corpo risulta essere uguale al valore locale della perturbazione della velocità tangenziale rispetto al flusso asintotico:

$$V_t(P) = \mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{t}(P) + \gamma(P)$$

Ciò significa che per il calcolo della velocità si può evitare di impiegare la matrice di influenza tangenziale, con vantaggi di accuratezza e velocità di calcolo.

- Il potenziale del campo all'interno del corpo è costante, e quindi il campo aerodinamico all'interno è in quiete. Tale proprietà permette di formulare in modo completamente diverso la soluzione del problema del flusso potenziale, che da problema di Neumann sulla derivata del potenziale all'esterno diventa problema di Dirichlet sul potenziale interno; si fa presente

che questa seconda formulazione può presentare altri vantaggi, [45], e che essa è ampiamente impiegata anche nella soluzione di problemi di aeroelasticità e di campo acustico.

5.8.7 Esercizi

ESERCIZIO 1. VORTICITÀ COSTANTE A TRATTI. L'allievo verifichi la fattibilità di un metodo che preveda di impiegare una vorticità costante a tratti per risolvere un campo portante bidimensionale. Svolgere tutte le considerazioni necessarie seguendo le linee guida del metodo Douglas-Neumann; tenere presente che il calcolo dei coefficienti di influenza non sarebbe un problema, in forza del principio di ortogonalità. Si formulino inoltre le considerazioni che si ritengono più opportune sulla condizione di Kutta e sull'andamento della vorticità al bordo di uscita.

Studiare poi la possibilità di impiegare, in aggiunta, una distribuzione uniforme incognita di sorgenti (dando luogo così ad un metodo in un certo senso "speculare" al metodo Douglas-Neumann); enunciare i vantaggi che una tale scelta potrebbe offrire.

ESERCIZIO 2. IL METODO DI OELLER. Basandosi su quanto riportato in [47] codificare la soluzione del campo aerodinamico con il metodo di Oeller, valutandone la bontà mediante sperimentazioni numeriche analoghe a quelle sviluppate per gli altri metodi di calcolo del flusso potenziale già studiati.

Parte III

**AERODINAMICA NON
VISCOSA COMPRIMIBILE**

Capitolo 6

Campi comprimibili linearizzati

6.1 Introduzione

Nel Cap. 1 si sono introdotti gli effetti che l'aumento del numero di Mach di volo comporta. In questo Capitolo si tratterà la modellazione degli effetti di comprimibilità in campo non viscoso quando è possibile ammettere l'ipotesi di linearità del campo: questo modello è valido nell'ambito delle piccole perturbazioni. Con accuratezza leggermente diversa, questo è accettabile sia quando il campo è subsonico che quando è supersonico: occorre e basta che non siano presenti onde d'urto normali. Riprendendo la caratterizzazione dei regimi di moto del Cap. 1, le ipotesi sono che $M_\infty < M_{\infty crit}$ (campo subsonico, continuo) oppure che $M'_{\infty crit} < M_\infty$ (campo supersonico: sono presenti onde d'urto, solo oblique, del tipo debole, che saranno trattate come se fossero linee di Mach).

In generale il modello a potenziale, retto dall'equazione (2.24), è una valida semplificazione delle Equazioni di Eulero quando si ha a che fare con un flusso irrotazionale. Nel caso comprimibile questo modello non può trattare onde d'urto curve. Una sua semplificazione può essere fatta ricorrendo all'equazione approssimata di Prandtl-Glauert (2.26), equazione lineare e valida nell'ipotesi di piccole perturbazioni (a piccoli disturbi corrispondono piccoli effetti: in sintesi, non è possibile trattare onde d'urto normali).

Si riscrive qui l'equazione di Prandtl-Glauert nell'incognito potenziale di velocità φ :

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad \beta^2 = 1 - M_\infty^2 \quad (6.1)$$

Essa permette di lavorare in similitudine, a partire da un campo di riferimento particolare, utilizzando la tecnica delle trasformazioni di variabili riducendo la (6.1) all'equazione di Laplace, essendo ormai acquisita la tecnica di calcolo di tale equazione (sono altresì noti l'insieme di risultati teorici e sperimentali relativi a flussi incomprimibili o a un flusso supersonico di riferimento). Si parla di Leggi di Similitudine, molto importanti per la modellazione dei flussi comprimibili linearizzati.

Saranno poi presentati i metodi di calcolo per i numeri di Mach critici inferiore e superiore, ed infine si tratterà l'introduzione del Potenziale di Accelerazione che ha aperto la via ad una importante classe di metodi numerici.

6.2 Le leggi di similitudine subsonica

Viene introdotta la tecnica della Similitudine Subsonica, che consiste nel riportare il campo di moto attuale ad un campo di moto incomprimibile, retto quindi dall'equazione di Laplace. Una volta nota la soluzione incomprimibile, ci si può riportare alla condizione attuale con semplici formule per i coefficienti di pressione, portanza, momento di beccheggio e resistenza indotta.

L'equazione che governa il campo è la 6.1. Le condizioni al limite che completano la descrizione del problema sono

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = v = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{per} \quad (x, z) \rightarrow \infty \quad (6.2)$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_C \cong \left(\frac{v}{V_\infty + u}\right)_C \cong \left(\frac{v}{V_\infty}\right)_C \cong \frac{1}{V_\infty} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_C \quad (6.3)$$

dove il suffisso C sta ad indicare che le grandezze corrispondenti vanno calcolate sul corpo.

LA LEGGE DI SIMILITUDINE DI GÖTHERT IN CAMPO BIDIMENSIONALE

L'equazione che regge il moto in caso bidimensionale è

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (6.4)$$

Con le seguenti trasformazioni di variabili

$$\xi = \lambda_x x \quad (6.5)$$

$$\zeta = \lambda_z z \quad (6.6)$$

$$\varphi'(\xi, \zeta) = \lambda_\varphi \varphi(x, z) \quad (6.7)$$

dove λ_x , λ_z e λ_φ sono costanti da determinarsi, si ricava facilmente

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\lambda_x^2}{\lambda_\varphi} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\lambda_z^2}{\lambda_\varphi} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial \zeta^2}$$

Pertanto la (6.4) si riduce all'equazione di Laplace per la funzione potenziale $\varphi'(\xi, \zeta)$ se

$$\frac{\lambda_z}{\lambda_x} = \beta \quad (6.8)$$

Per quanto riguarda le condizioni al limite si osserva facilmente che le (6.2) sono identicamente soddisfatte dalle nuove grandezze, mentre la (6.3) scritta con le variabili introdotte assume la forma

$$\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_C = \frac{\lambda_\varphi^2}{\lambda_x \lambda_z} \frac{1}{V_\infty} \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial\zeta}\right)_C \quad (6.9)$$

La condizione del flusso tangenziale impone che sia

$$\lambda_\varphi^2 = \lambda_x \lambda_z \quad (6.10)$$

Si può allora concludere che la funzione $\varphi'(\xi, \zeta)$ descrive il flusso uniforme incomprimibile attorno ad un nuovo profilo (ξ_C, ζ_C) se le costanti λ_x , λ_z e λ_φ sono scelte in modo tale da soddisfare le (6.8) e (6.10) e se $V'_\infty = V_\infty$.

In termini più diretti la corrispondenza tra le geometrie dei due corpi che vengono ad essere collegati dalla similitudine ora descritta tra i due campi può essere definita, in generale, come

$$\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_C = \beta \left(\frac{dz}{dx}\right)_C = \sqrt{1 - M_\infty^2} \left(\frac{dz}{dx}\right)_C \quad (6.11)$$

Quindi la curvatura, lo spessore percentuale e l'angolo d'attacco del corpo deformato sono ridotti della quantità β rispetto ai corrispondenti valori del corpo assegnato.

È utile osservare che per la similitudine non sono importanti i valori individuali di λ_x e λ_z , ma è il loro rapporto che determina le variazioni nella forma del corpo. Pertanto è possibile utilizzare entrambe le seguenti tecniche riportate nella letteratura:

$$\begin{cases} \lambda_x = 1 \\ \lambda_z = \beta \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_x = 1/\beta \\ \lambda_z = 1 \end{cases}$$

Per quanto riguarda la corrispondenza tra i due campi si avrà

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, z) = \frac{\lambda_x}{\lambda_\varphi} \frac{\partial\varphi'}{\partial\xi'}(\xi, \zeta) = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial\varphi'}{\partial\xi'}(\xi, \zeta) \quad (6.12)$$

mentre, con la definizione del coefficiente di pressione in termini linearizzati, ne consegue che

$$\frac{C_p}{C'_p} = \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{1 - M_\infty^2} \quad (6.13)$$

Analoghe relazioni possono essere scritte per i coefficienti di portanza e momento di beccheggio.

Sinteticamente la regola di Göthert può scriversi come

$$[C_p]_{M,\alpha,\tau,\gamma} = \frac{1}{1 - M_\infty^2} [C_p]_{M=0,\beta\alpha,\beta\tau,\beta\gamma} \quad (6.14)$$

$$[C_l]_{M,\alpha,\tau,\gamma} = \frac{1}{1 - M_\infty^2} [C_l]_{M=0,\beta\alpha,\beta\tau,\beta\gamma} \quad (6.15)$$

$$[C_m]_{M,\alpha,\tau,\gamma} = \frac{1}{1 - M_\infty^2} [C_m]_{M=0,\beta\alpha,\beta\tau,\beta\gamma} \quad (6.16)$$

La regola di Göthert, esatta nei limiti della teoria lineare, in passato non risultava nella pratica molto conveniente per determinare l'influenza del numero di Mach sulle caratteristiche aerodinamiche di un certo profilo, dovendosi ripetere tutta la serie di calcoli, o di esperienze, per ogni numero di Mach, su un profilo modificato.

Molto più agevole risulta invece la regola di Prandtl-Glauert, ancorché peggio approssimata.

REGOLE DI SIMILITUDINE DI PRANDTL-GLAUERT

Si ammettono valide le trasformazioni di variabili

$$\xi = x \quad (6.17)$$

$$\zeta = \sqrt{1 - M_\infty^2} z \quad (6.18)$$

$$\varphi'(\xi, \zeta) = \varphi(x, z) \quad (6.19)$$

per le quali la (6.4) assume la forma

$$\nabla^2 \varphi'(\xi, \zeta) = 0 \quad (6.20)$$

In altri termini la funzione $\varphi(x, z)$ che risolve il campo comprimibile attorno ad un dato corpo risolve anche il campo incomprimibile attorno ad un nuovo corpo, espresso, generalmente, dalle (6.17) e (6.18), le cui dimensioni longitudinali rimangono inalterate e le cui dimensioni trasversali sono ridotte della quantità β (in modo simile alla regola di Göthert).

Si trova poi facilmente che perché la funzione $\varphi(\xi, \zeta)$ soddisfi pure la condizione del flusso tangenziale deve accadere che

$$\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_C = \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \left(\frac{dz}{dx}\right)_C \quad (6.21)$$

e cioè il profilo corrispondente deve avere le ordinate incrementate nel rapporto $1/\beta$, il che è il contrario della posizione (6.18): questa contraddizione viene risolta con l'assunzione di considerare profili molto sottili, per i quali è lecito porre $z \simeq 0$.

In ciò consiste l'approssimazione della Regola di Prandtl-Glauert: si assume valida la (6.21) sul corpo e la (6.18), per tutto il resto del campo; le due equazioni, nell'ipotesi che $z \cong 0$ sul corpo, non si contraddicono più.

Poiché poi $\varphi(x, z) = \varphi'(\xi, \zeta)$ ne consegue

$$C_p = \frac{-2}{V_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, z) = C'_p = \frac{-2}{V_\infty} \frac{\partial \varphi' g}{\partial \xi}(\xi, \zeta) \quad (6.22)$$

da cui può scriversi sinteticamente la Prima Regola di Prandtl-Glauert:

$$[C_p]_{M, \alpha, \tau, \gamma} = [C_p]_{M=0, \alpha/\beta, \tau/\beta, \gamma/\beta} \quad (a)$$

$$[C_L]_{M, \alpha, \tau, \gamma} = [C_L]_{M=0, \alpha/\beta, \tau/\beta, \gamma/\beta} \quad (b) \quad (6.23)$$

$$[C_m]_{M, \alpha, \tau, \gamma} = [C_m]_{M=0, \alpha/\beta, \tau/\beta, \gamma/\beta} \quad (c)$$

Dalla Prima regola di Prandtl-Glauert ora enunciata si può facilmente dedurre un'importante conseguenza. Si consideri, infatti, un profilo di assegnata geometria in campo comprimibile; la soluzione di questo campo (attorno ad un corrispondente profilo deformato) per la Prima Regola di Prandtl-Glauert sia definita dalla funzione $\varphi_1(x, z) = \varphi_1(\xi, \zeta)$. Si consideri poi il profilo assegnato in campo incomprimibile: la soluzione di questo campo sia definita dalla funzione $\varphi_2(\xi, \zeta)$. Entrambe le funzioni $\varphi_1(\xi, \zeta)$ e $\varphi_2(\xi, \zeta)$ sono soluzioni dell'equazione di Laplace, mentre per le condizioni al limite si verifica che

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta} \right)_C = \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \zeta} \right)_C \quad (6.24)$$

e cioè

$$\varphi_1(\xi, \zeta) = \varphi_2(\xi, \zeta) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \quad (6.25)$$

Essendo $\varphi_1(\xi, \zeta)$ anche soluzione del campo comprimibile attorno al corpo assegnato, ne discende dalla (6.25) la Seconda Regola di Prandtl-Glauert

$$\left[\varphi(x, z) \right]_{M, \alpha, \tau, \gamma} = \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \left[\varphi(\xi, \zeta) \right]_{M=0, \alpha, \tau, \gamma} \quad (6.26)$$

Si avrà dunque

$$\left[C_p \right]_{M, \alpha, \tau, \gamma} = \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \left[C_p \right]_{M=0, \alpha, \tau, \gamma} \quad (6.27)$$

e analoghe relazioni saranno valide per i coefficienti di portanza e di momento di beccheggio.

Le Regole di Prandtl-Glauert, riassumendo, calcolano l'effetto della comprimibilità sui profili nell'ipotesi che

- a) i disturbi siano piccoli,
- b) siano anche piccoli la curvatura γ e lo spessore percentuale τ ,
- c) sia basso il numero di Mach,

e nei limiti di tali ipotesi i risultati sperimentali concordano sufficientemente con la regola approssimata. Si riporta in Fig. 6.1 un esempio di tale confronto, relativo all'influenza della comprimibilità sul gradiente della retta di portanza di un profilo con spessore percentuale $\tau = 0.06$. Per alti valori del numero di Mach la regola di Prandtl-Glauert cade in difetto mostrando così l'inadeguata validità della teoria linearizzata in tale campo.

In Fig. 6.2 viene mostrato un analogo confronto per un profilo con spessore percentuale $\tau = 0.12$: in tal caso l'influenza della comprimibilità viene ad essere sottovalutata, secondo la regola di Prandtl-Glauert, anche ai bassi numeri di Mach, mentre si verifica sempre, come per il profilo sottile, la discrepanza sull'andamento della curva agli alti numeri di Mach.

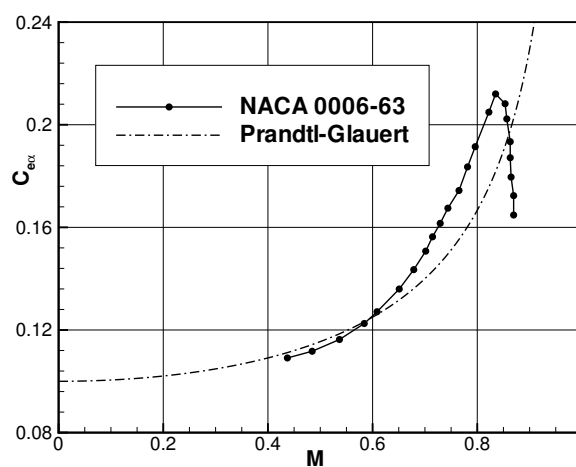


Figura 6.1: Regola di Prandtl-Glauert: confronto con i dati sperimentali per il profilo NACA 0006-63

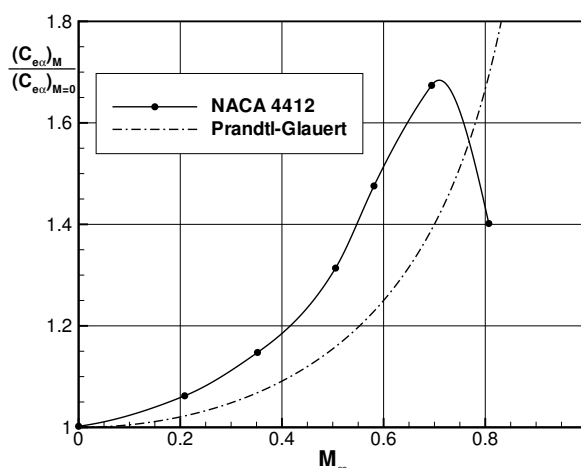


Figura 6.2: Regola di Prandtl-Glauert: confronto con i dati sperimentali per il profilo NACA 4412

ALTRE REGOLE DI SIMILITUDINE

L'impossibilità di predire con buona accuratezza l'influenza della comprimibilità agli alti numeri di Mach e per profili spessi con la semplice regola di Prandtl-Glauert ha indirizzato lo studio verso più accurate rappresentazioni del flusso bidimensionale.

Utilizzando il metodo dell'odografo Von Karman e Tsien, [48] e [49], hanno mostrato come il flusso comprimibile su di un profilo sia collegato al flusso incomprimibile attorno allo stesso profilo a mezzo della semplice formula correttiva

$$C_p = \frac{C_{pi}}{\sqrt{1 - M_\infty^2} + \frac{C_{pi}}{2} \frac{M_\infty^2}{1 + \sqrt{1 - M_\infty^2}}} \quad (6.28)$$

Nella (6.28), a rigori, C_p e C_{pi} si riferiscono a due corpi leggermente diversi, ma è invalso l'uso di trascurare le piccole variazioni nella forma del corpo. Appare evidente la correzione alla regola di Prandtl-Glauert, tanto maggiore quanto più elevato è il numero di Mach della corrente, Fig. 6.3.

L'influenza dello spessore in campo comprimibile può essere valutato con la regola di Kaplan, espressa dalla relazione

$$\frac{[C_i]_{M \neq 0}}{[C_i]_{M=0}} = \frac{1}{\beta} + \frac{\tau}{1 + \tau} \left[\frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) + \frac{1}{4} (\gamma + 1) \left(\frac{1}{\beta^2} - 1 \right)^2 \right] \quad (6.29)$$

che per $\tau \rightarrow 0$ riconduce alla regola di Prandtl-Glauert.

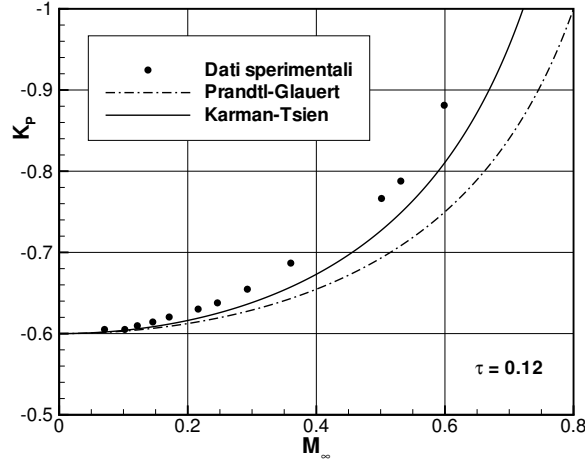


Figura 6.3: Confronto tra la Regola di Prandtl-Glauert, la relazione di Karman-Tsien ed i valori sperimentali

Generalmente in sede di progetto ci si riferisce alla regola approssimata di Prandtl-Glauert, in prima valutazione, ed alla regola di Karman-Tsien per un calcolo più affinato. Ad ogni modo entrambe le leggi cadono in difetto a partire da numeri di Mach prossimi alla soglia transonica.

È evidente, comunque, come nei limiti della teoria lineare ci si possa riferire alla regola esatta di Göthert e applicare al corpo trasformato tutte le teorie già discusse e relative ai profili in campo incomprimibile.

Si osservi, infine, come nel discorso di prima approssimazione l'effetto della comprimibilità è indipendente dalle proprietà termodinamiche del gas.

LA LEGGE DI SIMILITUDINE PER LE ALI FINITE

Con ragionamento simile a quello esposto per il campo bidimensionale si suppone valida, nel caso di corpi tridimensionali sottili e seguendo Göthert, la trasformazione di variabili

$$\xi = x \quad \eta = \lambda_y y \quad \zeta = \lambda_z z \quad (6.30)$$

e di funzione potenziale

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \lambda_\varphi \varphi(x, y, z) \quad (6.31)$$

Con ciò l'equazione del campo potenziale tridimensionale (6.1) diventa

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \lambda_y^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \lambda_z^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} = 0 \quad (6.32)$$

e si riduce all'equazione di Laplace se

$$\lambda_y^2 = \lambda_z^2 = \beta^2 \quad (6.33)$$

Inoltre, mentre le condizioni al limite dell'infinito, per le (6.30), sono identicamente soddisfatte, la condizione al limite sul corpo richiede che

$$\lambda_\varphi = \lambda_z^2 = 1 - M_\infty^2 \quad (6.34)$$

La (6.34) consente scrivere la relazione tra i coefficienti di pressione dei due campi come

$$C_p(x, y) \cong \frac{-2}{V_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-1}{\beta^2} \frac{2}{V_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{1}{\beta^2} C_p(\xi, \eta) \quad (6.35)$$

In conclusione, se si desidera conoscere la distribuzione di pressione attorno ad un'ala che genera piccoli disturbi in un flusso comprimibile, occorre risolvere prima il campo incomprimibile attorno ad un'ala "trasformata" (indicata col suffisso t) le cui caratteristiche geometriche, per le (6.30), saranno, con noti simboli, $\mathcal{R}_t = \beta \mathcal{R}$, $\lambda_t = \lambda$ (qui λ è il rapporto di rastremazione), $\alpha_t = \beta \alpha$, $\epsilon_t = \beta \epsilon$, $\tau_t = \beta \tau$, mentre per la freccia Λ è

$$\left[\Lambda_{\frac{1}{4}c} \right] = \arctan \left\{ \frac{tg \Lambda_{\frac{1}{4}c}}{\beta} \right\} \quad (6.36)$$

Una volta risolto il caso incomprimibile, potrà essere utilizzata la relazione

$$C_p = \frac{C_{pt}}{\beta^2} \quad (6.37)$$

per i coefficienti di pressione. Analoga relazione sussisterà per il coefficiente di portanza

$$C_L = \frac{C_{Lt}}{\beta^2} \quad (6.38)$$

essendo C_L direttamente legato alla distribuzione di C_p . Per il gradiente della retta di portanza si avrà

$$C_{L\alpha} = C_L \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{C_{Lt}}{\beta^2} \cdot \frac{\beta}{\alpha_t} = \frac{C_{L\alpha_t}}{\beta} \quad (6.39)$$

e per il coefficiente di resistenza indotta

$$C_{Di} = k \frac{C_L^2}{\pi \mathcal{R}} = k \left(\frac{C_{Lt}}{\beta^2} \right)^2 \frac{\beta}{\pi \mathcal{R}_t} = \frac{1}{\beta^3} C_{Dit} \quad (6.40)$$

ipotizzando che k non dipenda dalla comprimibilità: questo sembra plausibile, visto che, nelle ipotesi poste, la forma della distribuzione di carico non dovrebbe essere alterata in modo significativo, ma solo scalata in similitudine.

CONCLUSIONI

Le similitudini subsoniche ora descritte consentono di estendere abbastanza facilmente al campo comprimibile le teorie alari relative alle ali in campo incomprimibile. In una fase di progetto preliminare questo procedimento si fa preferire, per la sua semplicità, all'impiego di metodi di calcolo che tengono conto della influenza del numero di Mach fin dall'inizio, che risolvono cioè direttamente l'equazione del campo potenziale comprimibile.

In sintesi, l'esaltazione degli effetti legata alla comprimibilità può essere ben colta fino al numero di Mach critico inferiore; il coefficiente di resistenza indotta si esalta maggiormente rispetto al coefficiente di portanza.

6.3 Campi supersonici

Come anticipato nell'Introduzione, il campo supersonico è caratterizzato dalla presenza di onde d'urto oblique (deboli). La trattazione dei problemi connessi può essere relativamente più semplice della trattazione dei campi subsonici, anche se affrontata in maniera esatta.

Per una reale applicabilità del modello linearizzato le onde d'urto devono essere di piccola intensità, così come deve essere in genere per avere condizioni sostenibili di volo supersonico: nel modello le onde d'urto sono sostituite da linee di Mach attraverso le quali si realizzano compressioni infinitesime.

In questo caso l'equazione di Prandtl-Glauert (6.1) può essere ricondotta all'equazione di Laplace mediante una trasformazione che coinvolge l'unità immaginaria $i = \sqrt{-1}$, impiegando poi per la risoluzione la tecnica delle singolarità supersoniche, cfr. (C.6); esiste inoltre la possibilità di lavorare in similitudine a partire da un campo di riferimento particolare, quello relativo a $M_\infty = \sqrt{2}$. In [1] è possibile trovare la classica soluzione di Ackeret. Altre soluzioni per il campo supersonico linearizzato saranno trattate nel Cap. ?? per corpi assialsimmetrici.

Si fa presente che vi sono importanti esempi di velivoli del passato sono stati disegnati ricorrendo alle soluzioni ottenute con il modello linearizzato, uno per tutti il Concorde.

6.4 Il calcolo dei numeri di Mach critici

NUMERO DI MACH CRITICO INFERIORE

Il numero di Mach critico inferiore, per definizione, deve soddisfare la relazione che segue, facilmente ricavabile dalle note equazioni del flusso isentropico:

$$\left(\frac{p}{p_\infty}\right)_{M=1} = \left(\frac{p}{p_0}\right)_{M=1} \left(\frac{p_0}{p_\infty}\right) \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{\infty crit}^2\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (6.41)$$

Dalla (6.41) discende facilmente (curva decrescente dell'abbaco di Fig. 6.4)

$$C_p^* = \frac{2}{\gamma M_{\infty crit}^2} \left[\left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{\infty crit}^2}{\frac{\gamma+1}{2}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right] \quad (6.42)$$

essendo C_p^* il coefficiente di pressione critico, valutato cioè in condizioni soniche.

Impiegando ora la relazione di Karman e Tsien (6.28), preferita per la migliore accuratezza nell'alto subsonico rispetto alla regola di Prandtl-Glauert, valutando la correzione sul C_p per $M_\infty = M_{\infty crit}$ ed utilizzando la (6.42) si ottiene una relazione, valida per oggetti forma arbitraria (profili, ali, velivoli completi) in un moto che si possa assumere a potenziale, che collega il numero di Mach critico di un profilo ed il coefficiente di pressione corrispondente, in campo incomprimibile:

$$\frac{C_{p_i}}{\sqrt{1 - M_{\infty crit}^2} + \frac{C_{p_i}}{2} \frac{M_{\infty crit}^2}{1 + \sqrt{1 - M_{\infty crit}^2}}} = \frac{2}{\gamma M_{\infty crit}^2} \left[\left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{\infty crit}^2}{\frac{\gamma+1}{2}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right] \quad (6.43)$$

Operativamente, in questa relazione il valore di C_{p_i} deve essere quello relativo al punto di massima espansione del campo di moto, nel quale il numero di Mach assumerà valore unitario. Una volta assegnato $C_{p_i} = C_{p_i(min)}$ la relazione (6.43) deve essere risolta nell'incognita $M_{\infty crit}$: la (6.43) è un'equazione trascendente, e necessita di una qualche opportuna procedura numerica. Può essere utile diagrammare primo e secondo membro della (6.43), ognuno di due essendo C_p^* . Il secondo membro è una curva universale, il primo membro costituisce una famiglia di curve parametriche in C_p a $M_\infty = 0$: la determinazione del numero di Mach critico inferiore si può fare anche per via grafica costruendo un abbaco sufficientemente dettagliato, Fig. 6.4.

NUMERO DI MACH CRITICO SUPERIORE

Per la determinazione del numero di Mach critico superiore, assegnata la geometria e l'angolo d'attacco, basta calcolare il più piccolo numero di Mach per il quale l'urto non è staccato: si utilizza la relazione che lega l'angolo di deviazione massima dell'urto obliqua (piano o conico) con il numero di Mach, oppure si ricorre alla relazione che lega il numero di Mach, l'angolo di deviazione della corrente δ e l'angolo d'urto ϵ , Fig. 6.5.

Nel caso bidimensionale il numero di Mach critico superiore può essere definito solo per i profili cosiddetti supersonici, a bordi aguzzi, in quanto per un profilo a bordo di attacco arrotondato l'urto non può mai essere attaccato, e quindi $M'_{\infty crit}$ diverge. Anche per le geometrie fusiformi è necessario un bordo aguzzo per poter viaggiare in campo supersonico. Nel caso di ali a freccia

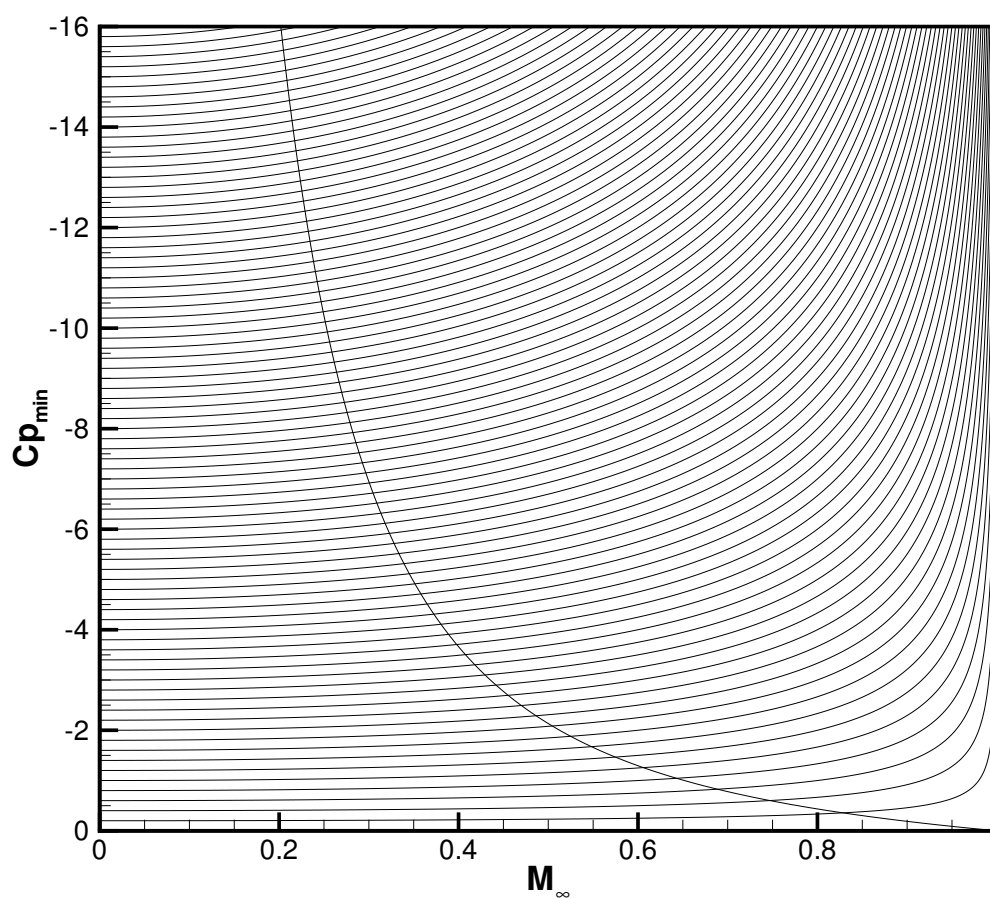


Figura 6.4: Abbaco per il calcolo del numero di Mach critico inferiore

invece è possibile il volo supersonico anche con bordi d'attacco arrotondati se l'angolo di freccia è sufficientemente grande da far sì che il cono di Mach centrato in ciascun punto del bordo d'attacco non contenga il bordo d'attacco dell'ala, Fig. 1.31.

In Fig. 6.6 si riporta l'andamento del numero di Mach critico superiore in funzione dell'angolo di attacco di un tipico profilo per il volo supersonico.

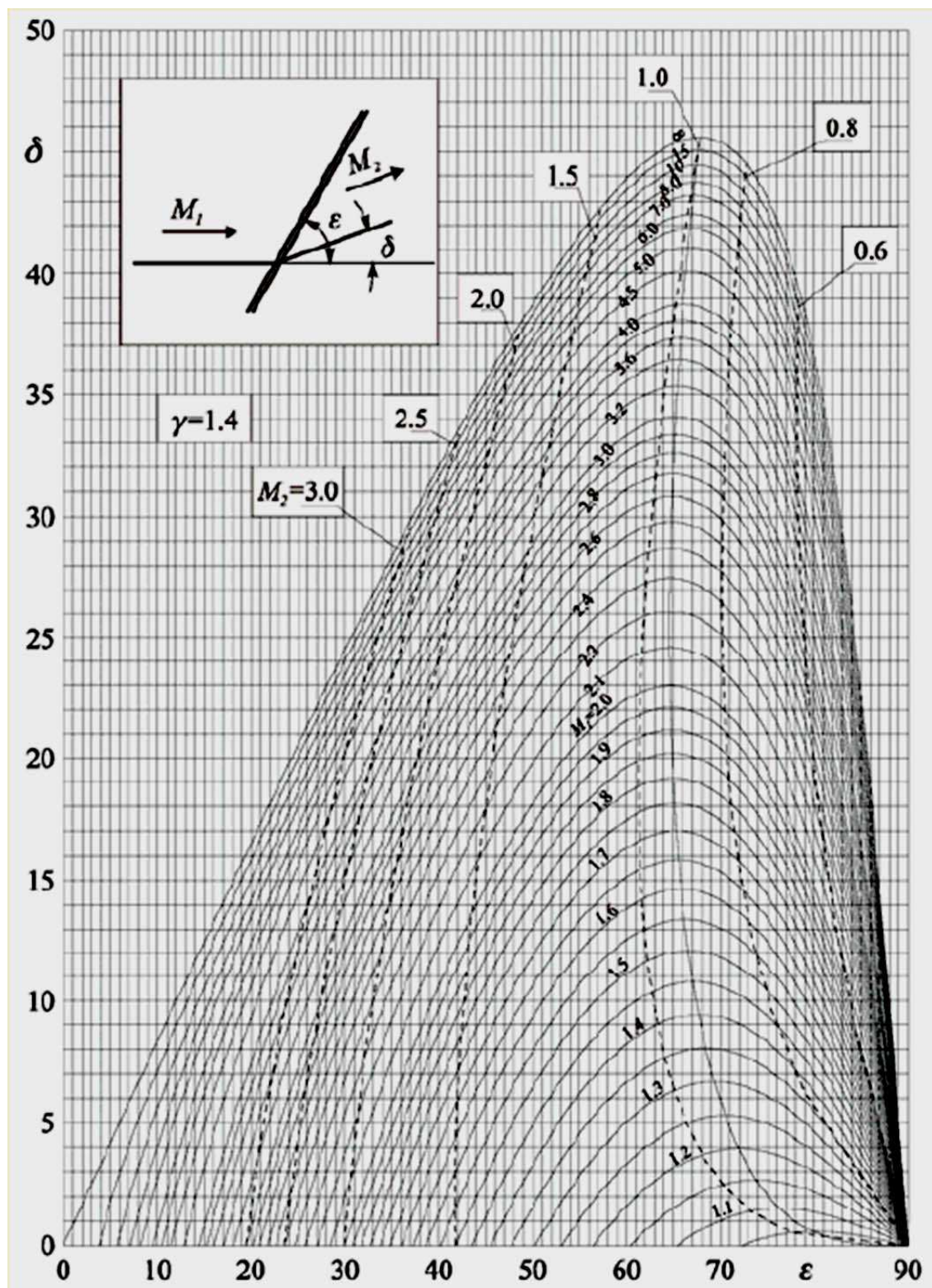


Figura 6.5: Abbaco d'urto per l'aria, da [50]

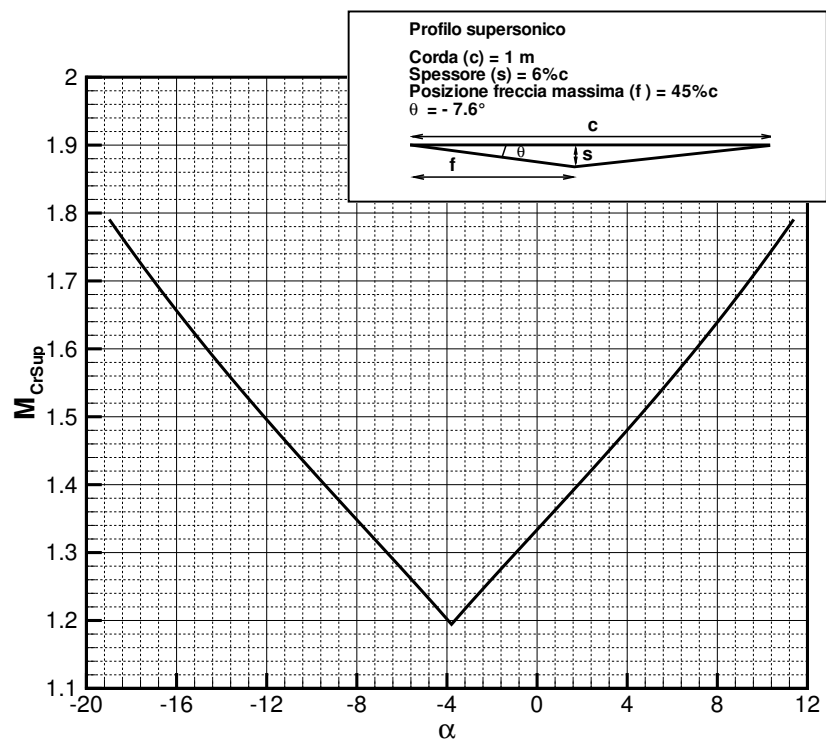


Figura 6.6: Andamento del numero di Mach critico superiore per un tipico profilo supersonico

Capitolo 7

Il campo transonico: aspetti non viscosi

Il campo di moto intorno ad un corpo investito da una corrente ad alta velocità può presentare regioni supersoniche accanto a regioni subsoniche, e si parla allora di campo transonico. Il passaggio dalle prime alle seconde avviene attraverso onde d'urto normali, caratterizzate da bruschi cambiamenti dei valori della pressione, della densità e della temperatura del fluido.

La ricerca aerodinamica da molti anni dedica grande attenzione allo studio dei metodi per ottenere migliori prestazioni in campo transonico; testimonianza tangibile degli sforzi profusi nel tempo sono i più diffusi velivoli commerciali che attualmente operano a numeri di Mach prossimi all'unità. Le complesse caratteristiche del campo di moto transonico consiglierebbero vivamente di evitare tale regime critico, ma motivi di efficienza, sia aerodinamica che propulsiva, nonché le esigenze commerciali legate alla necessità di rendere competitivo il mezzo aereo rispetto ad altri tipi di trasporto spingono nella direzione diametralmente opposta.

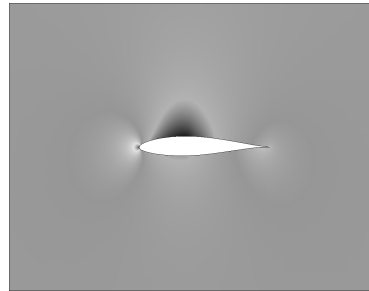
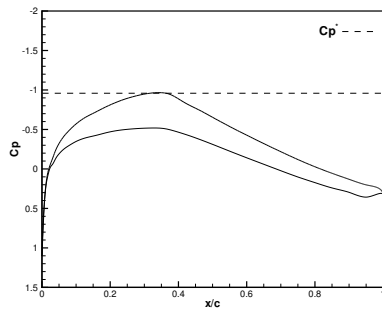
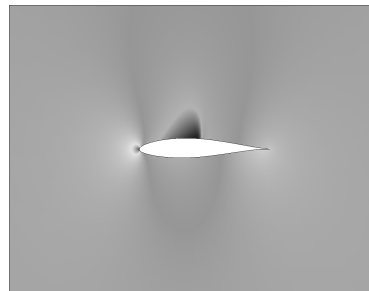
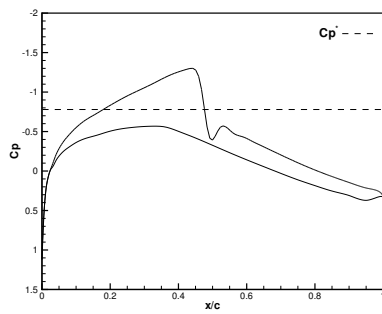
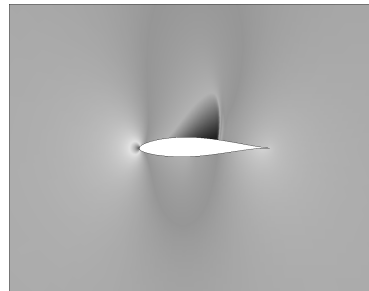
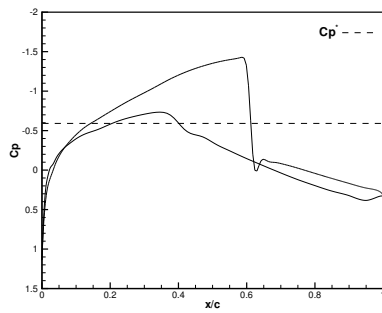
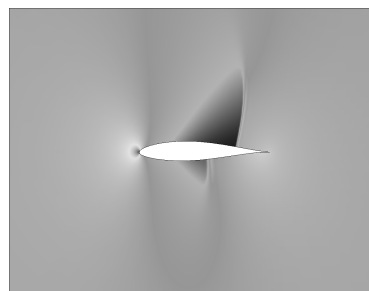
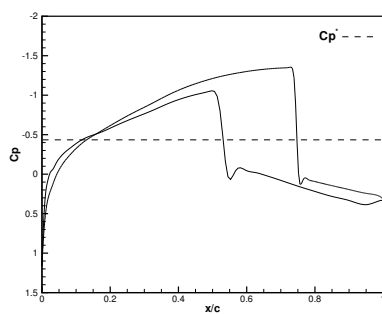
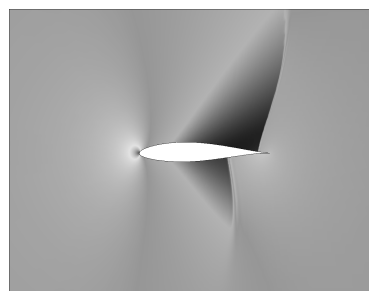
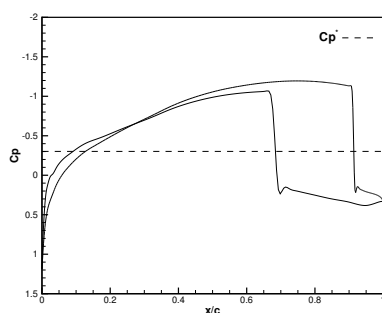
Per realizzare un prodotto all'avanguardia si deve essere in grado di incrementare le prestazioni velocistiche senza gravare sui costi operativi. In essi incide in maniera rilevante il consumo di carburante; alle esigenze economiche di una riduzione di tale voce si aggiungono le istanze legate alla salvaguardia ambientale.

Si sono già descritti i metodi per il calcolo dei numeri di Mach critici inferiore e superiore, che delimitano il campo transonico. In questo capitolo si passerà alla descrizione del campo transonico bidimensionale non viscoso, sarà quindi discussa la similitudine transonica insieme alle sue conseguenze e si esaminerà infine il problema della determinazione della resistenza d'onda mediante il metodo *far-field*. Gli aspetti legati agli effetti della viscosità -fondamentali, con forti implicazioni su prestazioni, certificazione e condotta dell'aeromobile- sono presentati e discussi nel Cap. 8.6.

7.1 Struttura del campo

In questo paragrafo si presenta una descrizione dei fenomeni che si verificano in campo transonico, relativamente ai profili alari e quando si possono trascurare gli effetti della viscosità: questa seconda assunzione è sostanzialmente ben accettabile solo nelle condizioni di crociera. Si riporta in Fig. 7.1 in sequenza l'andamento della distribuzione di pressione sul dorso e sul ventre di un profilo portante e la visualizzazione del campo di pressione, ad una data incidenza, al crescere del numero di Mach della corrente asintotica.

Inizialmente, per $M_\infty \leq M_{\infty_{crit}}$, la distribuzione di pressione è simile a (meglio, in similitudine con) quella relativa al campo iposonico; per $M_\infty = M_{\infty_{crit}}$ la velocità delle particelle uguaglia la velocità del suono in un punto del profilo, dove la pressione raggiunge il valore critico. Per valori di M_∞ tali che $M_{\infty_{crit}} < M_\infty < 1$, compare il flusso misto subsonico e supersonico, quest'ultimo limitato alla zona compresa tra l'onda d'urto quasi normale e la linea sonica (nel caso presentato, questo accade sul dorso). Per valori crescenti del numero di Mach la regione supersonica si estende mentre l'onda d'urto tende ad arretrare verso il bordo d'uscita; compare inoltre un flusso supersonico anche sul ventre, con formazione di un'onda d'urto che arretra più rapidamente di quanto

a) $M_\infty = 0.66$ b) $M_\infty = 0.7$ c) $M_\infty = 0.75$ d) $M_\infty = 0.8$ e) $M_\infty = 0.85$

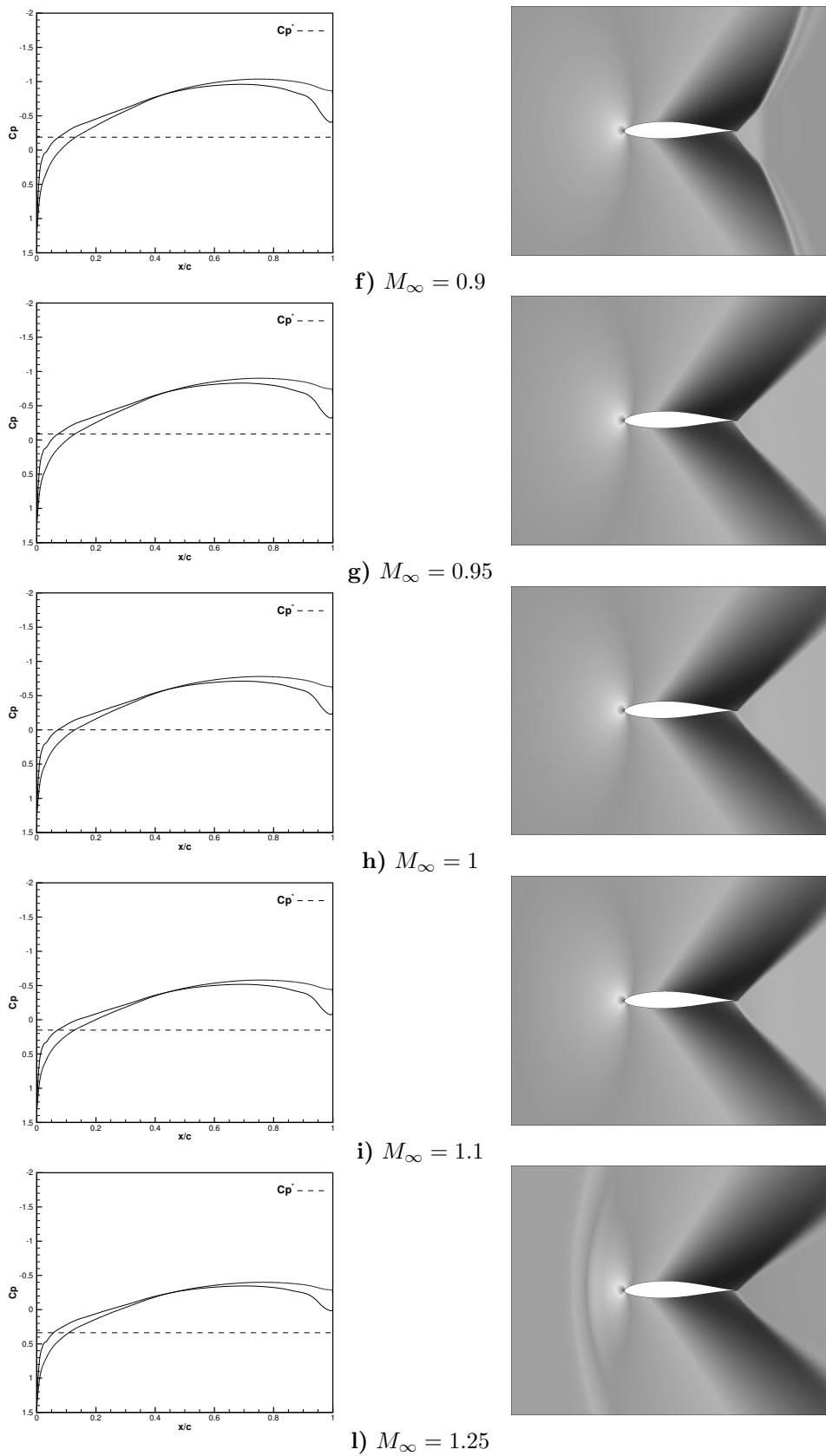


Figura 7.1: Profilo NACA 63₂ – 215, $\alpha = .2^\circ$, soluzione Euleriana, da FLUENT, [3] - Coefficiente di pressione e visualizzazione del campo di moto al variare del numero di Mach asintotico

si verifica per il dorso. Quando, con il crescere del numero di Mach, è $M_\infty > 1$, compare l'onda di prua (normale in corrispondenza del bordo d'attacco e sempre più inclinata, fino a diventare evanescente) ed è presente una zona subsonica attorno al bordo d'attacco; le onde d'urto sul profilo arretrano verso il bordo d'uscita e si congiungono.

Quando un velivolo in accelerazione entra in campo transonico il coefficiente di portanza continua ad aumentare (come faceva nel regime subsonico) fino ad un numero di Mach che, in assenza di fenomeni viscosi, è un po' maggiore dell'unità, e poi decresce. La presenza di onde d'urto comporta un aumento di entropia cui è collegata una resistenza che, nelle ipotesi assunte, sarà di pressione: il relativo coefficiente cresce in modo considerevole fino a numeri di Mach prossimi all'unità, quindi inizia a decrescere. In Fig. 7.2 è mostrato l'andamento teorico (numerico) dei coefficienti di resistenza e di portanza collegati ai campi di moto della Fig. 7.1 (in realtà per la portanza si sono messi in conto alcuni effetti viscosi che saranno trattati in seguito). È stato evidenziato il valore del numero di Mach per il quale il coefficiente di resistenza inizia a crescere con un rateo insostenibile per il volo in crociera di un velivolo commerciale.

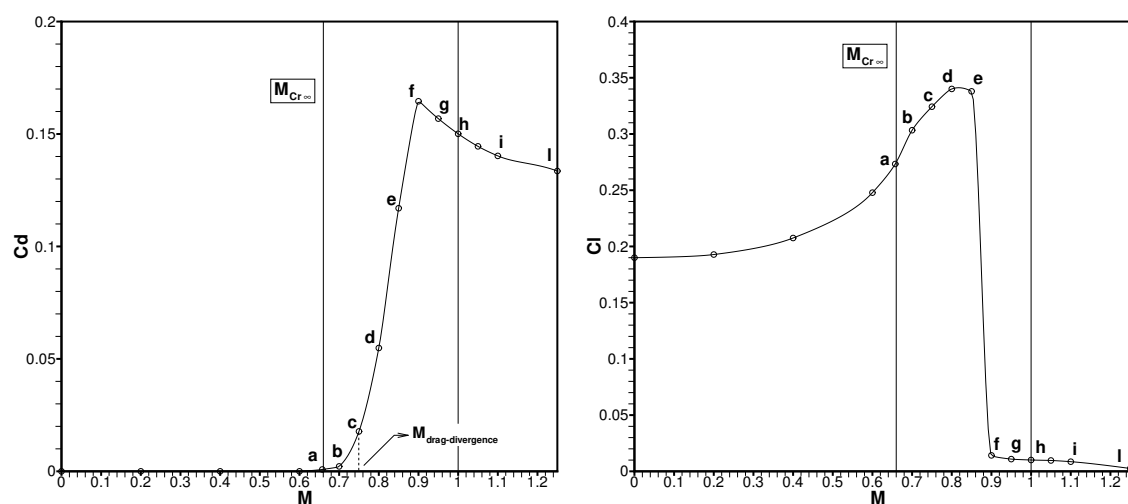


Figura 7.2: Profilo NACA 63₂ – 215, $\alpha = .2^\circ$, FLUENT, [3] - Andamento di C_d e C_l in funzione di M_∞

7.2 Determinazione qualitativa della resistenza d'onda per

$$M_{\infty_{crit}} < M_\infty < 1$$

Riferendosi allo schema di Fig. 7.3, sia M_1 il numero di Mach a monte dell'onda d'urto, β l'angolo che l'onda forma con la corrente supersonica a monte, p_0 e p'_0 le pressioni di ristagno prima e dopo l'urto. Ricordando che

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

si ottiene facilmente che il salto di entropia è fornito da

$$\Delta S = -R \cdot \ln\left(\frac{p'_0}{p_0}\right) = -R \cdot \ln\left(1 - \frac{p_0 - p'_0}{p_0}\right) \simeq R \cdot \frac{p_0 - p'_0}{p_0} \quad (7.1)$$

Al salto di entropia corrisponde un'energia ΔQ assorbita dall'ala durante il suo spostamento che eguaglia il lavoro compiuto dalla resistenza d'onda (non si stanno considerando le azioni viscosi). Supponendo che la temperatura T_1 davanti all'onda eguagli approssimativamente la temperatura critica T_c (in quanto $M_1 \sim 1$), e ricordando che tramite la relazione di Rankine-Hugoniot è

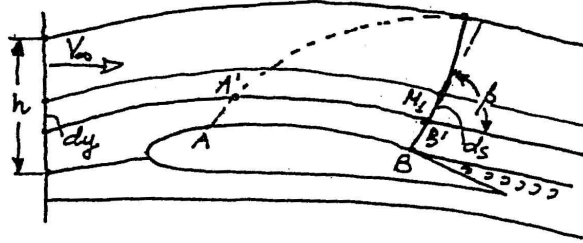


Figura 7.3: Schema del campo di moto per il calcolo della resistenza d'onda.

$$\frac{p_0 - p'_0}{p_0} = \frac{2\gamma}{(\gamma + 1)^2} \frac{(M_1^2 \sin^2 \beta - 1)^3}{3} \quad (7.2)$$

si può scrivere

$$\Delta Q = T_c \Delta S = \frac{4\gamma RT_0}{(\gamma + 1)^3} \frac{(M_1^2 \sin^2 \beta - 1)^3}{3} = \frac{4\gamma}{(\gamma + 1)^3} \frac{p_0}{\rho_0} \frac{(M_1^2 \sin^2 \beta - 1)^3}{3} \quad (7.3)$$

e questa rappresenta l'energia cinetica (per unità di massa) convertita in energia interna attraverso l'urto.

Considerando un'altezza media h_m attraverso cui si suppone passare la massa d'aria interessata al fenomeno, e ipotizzando che il termine $(M_1^2 \sin^2 \beta - 1)$ sia costante per tale altezza, l'equazione di bilancio dell'energia conduce alla relazione

$$D_w \cdot V_\infty = \rho_\infty V_\infty h_m \Delta Q = \rho_\infty V_\infty h_m \frac{4\gamma}{3(\gamma + 1)^3} \frac{p_0}{\rho_0} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1)^3 \quad (7.4)$$

in cui D_w è la resistenza d'onda. Il coefficiente di resistenza d'onda C_{d_w} si ricava allora come

$$C_{d_w} = \frac{D_w}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c} = \frac{h_m}{c} \frac{8\gamma}{3(\gamma + 1)^3} \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \frac{1}{V_\infty^2} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1)^3 \quad (7.5)$$

e con semplici passaggi

$$C_{d_w} = \frac{8}{3(\gamma + 1)^3} \frac{h_m}{c} \frac{1 + 0.2M_\infty^2}{M_\infty^2} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1)^3 \quad (7.6)$$

Nella (7.6) h_m è certamente funzione di $(M_\infty - M_c)$, ed in prima approssimazione si consideri la relazione lineare

$$\frac{h_m}{c} = k_1 (M_\infty - M_c) \quad (7.7)$$

Supponendo che $(M_1 \sin \beta - 1)$ aumenti proporzionalmente a $(M_\infty - M_c)$, come

$$\frac{M_1 \sin \beta - 1}{1} = \frac{M_\infty - M_c}{M_c} (1 + \epsilon) \quad (7.8)$$

dove $\epsilon < 1$ è un coefficiente che dipende dalla forma del profilo e dall'incidenza α , essendo un indice degli incrementi di velocità che si realizzano, è lecito scrivere

$$\begin{aligned} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1) &= 2 \left[1 + \frac{M_1 \sin \beta - 1}{2} \right] [M_1 \sin \beta - 1] = \\ &= 2 \left[1 + \frac{M_\infty - M_c}{2M_c} (1 + \epsilon) \right] \left[\frac{M_\infty - M_c}{M_c} (1 + \epsilon) \right] \end{aligned} \quad (7.9)$$

Pertanto la (7.9) diventa:

$$C_{d_w} = 1.54k_1(1 + \epsilon)^3 \frac{1 + 0.2M_\infty^2}{M_c^3 M_\infty^2} (M_\infty - M_c)^4 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{M_\infty - M_c}{M_c} \right) \simeq \frac{k}{M_c^5} (M_\infty - M_c)^4 \quad (7.10)$$

Il calcolo ora descritto è certamente approssimato, (per l'introduzione dei coefficienti ϵ e k_1 , nonché le ipotesi (7.7) e (7.8)) e non completo per la resistenza addizionale dovuta alla eventuale separazione dello strato limite (che ovviamente può essere messa in conto prendendo un valore più grande per k). Ad ogni modo il metodo conduce ad una espressione di C_{d_w} funzione di $(M_\infty - M_c)^4$ che è qualitativamente in buon accordo con i dati sperimentali. Ad esempio, la crescita della resistenza d'onda della Fig. 7.2 può essere calcolato con la (7.10) ponendo $k = 2.5$.

7.3 Il Principio di Indipendenza dal numero di Mach - Conseguenze

Una delle caratteristiche principali in campo transonico è il cosiddetto 'Principio di Indipendenza dal numero di Mach': il numero di Mach locale (e quindi la sua distribuzione su di una superficie) è indipendente da M_∞ per $M_\infty \approx 1$.

Per mostrare in modo euristico questo importante principio si può fare la considerazione che per valori di M_∞ di poco superiore all'unità compare un'onda d'urto staccata, di debole intensità: allora quando il numero di Mach a monte è $M_\infty = 1 + \epsilon$ ($\epsilon \ll 1$), il numero di Mach a valle è $1 - \epsilon$, e pertanto il campo fluido attorno al corpo sarà lo stesso per $M_\infty = 1 + \epsilon > 1$ e $M_\infty = 1 - \epsilon < 1$. Sembra lecito allora assumere che per il valore M del numero di Mach in ciascun punto del campo valga la relazione

$$\left(\frac{dM}{dM_\infty} \right)_{M_\infty \rightarrow 1} = 0 \quad (7.11)$$

Essendo d'altra parte, date le ipotesi che si sono assunte,

$$\begin{aligned} C_p &= \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left\{ \left[\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right\} \cong \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left\{ \left[\frac{1 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M_\infty^2 - 1)}{1 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M^2 - 1)} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right\} = \\ &= \frac{2}{\gamma + 1} \left[(M_\infty^2 - 1) - (M^2 - 1) \right] \end{aligned} \quad (7.12)$$

si ricava, in forza della (7.11), il semplice risultato

$$\left(\frac{dC_p}{dM_\infty} \right)_{M_\infty=1} = \left\{ \frac{2}{\gamma + 1} \left[2M_\infty - 2M \frac{dM}{dM_\infty} \right] \right\}_{M_\infty=1} = \frac{4}{\gamma + 1} \quad (7.13)$$

È stato peraltro dimostrato, [51], che una relazione più esatta della (7.13) è

$$\left(\frac{dC_p}{dM_\infty} \right)_{M_\infty=1} = \frac{4}{\gamma + 1} - \frac{2}{\gamma + 1} \left(C_p \right)_{M_\infty=1} \quad (7.14)$$

Il Principio di Indipendenza è stato verificato per flussi bidimensionali ed assialsimmetrici, [52] e [53]. Si riporta in Fig. 7.4 una serie di distribuzioni del numero di Mach su un cuneo per diversi valori del numero di Mach della corrente: si osserva come il numero di Mach locale rimane praticamente costante per $0.85 \lesssim M_\infty \lesssim 1.25$ ¹.

Utilizzando la (7.14) si ricava facilmente il coefficiente di portanza in condizioni soniche; si ha

¹È possibile ed interessante ricavare la (7.13) non con un ragionamento puramente fisico, ma, in termini matematici, utilizzando la (??).

Considerando, infatti, la (??) per $M_\infty = 1 - \epsilon$, si ottiene, per la equazione fondamentale in esame

$$C_L = \int_0^1 (C_{p_v} - C_{p_d}) d\left(\frac{x}{c}\right)$$

da cui

$$\left(\frac{dC_L}{dM_\infty}\right)_{M_\infty=1} = \frac{4}{\gamma+1} - \frac{2}{\gamma+1} (C_L)_{M_\infty=1} \quad (7.25)$$

Analogamente si ricava per il coefficiente di resistenza (non viscosa) a portanza nulla C_{D_o} , nell'ipotesi (7.14)

$$\left(\frac{dC_{D_o}}{dM_\infty}\right)_{M_\infty=1} = \frac{-2}{\gamma+1} (C_{D_o})_{M_\infty=1} \quad (7.26)$$

Le conseguenze del Principio di Indipendenza e dei risultati da esso ricavati sono le seguenti.

- a) Il coefficiente di pressione (ed il coefficiente di portanza) è una funzione crescente del numero di Mach per $M_\infty \approx 1$. Essendo d'altra parte C_p decrescente con il numero di Mach in campo supersonico, ci sarà un massimo per C_L a valori di $M_\infty > 1$: questo risultato è confermato dall'esperienza nella maggior parte dei casi, a meno che non vi siano interazioni tra onde d'urto e strato limite per valori più bassi del numero di Mach.

$$2\epsilon \varphi_{xx}^- + \varphi_{yy}^- + \varphi_{zz}^- = \frac{\gamma+1}{a_\infty(1-\epsilon)} \varphi_x^- \varphi_{xx}^- \quad (7.15)$$

mentre per la condizione al limite sul corpo e per il coefficiente di pressione si scrive, nell'ordine,

$$\frac{1}{a_\infty(1-\epsilon)} \left[\varphi_z^-\right]_{z=0} = \tau^- \frac{\partial}{\partial(x/c)} f^-\left(\frac{x}{c}, \frac{y}{b}\right) \quad (7.16)$$

$$C_p^- = -\frac{2}{a_\infty(1-\epsilon)} \left[\varphi_x^-\right]_{z=0} \quad (7.17)$$

Analogamente, per $M_\infty = 1 + \epsilon$ si ricava

$$-2\epsilon \varphi_{xx}^+ + \varphi_{yy}^+ + \varphi_{zz}^+ = \frac{\gamma+1}{a_\infty(1+\epsilon)} \varphi_x^+ \varphi_{xx}^+ \quad (7.18)$$

Pertanto le funzioni φ^- e φ^+ soddisfano la stessa equazione se

$$\frac{\gamma+1}{a_\infty(1+\epsilon)} \varphi_x^+ + 2\epsilon = \frac{\gamma+1}{a_\infty(1-\epsilon)} \varphi_x^- - 2\epsilon \quad (7.19)$$

cioè se

$$\varphi^+ = \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \varphi^- - \frac{4\epsilon a_\infty}{\gamma+1} x + cost \quad (7.20)$$

Per quanto riguarda la condizione al limite sul corpo si ha che è automaticamente soddisfatta, essendo

$$\begin{aligned} \tau^+ \frac{\partial}{\partial(x/c)} f^+\left(\frac{x}{c}, \frac{y}{b}\right) &= \frac{1}{(1+\epsilon)a_\infty} \left(\varphi_x^+\right)_{z=0} = \frac{1}{(1-\epsilon)a_\infty} \left(\varphi_x^-\right)_{z=0} \\ &= \tau^- \frac{\partial}{\partial(x/c)} f^-\left(\frac{x}{c}, \frac{y}{b}\right) \end{aligned} \quad (7.21)$$

mentre la condizione al limite all'infinito subisce una alterazione, col potenziale φ^+ , avendosi, per $x = -\infty$

$$\left[\varphi_x^+\right]_{x \rightarrow -\infty} = -\frac{4\epsilon a_\infty}{\gamma+1} = \frac{-4(M_\infty^+ - 1)a_\infty}{\gamma+1} \quad (7.22)$$

essendo sempre, per $x = -\infty$

$$(\varphi_y^+) = (\varphi_z^+) = 0 \quad (7.23)$$

L'esistenza della perturbazione all'infinito può essere giustificata assumendo un'onda d'urto normale all'infinito (cfr. ??). Infine, per quanto riguarda i coefficienti di pressione si ha

$$C_p^+ = \frac{-2}{a_\infty(1+\epsilon)} (\varphi_x^+)_{z=0} = \frac{-2}{a_\infty(1-\epsilon)} (\varphi_x^-)_{z=0} + \frac{8\epsilon}{\gamma+1} = C_p^- + \frac{8\epsilon}{\gamma+1} \quad (7.24)$$

Può così ricavarsi

$$\left(\frac{dC_p}{dM_\infty}\right)_{M_\infty=1} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{C_p^+ - C_p^-}{2\epsilon} = \frac{4}{\gamma+1} \quad C.V.D.$$

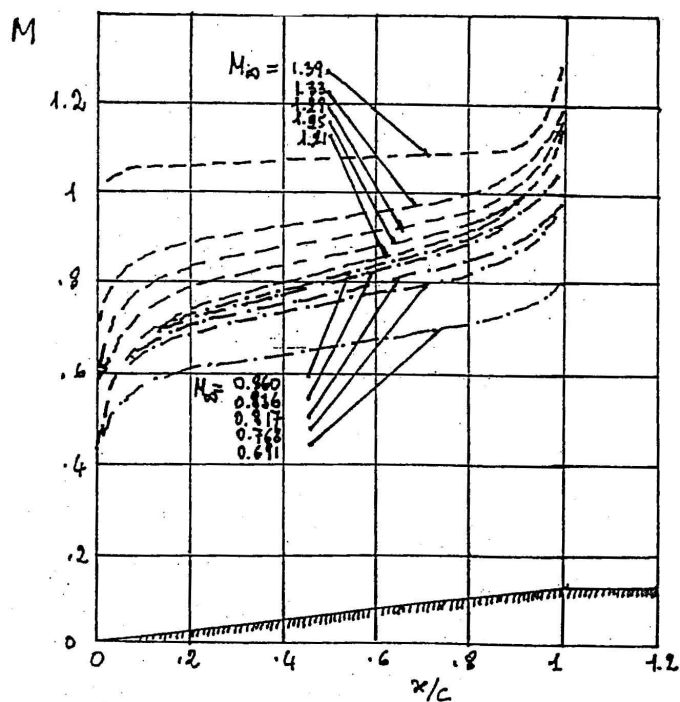


Figura 7.4: Principio di Indipendenza: il numero di Mach sul cuneo al variare di M_∞

- b) Il coefficiente di resistenza a portanza nulla invece diminuisce col numero di Mach per $M_\infty \approx 1$. Pertanto il massimo per C_{D_0} si avrà per $M_\infty < 1$.
- c) La pendenza delle curve $C_p = C_p(M)$ e $C_l = C_l(M)$ può ritenersi uguale per tutti i profili per $M_\infty \approx 1$. Il risultato è applicabile almeno per profili simmetrici ad angolo di incidenza nullo o molto piccolo.

Parte IV

EFFETTI VISCOSI

Capitolo 8

Effetti viscosi in Aerodinamica Applicata

8.1 Introduzione

Gli effetti della viscosità in Aerodinamica Applicata si possono così sintetizzare:

- si altera la distribuzione di pressione calcolata con teorie di moto di fluido ideale, soprattutto nelle regioni poppiere, determinando, inoltre, regioni di flusso separato;
- si genera la resistenza nelle forme di attrito e scia.

Per i profili alari e le ali (campi portanti), Fig. 8.1,

- si riduce il valore della portanza, sia per l'effetto che lo spessore di spostamento provoca su curvatura ed angolo d'attacco, sia per la modifica della condizione di vorticità nulla sul bordo di uscita;
- all'aumentare dell'estensione delle regioni di flusso separato interviene il fenomeno dello stallo.

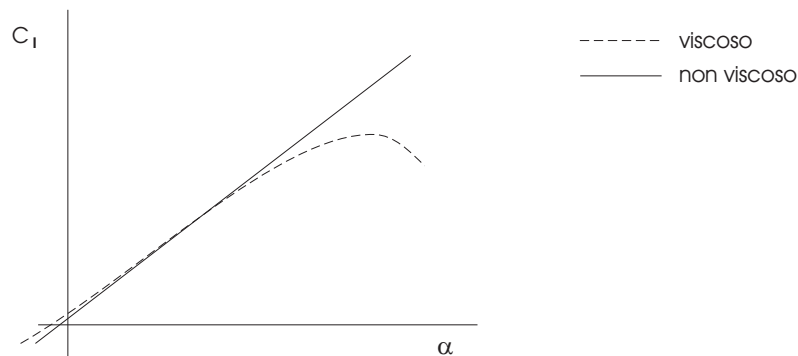


Figura 8.1: Effetto della viscosità sulla retta di portanza

Lo studio teorico di un campo di moto viscoso in Aerodinamica Applicata può effettuarsi secondo due linee:

- risoluzione numerica delle equazioni di Navier-Stokes;
- calcolo dell'interazione tra campo esterno e strato limite.

Si tratta di metodi di soluzione concettualmente differenti, con diversa complessità e costo. La cosa che hanno in comune è che per campi di moto non troppo complicati entrambi presentano

buone prestazioni e per campi di moto complicati entrambi possono presentare molto probabilmente un risultato insoddisfacente. La soluzione delle equazioni di Navier-Stokes -comparativamente molti più onerosa- ha una maggiore generalità (con poche restrizioni, consente di affrontare *qualsunque* problema di fluidodinamica). Un solutore basato sull'interazione è sicuramente superiore per il campo 2-D (avendo un rapporto efficacia/costo molto più elevato), mentre in campi 3-D la complessità matematica e numerica dello strato limite è non inferiore a quella delle equazioni di Navier-Stokes (e quindi le tecniche di interazione non interessano più).

Per lo studio degli aspetti viscosi si danno per noti sia il concetto di viscosità di un fluido sia le caratteristiche più generali della turbolenza, trattati nei paragrafi (1.2) e (2.3). Per la maggior parte dei fluidi la viscosità è una proprietà di stato determinabile, teoricamente o sperimentalmente, in funzione delle variabili indipendenti che definiscono uno stato del sistema termodinamico; in [1], p. 75 e segg., possono essere rivisti alcuni concetti di base che riguardano la genesi della viscosità, nonché l'introduzione del numero di Reynolds ed alcune sue interpretazioni. La turbolenza invece non è associabile allo stato del fluido, essa anzi si manifesta in una varietà estremamente estesa di modalità: l'inferenza della turbolenza negli effetti della viscosità in Aerodinamica Applicata, fondamentale, deve essere sempre ben nota in qualunque condizione operativa.

In questo capitolo si richiameranno alcune caratteristiche generali dello strato limite e degli effetti della viscosità in generale. In particolare, si tratteranno gli aspetti più importanti dei due fenomeni fondamentali nelle Scienze del Volo: la transizione e la separazione.

8.2 Alcune considerazioni sullo strato limite 2-D

Ci si riferisce alla Fig. 2.5, con tutte le convenzioni introdotte nel paragrafo (2.3). Si riportano poi le Equazioni di Prandtl (2.18) per lo strato limite incomprimibile 2-D

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu_{\text{eff}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (8.1)$$

e le relative condizioni al contorno

$$\begin{aligned} y = 0 : u &= 0, \quad v = v_w \\ y = \delta : u &= U_e(x), \quad \frac{\partial^n u}{\partial y^n} = 0, \forall n > 0 \end{aligned} \quad (8.2)$$

Applicando la seconda delle (8.2) alla seconda delle (8.1) si vede che al bordo dello strato limite vale la (nota) equazione di Eulero

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = U_e \frac{dU_e}{dx} \quad (8.3)$$

La terza delle (8.1) rappresenta uno dei principali risultati della teoria di Prandtl: con buona accuratezza la pressione si mantiene costante attraverso lo strato limite. Questo è della massima importanza in quanto spiega come, nonostante la presenza dello strato limite, il calcolo non viscoso, o comunque la conoscenza della velocità all'esterno dello strato limite, permette di stimare abbastanza correttamente la forza di pressione agente su un corpo. Inoltre si può scrivere $\partial p / \partial x = dp / dx$ e quindi per $y = 0$ la seconda delle (8.1), nel caso di parete impermeabile), diventa

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = \frac{dp}{dx}$$

Da questa relazione segue che se il flusso è in espansione ($dp/dx < 0$) la derivata seconda della u sulla parete è negativa: il profilo di velocità e delle sue derivate prima e seconda si presentano

come in Fig. 8.2. Se il flusso è invece in compressione ($dp/dx > 0$) la derivata seconda della u sulla parete è positiva, e si ha la situazione della Fig. 8.3: in questo secondo caso ad una certa distanza dalla parete la derivata seconda deve cambiare segno e nel profilo di velocità comparirà un punto di flesso.

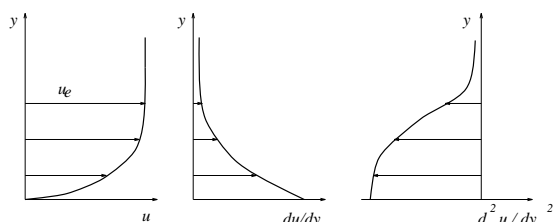


Figura 8.2: Profili di velocità- $dp/dx < 0$

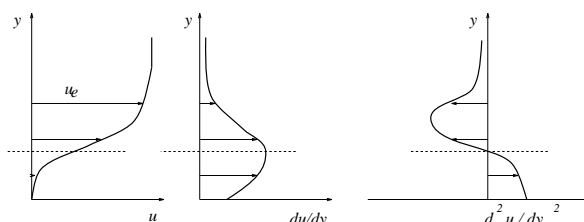


Figura 8.3: Profili di velocità- $dp/dx > 0$

Uno strato limite si dirà soffiato quando su una parte della parete è $v_w \neq 0$. Da una semplice considerazione di continuità risulta poi chiaro che ad ogni ascissa x deve essere $v[x, \delta(x)] \neq 0$ anche se $v_w(x) = 0$: si parla di soffiamento indotto dallo strato limite (sulla corrente esterna)¹. In generale comunque è

$$v(\delta) = \int_0^\delta \frac{\partial v}{\partial y} dy + v_w \quad (8.4)$$

Se L è la lunghezza caratteristica del problema, il numero di Reynolds riferito alle condizioni asintotiche $Re_\infty = (U_\infty L)/\nu_\infty$ non misura correttamente il rapporto tra effetti di inerzia e di viscosità all'interno dello strato limite: si deve introdurre invece un numero di Reynolds locale $Re_x = [U_e(x)x]/\nu_e(x)$.

In riferimento ad un punto della superficie $P(x)$ lo strato limite si definirà laminare in P se il Fattore di Turbolenza $Tu(x, y) = 0$ per $0 < y < \delta(x)$; se questo non è vero lo strato limite si dirà turbolento (in P). Se poi attraverso lo strato limite sta avvenendo la transizione da moto laminare a moto turbolento lo strato limite si dirà transizionale.

Per $y \ll \delta$ (in una regione aderente alla superficie, molto sottile rispetto all'altezza dello strato limite), il moto è a bassissima turbolenza anche se lo strato limite è turbolento: questo proprio per la presenza della parete (la condizione di aderenza impone l'annullamento delle fluttuazioni a parete); si parla a volte di sottostrato laminare. E pertanto anche in flusso turbolento lo sforzo alla parete τ_w si può sempre scrivere come

$$\tau_w(x) = \tau_d(x, y=0) = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (8.5)$$

Il coefficiente di attrito alla parete c_f è definito come

$$c_f = c_f(x) = \frac{\tau_w(x)}{\frac{1}{2}\rho_e U_e^2} \quad (8.6)$$

e si fa presente che anche la quantità $\rho_e U_e^2$ è in generale funzione di x . L'integrazione dello sforzo di attrito lungo la parete fornisce la forza resistente detta d'attrito; l'integrazione del coefficiente di attrito dà un coefficiente di resistenza di attrito.

Lo sforzo di attrito a parete è negativo nelle regioni di flusso separato, quando il profilo di velocità presenta la tipica forma con flusso invertito. In questo caso la viscosità "spinge" la parete anziché frenarla (anche se in realtà lo sforzo di attrito ha qui valori molto prossimi a 0). In genere si parla di punto di separazione (del flusso dalla parete) quando il profilo di velocità si presenta con tangente verticale, ma si fa presente che quando lo strato limite è in condizioni di incipiente

¹Sarà mostrato in seguito come la grandezza $v[x, \delta(x)]$ è di fondamentale importanza per i metodi di calcolo delle caratteristiche aerodinamiche di corpi, portanti e non, basati sul concetto di strato limite.

separazione è tutto molto incerto proprio dal punto di vista fenomenologico, e spesso il flusso è localmente instazionario.

Si vuol qui chiarire esplicitamente che elevati valori dello sforzo tangenziale incrementano la resistenza di attrito, ma contribuiscono pure a mantenere il flusso attaccato, con irrinunciabili, notevoli vantaggi per le prestazioni aerodinamiche ad alti angoli d'attacco.

In riferimento alla generica ascissa curvilinea x , la presenza dello strato limite comporta una diminuzione del volume di flusso rispetto al caso in cui, per assurdo, la velocità rimanesse sempre uguale ad $U_e(x)$ fino alla parete; per unità di apertura della lastra e nel caso incomprimitibile questa riduzione è data da, Fig. 2.5,

$$\int_0^{\delta(x)} \left[U_e(x) - u(x, y) \right] dy = U_e(x) \delta^*(x) \quad (8.7)$$

essendo stato introdotto lo spessore di spostamento

$$\delta^*(x) = \int_0^{\delta(x)} \left[1 - \frac{u(x, y)}{U_e(x)} \right] dy \quad (8.8)$$

che misura appunto lo spostamento della superficie che sarebbe necessario se si volesse realizzare un flusso non viscoso con la portata (ridotta) del flusso reale.

L'analogia riduzione della quantità di moto può essere misurata tramite lo spessore di quantità di moto $\theta(x)$, che nel caso incomprimitibile si scrive

$$\theta(x) = \int_0^{\delta(x)} \frac{u(x, y)}{U_e(x)} \left[1 - \frac{u(x, y)}{U_e(x)} \right] dy \quad (8.9)$$

Le quantità δ^* e θ sono due lunghezze, piccole rispetto alla lunghezza caratteristica, e si vedrà che hanno un significato molto importante nelle Scienze del Volo. Mentre lo spessore dello strato limite δ è una grandezza convenzionale, δ^* e θ hanno significato assoluto.

Si propone qui una precisazione sulla differenza concettuale tra il modello dello strato limite e quello retto dalle equazioni di NS: quest'ultimo non vede strato limite inteso come una regione del campo di moto nel quale valgono equazioni ridotte, la viscosità è attiva ovunque, anche se funziona solo in certe regioni. Se e dove queste regioni sono poco estese allora si è in presenza di strato limite: in questo caso si vede ovviamente un profilo di velocità, ma le grandezze fondamentali con le quali si descrive e si caratterizza uno strato limite non compaiono nel modello NS, a cominciare dallo spessore dello strato limite δ , che non è definibile. Tutto questo ha un preciso significato anche operativo. Se da un solutore NS si vogliono estrarre le grandezze fondamentali dello strato limite (in quanto importanti per l'Aerodinamica Applicata), occorre farlo a parte, dopo che si è ottenuta la soluzione delle equazioni del moto, e il calcolo è non semplice in quanto occorre preliminarmente definire in modo non ambiguo lo strato limite (possono definirsi diversi criteri che abbastanza certamente non portano alla stessa definizione della regione di strato limite)².

8.2.1 L'equazione di Von Karman

A partire dalle equazioni di Prandtl si può ottenere un'importante relazione integrale. Si somma la prima delle (8.1) alla seconda moltiplicata per u e, mediante l'equazione di Eulero, si ha

$$2u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(uv) - U_e \frac{dU_e}{dx} = \nu_{\text{eff}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Dall'integrazione tra 0 e δ dei due membri della relazione precedente si ha

$$\int_0^{\delta} 2u \frac{\partial u}{\partial x} dy + [uv]_0^{\delta} - \int_0^{\delta} U_e \frac{dU_e}{dx} dy = \left[\nu_{\text{eff}} \frac{\partial u}{\partial y} \right]_0^{\delta} = -\nu \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_0 = -\frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_0 = -\frac{\tau_w}{\rho} \quad (8.10)$$

²Questa precisazione può essere la chiave per comprendere alcuni limiti -decisivi- che i solutori NS hanno nell'Aerodinamica Applicata: il fondamentale problema del calcolo della transizione, ormai risolto nei solutori di strato limite (che però non danno il campo di moto), non trova risultati soddisfacenti nei solutori NS (che danno il campo di moto). Questo inconveniente può essere risolto "ibridando" la soluzione NS con quella dello strato limite, opportunamente individuato, [74].

(e si è considerato che a parete è comunque $\nu_{\text{eff}} = \nu$). Essendo per la (8.4)

$$\left[uv\right]_0^\delta = u_\delta v_\delta = U_e v_\delta = U_e \int_0^\delta \frac{\partial v}{\partial y} dy + U_e v_w = -U_e \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy + U_e v_w$$

la (8.10) diventa

$$\int_0^\delta \left[-2u \frac{\partial u}{\partial x} + U_e \frac{\partial u}{\partial x} + U_e \frac{dU_e}{dx} \right] dy = \frac{\tau_w}{\rho} + U_e v_w$$

Aggiungendo e sottraendo nell'integrando $u(dU_e/dx)$ e con opportune manipolazioni (che prevedono l'impiego dell'operazione di derivazione sotto il segno di integrale) si ha

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \left[\frac{dU_e}{dx} (U_e - u) + u \frac{dU_e}{dx} + U_e \frac{\partial u}{\partial x} - 2u \frac{\partial u}{\partial x} \right] dy &= \int_0^\delta \left\{ \frac{dU_e}{dx} (U_e - u) + \frac{\partial}{\partial x} [u(U_e - u)] \right\} dy = \\ &= \int_0^\delta \left\{ U_e \frac{dU_e}{dx} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{u}{U_e} U_e^2 \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) \right] \right\} dy = \\ &= U_e \frac{dU_e}{dx} \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy + \frac{d}{dx} \left[U_e^2 \int_0^\delta \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy \right] = \\ &= U_e \frac{dU_e}{dx} \delta^* + \frac{\partial}{\partial x} (U_e^2 \theta) = U_e \delta^* \frac{dU_e}{dx} + U_e^2 \frac{d\theta}{dx} + 2\theta U_e \frac{dU_e}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho} + U_e v_w \end{aligned}$$

Introducendo il fattore di forma $H = \delta^*/\theta$ si ottiene l'equazione di Von Karman

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{U_e} \frac{dU_e}{dx} (2 + H) - \frac{v_w}{U_e} = \frac{1}{2} c_f \quad (8.11)$$

che esprime un significativo legame tra le grandezze integrali θ e H e le grandezze puntuali U_e e c_f , tutte funzioni dell'ascissa corrente. Per la sua soluzione occorrerà specificare la distribuzione con x di una di queste grandezze, oltre ad opportune condizioni iniziali ed opportune relazioni -dette di chiusura- del tipo $f(\theta, U_e, H, c_f, x) = 0$. La viscosità effettiva viene messa in conto nelle relazioni di chiusura, differenti tra caso laminare e caso turbolento. Ovviamente l'equazione di Von Karman ha anch'essa carattere parabolico.

Il procedimento di integrazione sviluppato da Von Karman si può applicare anche nei casi di strato limite 3-D, anche comprimibile, anche instazionario, conducendo, mediante l'introduzione di ulteriori opportuni funzionali, ad altrettante forme integrali. Per uno strato limite 2-D comprimibile stazionario, ed in assenza di traspirazione, l'equazione di Von Karman si scrive

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_f}{2} - \frac{\theta}{U_e} \frac{dU_e}{dx} (H + 2 - M_e^2) \quad (8.12)$$

e M_e è il valore del numero di Mach all'esterno dello strato limite.

8.2.2 Considerazioni sulla soluzione delle equazioni dello strato limite

Si fa presente che la natura parabolica dello strato limite impone l'uso di strumenti numerici opportuni. Occorre comunque specificare appropriate condizioni iniziali ed al bordo dello strato limite; nulla invece si può specificare nella parte finale della linea di corrente.

Nella risoluzione dello strato limite, sia impiegando le equazioni di Prandtl che l'equazione di Von Karman, si parla di modalità diretta se si assegna la funzione $U_e(x)$ e si calcola lo strato limite; in alternativa, si parla di soluzione in modo inverso se si assegna una funzione che contiene una o più grandezze di strato limite e si calcolano la $U_e(x)$ e tutte le grandezze di strato limite. Un aspetto chiave dei solutori di strato limite è che la soluzione in modo diretto può essere calcolata solo in flusso attaccato (prima cioè di un eventuale punto di separazione): quando il profilo di velocità esibisce tangente verticale a parete si introduce una biforcazione nella soluzione e non si può procedere verso la regione separata. Questa biforcazione scompare nella formulazione in modo

inverso. La singolarità alla separazione impone l'impiego di procedure di calcolo opportune quando si applica il modello dello strato limite per calcoli fluidodinamici.

Il modello di Prandtl descrive in modo chiuso lo strato limite mediante un sistema di equazioni differenziali non lineari a derivate parziali. Se, per semplicità, si fa l'ipotesi di lavorare in modo diretto occorre determinare in corrispondenza di ogni punto x della la superficie lo spessore δ ed il profilo di velocità $u(x, y)$, avendo assegnato la velocità $U_e(x)$ ed un'eventuale legge per il soffiamento alla parete $v_w(x)$, oltre che, nel punto iniziale x_0 , il profilo di velocità iniziale $u(x_0, y)$ e lo spessore $\delta(x_0)$. Il calcolo procede lungo la superficie: per ogni punto x si risolvono le equazioni di Prandtl lungo y iterativamente, a partire dalla soluzione del punto precedente. Nessuna iterazione in x va effettuata una volta arrivati all'ultimo punto della superficie.

L'equazione di Von Karman non descrive lo strato limite in modo completo (troppe incognite per una sola equazione!): è necessario aggiungere ulteriori relazioni per la chiusura del problema, pervenendo ad un sistema di equazioni differenziali non lineari ma a derivate totali. La forma del profilo di velocità non compare in modo esplicito, bensì solo attraverso le grandezze integrali, che ne sono funzione: d'altra parte nelle maggior parte delle applicazioni di Aerodinamica Applicata una conoscenza dettagliata del campo di moto nello strato limite è superflua (il coefficiente di attrito alla parete e le grandezze integrali sono invece indispensabili per il calcolo delle prestazioni delle superfici aerodinamiche). È peraltro possibile risalire al profilo di velocità attraverso le relazioni addizionali di chiusura: se esistono differenti profili di velocità che ammettono lo stesso valore per H o θ o δ^* , ad una assegnata terna (H, θ, δ^*) corrisponde in genere un solo profilo di velocità, al quale si può quindi risalire.

8.2.3 Considerazioni sulla lastra piana isobarica

La lastra piana è un oggetto (astratto) di fondamentale importanza in Aerodinamica: per il flusso viscoso sulla lastra piana isobarica esistono soluzioni che consentono di mettere a punto metodi di calcolo applicabili poi a forme generali. Sono inoltre possibili considerazioni che consentono di interpretare al meglio i concetti racchiusi nel modello di strato limite.

Si ipotizza che lo strato limite sulla lastra nasca e si sviluppi a partire dal bordo di attacco, e che pressione e velocità siano uniformi nella regione esterna allo strato limite. La pressione si mantiene pressoché costante in tutto lo strato limite (isobaricità longitudinale e trasversale). Inoltre lo strato limite a partire dal bordo di attacco è laminare, e per una lastra di lunghezza indefinita ci sarà, prima o poi, la transizione a flusso turbolento, ma non ci sarà separazione.

Un'evidenza dell'importanza che il fattore di forma θ ha nello studio teorico e sperimentale di uno strato limite si può derivare dall'equazione di Von Karman che, per il flusso di lastra piana isobarica impermeabile ($U_e(x) = U_\infty$, $v_w = 0$) si scrive

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{2}c_f \quad (8.13)$$

Integrando su un tratto $a - b$ della lastra si ha

$$\theta(b) - \theta(a) = \int_a^b c_f dx = \int_a^b \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho_e U_e^2} dx = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2} \int_a^b \tau_w dx = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2} [d]_a^b \quad (8.14)$$

essendo $[d]_a^b$ la resistenza (di attrito, in questo caso) che insiste sul tratto (a, b) : in particolare, poiché è $\theta(0) = 0$ il valore di $\theta(x)$ misura la resistenza di una lastra fino all'ascissa x . Qualcosa di analogo a questo risultato si troverà per un profilo alare nel paragrafo (10.7).

Esistono poi alcuni importanti risultati di strato limite, i seguenti.

- FLUSSO LAMINARE

$\delta/x = 5[Re_x]^{-1/2}$: il bordo dello strato limite ha forma parabolica.

$\delta^* = \delta/3$, $H = 2.51$

$C_f = .664[Re_x]^{-1/2}$.

$C_d = 1/L \int_0^L C_f(x) dx = 2C_f(x = L)$: il coefficiente di resistenza della lastra fino all'ascissa L è il doppio del coefficiente di attrito locale a quella ascissa.

• FLUSSO TURBOLENTO

$\delta/x = .375[Re_x]^{-1/5}$: lo strato limite turbolento è più spesso di quello laminare, a parità di numero di Reynolds.

$$\delta^* = \delta/8, H = 1.27$$

$C_f = .0590[Re_x]^{-1/5}$: il coefficiente di attrito è più elevato rispetto al caso laminare (a parità di Re_x ...).

$C_d = 1/L_t \int_0^{L_t} C_f(x) dx \cong 5/4 C_f(x = L_t)$, essendo L_t la lunghezza del tratto turbolento considerato.

Si fa presente che si è qui assunta la convenzione $U(\delta) = .99U_e$ (cambiando la convenzione le relazioni precedenti si modificherebbero). Si nota che il coefficiente di attrito, in generale, diminuisce al crescere di x : questo fatto può essere spiegato con la crescita dello spessore dello strato limite con x , che comporta una diminuzione a parete della variazione con y della velocità.

8.2.4 Considerazioni sullo strato limite intorno ad un profilo

Si consideri il flusso intorno ad un profilo alare. Per semplicità si assuma che il moto sia subsonico. Si assuma pure che nel campo Euleriano vi siano due punti di ristagno, sul bordo di attacco ed al bordo di uscita³. Si è in presenza di flussi con gradiente di pressione: lungo le linee di corrente, sul dorso e sul ventre, che si originano dal punto di ristagno anteriore la pressione diminuisce, più o meno gradualmente, fino alla cresta (la relativa energia si converte in energia cinetica) per poi aumentare, più o meno gradualmente fino al bordo di uscita (l'energia cinetica si riconverte in energia interna in forma di pressione: si parla di recupero di pressione, che in questo caso di moto reversibile è totale).

Si consideri ora il caso reale, in presenza quindi di strato limite. Espansioni e compressioni si succederanno in modo più o meno simile al flusso Euleriano, sia all'esterno dello strato limite sia, quindi, a parete.

In corrispondenza del bordo di uscita il recupero di pressione non sarà mai completo: in particolare la velocità esterna allo strato limite (uguale sul dorso e sul ventre) non si annulla mai, e la pressione non torna al valore relativo al flusso Euleriano (né all'esterno dello strato limite né proprio sul bordo di uscita).

In concreto, in tutto lo strato limite c'è un continuo "drenaggio" di energia cinetica dal flusso esterno verso la parete legato alla presenza dello sforzo viscoso τ_w : lo strato limite si inspessisce, e una parte dell'energia cinetica viene dissipata in energia interna in forma di calore. Per la ricompressione del flusso poi è necessaria una quantità di energia cinetica addizionale rispetto a quella "ricevuta" dall'energia interna nella regione di espansione, in quanto parte di questa energia cinetica si è dissipata: l'energia addizionale viene "prelevata" dall'energia cinetica del flusso esterno, e quindi lo strato limite si inspessisce più di quanto accada in un flusso in espansione. E comunque il recupero di pressione non può mai essere completo.

Un punto fondamentale che differenzia la regione in espansione da quella di compressione è la tipicità del profilo di velocità dello strato limite, profilo che è determinato dallo scambio tra i diversi tipi di energia in presenza di gradiente di pressione.

In espansione l'energia cinetica all'esterno ed all'interno dello strato limite aumenta costantemente, nonostante la dissipazione: questo fa sì che il drenaggio di quantità di moto non determini grandi difetti di massa, quantità di moto ed energia a parete. Un flusso in espansione è sempre sufficientemente energizzato alla parete.

Al contrario, in un flusso in compressione la riduzione dell'energia cinetica causata dalla ricompressione e dalla dissipazione di energia cinetica (più elevata negli strati bassi della regione viscosa) determina un elevato difetto delle grandezze estensive alla parete: il flusso a parete risulta essere a più bassa energia cinetica, più "povero" di quantità di moto e, come si è visto nel par. (8.2), nel profilo di velocità si presenta un punto di flesso. In modo consistente con la modifica della

³Con velocità finita al bordo di uscita ed in presenza di onde d'urto occorre fare considerazioni leggermente diverse, la sostanza non cambia.

forma del profilo di velocità aumentano i ratei di crescita del difetto di massa (insieme con δ^*), e del difetto di quantità di moto (insieme con θ): aumenta inoltre il valore del fattore di forma H in quanto δ^* aumenta più di θ , come si evince dal confronto tra le (8.8) e (8.9). Inoltre, fissato il carattere -laminare, turbolento o transizionale- dello strato limite, gli sforzi viscosi sono mediamente più bassi: questo è un fatto certamente negativo, che porta al decadimento delle prestazioni delle superfici portanti⁴.

Da queste considerazioni si deduce che (in un flusso 2-D) è in compressione che si possono presentare transizione e separazione, due fenomeni fondamentali in Fluidodinamica, ed in particolare nelle Scienze del Volo: per entrambi la causa è riconducibile alle caratteristiche ora descritte dello strato limite, e quindi, dal punto di vista modellistico, alla peculiarità della forma del profilo di velocità. Inoltre risulta importante la relazione che intercorre tra transizione e separazione.

8.3 Lo strato limite tridimensionale

Si consideri il flusso su un'ala infinita a freccia, Fig. 8.4; φ è l'angolo di freccia, la velocità asintotica Q_∞ ha una componente U_∞ normale al bordo d'attacco ed una componente W_∞ parallela al bordo d'attacco.

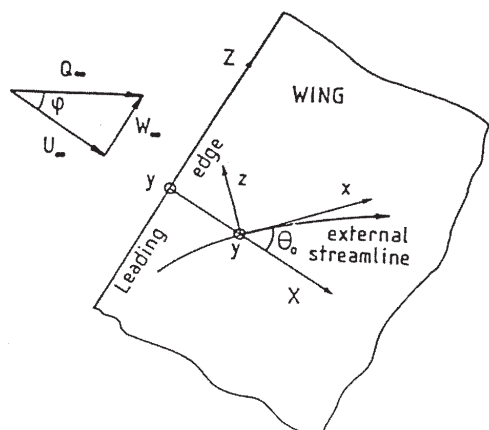


Figura 8.4: Notazioni e sistemi di coordinate

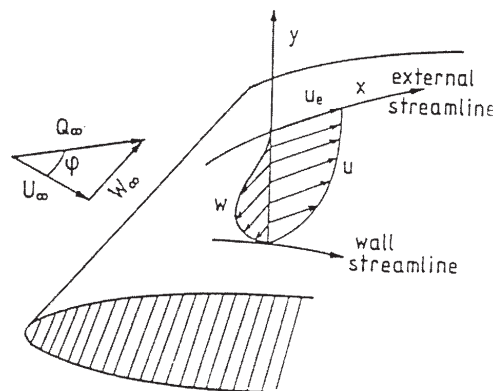


Figura 8.5: Flusso su ala a freccia

Due sistemi di coordinate sono usualmente introdotti, Fig. 8.4: uno (X, Z, y) solidale all'ala e l'altro (x, z, y) solidale alla linea di corrente esterna. In entrambi i casi, la direzione y è perpendicolare alla parete e le altre due coordinate sono definite sulla superficie alare.

Il profilo di velocità dello strato limite ha due componenti, Fig. 8.5: una, u , in direzione della linea di corrente esterna (*streamwise*), l'altra, w , in direzione z normale alla linea di corrente esterna (*crossflow*). Ciò è dovuto al fatto che quando le linee di corrente del campo esterno presentano andamenti ricurvi nella direzione laterale, le particelle fluide sono soggette a gradienti di pressione che, nell'approssimazione di strato limite, agiscono anche all'interno e che bilanciano le azioni della forza centrifuga. Al diminuire della distanza dalla parete, e quindi della velocità, dovrà aumentare la curvatura delle linee di corrente e ciò determina l'insorgere del flusso trasversale. Quindi, muovendosi attraverso uno strato limite 3-D in direzione ortogonale alla superficie del corpo dal bordo esterno fino alla parete, si può osservare che il vettore velocità cambia continuamente in direzione ed intensità, raggiunge sul corpo una posizione limite, con intensità nulla, che dà luogo alle cosiddette "linee di corrente limite".

In prossimità della parete la forza centrifuga è molto piccola, ed il flusso diventa complicato. Sulla parete, dove la forza centrifuga è nulla, il gradiente di pressione è bilanciato dallo sforzo

⁴il vantaggio di un ridotto contributo alla resistenza di attrito è del tutto marginale

tangenziale superficiale: si definisce linea d'attrito la linea che in ogni suo punto è tangente allo sforzo tangenziale superficiale (essa non è altro che la linea di corrente limite).

Dal bordo d'attacco fino alla cresta (stazione con X_M) il *crossflow* è diretto verso la parte concava della linea di corrente esterna, Fig. 8.5. Il valore del *crossflow* è nullo sulla linea di

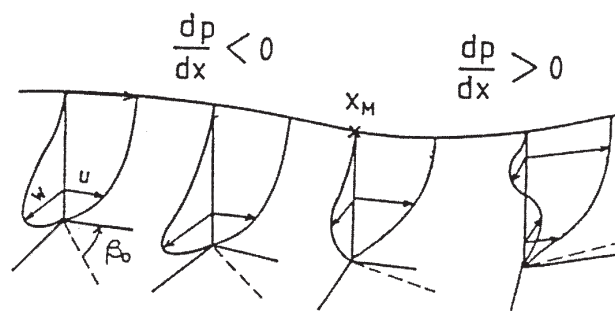


Figura 8.6: Strato limite tridimensionale

attacco, poi cresce più o meno rapidamente a causa dell'accelerazione del flusso, raggiungendo un massimo nella regione con gradiente di pressione negativo: anche se questo massimo resta piccolo (circa il 5 – 10% della velocità esterna), è certa la presenza di un flesso nel profilo di *crossflow* già nella regione di espansione, poco a valle del bordo d'attacco. A $X = X_M$ il gradiente di pressione diventa positivo, la curvatura della linea di corrente esterna cambia, e la w vicino alla parete cambia direzione (profilo a forma di S, Fig. 8.6): i punti di flesso nel *crossflow* diventano almeno due e, se il gradiente di pressione positivo è abbastanza forte, il profilo di *crossflow* può cambiare completamente direzione. Inoltre compare un punto di flesso nel profilo (*streamwise*) di u .

8.4 Instabilità dei flussi laminari e transizione

INTRODUZIONE E CENNI STORICI

Nel moto nei tubi o nello strato limite su un corpo esiste sempre, in generale, all'inizio un tratto di flusso laminare. Si è detto precedentemente che si parla di transizione quando si presenta il passaggio a moto turbolento, in modo più o meno graduale, passaggio che avviene in una regione non sempre chiaramente localizzata, spesso molto piccola, tale da poter essere assimilata ad un punto; la restante parte del flusso è poi turbolenta. Se la transizione non si realizza prima del bordo di uscita del corpo o della fine del tubo lo strato limite sarà completamente laminare.

Il fenomeno della transizione è di fondamentale importanza in Meccanica dei Fluidi, ed in particolare in campo aeronautico per la forte influenza che la transizione ha sul comportamento di un sistema: purtroppo prevedere la locazione della regione di transizione è cosa assai complessa. Spesso è possibile ricondursi ad una dipendenza dal valore che assume Re_x lungo lo strato limite: si tratta di individuare un valore critico di questo parametro $Re_{x_{cr}}$ raggiunto il quale si ha l'inizio ed il rapido sviluppo della transizione. Una complessità sta nell'essere non univoco il valore di $Re_{x_{cr}}$, dipendendo esso fortemente da diverse cause: disturbi già presenti nella corrente a monte e associati ad un certo livello di turbolenza, disturbi generati dalla superficie (rugosità o vibrazioni), il rumore (aerodinamico o dalla propulsione), che induce oscillazioni delle particelle fluide, la turbolenza e le instazionarietà introdotte da un'elica, e così via.

La transizione può essere forzata in un punto predeterminato rendendo la superficie a monte opportunamente scabra, ad esempio incollando poco dopo il bordo di attacco una striscia di materiale molto ruvido oppure, più a valle, mediante grosse protuberanze (a causa dell'ispessimento dello strato limite). A tali prassi si ricorre in Aeronautica sia nelle prove di galleria sia direttamente sul velivolo in condizioni operative, in quanto può essere importante che in certe parti della superficie lo strato limite sia certamente turbolento, in certe condizioni di prova o di volo.

Si sta cercando comunque di sviluppare una modellistica in grado di dare un qualche risultato operativo nella previsione della transizione, anche se il grado di empirismo che interviene nelle procedure finora messe a punto è ancora molto forte.

I primi profili alari cosiddetti laminari, in grado cioè di realizzare, in condizioni di progetto, un deflusso laminare (sul dorso e sul ventre) per una buona parte della corda, vennero sviluppati intorno al 1940; il primo velivolo nel quale tali profili vennero impiegati fu il P51 Mustang, che riuscì ad ottenere un'eccellente velocità massima grazie alla sua bassa resistenza. Il controllo della transizione, che potrebbe aprire interessanti prospettive per un impiego efficiente ed affidabile di ali a deflusso laminare per velivoli veloci, è da tempo oggetto di importanti programmi di ricerca basati su cooperazioni internazionali: in effetti, la tecnologia *Laminar Flow Control* (LFC) è ritenuta strategica dalle industrie aerospaziali per realizzare quel miglioramento delle prestazioni aerodinamiche di ali e fusoliere che consentirebbe di ridurre in modo significativo i consumi (e di conseguenza i costi operativi ed i livelli di inquinamento, anche acustico) e di aumentare le tratte. E molto probabilmente la realizzazione di un velivolo HSCT (*High Speed Civil Transportation*), oggi impossibile dal punto di vista commerciale, è subordinata alla possibilità di realizzare i complessi meccanismi necessari al controllo del flusso laminare in condizioni di crociera supersonica.

Già da molto tempo è risultato evidente che la transizione è la fase finale di un complicato fenomeno di instabilità del flusso laminare. Le prime osservazioni sul meccanismo dell'instabilità e della transizione risalgono ad un classico esperimento di laboratorio, eseguito per la prima volta da Osborne Reynolds (1880), ed illustrato in [1], p. 150 e seg. (Fig. 8.7).

In un condotto trasparente, a sezione costante e con pareti lisce, in cui scorre acqua si introduce un filetto colorato; si fa quindi variare la velocità dell'acqua. Al di sotto di una certa velocità limite non si osserva mescolamento tra il fluido e il filetto colorato: dunque le particelle di fluido mantengono traiettorie rettilinee con velocità uniforme ed il moto del fluido può considerarsi laminare. Quando la velocità limite viene superata il filetto colorato comincia ad oscillare ed in poco spazio il fluido dell'intero tubo si colora: al meccanismo di scambio diffusivo di quantità di moto su scala microscopica del moto laminare si sovrappone il trasferimento di quantità di moto su scala macroscopica tipico del moto turbolento.

Una conseguenza dell'innescarsi della transizione nel condotto è che la distribuzione trasversale di velocità risulta più uniforme che in quello laminare, quindi il gradiente di velocità alla parete aumenta notevolmente e di conseguenza sarà più elevata la resistenza d'attrito.

Il parametro fondamentale che influenza la transizione del flusso da laminare a turbolento è il numero di Reynolds $Re_d = (Vd)/\nu$ relativo al diametro d del condotto che, a parità di diametro e di fluido, è proporzionale alla portata (attraverso la velocità). Reynolds giunse a questa conclusione

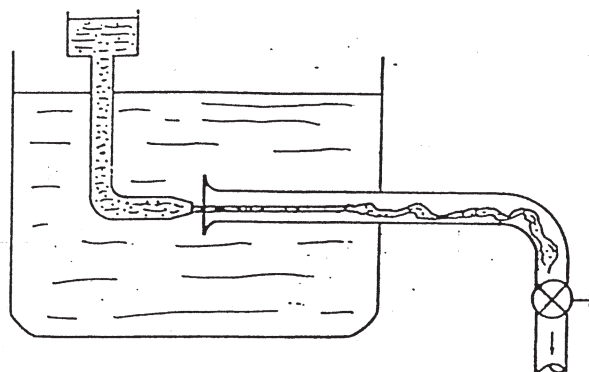


Figura 8.7: Apparato per l'esperimento di Reynolds

variando il diametro e considerando fluidi con diversa viscosità cinematica, riuscendo a stimare il valore critico $Re_{d_{cr}} = 2300$ al di sotto del quale il moto resta sempre laminare. Superando questo valore non è detto che avvenga certamente la transizione, per avere la quale può essere necessario raggiungere valori più alti di Re_d , in dipendenza dal tipo di disturbi presenti: in pratica, oltre

quel valore il flusso laminare diventa instabile, e la sua evoluzione dipende strettamente dal tipo di sollecitazione. Si comprende quindi l'importanza di determinare in ogni circostanza il valore critico del numero di Reynolds al di sotto del quale qualsiasi perturbazione non porterà alla transizione.

Considerazioni analoghe valgono anche per il flusso di lastra piana: i valori critici del numero di Reynolds diventano di ordine $10^5 - 10^6$.

Lord Rayleigh, in una serie di lavori datati dal 1880 al 1913, studiò l'instabilità di flussi non viscosi, raggiungendo risultati importanti, incluso il ben noto criterio di instabilità inflessionale: i profili di velocità che presentano un punto di flesso sono certamente instabili per disturbi non viscosi. Questa teoria, comunque, non spiega i fenomeni di transizione osservati nell'esperimento di Reynolds: commentando i risultati di Rayleigh, Rayleigh scrisse, [56],

“... se le ricerche in questione possono essere applicate a fluidi con viscosità infinitamente piccole come si spiega l'instabilità, osservata negli esperimenti, di flussi con viscosità moderate? Sembra molto verosimile che il primo effetto della crescita della viscosità introduca una instabilità che prima non esisteva, mentre, come mostrano gli esperimenti, una grande viscosità rende il flusso più stabile.”

L'instabilità di flussi viscosi fu studiata da Tollmien, che risolse l'equazione di stabilità in campo viscoso -l'equazione di Orr-Sommerfield (10.13)- per la lastra piana. Il numero di Reynolds critico $Re_{x_{cr}}$ (basato sulla distanza x dal bordo d'attacco) calcolato da Tollmien nel 1929 fu circa $6 \cdot 10^4$, troppo basso se confrontato con i risultati sperimentali, che fornivano valori da $3.5 \cdot 10^5$ a 10^6 .

Schlichting fu il primo ad intuire che il punto di transizione doveva essere preceduto da una amplificazione di piccoli disturbi, informazione importante per correlare i risultati sperimentali. Secondo Schlichting, [7], tali perturbazioni possono essere viste come onde la cui intensità può smorzarsi od amplificarsi: trattandosi comunque di onde di intensità veramente piccola, per un lungo periodo non fu possibile una verifica sperimentale in quanto i livelli di turbolenza delle gallerie del vento erano tali da coprire completamente le onde di instabilità. Solo intorno al 1940 si riuscì a realizzare una galleria con un livello di turbolenza adeguatamente basso, tale da evidenziare i fenomeni caratteristici della transizione: gli esperimenti mostrarono chiaramente che la transizione su lastra è preceduta da un'amplificazione di onde instabili le cui caratteristiche sono in buon accordo con la teoria di Tollmien e Schlichting.

INSTABILITÀ E TRANSIZIONE

Un primo tipo di instabilità 3-D è l'instabilità di Görtler, [57], che può essere presente in flussi paralleli su superfici concave, e può quindi manifestarsi sul ventre di un profilo alare molto ricurvo.

Un'altra instabilità, Fig. 8.8, è collegata alla linea di attacco della corrente⁵, sempre presente su ali a freccia. A numeri di Reynolds abbastanza alti questo flusso parallelo all'ala può diventare di per sé instabile dando transizione a partire dal bordo d'attacco, [58].

Se ciò non accade un altro pericolo è costituito dalla cosiddetta *crossflow instability*, [59], che ha luogo in prossimità del bordo d'attacco per effetto della tridimensionalità dello strato limite ivi presente. La direzione del disturbo è quasi trasversale alla linea di corrente esterna.

Se tutto ciò non avviene, nella parte superiore dell'ala si sviluppano onde di Tollmien-Schlichting [7], che conducono, dopo una sufficiente amplificazione, alla transizione ed alla presenza di flusso turbolento su di una parte più o meno grande della superficie.

⁵La linea d'attacco. Conviene partire dalla considerazione che su un profilo a bordo arrotondato c'è un punto di ristagno (anteriore), e che quindi lo stesso succede in ogni sezione di un'ala diritta (tranne ovviamente che alle sue estremità): la linea di corrente che arriva nel punto di ristagno si biforca in corrispondenza del punto di ristagno, e questo vuol dire che alcune particelle vanno sul dorso, altre sul ventre. Sull'ala a freccia invece non esiste ristagno, a causa della componente oziosa (presente ovunque, e quindi anche sul bordo di attacco), ma c'è comunque, per ogni sezione, un punto del bordo di attacco arrivando in prossimità del quale le particelle, senza fermarsi, in parte vanno sopra, in parte vanno sotto (la linea di corrente si biforca). Tale punto si chiama punto di attacco in quella sezione, e la linea che congiunge tutti i punti di attacco si chiama linea di attacco: la sua conoscenza è fondamentale perché è a partire da quella linea che sull'ala si sviluppano gli strati limiti del dorso e del ventre (così come è dal punto di ristagno che si sviluppa lo strato limite sul dorso e sul ventre di un profilo o di un'ala diritta). Così come per il punto di ristagno, la posizione dei punti di attacco, e dunque la linea di attacco, dipende in prima battuta dall'angolo di attacco (e poi come al solito, ma in misura molto minore, dai numeri di Mach e Reynolds)

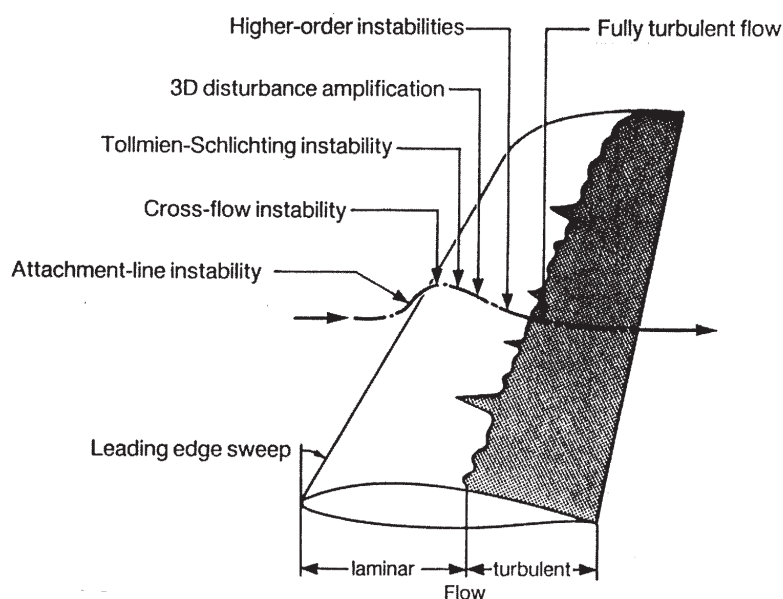


Figura 8.8: Illustrazione della transizione su ali a freccia

Quando l'ampiezza del disturbo è piccola, una schematizzazione dell'insorgere della transizione può essere articolata in una sequenza del tipo che si propone di seguito.

1. Recettività dello strato limite: si tratta di un complesso meccanismo (o sequenza di meccanismi) non ancora ben definito, attraverso il quale quei disturbi presenti nella corrente o che si generano sulla superficie si trasformano in pacchetti d'onda, e si sovrappongono al moto base dello strato limite.
2. Amplificazione di queste onde, che può essere studiata, per una larga porzione della superficie, mediante la teoria lineare della stabilità.
3. L'amplificazione delle onde instabili raggiunge un valore finito, essendo il loro comportamento differente da quello predetto dalla teoria lineare: sono osservabili interazioni onda/onda ed instabilità secondarie. Questa evoluzione non lineare è il preludio alla turbolenza, caratterizzato dall'apparire delle prime zone turbolente, le "macchie" di Emmons.
4. Il profilo di velocità (media) inizia a cambiare: il fattore di forma diminuisce e la resistenza d'attrito comincia a superare i valori laminari.
5. Esplosione delle macchie, con inizio del regime di turbolenza completamente sviluppata.

Se invece l'ampiezza dei disturbi è grande si manifestano già dall'inizio interazioni non lineari, e si ha immediatamente transizione: nel caso di un'ala a freccia questo può accadere poco più a valle del bordo d'attacco. Si parla di "by-pass", nel senso che i fenomeni lineari del processo di transizione sono del tutto assenti.

La formulazione di un modello matematico che tenga conto di tutti questi complicati fenomeni sembra un compito molto difficile per i seguenti problemi:

1. la conoscenza approssimata dei disturbi;
2. la teoria della recettività non può essere ancora usata per problemi pratici in quanto i risultati sono noti solo per i casi più semplici;
3. molti aspetti dell'ultimo passo del processo di transizione sono ancora sconosciuti per flussi tridimensionali e/o comprimibili.

Il problema della previsione della transizione può essere affrontato allora con teorie che considerano gli effetti delle perturbazioni presenti in una corrente sulla stabilità del flusso laminare. Mediante la teoria lineare della stabilità, che sarà descritta molto sinteticamente 10.3, è possibile studiare l'influenza di alcuni dei parametri capaci di influenzare le proprietà di stabilità dello strato limite. I risultati possono essere così sintetizzati.

1. Gradiente di pressione: con gradienti di pressione negativi (flusso in accelerazione) il profilo di velocità dello strato limite non presenta flessi, e l'instabilità, se esiste, è molto debole; con gradienti di pressione positivi (flusso che decelera) la presenza di un punto di flesso comporta una forte instabilità.
2. Numero di Mach della corrente: per lastra piana con parete adiabatica la comprimibilità è, all'inizio, stabilizzante in campo transonico, poi leggermente destabilizzante da $M_\infty = 2$ a $M_\infty = 4$, infine torna ad essere stabilizzante per flussi ipersonici.
3. Raffreddamento/riscaldamento della parete: il raffreddamento della parete ha effetti stabilizzanti, il riscaldamento è, viceversa, destabilizzante.
4. La suzione di una parte dello strato limite ha effetti stabilizzanti: assottiglia lo strato limite, cambia la forma del profilo di velocità e porta il punto di flesso più vicino alla parete.

8.5 Transizione e separazione in Aerodinamica Applicata

Le più importanti prestazioni aerodinamiche di un profilo alare (e più in generale di una qualunque superficie aerodinamica, sia in bassa che in alta velocità) sono collegate alla posizione dei punti di transizione e di separazione, all'estensione ed alle caratteristiche della regione di flusso separato ed alla qualità della separazione. Mentre in bassa velocità la separazione del flusso caratterizza la velocità di minimo sostentamento e la qualità dello stallo, la transizione dello strato limite da flusso laminare a flusso turbolento ha un ruolo centrale sulla resistenza e sull'insorgere della separazione del flusso.

Si espongono di seguito alcuni fatti fondamentali per flussi 2-D, a partire dalla lastra piana isobarica, mettendo quindi in conto l'effetto del gradiente di pressione; in particolare si tratterà l'interrelazione tra transizione e separazione. Si discuteranno quindi gli effetti della distorsione del flusso (effetti di tridimensionalità): in realtà il flusso attorno ad un aeromobile può avere caratteristiche bidimensionali (o assialsimmetriche, il che è quasi la stessa cosa) solo in regioni limitate (nella parte centrale di ciascuna semiala se l'ala non è a freccia, sul cono anteriore della fusoliera o su alcune parti di certe prese d'aria).

8.5.1 Flussi 2-D

LA TRANSIZIONE: LASTRA PIANA ISOBARICA

In uno strato limite laminare sforzi tangenziali adeguatamente elevati possono ridurre o far scomparire i disturbi presenti nella corrente. La diminuzione degli sforzi tangenziali quando compare un flesso nel profilo di velocità può non bloccare più quell'amplificazione dei disturbi che porterà alla transizione.

Ancorché apparentemente poco applicativo, conviene considerare preliminarmente quello che accade su una lastra piana sufficientemente lunga in assenza di un gradiente di pressione longitudinale. In generale, lo strato limite si presenta come in Fig. 8.9: certamente c'è un tratto iniziale laminare, certamente si ha una regione di transizione, certamente non si ha separazione del flusso; nella maggior parte dei casi in Aerodinamica Applicata le ascisse di inizio e fine transizione sono vicine (rispetto alla lunghezza della lastra) in maniera tale da poter essere considerate coincidenti: si parla allora di punto di transizione.

L'ascissa del punto di transizione è influenzata così come descritto di seguito.

- 1) Al crescere della turbolenza iniziale della corrente la transizione anticipa. Si ricorda che per un aeromobile la turbolenza è principalmente legata alle condizioni meteorologiche.

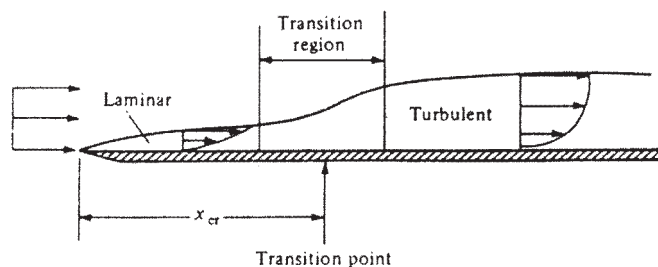


Figura 8.9: Schema dello strato limite - lastra piana isobarica

- 2) Una maggiore rugosità della superficie della lastra facilita l'insorgere della transizione.
- 3) Quelli che si possono considerare disturbi indotti superficie e flusso esterno -vibrazioni meccaniche o sorgenti di rumore (un motore, ad esempio)- anticipano la transizione.
- 4) Al crescere del numero di Reynolds della corrente la transizione anticipa. Quest'aspetto è il più delicato. In effetti, come già detto, anche in presenza di forte turbolenza iniziale c'è sempre un primo tratto di strato limite laminare, e questo lo si può motivare in base alla considerazione che il numero di Reynolds che "conta" nello strato limite, $Re_x = \frac{V_\infty x}{\nu}$ è nullo al bordo di attacco e basso per un certo tratto iniziale della lastra. Allora gli sforzi tangenziali viscosi in un tratto iniziale della lastra sono certamente sufficientemente grandi da annichilire qualunque disturbo contenuto della corrente. Essendo peraltro $Re_x = Re_\infty \frac{x}{L}$ è ovvio che al crescere di Re_∞ l'effetto stabilizzante degli sforzi viscosi nel tratto laminare si riduce.

LA TRANSIZIONE: EFFETTO DEL GRADIENTE DI PRESSIONE

Per valutare gli effetti viscosi su una linea di corrente, ad esempio sul dorso o sul ventre di un profilo, ci si può certamente riferire ad una lastra piana sulla quale si è riusciti a creare un gradiente longitudinale di pressione. Questo equivale a trascurare gli effetti della curvatura della superficie, e quindi delle linee di corrente, sulla struttura e sullo sviluppo dello strato limite, cosa abbastanza accettabile nelle applicazioni relative alla tecnologia del volo.

Come anticipato nel paragrafo (8.4) nella quasi totalità dei casi in un flusso bidimensionale in espansione la transizione non si verifica: lo strato limite è inizialmente laminare, e tale rimane abbastanza certamente almeno fino a quando la pressione non inizia ad aumentare: gli sforzi viscosi sono sempre sufficientemente elevati da annichilire ogni disturbo.

Al contrario, in un flusso in compressione il profilo di velocità dello strato limite presenta un punto di flesso, con conseguente riduzione degli sforzi tangenziali: i disturbi presenti nella corrente laminare non sono più annichiliti, anzi si amplificano fino a causare la transizione (quando non si ha prima la separazione dello strato limite ancora laminare).

LA SEPARAZIONE IN CAMPO BIDIMENSIONALE

Nel par. (8.2) si sono associati il punto di separazione di un flusso 2-D, e la nascita di una regione di flusso separato, ad un profilo di velocità a tangente verticale alla parete (precisando peraltro alcuni limiti di questa associazione). Il processo che porta alla separazione del flusso in campo 2-D si spiega in modo abbastanza semplice. Per un valore sufficientemente elevato del gradiente di pressione positivo il deficit di energia cinetica legato alla sua dissipazione sarà tale che ad un certo punto della linea di corrente il profilo di velocità si presenterà a tangente verticale, con successivo sviluppo di una regione di flusso invertito.

L'insorgere della separazione dipende da molti fattori, ma qui si evidenzia il ruolo (primario) del gradiente di pressione quando è "avverso" (e cioè positivo): quanto più brusca è la ricompressione tanto più probabile (ed anticipata) è la separazione. Ed inoltre dalla differenza tra profili di velocità in compressione ed in espansione, Fig. 8.3 e tenendo conto della legge di Newton (8.5)

si vede come il processo che porta alla separazione è strettamente collegabile alla riduzione degli sforzi tangenziali nello strato limite: si usa dire che uno strato limite più “ricco” di massa, quantità di moto ed energia cinetica è meno soggetto al fenomeno della separazione.

La separazione può avvenire sia in flusso laminare che in flusso turbolento. Rispetto ad uno strato limite laminare il profilo di velocità di uno strato limite turbolento è molto più ricco di massa, quantità di moto ed energia cinetica: ne consegue che a parità di gradiente di pressione avverso la separazione avverrà con maggiore difficoltà se il flusso è turbolento (il profilo di velocità diventa a tangente verticale più a valle). È quindi possibile condizionare la separazione del flusso mediante il controllo della transizione.

RELAZIONE TRA TRANSIZIONE E SEPARAZIONE: BOLLE LAMINARI

Di notevole interesse sono le separazioni laminari per le significative implicazioni che possono avere in Aerodinamica Applicata. Si è usato il plurale in quanto a valle di una separazione laminare possono presentarsi due diverse situazioni.

- Lo strato limite rimane separato.
- Nel flusso separato laminare si ha la transizione, con successivo riattacco e scomparsa della regione di flusso invertito. Si è quindi in presenza di una regione separata confinata, aderente alla parete, prima laminare e poi turbolenta, e si parla di bolla laminare.

Aspetti salienti nella problematica delle bolle laminari.

Di per sé la presenza di bolle laminari sulle ali è un fatto: è come evolve una bolla laminare al variare dei parametri del volo che può avere implicazioni importanti per le caratteristiche aerodinamiche di profili ed ali. Tutto è legato ad un combinato di turbolenza iniziale Tu_∞ , gradiente di pressione avverso (che dipende dalla geometria e dall'angolo d'attacco) ed evoluzione lungo lo strato limite laminare del valore del numero di Reynolds Re_x (indicativo, come si è detto, per la transizione, e che dipende dalla distribuzione di velocità -ancora geometria ed angolo di attacco- e da Re_∞ : occorre vedere, caso per caso, se Re_x raggiunge o meno un valore sufficientemente alto per avere transizione prima della separazione). L'esperienza insegna che, fissato l'angolo d'attacco, le bolle laminari possono comparire o scomparire semplicemente al variare di Re_∞ o della turbolenza asintotica Tu_∞ .

In Aerodinamica Applicata l'esistenza di bolle laminari va sempre calcolata teoricamente (e verificata sperimentalmente, se possibile).

Struttura di una bolla laminare.

I profili di velocità sono, all'inizio, laminari, con transizione che si sviluppa all'incirca a $\frac{2}{3}$ della sua lunghezza L_B , in prossimità della massima ampiezza. La pressione statica è costante dal punto di separazione al punto di transizione, quindi aumenta rapidamente fino al riattacco turbolento.

Anche se la lunghezza di una bolla in assoluto si misura rispetto alla lunghezza caratteristica del problema (in frazioni della corda, ad esempio), per l'importante caratterizzazione della bolla (lunga, media, corta) l'unità di misura più significativa è lo spessore dello strato limite nel punto di separazione laminare δ_{sep} . Si è osservato poi che il numero di Reynolds significativo nella modellistica delle bolle è appunto $Re_{\delta|sep} = \frac{(U_e \delta)_{sep}}{\nu}$, relativo alle condizioni dello strato limite e della corrente esterna nel punto di separazione laminare.

La lunghezza di una bolla dipende dalla maggiore o minore rapidità con cui si svolge il processo di transizione in bolla. Per bolle corte l'estensione è dell'ordine di $100\delta_{sep}$, ed elevati numeri di Reynolds locali, con nuclei turbolenti, rendono rapido tale processo; l'esperienza ha indicato che le bolle corte si formano solo per $Re_{\delta|sep} > 450$. Una bolla lunga ($L_B > 1000\delta_{sep}$, $Re_{\delta|sep} < 450$) è caratterizzata da flusso instazionario, difficilmente prevedibile per via teorica o rilevabile sperimentalmente, proprio per la lunghezza della zona di separazione: la transizione si sviluppa più lentamente, forse dovuta ad una pura amplificazione delle onde di Tollmien-Schlichting. Bolle lunghe possono avere un'estensione assoluta anche maggiore del $20 \div 30\%$ della corda.

8.5.2 Flussi 3-D

LA TRANSIZIONE DELLO STRATO LIMITE TRIDIMENSIONALE

Nel paragrafo (8.3) si è dimostrato che in uno strato limite 3-D è certa la presenza di un flesso nel profilo di *crossflow* già nella regione di espansione: questo è sufficiente per creare forti instabilità poco a valle del bordo d'attacco dell'ala.

Partendo da flusso laminare sulla linea d'attacco, la transizione è sempre molto anticipata, sulle ali a freccia avviene nella regione di espansione, e può essere causata o dall'instabilità di *crossflow* o da quella *streamwise*. In Fig. 8.10 è rappresentata una distribuzione di velocità esterna su un'ala a freccia con un massimo alla stazione $X = X_M$, e una variazione tipica del rateo di amplificazione, per due frequenze instabili, in funzione dell'angolo ψ tra la linea di corrente esterna e il vettore numero d'onda. Due stazioni sono state prese in considerazione: una nella regione con gradiente di pressione negativo ($X < X_M$), l'altra nella regione con gradiente di pressione positivo ($X > X_M$).

Le linee piene corrispondono a flussi incomprimibili mentre le linee tratteggiate a flussi comprimibili per tipici valori di numeri di Mach transonici.

- Instabilità di Tollmien-Schlichting

I profili di velocità nella direzione della linea di corrente esterna hanno la stessa forma di quelli bidimensionali e, analogamente a questi ultimi, sono essenzialmente instabili in flussi decelerati (parte destra della Fig. 8.10). Per velocità piccole, la direzione più instabile ψ_M è vicina a 0° (ψ_M è l'angolo tra la direzione del disturbo e quella della linea di corrente esterna). Quando gli effetti della comprimibilità non sono trascurabili, i risultati di stabilità mostrano lo stesso comportamento dei flussi 2-D: i ratei di amplificazione sono ridotti, e ψ_M è compreso tra 40° e 70° . Le lunghezze d'onda di questi disturbi sono circa 10 volte lo spessore dello strato limite.

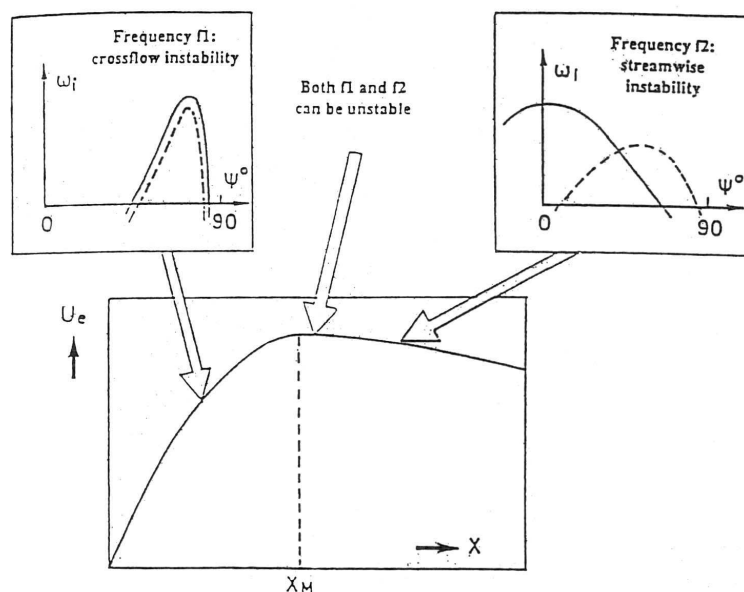


Figura 8.10: Instabilità tipiche su ali a freccia

- Instabilità di *Crossflow*

Nei profili di velocità media in questa direzione è sempre presente un punto di flesso, e quindi una forte instabilità si può presentare nella regione dove la velocità di *crossflow* cresce rapidamente, e cioè in presenza di un forte gradiente di pressione negativo (per esempio nelle vicinanze del bordo d'attacco di un'ala a freccia, parte sinistra della Fig. 8.10). ψ_M non è mai esattamente uguale a 90° ma è compreso in un piccolo intervallo vicino alla direzione di *crossflow*, $85^\circ < \psi_M < 89^\circ$.

L'instabilità è dominata dalle proprietà del punto di flesso (altezza, valore locale della derivata dw/dy) che non sono influenzati dagli effetti della comprimibilità, cosicché la direzione più instabile e i ratei di amplificazione sono quasi identici per i flussi incomprimibili e per quelli transonici.

Le lunghezze d'onda dei disturbi di *crossflow* sono tre o quattro volte lo spessore dello strato limite.

Le frequenze più instabili sono usualmente più basse per l'instabilità di *crossflow*; in particolare la teoria lineare mostra che questo tipo di instabilità può amplificare disturbi a frequenza nulla (detti stazionari).

Questo conduce alla formazione di vortici ad anello praticamente allineati con la direzione *streamwise*.

Immediatamente a valle del punto di massimo della velocità esterna l'instabilità di *crossflow* decade, mentre i disturbi *streamwise* cominciano ad essere amplificati. Per numeri di Mach transonici le due direzioni instabili sono vicine tra loro e sono quindi possibili interazioni tra i disturbi.

LA SEPARAZIONE DEI FLUSSI TRIDIMENSIONALI

In un flusso bidimensionale il punto di distacco o di separazione dalla superficie coincide con il punto in cui lo sforzo tangenziale superficiale si annulla. Questo punto è caratterizzato dal verificarsi simultaneo di altre condizioni. Per esempio, nei pressi di tale punto, lo spessore di strato limite cresce rapidamente rendendo non valida l'approssimazione di strato limite e la conseguente assunzione che la distribuzione di pressione sul corpo sia quella ottenuta dalla soluzione non viscosa. Inoltre, nel punto di separazione, le equazioni dello strato limite al primo ordine diventano singolari e il flusso a valle di esso presenta una inversione che lo rende inaccessibile alla usuale analisi di strato limite. La coincidenza di tutti questi fattori nei flussi 2-D è ben nota per cui la condizione di annullamento dello sforzo tangenziale superficiale è il criterio spesso adottato per individuare la separazione nelle procedure di calcolo dello strato limite.

Nei flussi tridimensionali, invece, la definizione del termine separazione non è precisa ed è stato osservato che, generalmente, il distacco del flusso dalla superficie non è collegato in modo semplice alle caratteristiche del flusso vicino alla superficie stessa. In particolare, la separazione del flusso è raramente associata con l'annullamento dello sforzo tangenziale superficiale eccetto che in casi particolari o in punti 'singolari' isolati ma, molto più frequentemente, lo sforzo tangenziale superficiale resta finito sulla linea di separazione.

Tuttavia, da un punto di vista ingegneristico, è fondamentale valutare la presenza della separazione in un flusso tridimensionale. Per esempio, nei velivoli con ali a forte freccia, la separazione di strati limiti 3-D è caratterizzata dalla formazione di strutture vorticoso ben concentrate che risultano stabili fino alle alte incidenze (stallo) e che influenzano notevolmente le prestazioni aerodinamiche. La topologia di questi flussi si differenzia sostanzialmente da quella che si incontra nelle regioni separate 2-D caratterizzate da un ricircolo intermittente ed instazionario.

Per ali di grande allungamento ad alti angoli d'attacco lo strato limite si distacca dal dorso secondo superfici quasi ortogonali alla direzione della corrente asintotica. In queste condizioni si può ritenere che la separazione sia, almeno nella zona centrale dell'ala, di tipo bidimensionale mentre, in ogni caso, nelle regioni di estremità alare ed in corrispondenza delle giunzioni ala-fusoliera il tipo di moto e la relativa separazione è chiaramente tridimensionale.

In realtà sono diversi i tipi di flussi 3-D separati che si realizzano attorno a configurazioni di interesse aeronautico, ma non sempre è facile comprendere la loro reale struttura anche con l'ausilio di tecniche di visualizzazione.

Molta attenzione è stata riservata alla correlazione della separazione con l'osservazione delle linee di corrente limite o linee d'attrito sulla superficie del corpo. I vantaggi di lavorare con le linee di attrito sono essenzialmente due:

- esse sono univocamente definite anche in prossimità delle linee di separazione che sono anche esse linee d'attrito;
- l'andamento delle linee di attrito può essere osservato come un campo vettoriale continuo nel quale appaiono punti singolari dove sono nulli o la velocità o la vorticità o lo sforzo tangenziale d'attrito.

L'ausilio di concetti di topologia fornisce poi uno strumento in grado di razionalizzare la comprensione del fenomeno della separazione e, in tale ottica, è usuale introdurre i tipi di flussi che costituiscono gli elementi base per la ricostruzione della struttura del flusso 3-D separato.

Si consideri il flusso su un corpo di rivoluzione sottile posto a piccola incidenza in una corrente uniforme, Fig. 8.11. Il punto di ristagno anteriore può essere visto come un "punto singolare nodale di attacco". Questo punto è una sorgente di linee d'attrito le quali si congiungono in un singolo punto, il punto di ristagno posteriore, vicino la poppa del corpo, da cui una singola linea di corrente si diparte nel flusso esterno. Questo punto, che può essere considerato come un pozzo di raccolta per le linee di corrente limite, è chiamato "punto singolare nodale di separazione".

Questo semplice esempio consente a Peake e Tobak, [60], di definire un flusso attaccato come un flusso che contiene due e solo due punti singolari nella distribuzione di linee di corrente limite; questi sono il punto nodale di attacco e il punto nodale di separazione. La distribuzione di linee d'attrito superficiali nei punti nodali di attacco e di separazione sono illustrati in Fig. 8.11.1, mentre una visualizzazione di un flusso attaccato è mostrata in Fig. 8.11.2. Questa definizione di flusso attaccato conduce alla definizione di flusso separato come un flusso con distribuzione di linee d'attrito contenente più di due punti nodali.

Siccome i punti nodali sono di due tipi, due dei punti nodali devono essere dello stesso tipo. In tal caso le linee d'attrito emanate da ciascuno di questi punti nodali devono essere precedute da un incrocio; il punto in cui tale incrocio avviene è dunque un altro punto singolare detto "punto sella". Quindi il più semplice flusso separato deve contenere tre punti nodali e un punto sella. Illustrazioni di tale distribuzione sono presentate in Fig. 8.12.

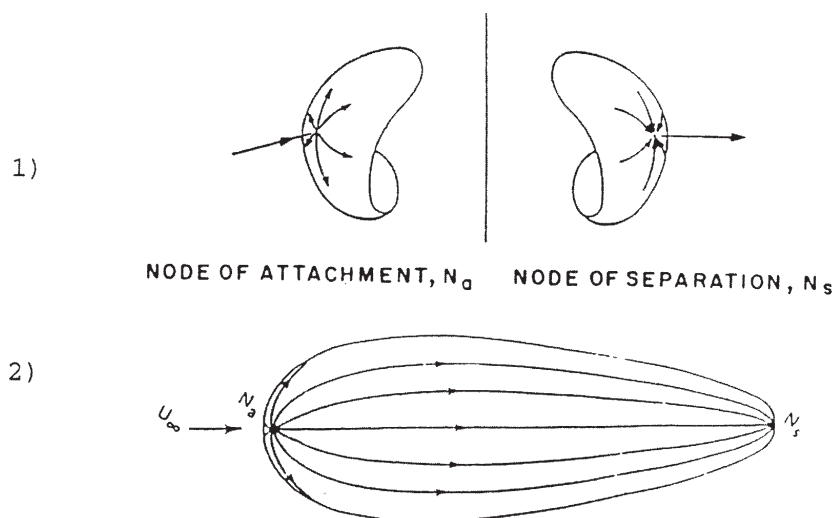


Figura 8.11: Visualizzazione delle linee di corrente limite in un flusso attaccato

In Fig. 8.12.1 è mostrata una distribuzione superficiale per un flusso con due punti nodali di attacco, un nodo di separazione e un punto sella di attacco, mentre in Fig. 8.12.2 è mostrata la distribuzione superficiale con un nodo d'attacco, due punti nodali di separazione e un punto sella di separazione. In Fig. 8.13 è mostrata la distribuzione di linee di attrito in un punto sella di attacco e di separazione. Il fatto che il numero di punti nodali supera il numero di punti sella di due costituisce una delle regole di topologia.

Basandosi su queste osservazioni, Peake e Tobak definiscono la distinzione tra flusso separato e attaccato nel modo seguente: la distribuzione di linee d'attrito per un flusso attaccato non può contenere punti sella, la distribuzione di linee d'attrito per un flusso separato deve contenere, al minimo, un punto sella. Questa è condizione necessaria per definire la separazione, tuttavia la completa definizione del fenomeno della separazione deve includere la discussione delle caratteristiche dei punti singolari.

Si consideri ora una superficie e su di essa un punto: se tale punto non è un punto singolare, allora in esso si intersecano soltanto una linea d'attrito e una linea di vorticità. I punti singolari

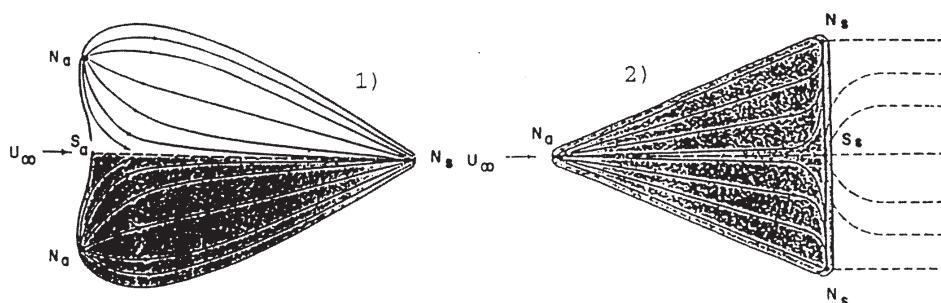


Figura 8.12: Illustrazioni di linee d'attrito su corpi con tre punti nodali e un punto sella.

- 1) due punti nodali di attacco e uno di separazione
- 2) due punti nodali di separazione e uno di attacco

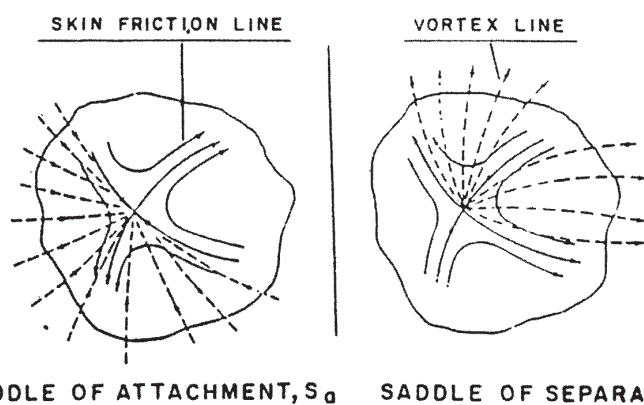


Figura 8.13: Distribuzione di linee d'attrito e di vorticità per punti sella di attacco e di separazione

possono presentarsi invece in singole posizioni dove la vorticità superficiale e lo sforzo superficiale, che sono vettori ortogonali tra loro ed entrambi tangenti alla superficie, diventano simultaneamente zero. Questi punti singolari possono essere classificati in due tipi principali: nodi e punti sella. I nodi possono essere ulteriormente divisi in due classi: punti nodali e fuochi, entrambi di attacco o separazione. La distribuzione delle linee di attrito e delle linee vorticosose è mostrata in Fig. 8.14.

I vari tipi di punti nodali sono distinguibili dal fatto che il punto singolare nodale è comune ad un numero infinito di linee d'attrito. Nel nodo, tutte le linee d'attrito tranne una, indicata con AA in Fig. 8.14.1, sono tangenti alla linea BB mentre l'angolo tra queste due linee può cambiare come indicato in figura. Al punto nodale di attacco tutte le linee d'attrito si allontanano dal punto singolare, mentre al punto nodale di separazione le linee sono orientate nella direzione opposta.

Il fuoco è distinguibile dal punto nodale dalla mancanza di una comune tangente, come si può vedere in Fig. 8.14.2. Un numero infinito di linee d'attrito ruotano a spirale intorno al punto singolare allontanandosi da esso nel fuoco di attacco o dirigendosi verso esso nel fuoco di separazione.

Il punto sella ha soltanto due linee d'attrito che passano attraverso il punto singolare, le linee CC e DD in Fig. 8.14.3. Tutte le altre linee d'attrito non passano attraverso il punto singolare.

Ciò è utilizzato da Lighthill, [61], per illustrare la condizione per la separazione. Egli definisce la linea emanata dal punto sella in cui le linee d'attrito provenienti da entrambi i nodi convergono, ma sono ostacolate dall'incrociarsi, come linea di separazione.

Comunque, questa definizione di separazione non è unica anzi, come si è detto, esiste ancora una certa ambiguità nella definizione di flussi separati perché sovente sono stati osservati fenomeni di separazione originati da linee provenienti da punti nodali di separazione e non da punti sella.

Si è visto che l'esistenza di un punto singolare a sella è condizione necessaria per la separazione. Tipicamente un punto sella separa le linee d'attrito che escono da adiacenti nodi di attacco come

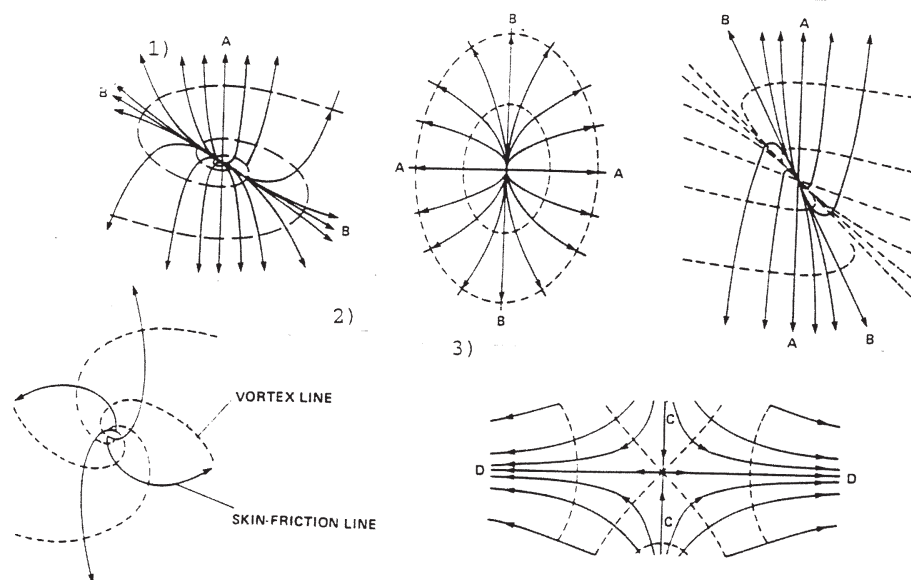


Figura 8.14: Punti singolari 1) Punti nodali 2) Fuoco 3) Punto sella

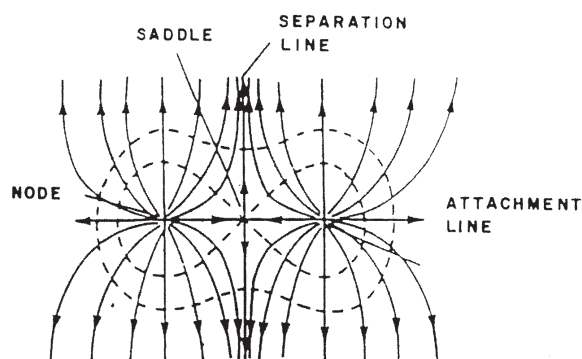


Figura 8.15: Linea di separazione del punto sella tra due punti nodali di attacco

mostrato in Fig. 8.15.

Recentemente Tobak e Peake hanno ripreso l'ipotesi di Legendre, [62], secondo cui si deve parlare di "separazione locale" quando la linea di separazione proviene da un punto nodale. Quando invece la linea di separazione proviene da un punto sella la separazione è "globale". Il concetto di separazione locale implica che quando appare la linea di separazione non si formano più nuovi punti singolari, sulla superficie del corpo o nel campo, che ne alterano la topologia. Lo sviluppo di una linea di separazione globale è collegata in modo inequivocabile con la formazione di nuove coppie di punti sella e punti nodali e di un nuovo punto singolare, di ristagno, nel campo di moto esterno. Purtroppo non si è ancora in grado di predire le condizioni che danno origine ai punti singolari ed a quelle che provocano le successive variazioni nel numero e nella forma di tali punti.

Da un punto di vista più pratico molti autori tuttavia, prescindendo dai concetti di topologia fin qui introdotti, utilizzano il concetto di involuppo di linee di corrente limite come criterio per individuare le linee di separazione. Il concetto di separazione espresso da Maskell, [63], distingue la configurazione del flusso separato in due forme basiche: una separazione tipo bolla e una tipo "strato vorticoso libero", illustrate in Fig. 8.16. Nel primo caso la superficie di separazione racchiude del fluido che non è parte del flusso principale mentre nel secondo entrambi i lati della linea di separazione sono costituiti dal flusso principale. I risultati numerici di Wang, [64], confortano il concetto di Maskell. Egli chiama il tipo di separazione a bolla un tipo "chiuso" perché la regione

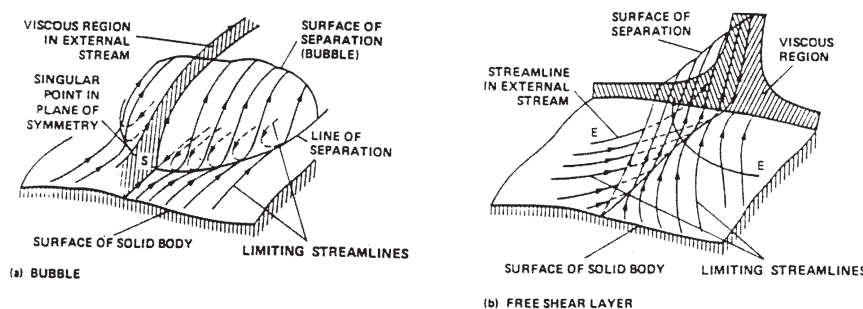


Figura 8.16: Separazione tridimensionale secondo Maskell

di separazione non è accessibile alla parte di fluido che scorre sopra, mentre il tipo strato vorticoso libero è un tipo “aperto” perché le linee di corrente limite, su entrambe i lati della linea di separazione, provengono dallo stesso punto di ristagno anteriore.

In conclusione si riassumono alcune tra le definizioni date da vari autori di linea di separazione tridimensionale:

1. linea in cui alcune componenti dello sforzo tangenziale superficiale si annullano;
2. linea d'attrito che unisce punti singolari;
3. linea di involuppo delle linee di corrente limite;
4. linea che divide il flusso proveniente da diverse regioni.

Si potrebbe mostrare, con qualche esempio, che ognuna di tali definizioni è valida sotto certe condizioni, ma non è universalmente valida e la separazione del flusso può essere accompagnata dal verificarsi simultaneo di più di una delle condizioni elencate. Tuttavia, da un punto di vista pratico, molti ricercatori sono oggi propensi a considerare la linea di separazione tridimensionale come involuppo delle linee di corrente limite; tale linea dunque, nelle applicazioni, sarà individuata dai punti luogo delle linee di corrente convergenti all'interno o al bordo di uno strato limite. Tali linee di corrente devono comunque essere calcolate in base a realistiche distribuzioni di pressione che possono essere quelle sperimentali o quelle teorico-numeriche ottenute da processi di interazione forte tra flussi non viscosi e viscosi.

8.6 Effetti viscosi alle alte velocità

8.6.1 Introduzione

Le considerazioni ed i risultati dei Capitoli 6, 7, ?? si riferiscono al modello di moto non viscoso applicato a flussi veloci, comunque comprimibili. Quando si passa a trattare flussi reali, è in campo transonico si possono avere effetti viscosi molto importanti anche ad angoli di attacco piccoli (la velocità è comunque alta), diversamente rispetto agli altri casi comprimibili, o al caso incomprimibile, quando si hanno grandi effetti viscosi solo ad alti angolo d'attacco (la velocità è bassa): la cosa realmente nuova che gli effetti viscosi possono introdurre in un campo transonico è una struttura del campo di moto complessa e delicata, derivante dall'interazione tra l'onda d'urto normale (che certamente deve essere presente nel campo) e lo strato limite. Quest'interazione può produrre effetti ed inconvenienti tali da essere dominante nella progettazione dell'aeromobile, nella caratterizzazione delle prestazioni e quindi nella fase di certificazione. Le sue cause e le possibili conseguenze, insieme con alcune tecniche per alleviarne gli inconvenienti o per migliorare le prestazioni, saranno trattate in dettaglio a partire dal paragrafo seguente (8.6.3).

8.6.2 Effetti viscosi in flusso attaccato

Perché il flusso rimanga ovunque attaccato gli angoli di attacco devono essere piccoli: allora in campo subsonico, transonico e supersonico non si hanno grandi effetti sugli sforzi di attrito a parete, e dunque sul coefficiente di resistenza di attrito, che si riduce, in modo abbastanza poco rilevante, all'aumentare del numero di Mach di volo, a partire dal regime incomprimibile. La cosa si può motivare considerando che la comprimibilità (la quale di per sé non altera in modo significativo la struttura dello strato limite) “gonfia” lo strato limite (il maggiore riscaldamento all'interno dello strato limite dà una riduzione della densità), e a causa di questo inspessimento il gradiente di velocità in senso trasversale si riduce, con conseguente riduzione degli sforzi di attrito a parete.

8.6.3 SWBLI: il fenomeno dell'interazione tra onda d'urto e strato limite

Quello che si descrive in questo paragrafo è un fenomeno complesso, i cui effetti sono spesso non desiderati: principalmente la possibile separazione del flusso, con conseguente peggioramento delle prestazioni aerodinamiche e compromissione dell'operatività del velivolo.

Si tratta di un fenomeno fluidodinamico la cui comprensione è fondamentale nella progettazione di aeromobili, compressori, prese d'aria. In linea di principio esso si presenta ogni qualvolta che un'onda d'urto normale impinge su uno strato limite: nascono una serie di fenomeni che possono portare ad un campo di moto complesso, la cui evoluzione è fondamentale determinare. Quel che può accadere è che, in particolari condizioni, si genera un accoppiamento forte tra effetti viscosi ed effetti di comprimibilità in corrispondenza del piede dell'onda d'urto, con modifiche sia del campo viscoso che di quello Euleriano. In queste condizioni i risultati del modello non viscoso -tutti legati all'assenza dell'interazione- perdono qualunque significato. È un altro aspetto della crisi di comprimibilità, crisi che in genere si presenta per $M_\infty < 1$.

Il fenomeno è dominante nelle condizioni di *off-design* e, in assenza di adeguate limitazioni operative, può portare ad importanti conseguenze, estremamente condizionanti per la progettazione.

Convieni procedere elencando in ordine alcune proprietà e caratteristiche del campo nella regione ai piedi dell'urto, e analizzare le conseguenze logiche che, in cascata, ne derivano.

È bene premettere che lo strato limite sulla superficie nella parte in cui il flusso esterno è supersonico è strutturato in due regioni, una subsonica più vicino alla parete ed una supersonica fino alla regione Euleriana. Esiste una linea sonica tra queste due regioni. Evidentemente eventuali disturbi di pressione possono risalire a monte attraverso la parte subsonica dello strato limite.

Ora l'onda d'urto normale presente nel campo si propaga attraverso la regione supersonica dello strato limite, ed avverte la diminuzione della velocità al ridursi della distanza dalla parete: essa diventa evanescente quando il numero di Mach raggiunge il valore unitario, in corrispondenza della linea sonica relativa allo strato limite (pertanto l'onda d'urto non arriva a parete, è come se “galleggiasse” sulla parte subsonica dello strato limite).

Essendo nello strato limite nullo il gradiente di pressione in direzione normale alla parete, l'aumento di pressione nella regione Euleriana a valle dell'urto si trasmette alla parte subsonica dello strato limite, e da qui, attraverso segnali di pressione che risalgono al flusso a monte dell'urto: il brusco incremento della pressione viene quindi avvertito a monte dell'urto, nello strato limite, che, di conseguenza, si inspessisce già a monte dell'urto, ancorché il flusso esterno sia supersonico.

Succede quindi che la corrente esterna supersonica a monte dell'urto scorre in presenza di uno strato limite inspessito rispetto al caso in assenza di un'onda d'urto normale: la conseguenza deve essere una perturbazione sul campo esterno (non viscoso) che al bordo dello strato limite dovrà deviare verso l'alto il flusso supersonico immediatamente prima dell'onda d'urto normale. Questo fatto viene determinato dall'interazione locale tra regione Euleriana e strato limite, e può essere facilmente compreso mediante il concetto di spessore di spostamento di Prandtl oppure quello di soffiamento di Lighthill, cfr. Cap. 10.

Si osserva allora immediatamente che la deviazione verso l'alto non può avvenire che attraverso la nascita di una sequenza di onde d'urto oblique, con deboli compressioni e rallentamenti della corrente ad esse associate, in quanto la corrente è supersonica: queste onde d'urto oblique vanno ad impingere sull'onda d'urto normale, che di conseguenza, in prossimità dello strato limite

- a) si indebolirà in quanto parte della compressione che le competerebbe è già stata smaltita attraverso le onde d'urto oblique ('diffusione' della distribuzione di pressione in prossimità dell'urto);
- b) dovendo essere normale *rispetto alla corrente*, che risulta deviata rispetto alla parete, cambierà la sua direzione in prossimità della parete.

A valle dell'urto la corrente al bordo dello strato limite non scorre più parallelamente alla parete, ma risulta deviata verso l'alto. A sua volta lo strato limite risulta molto inspessito, ed il gradiente di pressione nella direzione parallela alla parete, in corrispondenza dell'urto, risulta essere molto elevato nello strato limite supersonico, più blando in quello subsonico.

Tutti questi effetti, schematizzati nella Fig. 8.17, hanno un'entità che dipende, evidentemente, dall'intensità della compressione causata dall'urto, la quale dipende dal numero di Mach M_m che si ha a monte dell'urto: per $M_m > 1.25$ il fenomeno dell'interazione diventa significativo, dando luogo alla caratteristica configurazione definita "onda d'urto a λ " (λ shock), e si nota qui esplicitamente che le sue dimensioni -sia quella longitudinale che quella trasversale- si misurano su scale ben maggiori di quelle dello strato limite: l'interazione tra onda d'urto e strato limite è macroscopicamente visibile, ben estesa molto al di fuori dello strato limite.

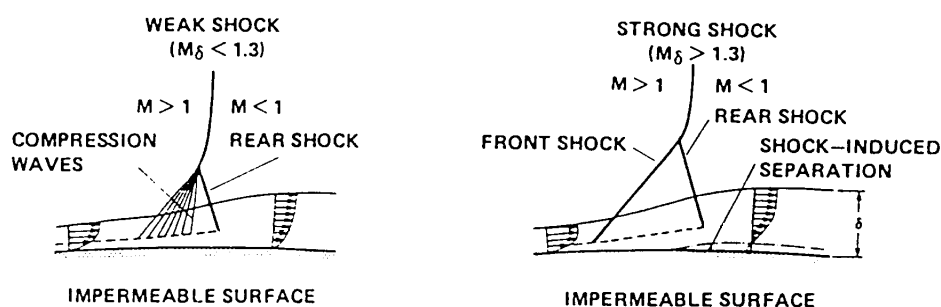


Figura 8.17: Schematizzazione dell'interazione tra onda d'urto e strato limite

Nella Fig. 8.18 è presentata la soluzione numerica di un campo transonico in condizioni di interazione forte, con ingrandimento della regione d'urto e valori del numero di Mach nella zona dell'interazione. È evidente la struttura del campo di moto, e si vede con chiarezza l'accrescimento dello strato limite nella regione dell'urto e la regione separata nella parte poppiera.

Nella Fig. 8.19 sono poi mostrate le isobare nella regione al piede di un urto su lastra piana in flusso laminare (a monte dell'urto): è visibile ed apprezzabile la configurazione a λ del sistema di urti che si viene a creare e la riduzione del gradiente di pressione, nella direzione del flusso, che si ha avvicinandosi alla parete.

Si comprende subito quali possono essere gli effetti di questo fenomeno. Innanzitutto è evidente che si creano condizioni che possono favorire la separazione del flusso: oltre alla compressione imposta dall'onda d'urto c'è la deviazione verso l'alto della corrente esterna. Inoltre, ma solo in assenza di separazione, certamente c'è riduzione della resistenza: la resistenza d'onda del sistema di urti a λ è inferiore alla resistenza d'onda dell'onda d'urto normale, ed inoltre si riduce l'attrito a valle a causa dell'inspessimento della scia.

Che cosa accada in realtà, dipende ovviamente dal tipo di flusso che si realizza: il campo esterno è determinato dalla geometria e dalle condizioni a monte, lo sviluppo dello strato limite dal numero di Reynolds e dal flusso esterno (può essere importante il ruolo della turbolenza atmosferica). Le condizioni che si realizzano nella regione di interazione possono risultare instabili o marginalmente stabili, il che può generare instazionarietà locali nel campo di moto. È comunque verificato sperimentalmente che quando $M_m \approx 1.25$ l'interazione diventa critica, e quando $M_m \geq 1.3$ certamente c'è la separazione del flusso a valle dell'urto.

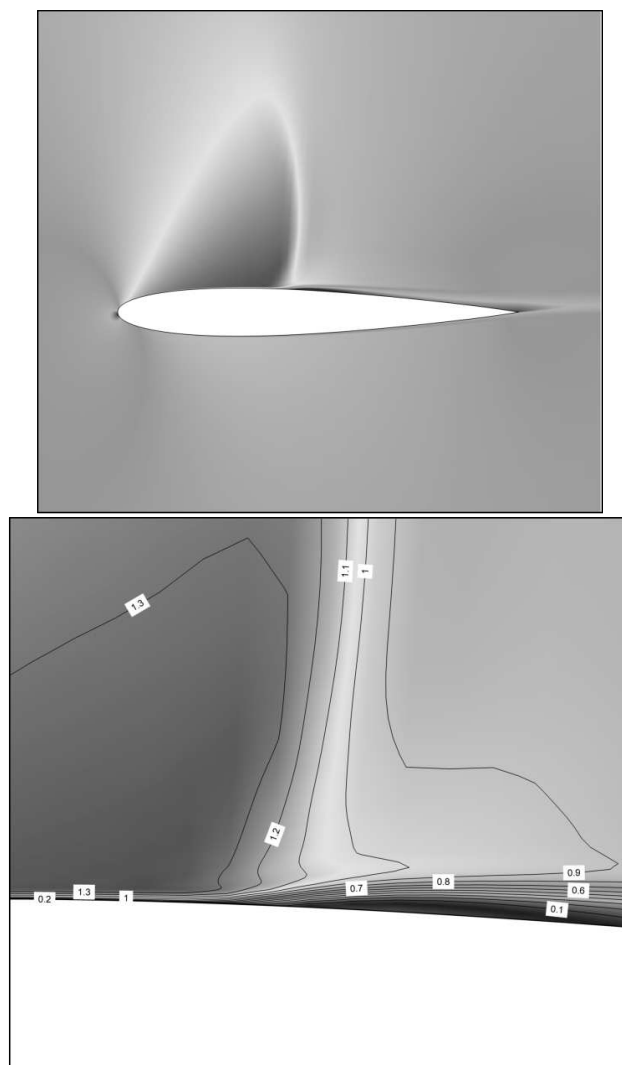


Figura 8.18: Interazione tra onda d'urto e strato limite - Profilo NACA 0012, $\alpha = 2^\circ$, $M_\infty = .82$ - Soluzione numerica: FLOWER, [91]

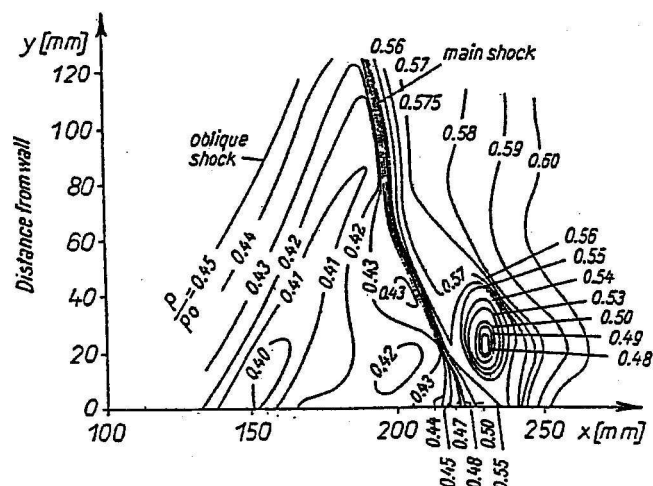


Figura 8.19: Isobare nella regione dell'urto in un flusso laminare, da [7]

Capitolo 9

Flussi separati e stallo

9.1 Introduzione

Nel Cap. 8 si sono visti alcuni aspetti fondamentali degli effetti della viscosità quando intorno ad una superficie aerodinamica è presente uno strato limite. Si è anche visto che nel flusso esterno allo strato limite all'aumentare della pressione si riscontra un decremento della velocità in modo tale che il livello di pressione totale rimane globalmente invariato, a meno che non si incontri un'onda d'urto. Nello strato limite invece l'azione della viscosità è tale da produrre una progressiva decelerazione in direzione normale alla superficie: se l'incremento di pressione nel flusso esterno è sufficientemente grande, una parte del flusso nello strato limite vicino alla parete può invertire la direzione del moto, procedendo in modo *upstream*, e si dice che lo strato limite è separato (in realtà è solo una parte dello strato limite ad essere separata).

Ora, in assenza di separazioni significative il valore della portanza di una superficie aerodinamica è funzione crescente dell'angolo d'attacco e del numero di Mach: si parla di stallo quando invece il valore della portanza diminuisce al crescere dell'angolo di attacco o del numero di Mach. Quando il flusso nelle condizioni di stallo è subsonico si parla di stallo di bassa velocità, o stallo convenzionale. Se nel campo sono presenti onde d'urto si parla di stallo di alta velocità, od anche di stallo d'urto: in alta velocità si può avere stallo d'urto per un aumento del numero di Mach oppure dell'angolo d'attacco. Il fenomeno dello stallo si presenta sia in volo livellato che in manovra, o pure in presenza di raffiche e per modifiche (non volute) della forma dell'ala, ad esempio per formazione ghiaccio.

In relazione ai parametri del volo, qualunque superficie aerodinamica presenta un valore massimo della portanza. La cosa ha un'inferenza fondamentale per progettazione, certificazione, condotta dell'aeromobile, costi (di produzione ed operativi).

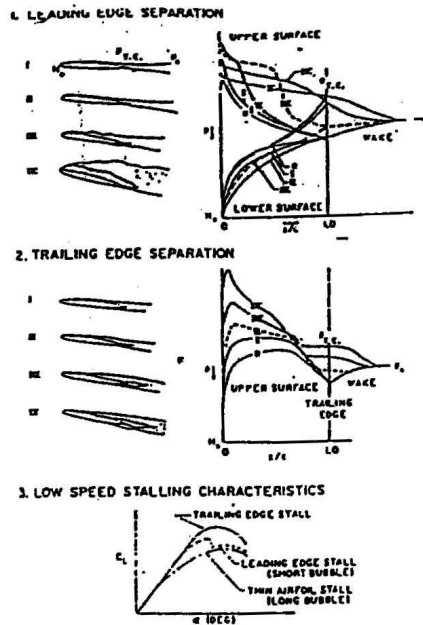
È intuitivo che la separazione del flusso, caratterizzata da vortici turbolenti a grande scala, è il fenomeno principale che può provocare lo stallo.

In termini più generali possibili, si può definire stallo quella condizione di interazione tra flusso e corpo individuata, per ogni fissato stato termofluidodinamico (angolo d'attacco, numeri di Mach e Reynolds), da un "abbastanza preciso" valore dell'angolo di attacco, detto appunto di stallo (α_{st}), o del numero di Mach all'aumentare dei quali l'ulteriore estensione della zona di flusso separato sulla superficie del corpo ed il conseguente incremento della perdita di regolarità del flusso intorno al corpo determinano una diminuzione (più o meno brusca) del coefficiente di portanza.

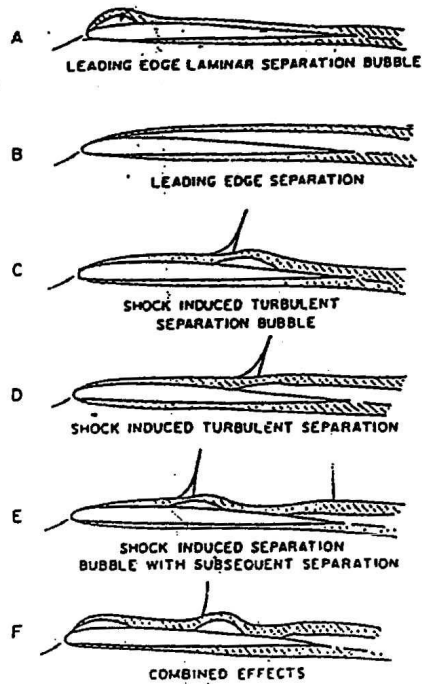
Per lo stallo di bassa velocità lo stallo viene individuato sulla curva di portanza del corpo in corrispondenza del punto di C_{Lmax} . In alta velocità in genere si preferisce individuare lo stallo d'urto sulle curve di comprimibilità ad angolo d'attacco fissato facendo crescere il valore del numero di Mach e ripetendo la cosa per diversi angoli d'attacco.

Da quanto qui scritto si ritiene opportuno fare le seguenti considerazioni.

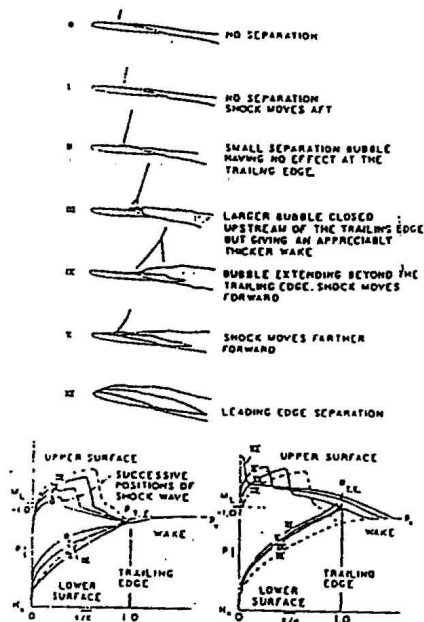
- 1 Più che un fenomeno fluidomeccanico, come deve invece intendersi la separazione del flusso sulla superficie del corpo, lo stallo è una proprietà del corpo stesso (ed infatti esso viene individuato sulle curve del coefficiente di portanza e sulle curve di comprimibilità).
- 2 Anche se generale, il corpo a cui si fa riferimento deve essere inteso di forma aerodinamica ed, in particolare, si considerano prevalentemente i profili alari (campo 2-D) e le ali (campo 3-D), ma l'inferenza è comunque sull'intera configurazione. Spesso quando si fa riferimento ai profili



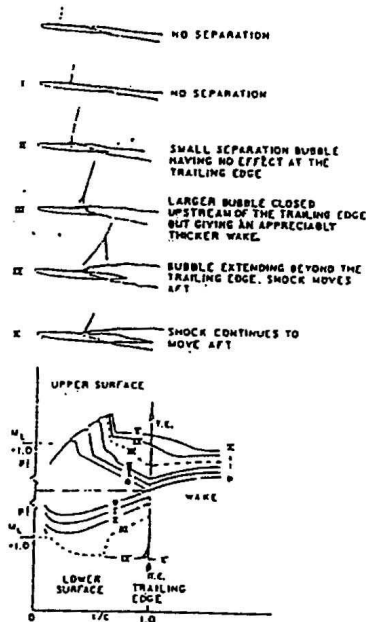
Low speed flow separation characteristics.



Flow separation characteristics at transonic speeds.



High-speed flow separation with α increasing and Mach number constant. Rearward growth of bubble, followed by leading-edge separation at high α .



High-speed flow separation with Mach number increasing and α constant. Rearward growth of bubble, with continued aft movement of shock toward trailing edge.

Figura 9.1: Schematizzazione della fluidodinamica dei diversi modi di stallare di un profilo

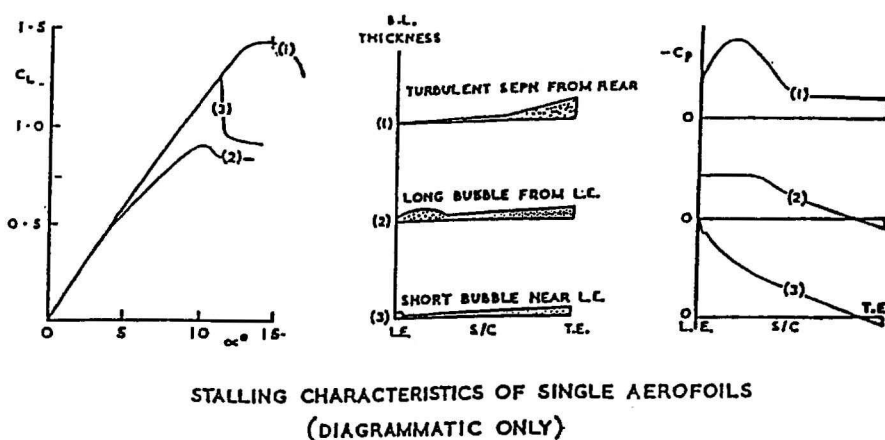


Figura 9.2: Distribuzioni qualitative di pressione allo stallo di bassa velocità di un profilo

lo stallo viene studiato da un punto di vista prevalentemente fenomenologico (caratteristiche e previsione della separazione del flusso), mentre lo stallo per le ali (e per un velivolo in generale) viene studiato, oltre che dal un punto di vista puramente aerodinamico, anche sotto il profilo della manovrabilità (e quindi della sicurezza) e del comportamento aeroelastico e strutturale del velivolo. Ciò è facilmente comprensibile se si considera che il fenomeno della separazione del flusso in grande scala innesca l'instazionarietà delle forze aerodinamiche. Non a caso quindi alcuni autori in [70] definiscono qualunque stallo di un velivolo come una condizione di volo limite alla quale il pilota osserva un marcato cambiamento nelle caratteristiche di ortodossa manovrabilità del velivolo stesso.

- 3 L'“abbastanza preciso” valore dell'angolo di stallo o del numero di Mach introdotto nella definizione è in relazione alla difficoltà della loro determinazione sperimentale (sia in galleria del vento che con le prove di volo) e teorica. Essendo una condizione limite legata alla intensificazione della separazione ed al conseguente aumento delle caratteristiche di instazionarietà del flusso, lo stallo è influenzato dalla turbolenza basica del flusso indisturbato alla quale si somma la turbolenza prodotta per le vibrazioni (deformazioni strutturali sotto carico) del corpo. La valutazione dello stallo sui profili in galleria richiede una notevole cura in quanto la corretta dimensionalità del flusso (2-D o 3-D) viene ad essere fortemente compromessa quando all'aumentare della separazione sulla superficie del modello la vorticità e l'instazionarietà del flusso che si distacca e convette a valle generano un *crossflow* che coinvolge l'intero campo di moto, per quanto grande possa essere la camera di prova della galleria e nonostante gli accorgimenti che lo sperimentatore impiega per correggere il risultato delle prove.
- 4 Lo stallo è quindi una particolare condizione di funzionamento caratterizzata da una criticità della separazione del flusso dalla superficie del corpo. La modalità con cui avviene l'incremento delle zone di flusso separato individua poi il tipo di stallo.
- 5 Per la bassa velocità è la viscosità nello strato limite la principale causa della caduta del coefficiente di portanza. In campo transonico la separazione è dovuta all'interazione tra onda d'urto e strato limite, per cui tipologia e fluidomeccanica dello stallo sono decisamente più complicate a causa delle diverse situazioni che possono verificarsi: la curva individuata dai valori di C_{Lmax} al variare di M_∞ è detta curva limite di *buffet*, appunto in riferimento all'insorgere delle vibrazioni aeroelastiche causate dalla instazionarietà del flusso separato. Lo studio delle fenomenologie connesse allo stallo di alta velocità rientrano nell'ambito dell'analisi dei flussi transonici.

La Fig. 9.1 presenta schematicamente le caratteristiche della separazione del flusso sulle superfici dei profili alari, sia per il campo subsonico che per quello transonico. Le zone tratteggiate

sono indicative dello sviluppo dello strato limite, mentre le zone bianche delimitate dalle prime e dal profilo stanno ad indicare il flusso separato (in scia o in bolla).

Caratteristica comune sia allo stallo di bassa velocità che a quello di alta velocità è il modo con cui cambiano le forze ed i momenti agenti sulle superfici. Dalla Fig. 9.1 (e dalla Fig. 9.2, dove si riportano, schematicamente, le distribuzioni di pressione tipiche per i vari tipi di stallo di bassa velocità che saranno discussi di seguito) si nota come in corrispondenza delle zone di flusso separato il coefficiente di pressione assume un valore pressoché costante: il punto di applicazione della forza aerodinamica totale (che in crociera non è lontano dal 25% della corda) si sposta verso il bordo d'uscita, con conseguente incremento del coefficiente di momento focale. Questa variazione, più o meno brusca a seconda del tipo di stallo, è da tenere presente perché occorre sempre cautelarsi a che un velivolo abbia un comportamento stabile allo stallo. E analogamente, nel caso che la separazione interessi una superficie di governo (ad esempio gli alettoni), l'incremento del momento di cerniera dovrà sempre essere compatibile con lo sforzo esercitabile dal pilota o dal servocomando.

A conclusione di queste prime considerazioni su flussi separati e stallo, e con riferimento alla Fig. 9.3, si evidenzia che il fenomeno della separazione del flusso è il principale limite in importanti fasi del volo; tutti gli accorgimenti impiegati per ostacolare, prevenire o controllare gli effetti della separazione costituiscono l'ambito della cosiddetta alta portanza.

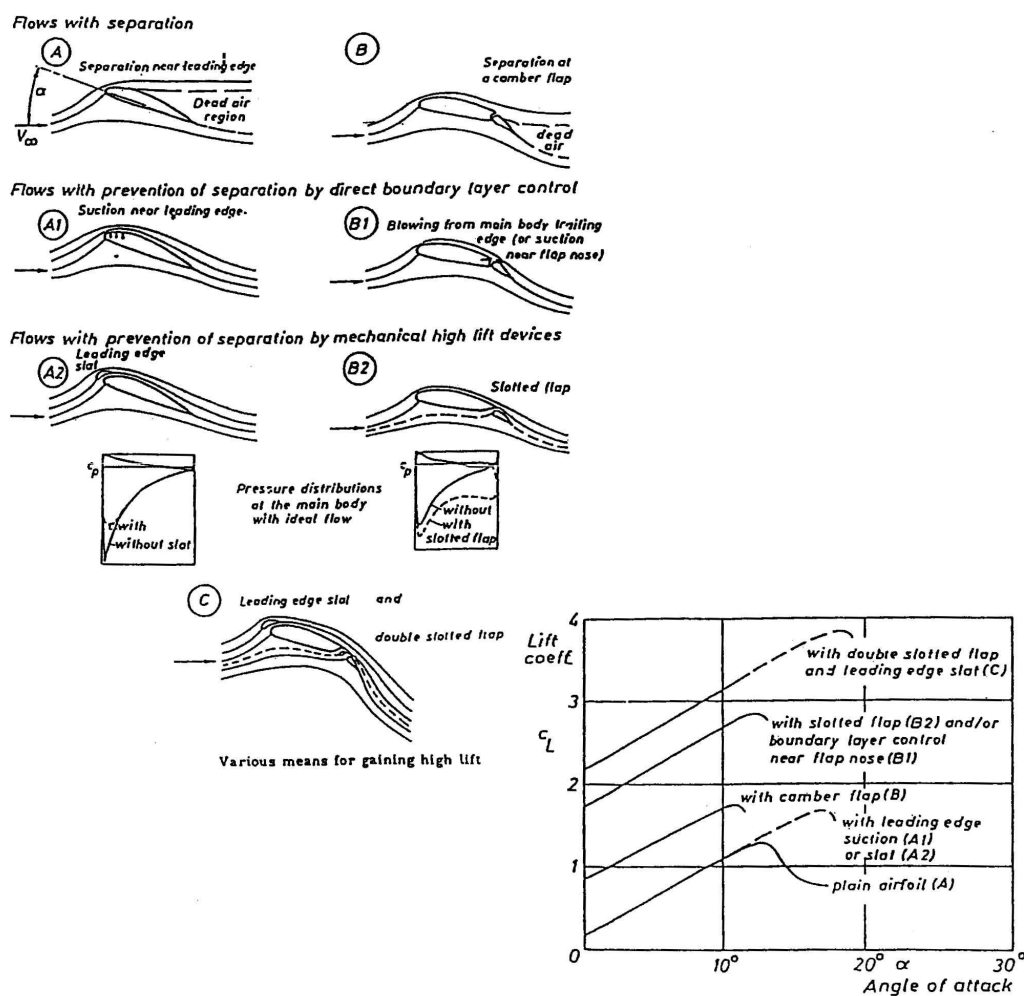


Figura 9.3: Dispositivi di alta portanza e loro effetto sul C_{Lmax}

9.2 Considerazioni sulla scia in flusso separato

Con riferimento alle Figg. 9.1 e 9.4, si ritiene utile fare alcune considerazioni sul concetto di scia quando il flusso è separato in modo significativo.



Figura 9.4: Schematizzazione del profilo equivalente per la simulazione di flussi separati

In termini più generali possibili, per scia si deve intendere la zona di flusso che lascia la superficie del corpo nella quale si conservano (ed evolvono, sino ad annullarsi per naturale dissipazione nel flusso indisturbato) gli effetti della viscosità prodotti nello strato limite. In senso lato quindi, la scia è sempre presente a valle dei corpi ed è caratterizzata da un certo livello di vorticità libera prodotta dal contatto delle vene fluide provenienti dal dorso e dal ventre del corpo da cui si distaccano.

Nel caso in cui la separazione del flusso avvenga in un punto sulla superficie che non sia il bordo d'uscita, come ad esempio nel caso dello stallo di un profilo, conviene fare una distinzione. Si intende per *near wake* la zona di scia compresa fra il limite libero della scia (peraltro non propriamente ben definibile) e la superficie del profilo dal punto di separazione al bordo di uscita: il limite libero si svilupperà in modo da annullare *anche* il gradiente di pressione longitudinale, e quindi in tale zona la pressione è pressoché costante ed assume un valore appena inferiore al valore asintotico ($C_{pwake} \approx -1$). La scia a valle del bordo d'uscita, detta *far wake*, è caratterizzata da due limiti liberi che si svilupperanno in modo da rendere nulla la forza trasversale; lungo la *far wake* la pressione si modifica gradualmente fino a raggiungere il valore asintotico.

I concetti di *near* e di *far wake* intervengono nei modelli numerici per la trattazione dei flussi separati mediante interazione tra flusso non viscoso e strato limite.

9.3 Lo stallo di bassa velocità

Si tratterà qui di un argomento centrale per la progettazione di un aeromobile, lo stallo di bassa velocità. Esso è di fondamentale importanza perché determina le qualità di volo ed interviene in maniera decisiva su costi e pesi, e dunque sulle prestazioni. Inoltre i requisiti che il certificatore pone per le condizioni di alta portanza sono tra i più stringenti.

Come si è scritto in (9.1), ed in riferimento ad un aeromobile così come a qualunque superficie portante, uno stallo di bassa velocità è la condizione di volo per la quale la portanza diminuisce al crescere dell'angolo d'attacco. Dunque la portanza assume valore massimo ad un preciso angolo di attacco $-\alpha_{st}$ la cui conoscenza è fondamentale in 2-D, un po' meno in 3-D. Lo stallo di un aeromobile è dovuto allo stallo dell'ala e non di altre superfici portanti presenti: ai fini di un corretto comportamento aerodinamico è indispensabile che gli impennaggi non stallino mai per nessuna delle condizioni di volo possibili.

Si può dire che lo stallo di bassa velocità è una condizione che ineluttabilmente un aeromobile incontrerà quando se ne riduce progressivamente la velocità di volo. Esso dipende dalla presenza di significative regioni di flusso separato sulle superfici portanti, determinate dal crescere dell'importanza degli effetti della viscosità quando l'energia cinetica del flusso nel moto relativo fluido-corpo viene progressivamente ridotta.

È necessario, in concreto, che si preveda la condizione di stallo come condizione operativa, in modo da poter ridurre per quanto possibile le velocità minime di sostentamento.

Allo stallo il coefficiente di portanza è massimo, e dipende, in generale, dai numeri di Reynolds e Mach nonché dalla configurazione assunta dall'aeromobile: in particolare, sono fondamentali le configurazioni al decollo ed all'atterraggio (che possono essere più di una per ciascuna di queste due fasi di volo). Oltre al valore che attinge il coefficiente di portanza massimo è fondamentale la qualità dello stallo, intesa come andamento delle curve (C_L, α) e (C_l, α) a partire da α_{st} : la

riduzione del coefficiente di portanza può presentarsi dolce e graduale oppure brusca, a seconda della geometria dell'ala e, per una stessa ala, in dipendenza dalle condizioni di volo.

Per un aeromobile, oltre allo stallo che si incontra riducendo al di sotto di quella minima la velocità, sono importanti quegli stalli che si realizzano in manovra, a fattore di carico non unitario (g-stalli): ad esempio, in una virata la semiala esterna sviluppa maggiore portanza, e può stallare anche se il coefficiente di portanza del velivolo è inferiore a quello massimo (in riferimento al volo livellato).

9.3.1 Stalli 2-D

Lo studio e la comprensione dello stallo dei profili sono fondamentali per l'influenza che esso ha sulle caratteristiche di stallo dell'ala.

Per i profili alari il fenomeno dello stallo di bassa velocità si può sviluppare in diversi modi che influenzano sia l'andamento della curva di portanza in corrispondenza di α_{st} sia il valore del coefficiente di portanza massimo. I fattori che intervengono sono la geometria del profilo (principalmente la forma del bordo d'attacco), le caratteristiche della sua superficie e le condizioni fluidodinamiche: è forte l'influenza del numero di Reynolds, ma anche il numero di Mach può influenzare, e molto, lo stallo di un profilo.

CLASSIFICAZIONE

In dipendenza dall'evoluzione del flusso sul profilo al variare dell'angolo di attacco, si può ricondurre, classicamente, il comportamento allo stallo di un profilo ad uno dei seguenti tipi (cfr. anche [1], pag. 231).

- **STALLO TURBOLENTO, O DA SEPARAZIONE AL BORDO DI USCITA**, Fig. 9.2(1). In assenza di separazione laminare si ha lo stallo classico dei profili spessi ($\tau > 0.12 \div 0.15\%$): a partire da una certa incidenza si determina la separazione al bordo di uscita, con avanzamento graduale del punto di separazione turbolento (anche fino a circa il 50% della corda) al crescere dell'angolo d'attacco. Ad $\alpha = \alpha_{st}$, quando diventa estesa la separazione nella zona poppiera, inizia la diminuzione di portanza dolce e graduale, senza un'improvvisa caduta della portanza.

Un secondo tipo di stallo turbolento può verificarsi quando ad una bolla corta segue il riattacco turbolento e lo stallo del profilo avviene per separazione turbolenta al bordo di uscita.

- **STALLO DA ESPLOSIONE DI UNA BOLLA LAMINARE SUL BORDO D'ATTACCO**, Fig. 9.2(3). Lo stallo sul bordo di attacco è tipico dei profili caratterizzati da $8 \div 9\% < \tau < .12 \div 15\%$ sui quali si produce -a partire già da incidenze piccole o medie- una bolla corta che evolve in modo catastrofico. Per α piccolo l'influenza della bolla sulla portanza e resistenza è inapprezzabile. All'aumentare di α il picco di espansione si sposta verso il bordo di attacco e la lunghezza della bolla diminuisce, anche per la crescita della turbolenza in bolla per l'aumentato numero di Reynolds locale. Improvvisamente per $\alpha = \alpha_{st}$ si verifica una vera e propria esplosione della bolla, con brusca caduta della portanza.

L'esatto meccanismo della esplosione è ancora poco chiaro: sono state proposte comunque due interpretazioni, in realtà non ben distinte.

Con la prima si individua lo stallo quando si supera un determinato valore massimo dello sforzo tangenziale che il flusso turbolento, nel punto di riattacco, può sopportare.

Con l'altra interpretazione l'esplosione della bolla è motivata tramite la separazione turbolenta che si produce subito dopo il riattacco: questa "riseparazione" si manifesterebbe per $\sigma < .35$ e $Re_{\delta}|_{sep} > 1200$.

L'occorrenza di questo tipo di stallo, evidentemente più pericoloso, va evitata ricorrendo, in progettazione, a più sofisticati (e costosi) dispositivi di ipersostentazione che devono entrare in funzione a velocità più elevate (quindi ad incidenze abbastanza più basse di quella di stallo), o

addirittura ad un'architettura non convenzionale (le tre superfici portanti del velivolo Piaggio P180 Avanti, ad esempio).

- **STALLO DEI PROFILI SOTTILI**, Fig. 9.2(2). Generalmente sui profili sottili ($\tau < 8 \div 9\%$), con bordo di attacco aguzzo o arrotondato, si può realizzare, già a piccola incidenza, una separazione laminare con riattacco turbolento non a breve distanza: si tratta di una bolla lunga, la cui estensione varia tra il 20% ed il 30% della corda, ed è caratterizzata da un flusso instazionario, di difficile calcolo o misurazione proprio per la lunghezza della zona di separazione. Al crescere dell'angolo di attacco l'estensione della regione separata aumenta progressivamente, e ad $\alpha = \alpha_{st}$ -valore molto basso rispetto a quello relativo agli altri tipi di stallo- si ha uno stallo che è molto dolce e graduale. Il valore C_{lmax} è quindi basso: se si realizza un qualcosa di simile ad una lastra piana, stalla intorno a 7° .

Secondo alcuni ricercatori un altro tipo di stallo (stallo combinato), anch'esso graduale, potrebbe essere introdotto come derivante dall'aumento, al crescere dell'angolo di attacco, della lunghezza di una bolla unita alla progressione della separazione al bordo di uscita, fino al *merging* delle due regioni separate.

A volte si verifica un prestallo, che comporta la perdita della forza di spinta sul bordo d'attacco (il che aumenta la resistenza) ed una lieve diminuzione della portanza riscontrabile nella curva (C_l, α). Al crescere dell'angolo d'attacco la portanza cresce molto poco, fino allo stallo.

CARATTERISTICHE DI STALLO

Al crescere del numero di Reynolds aumentano sistematicamente sia l'angolo di stallo che il coefficiente di portanza massimo. Inoltre una variazione del numero di Reynolds può determinare un diverso tipo di stallo dello stesso profilo: abbastanza chiaramente se si diminuisce il numero di Reynolds lo stallo tende ad essere sempre più brusco: infatti la transizione posticipa, e può più facilmente intervenire una bolla laminare.

Le distribuzioni di pressione sui profili in condizioni prossime allo stallo presentano le tipiche caratteristiche legate alla presenza di un esteso flusso separato: si evidenzia qui la leggera e costante depressione a partire dal punto di separazione. Il valore coefficiente di pressione nel picco di espansione è drasticamente ridotto rispetto a quanto prevederebbe a parità di angolo di attacco un modello non viscoso. Il *plateau* di pressione nella zona poppiera e la caduta del picco di espansione determinano insieme un drastico aumento, allo stallo, del momento picchiante (la cosa va tenuta ben presente in sede di progetto).

Per ricordare facilmente i valori tipici allo stallo di importanti grandezze può essere comodo tenere presente che per un profilo "non sottile", ad esempio il profilo NACA 0012, ed a numeri di Reynolds di interesse aeronautico si ha $\alpha_{st} \approx 15^\circ$, con $C_{lmax} \approx 1.5$ e $C_{pmin} \approx -15$.

9.3.2 Lo stallo dell'ala e della configurazione

Lo stallo dell'ala coinvolge aspetti sostanzialmente diversi da quelli relativi allo stallo del profilo, anche se lo stallo di un'ala diritta o a freccia ricalca il carattere dei profili che costituiscono l'ala: esso si presenta in generale più dolce e graduale e con un coefficiente di portanza massimo inferiore a quello del profilo (un progettista sarebbe molto contento di un'ala che avesse $C_{Lmax} \approx 1.3!$), ma ad un angolo di attacco maggiore (il gradiente della retta di portanza dell'ala essendo minore di quello dei suoi profili).

Innanzitutto, anche in volo simmetrico lo stallo dell'ala non si presenta quasi mai simmetrico, cioè simultaneo e della stessa intensità sulle semiali: in assenza di controllo una di queste semiali andrà giù, il velivolo, che sta a bassa velocità, ruota intorno all'asse di rollio e potrebbe andare in vite. Gli effetti sulla dinamica del velivolo potrebbero essere catastrofici.

Inoltre un effetto importante da tenere in conto è legato alla possibile modifica dell'interferenza tra ala e piano di coda orizzontale allo stallo rispetto alla condizione di crociera: il posizionamento relativo dovrebbe prevedere tale modifica dell'interferenza mediante soluzioni ingegneristicamente valide per controllare sia l'effetto della scia separata (e dunque degradata) sul piano di coda sia l'eventuale diversa induzione della vorticità libera.

La più importante caratteristica allo stallo di un'ala, capace di influenzare significativamente le qualità di volo, è il suo modo di stallare ma inteso diversamente dai tipi di stallo prima descritti per un profilo: il fatto diverso ed importante è come si sviluppa la separazione lungo l'apertura man mano che si aumenta l'angolo di attacco.

STALLO DI ESTREMITÀ, SENTIERO DI STALLO E QUALITÀ DI VOLO

Anche se la definizione di stallo per profili ed ali è la stessa, è fondamentale l'osservazione che su un'ala che non ha ancora raggiunto il suo C_{Lmax} una parte dei profili può essere già stallata. Infatti al crescere dell'angolo di attacco il carico sulle parti non stallate può continuare a crescere finché non entrano in stallo a loro volta (i profili relativi lavorano ancora nel tratto crescente della loro caratteristica di portanza), mentre il carico sulle parti stallate continuerà a decrescere: quindi complessivamente il carico può ancora crescere, e l'ala lavora ancora nel tratto crescente della sua caratteristica di portanza.

La progressione delle ascisse in apertura delle sezioni che stallano al crescere dell'angolo d'attacco costituisce il sentiero (o cammino) di stallo. Si definisce poi angolo di stallo convenzionale, o angolo critico α^* , l'angolo di attacco al quale si verifica lo stallo per la prima volta lungo l'apertura in una sezione che, insieme a α^* , indica l'inizio del sentiero di stallo. Il relativo valore del coefficiente di portanza si definisce coefficiente di portanza massimo convenzionale C_{Lmaxc} dell'ala (o del velivolo), ed è sicuramente più basso del C_{Lmax} .

Sorge allora la questione su quali parti dell'ala si possa o non si possa accettare una condizione di stallo locale anche se l'ala non è stallata: in tal senso è decisivo l'inizio del sentiero di stallo.

Orbene, non è concepibile, e va tassativamente evitato, che il sentiero di stallo di un'ala possa iniziare, in una qualunque condizione di volo, all'estremità dell'ala in quanto si presenterebbero due gravi inconvenienti.

- Gli alettoni (organi primari per il controllo del moto intorno all'asse di rollio, allocati alle estremità alari, la cui integrità funzionale necessaria per il controllo dell'aeromobile in condizioni di stallo quasi mai simmetrico) diventerebbero totalmente od in parte inefficaci qualora lavorassero in un flusso separato.
- L'insorgere di una instabilità al beccheggio, con tendenza ad un aumento dell'angolo d'attacco che causa lo stallo di tutta l'ala. Il velivolo esibirà una tendenza a cabrare (ed è già in prossimità dello stallo!) a causa della diminuzione di portanza del piano di coda orizzontale il cui angolo d'attacco diminuisce per l'incremento del *downwash* legato allo spostamento verso la mezzeria del vortice d'estremità: questa tendenza destabilizzante si chiama 'nose up' o 'pitch up'.

A parte lo stallo d'estremità, un altro punto fondamentale della qualità dello stallo che deriva dalla conoscenza del sentiero di stallo è come si presenta lo stallo lungo l'apertura: se stallano simultaneamente tutte le sezioni allora lo stallo dell'ala sarà improvviso, e questo evidentemente peggiora le qualità di volo in alta portanza. Vi sono comunque ali che per ottimizzare la resistenza di crociera presentano uno stallo pressoché simultaneo di quasi tutte le sezioni: la qualità di volo viene comunque garantita mediante particolari accorgimenti, ad esempio prevedendo un anticipo della messa in funzione dei dispositivi di ipersostentazione (il che indubbiamente aumenta i costi operativi).

Per il controllo del sentiero di stallo un rimedio -che però introduce inconvenienti sulle prestazioni di crociera- può essere l'introduzione dei cosiddetti promotori di stallo, che forzano lo stallo in una determinata sezione dell'ala, verso la mezzeria. Si tratta di alterazioni della forma base dell'ala (appendici aerodinamiche, discontinuità della forma del bordo di attacco dell'ala lungo l'apertura), con applicazione limitata ai velivoli dell'Aviazione Generale.

È evidente che il sentiero di stallo va predeterminato già nella fase in avanzoprogetto con la eventuale previsione di opportuni accorgimenti per imporre lo stallo dell'ala così come desiderato: in genere serve un accurato compromesso tra profilo e forma in pianta, introducendo poi, se compatibile con i vincoli di impostazione di progetto, un adeguato svergolamento.

LO STALLO DELL'ALA A DELTA

A partire da incidenze medie un'ala a delta presenta una tipica struttura vorticoso, generata dalla separazione del flusso lungo la linea del bordo di attacco, [1]. In condizioni di alta portanza la struttura vorticoso diventa molto intensa: si genera quindi una bolla di separazione, a bassa pressione, estesa sull'intero dorso dell'ala che, insieme alla compressione ventrale, genera una forza -di origine viscosa- di grande intensità (*Vortex Force*).

Pertanto sull'ala a delta si riesce ad avere una portanza che cresce più che linearmente con l'angolo di attacco (*Vortex Lift*). Ed inoltre l'estrema stabilità della struttura vorticoso e della *Vortex Lift* fa sì che l'ala stalli ad incidenze molto elevate (maggiori di 40° , o ancora più grandi con l'impiego di opportune forme del bordo di attacco), e con caratteristiche di gradualità notevole: pur essendo in generale sottile e di allungamento molto basso l'ala a delta riesce ad attingere coefficienti di portanza massimi al di sopra dell'unità.

Inoltre la *Vortex Drag*, a sua volta molto intensa e che si aggiunge alle altre forme di resistenza, risulta molto utile per ridurre la corsa di atterraggio.

9.4 Gli effetti dell'interazione tra onda d'urto e strato limite

L'interazione ha una grande influenza sulle prestazioni degli aeroplani che volano in campo transonico. Le conseguenze di questo importante fenomeno possono essere diverse. Può essere opportuno individuarne quelle principali, alcune sicuramente non favorevoli, una (potenzialmente) positiva:

- lo stallo d'urto;
- l'inefficacia dei comandi;
- il *buffet*;
- la riduzione della resistenza totale (onda ed attrito).

STALLO D'URTO

Si tratta, ovviamente, di uno stallo di alta velocità causato dalla comprimibilità. La sua descrizione, nel caso di un profilo, può essere individuata nel piano ($C_l - M_\infty$), ad esempio su una curva ad angolo d'attacco costante: in pieno campo transonico all'aumentare di $M_\infty (< 1)$ si vede una brusca caduta del C_L . Lo stesso fenomeno può presentarsi a M_∞ costante dopo una cabrata (in richiamata, ad esempio).

La causa dello stallo d'urto risiede in una brusca separazione del flusso a valle dell'onda d'urto a λ : sulla parte poppiera del profilo si presenta una situazione del tutto simile a quella che si ha quando un profilo stalla a bassa velocità.

Sinteticamente, quando il carico sul profilo diventa eccessivo per l'aumento del numero di Mach di volo o dell'angolo di attacco (anche a causa di una raffica), si ha l'aumento della pressione dopo l'urto, il distacco della vena a causa dell'interazione e una brusca caduta di portanza.

Come in tutti gli stalli, questa situazione relativa al profilo va riportata all'ala o all'impennaggio nella situazione di volo attuale. Se, ad esempio, il pilota in affondata (quindi in alta velocità) prova a richiamare il velivolo il carico sull'ala può attingere valori tali da causare forte interazione onda d'urto - strato limite, con conseguente stallo d'urto.

La conseguenza potenziale di questo fatto può ben essere intuita, e non mancano esempi nella Storia dell'Aeronautica di velivoli che, spesso in seguito all'errata condotta da parte del pilota, hanno avuto ripetuti incidenti di volo riconducibili al fenomeno dello stallo d'urto.

INEFFICACIA DEI COMANDI

Per i primi aerei che volavano in campo transonico si è avuto il problema dell'inefficacia dei comandi, consistente, in sintesi, nella possibilità che una parte mobile dell'ala lavori in condizioni di flusso separato, determinate appunto dall'interazione tra onda d'urto e strato limite.

BUFFET

In condizioni transoniche la separazione del flusso sull'ala dovuta all'interazione tra onda d'urto e strato limite può indurre un'instabilità nel flusso che influenza pesantemente il comportamento aerodinamico di un velivolo. Si può instaurare un complesso fenomeno instazionario, il *buffet*, consistente in una successione temporale di estese separazioni e riattacchi del flusso sulla parte poppiera dell'ala; si può individuare una periodicità, a frequenze dell'ordine della decina o delle centinaia di Hertz. Il cambiamento periodico di forza aerodinamica e, soprattutto, di momento determina sollecitazioni di intensità non piccola sulla struttura: il *buffet* risulta quindi macroscopicamente rilevabile in forma di vibrazioni strutturali e scuotimenti del velivolo (*buffeting*). Nonostante che si tratti di un fenomeno non immediatamente distruttivo, la fatica strutturale aumenta notevolmente, la manovrabilità del velivolo risulta influenzata, diminuisce il comfort a bordo: permanere in condizioni di *buffet* certamente causa all'aeromobile danni che possono portare a conseguenze catastrofiche¹.

Il *buffet* è tra i fenomeni più importanti nel volo in condizioni di alta velocità: in base alle considerazioni precedenti si comprende che il *buffet* è una condizione di volo di *off-design* del campo transonico che può intervenire in maniera più o meno pesante nella progettazione e nella certificazione dell'aeromobile.

Il *buffet* è causato dall'interazione onda d'urto-strato limite quando aumentano in modo improprio il numero di Mach e/o l'angolo d'attacco, e limita l'involuppo di volo del velivolo. È possibile definire una barriera di *buffet* come la curva che separa le regioni dove il flusso è attaccato o parzialmente separato e quelle in cui il flusso è completamente separato, Fig. 9.5 nel piano ($C_L - M$). Si osserva che in regime subsonico la barriera coincide con il valore del C_{Lmax} .

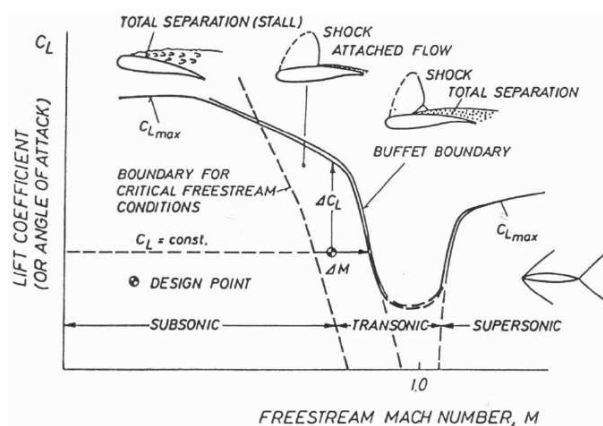


Figura 9.5: Limiti di comprimibilità e barriera di *buffet*

È chiaro quindi che è il volo in condizioni transoniche che presenta il rischio del *buffet*. In particolare, in campo transonico sono sempre da evitare, tassativamente, le condizioni di fuori progetto.

Per i velivoli supersonici il raggiungimento della condizione supersonica deve effettuarsi con modalità controllata, spostando l'onda d'urto normale verso poppa, finché non raggiunga il bordo di uscita del profilo: eventuali separazioni (deboli) scompaiono, e si raggiungono le condizioni di flusso supersonico senza *buffet*. Nel piano ($C_L - M$) occorre seguire un opportuno corridoio nel quale non si incontra il *buffet*.

Un velivolo che debba operare in tutta la gamma di volo transonica -un intercettore transonico, ad esempio- è di progettazione più complessa ed ha costi molto elevati rispetto ad un velivolo subsonico di pari peso.

¹Molto probabilmente l'entrata in condizioni di *buffet* con un velivolo certamente non dimensionato per quest'eventualità ha portato alla distruzione in volo dell'aereo pilotato da Geoffrey de Haviland Jr. nel suo tentativo di superare, per la prima volta nella storia del volo, la velocità del suono, [15].

Qualunque oggetto aerodinamico, così come stalla a bassa velocità, entra in condizioni di *buffet* se si opera in modo da accentuare gli effetti della comprimibilità: in tal senso si può ripetere, come per lo stallo, che il *buffet* è una proprietà del corpo stesso.

Il *buffet*, in realtà, non è tipico del campo aeronautico: anche in altri settori dell'industria (ad esempio, nel campo dell'aerodinamica del veicolo terrestre) si impiega lo stesso appellativo per fenomeni fluidodinamici instazionari che però avvengono alle basse velocità (il caratteristico, e fastidioso, rumore a basse frequenze in un'autovettura causato dall'apertura parziale di un finestrino, o le oscillazioni del flusso nella parte superiore di una vettura decappottabile): ma in regime transonico i carichi sono molto più severi di quelli che si possono avere in regime subsonico o supersonico.

Per maggiore chiarezza può essere utile descrivere il *buffet* in riferimento ad un profilo alare piuttosto che ad un aeromobile: ci si potrà e poi riportare all'ala ed, in definitiva, al velivolo. Una descrizione schematica abbastanza fedele può essere presentata allora nel modo che segue.

- Si presenta una situazione di interazione forte tra onda d'urto e strato limite su uno dei lati del profilo: per fissare le idee, sul dorso;
- il flusso separa all'improvviso creando una regione di bassa pressione nella regione del bordo d'uscita;
- a causa di questa depressione il flusso accelera dalla parte dove non è separato (sul ventre), *come se si fosse ridotto l'angolo di attacco*: la riduzione della curvatura *effettiva* del profilo, consistente con il concetto di flusso equivalente in presenza di una regione separata e già introdotto nello stallo in condizioni di bassa velocità, aiuta a comprendere questa riduzione dell'angolo di attacco effettivo;
- il flusso pertanto si modifica nella zona del bordo di attacco con uno spostamento del punto di ristagno verso il dorso, dove si è verificata la separazione a causa dell'interazione forte;
- di conseguenza gli scorrimenti in quella regione (il dorso) si riducono, l'onda d'urto si sposta verso il bordo d'attacco e si riduce di intensità;
- scompare pertanto l'interazione forte che ha causato la separazione ed il flusso riattacca;
- la scomparsa della regione separata determina un ritorno del campo di moto alla condizione originaria che ha determinato la separazione del flusso (l'onda d'urto si riporta a valle): il flusso separa nuovamente;
- tutte le modifiche del campo di moto qui descritte si riproducono periodicamente.

Nella Fig. 9.6 si presenta la previsione teorica di un insieme di cinque diverse situazioni durante un ciclo di *buffet*; si sono riportati in colonna i diagrammi di C_l , C_p , C_f .

Il fenomeno del *buffet* è difficilmente prevedibile per via teorica: si tratta di un flusso instazionario dipendente sia dal campo esterno che dallo sviluppo dello strato limite, e calcolare soluzioni con metodi computazionali e verificarne l'attendibilità risulta piuttosto difficoltoso. D'altra parte le prove in galleria, non semplici, sono fortemente condizionate dall'effetto scala, e riportarle al volo è alquanto problematico.

In genere quello che si fa è la stima, con tecniche numeriche, sperimentali od empiriche, delle condizioni di *onset* del *buffet*: nel piano ($C_l - M_\infty$) si individua una regione limite al di sotto della quale certamente non si è in *buffet* (frontiera di *buffet*); per la sua previsione il certificatore pone limiti abbastanza stringenti. Al di sopra della frontiera di *buffet* vi sono poi due regioni, quella di *buffet* sicuramente sviluppato e quella di *buffet* profondo. Comunque la normativa per l'aviazione commerciale prevede che per ogni numero di Mach di volo si operi a valori del coefficiente di portanza non superiori al 70% del valore indicato dalla frontiera di *buffet*.

Per la determinazione del *buffet onset* sono disponibili alcuni criteri.

Un metodo abbastanza accettato in fase di avvanprogetto -definito Metodo ALENIA, Fig. 9.7, fa riferimento semplicemente alla distribuzione sul profilo del numero di Mach, comunque ottenuta, ad esempio mediante un metodo Euleriano. È stato osservato, mediante correlazioni statistiche di

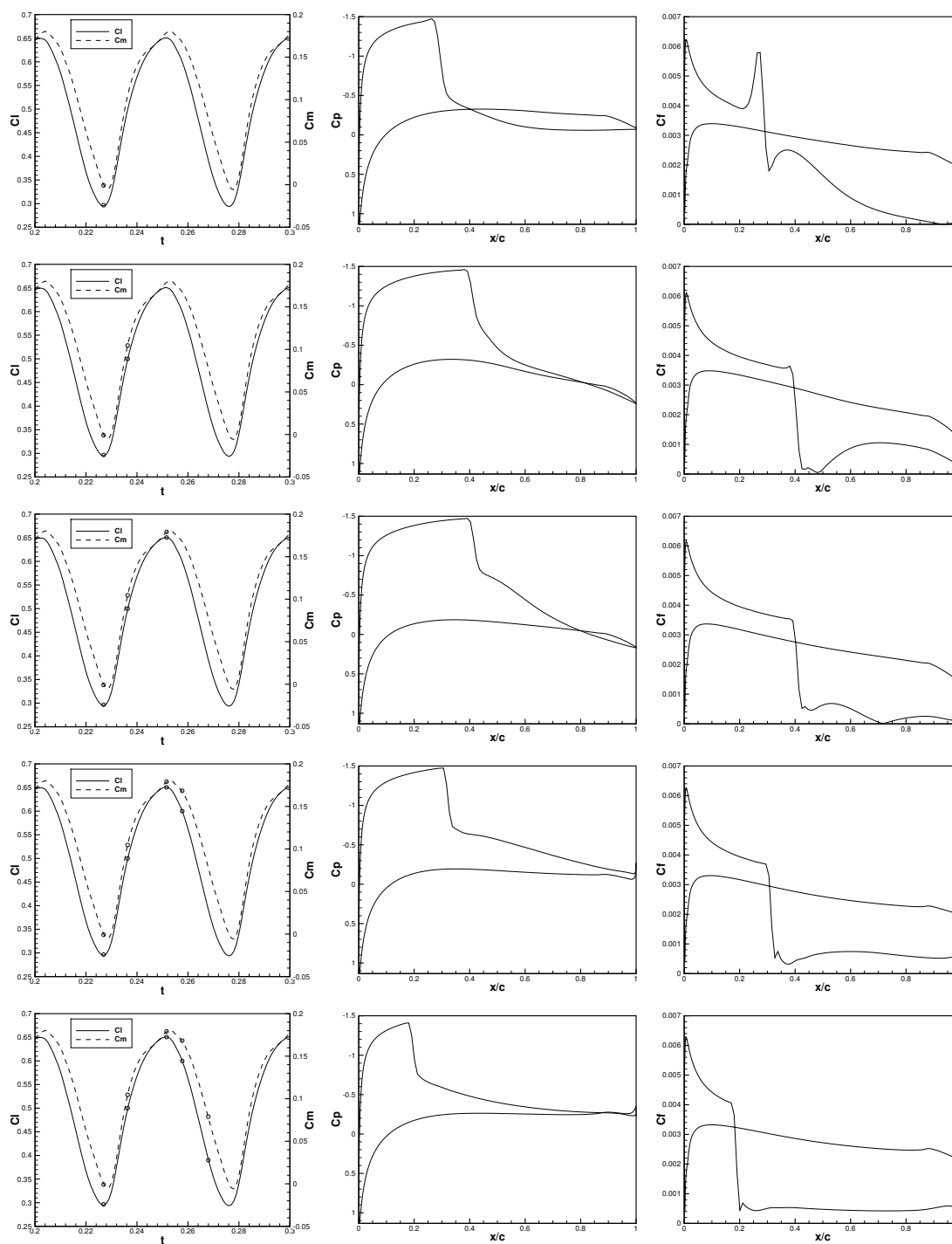


Figura 9.6: Previsione numerica -FLOWER, [91]- di coefficienti di portanza, di pressione e di attrito durante un ciclo di *buffet* - Profilo NACA 0012, $Re = 10^7$, $M_\infty = 0.75$, $\alpha = 5^\circ$

dati sperimentali, che un profilo raggiunge condizioni di *buffet onset* quando la distribuzione del numero di Mach immediatamente a monte dell'urto risulta tangente a una delle rette di equazioni

$$M_{limit} = 1.496245 - 0.322996x/c \pm 0.041077 \quad (9.1)$$

In condizioni in cui la distribuzione del numero di Mach è al di sotto della retta più bassa non

ci sarà *buffet*, per distribuzioni che oltrepassano la retta più alta il *buffet* sarà completamente sviluppato. Tecnicamente la condizione di *buffet onset* risulta determinata dalla tangenza con la retta “media”, l’incertezza è data dall’intervallo compreso tra la retta più bassa e quella più alta.

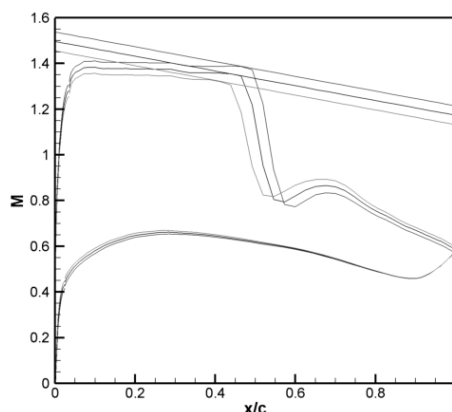


Figura 9.7: Determinazione della frontiera di *buffet*: criterio ALENIA - profilo *ADIF*, $M_\infty = .68$

Altro criterio è quello della divergenza di pressione al bordo di uscita, basato sul fatto che per valori del coefficiente di portanza in condizioni lontane da quelle di *buffet* il coefficiente di pressione al bordo d’uscita risulta essere abbastanza indipendente dalla portanza ma comincia a diminuire quando ci si avvicina alle condizioni *buffet onset*. Si assume che si ha *buffet onset* quando il coefficiente di pressione al bordo di uscita decresce con l’angolo di attacco con un rateo pari a $\Delta C_p = -0.04/^\circ$.

RIDUZIONE DELLA RESISTENZA

Anche se a questo punto può sembrare fuori luogo pensare di volare in condizioni di interazione onda d’urto - strato limite ben sviluppata, è bene fare presente che la ricerca aeronautica ha individuato nella riduzione della resistenza legata all’interazione un tema molto interessante da studiare per un eventuale miglioramento delle prestazioni degli aeroplani: si stima che la riduzione di un *Drag Count* dell’intero velivolo permette di aggiungere un passeggero -su tratte di migliaia di chilometri- grazie al relativo risparmio di combustibile.

Naturalmente quello di ridurre la resistenza per migliorare le qualità di volo è un argomento a cui è facile ricorrere in linea di principio: occorre però stare veramente attenti nel valutare la plausibilità della cosa. Di fatto quest’obiettivo è di difficile conseguimento, come insegna la Storia del Volo. Per progettare superfici aerodinamiche con resistenza aerodinamica ridotta rispetto agli standard occorrono capacità di progettazione, strumenti teorici e sperimentali estremamente sofisticati, conoscenza di tecnologie al momento non convenzionali.

Ora quel che si può sfruttare è la riduzione della resistenza d’onda che si realizza “sostituendo” in modo mirato l’urto normale con un sistema “n urti obliqui + un urto normale”: a parità di rapporto di compressione tra monte e valle la produzione di entropia, e quindi la resistenza d’onda, è sicuramente inferiore. La cosa non è semplicemente realizzabile, deve avvenire con un controllo stretto della qualità della ricompressione, deve essere affidabile, non deve dare luogo ad incrementi di altre forme di resistenza troppo grandi, e l’aggravio di peso e di complicazioni funzionali non deve rendere la cosa non conveniente.

In realtà la delicatezza delle situazioni fluidodinamiche prima descritte impone certamente l’impiego di tecniche di controllo del flusso per essere certi di utilizzare i benefici dell’interazione evitando le conseguenze disastrose di stallo d’urto e *buffet*. Pertanto nel seguito saranno presentate due tecniche di controllo in sviluppo, che hanno dato già significativi risultati teorici, sperimentali ed in prove di volo.

9.5 SWBLIC: il controllo degli effetti dell'urto

L'interazione onda d'urto-strato limite ha un ruolo fondamentale nello studio delle prestazioni di un aeroplano transonico, sia in condizioni di crociera che al di fuori di esse. Il controllo dell'interazione può portare a notevoli miglioramenti attraverso

- una riduzione della resistenza d'onda, derivante dalla sostituzione di una parte dell'urto normale con l'urto a λ ;
- l'eliminazione della separazione dovuta all'urto, legata alla capacità di modulare la ricompressione ai piedi dell'urto.

Il vantaggio che si può ottenere è un combinato tra questi che seguono:

- un incremento della velocità di crociera;
- una riduzione del consumo di combustibile (con tutto quel che ne deriva);
- lo spostamento dell'insorgere di fenomeni di *buffet* verso numeri di Mach di volo o coefficienti di portanza più elevati;
- l'eliminazione del pericolo dello stallo d'urto in certe condizioni.

È quindi evidente una possibilità di miglioramento delle prestazioni e dell'ampliamento del diagramma di manovra.

I vantaggi dell'adozione di un dispositivo di controllo dell'interazione emergono, ad esempio, nel caso di un profilo laminare utilizzato, in campo transonico, in condizioni di crociera. Tale profilo presenta, sul dorso, un gradiente favorevole di pressione che termina con un'onda d'urto. Il mantenimento di condizioni di flusso laminare, che determina una riduzione della resistenza d'attrito, è possibile fino alla regione dell'urto, da cui il tentativo di spostare questo sufficientemente a valle (oltre il 60% della corda). Questa posizione dell'urto può portare ad un incremento della sua intensità e della resistenza d'onda. Il controllo dell'interazione onda d'urto-strato limite consente di collocare l'urto nella posizione desiderata e nel contempo di minimizzare la sua intensità. Al di fuori delle condizioni di progetto il controllo permette di ostacolare la separazione del flusso dovuta all'urto, minimizzare l'incremento della resistenza ed allontanare, verso condizioni di volo più critiche, l'insorgere del *buffet*, sia nel caso di un'ala laminare che di un'ala turbolenta.

Le varie tecniche di controllo dell'interazione onda d'urto-strato limite mirano tutte ad incrementare l'energia cinetica delle zone a bassa velocità dello strato limite, al fine di evitare fenomeni di separazione dovuti alla presenza di bruschi gradienti avversi di pressione.

È possibile raggruppare le tecniche di controllo in due distinte categorie.

La prima comprende le tecniche che mirano a modificare le caratteristiche dello strato limite a monte, in modo da conferirgli una maggiore resistenza alla separazione. Questo risultato può essere ottenuto in diversi modi: raffreddando la parete, oppure scegliendo in modo opportuno la sua curvatura, o tramite aspirazione o soffiamento distribuiti o, ancora, mediante scambi turbolenti di quantità di moto a mezzo di generatori di vortici. Queste tecniche hanno una moderata efficacia, ma permettono di conservare il controllo anche nel caso in cui l'urto si sposti sul profilo.

La seconda categoria comprende le tecniche che agiscono localmente, in corrispondenza dell'urto o immediatamente a valle. Alcune di esse tendono ad eliminare la zona separata che si viene a formare ai piedi dell'urto con l'aspirazione o conferendo, mediante un'iniezione localizzata, quantità di moto allo strato limite. Queste tecniche danno dei buoni risultati, anche con piccole portate di fluido, ma sono caratterizzate dalla perdita del controllo nel caso in cui l'urto si sposti.

Esistono poi due diverse concezioni per controllare un flusso. La tecnica di controllo si dirà attiva quando con l'intervento di appositi attuatori si modifica l'architettura dell'aeromobile o il funzionamento di una sua parte. Il controllo passivo è la struttura del flusso che cambia automaticamente quando vengono raggiunte prefissate condizioni.

Una tecnologia a cavallo tra le due prevede la modifica automatica per il controllo: si parla, per i profili, di *smart airfoil technology*.

Saranno ora esaminate due tecniche di controllo della interazione: il controllo passivo e quello mediante modifica locale della geometria del profilo.

IL CONTROLLO PASSIVO DELL'INTERAZIONE ONDA D'URTO-STRATO LIMITE

Il controllo passivo si presenta come la combinazione di due tecniche di controllo, vale a dire una iniezione a monte dell'urto ed una aspirazione immediatamente a valle di esso. Una parte del dorso del profilo viene sostituita con una parete permeabile in comunicazione con una cavità posta all'interno dell'ala. La zona permeabile è collocata nella regione del piede dell'onda d'urto e dunque, a mezzo della cavità, si stabilisce una circolazione naturale di fluido tra valle e monte del dominio di interazione, a causa del salto di pressione attraverso l'urto. Il fenomeno è schematizzato come indicato in Fig. 9.8.

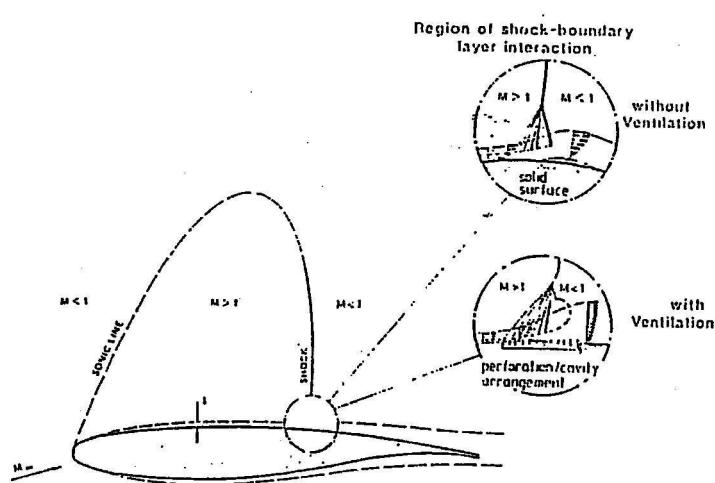


Figura 9.8: Controllo passivo della interazione onda d'urto-strato limite

L'iniezione di fluido a monte dell'urto ispessisce lo strato limite, con conseguente formazione di onde di compressione che sostituiscono l'urto normale che si avrebbe con una parete piena, realizzando una compressione più graduale. Si ha in tal modo una riduzione del salto di entropia e quindi della resistenza d'onda.

L'aspirazione a valle della regione di interazione tende a ridurre lo spessore dello strato limite ed a moderare l'amplificazione degli effetti dissipativi. La elevata rugosità equivalente della parete permeabile può però portare ad un incremento della resistenza d'attrito.

La presenza della cavità tende inoltre a stabilizzare la posizione dell'urto che, nel caso di parete piena, è sovente animato da un moto oscillatorio di grande ampiezza. Così quindi, anche se la diminuzione della resistenza globale dovuta all'adozione del controllo passivo può essere modesta, tale tecnica consente di allontanare la comparsa di fenomeni di *buffet* e di migliorare le prestazioni del profilo in condizioni di *off-design*. È da notare che, rispetto a tecniche di controllo quali la semplice iniezione o aspirazione di fluido, il controllo passivo presenta il vantaggio di non richiedere una fonte ausiliaria di energia.

L'effetto del controllo passivo sulle prestazioni di un profilo transonico è stato esaminato con riferimento al profilo VA-2, utilizzando il codice di interazione (Eulero/strato limite) *EULSL*, [92], per l'analisi di flussi viscosi bidimensionali. I valori dei numeri di Reynolds e Mach della corrente asintotica e del coefficiente di portanza sono $Re_\infty = 2.5E + 6$; $M_\infty = 0.74$; $C_l = 0.89$.

La piastra forata è collocata sul dorso del profilo, ha una lunghezza pari al 15% della corda ed ha inizio in corrispondenza del punto $x/c = 0.495$. Il coefficiente di porosità P , definito come

$$P = \frac{\sum_i A_i}{A_{tot}} \quad (9.2)$$

dove A_i indica l'area del foro i -esimo e A_{tot} quella totale della piastra, è $P = 0.128$. In Fig. 9.9 è riportato l'andamento del coefficiente di pressione C_p in presenza ed in assenza di controllo

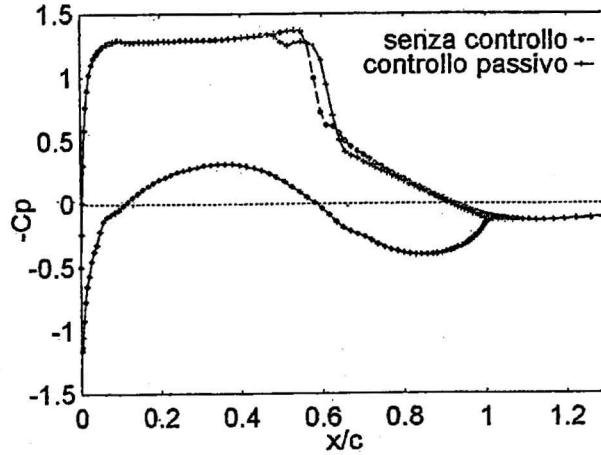


Figura 9.9: Distribuzione del coefficiente di pressione sul profilo VA-2

passivo, a parità di coefficiente di portanza C_l . La curva relativa al controllo passivo mostra come in corrispondenza dell'inizio della cavità si realizza una prima compressione della corrente, seguita, ad una certa distanza, dall'urto che risulta essere meno intenso rispetto al caso di parete solida. Il coefficiente, di resistenza totale, con l'adozione del controllo passivo, si riduce, passando dal valore $C_{dt} = 0.02942$ al valore $C_{dt} = 0.02808$.

Uno dei problemi che occorre affrontare nella determinazione del campo di moto intorno ad un profilo con pareti permeabili è la determinazione del flusso di massa di traspirazione alla parete, nota la pressione p_c regnante in cavità. Il trasferimento di massa si realizza attraverso una griglia forata, il che rende molto complessa la struttura del flusso e la sua modellazione. È stato misurato, [93], mediante anemometro a filo caldo, il flusso di massa attraverso i fori praticati su di una piastra metallica. È emerso che il flusso di massa di traspirazione, ad una certa stazione, dipende unicamente dalle condizioni locali del flusso esterno e non da quelle a monte.

Le prove sul profilo VA-2 sono state eseguite calcolando il flusso di massa di traspirazione con la "legge isentropica", proposta per la prima volta in [94]: è stata introdotta una relazione tra la velocità normale alla parete v_w ed il rapporto tra la pressione statica nella cavità p_c e quella di parete p_w . Alla base della modellazione vi è l'ipotesi che ogni foro della griglia abbia la forma di un ugello convergente e che il flusso in esso sia isentropico. Le condizioni generatrici sono assimilate a quelle di parete nel caso di aspirazione, a quelle all'interno della cavità nel caso di iniezione.

Considerati i valori del salto di pressione esistente attraverso i fori della griglia, è lecito supporre che il flusso attraverso gli ugelli sia ovunque subsonico.

Nel caso di aspirazione l'espressione della portata attraverso un singolo foro è

$$\dot{m} = \rho_w v_w A_w = \frac{p_c A_t}{\sqrt{T_w}} \sqrt{\left[\left(\frac{p_w}{p_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \left(\frac{p_w}{p_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \frac{2\gamma}{R(\gamma-1)}} \quad (9.3)$$

dove $A_t \simeq A_w$ è l'area di gola, $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ il rapporto dei calori specifici, $R = C_p - C_v$, la loro differenza; il pedice w indica la parete, quello c la cavità.

È possibile determinare l'espressione della velocità di aspirazione come

$$v_w = P \frac{p_c}{\rho_w \sqrt{T_w}} \sqrt{\left[\left(\frac{p_w}{p_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \left(\frac{p_w}{p_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \frac{2\gamma}{R(\gamma-1)}} \quad (9.4)$$

con $0.528 \leq \frac{p_c}{p_w} < 1$. In modo analogo si procede per ottenere l'espressione della velocità di

iniezione

$$v_w = P \frac{p_w}{\rho_w \sqrt{T_c}} \sqrt{\left[\left(\frac{p_c}{p_w} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \left(\frac{p_c}{p_w} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \frac{2\gamma}{R(\gamma-1)}} \quad (9.5)$$

con $0.528 \leq \frac{p_w}{p_c} < 1$.

Nel caso di controllo passivo dell'interazione, il flusso di massa netto attraverso la superficie porosa di lunghezza S sarà nullo:

$$Q = \int_S \rho_w v_w ds = 0 \quad (9.6)$$

Il valore della pressione p_c , all'interno della cavità viene determinato risolvendo l'equazione (9.6) con una procedura iterativa, come suggerito in [95].

L'espressione della portata attraverso un singolo foro (9.3) è valida nell'ipotesi di viscosità nulla del fluido. Per tener conto delle perdite viscosse che si verificano nel foro, si introduce il rapporto di flusso di massa η_v definito dalla relazione

$$\eta_v = \frac{\dot{m}'}{\dot{m}} \quad (9.7)$$

dove la portata \dot{m}' è relativa al caso viscoso.

Il rendimento η_v , per una assegnata piastra forata, viene determinato sperimentalmente in funzione della differenza tra la pressione alla parete e quella regnante in cavità, [95]; valori tipici del rapporto di flusso di massa sono compresi nell'intervallo [0.7, 0.95].

CONTROLLO DELLA STRUTTURA DEGLI URTI MEDIANTE MODIFICA LOCALE DELLA GEOMETRIA

Gli studi effettuati sul controllo passivo in campo transonico hanno evidenziato che i benefici di questo sistema, in termini di ridotta intensità dell'urto e della resistenza d'onda, sono in parte annullati dall'incremento della resistenza viscosa. Si ritiene che ciò accada a causa del disturbo dello strato limite da parte del flusso d'aria attraverso la superficie forata. In questo paragrafo descriveremo una tecnica di controllo dell'intensità dell'onda d'urto in campo transonico che può portare a riduzioni della resistenza totale più marcate (-20% circa) rispetto a quelle ottenibili con il controllo passivo. Tale tecnica consiste nel deflettere opportunamente una parte della superficie del profilo secondo lo schema mostrato in Fig. 9.10. La deflessione interessa il 20% circa della corda ed è localizzata in corrispondenza del piede dell'urto. L'utilizzazione di una tecnologia in grado di prevedere queste ed altre tecniche di riduzione della resistenza è stata già sviluppata a livello prototipale.

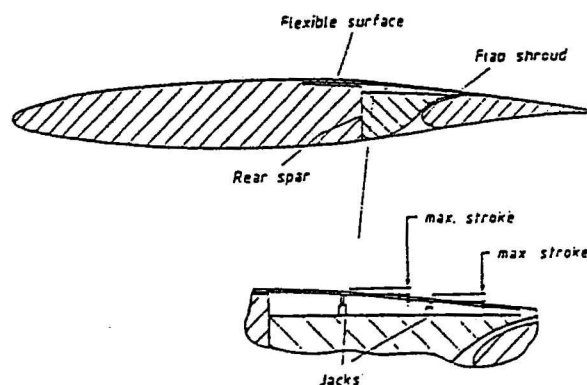


Figura 9.10: Una possibile installazione di una superficie flessibile

Dal punto di vista operativo la deflessione deve variare in volo, in dipendenza dell'assetto e della velocità (*Smart Airfoil Technology*).

La presenza del rigonfiamento (*bump*) della superficie del profilo ha l'effetto di trasformare la struttura dell'urto normale. Fino ad una altezza massima della deflessione dell'ordine dello 0.6% della corda si forma un'onda d'urto a λ il cui tratto obliquo parte in corrispondenza del punto in cui inizia la deflessione. La configurazione a λ ha quindi origine per cause geometriche e non viscosi. L'interazione dell'urto obliquo con quello normale ne provoca l'indebolimento, con una diminuzione della resistenza d'onda che raggiunge un minimo per altezze massime della deflessione comprese tra lo 0.2 e lo 0.4% della corda. Per altezze della deflessione più marcate si hanno altre strutture del sistema di urti inaccettabili per gli alti valori della resistenza d'onda connessi. Nella Fig. 9.11, ottenuta dai dati forniti dal codice *EULSL* trascurando gli effetti della viscosità, sono mostrati i campi di moto intorno ad un profilo NACA 0012 a $M_\infty = 0.825$ ed a $C_l = 0$ ottenuti deflettendo, come detto, la superficie con un rigonfiamento ad arco di ellisse.

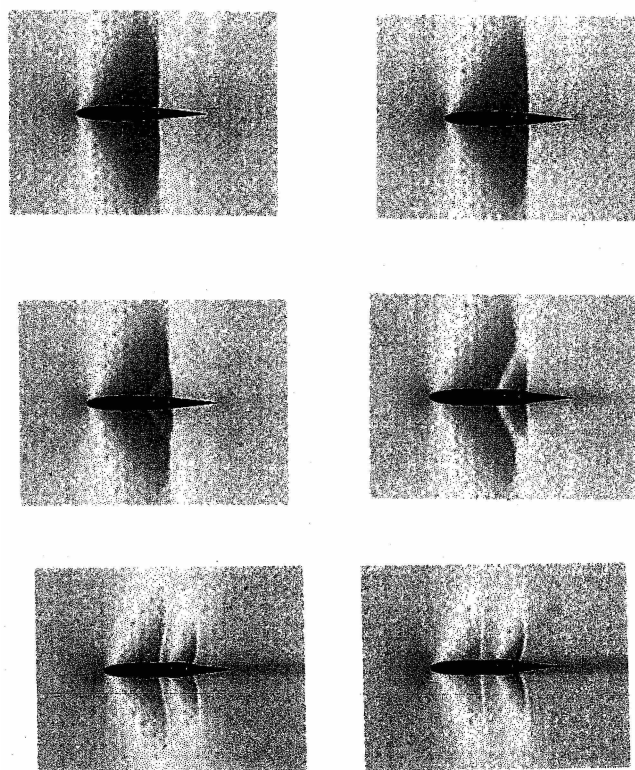


Figura 9.11: Campo di moto intorno ad un profilo NACA 0012 modificato con un rigonfiamento ad arco di ellisse per valori crescenti dell'altezza massima ($M_\infty = 0.825$; $C_l = 0$).

In Fig. 9.12 è mostrato l'andamento del coefficiente di resistenza d'onda in funzione dell'altezza massima della deflessione; tale altezza massima si trova in corrispondenza del piede dell'urto normale del profilo non modificato.

È bene comunque sottolineare che la forma, le dimensioni e la posizione ottimale della deflessione vanno studiate caso per caso; mediante il solutore *EULSL*, trascurando gli effetti della viscosità, per esempio si è visto che riduzioni più marcate della resistenza d'onda si hanno per deflessioni di forma parzialmente sinusoidali la cui altezza massima (0.4% della corda) è situata in posizione leggermente arretrata (5%) rispetto al piede dell'urto normale che si verifica sul profilo non modificate.

È stato visto, [96], che gli effetti viscosi sul coefficiente di resistenza totale non sono significativi in quanto per piccole altezze della deflessione, che comportano il minimo della resistenza d'onda, la resistenza d'attrito e di scia non aumenta apprezzabilmente.

In Fig. 9.13 è mostrato l'andamento del coefficiente di pressione sul corpo relativo ad un profilo supercritico, a $M_\infty = 0.734$ e $C_l \simeq 1$. Si vede come nella zona dell'urto l'effetto del rigonfiamento è quello di provocare una leggera compressione a monte dell'urto (causata dal tratto obliquo del

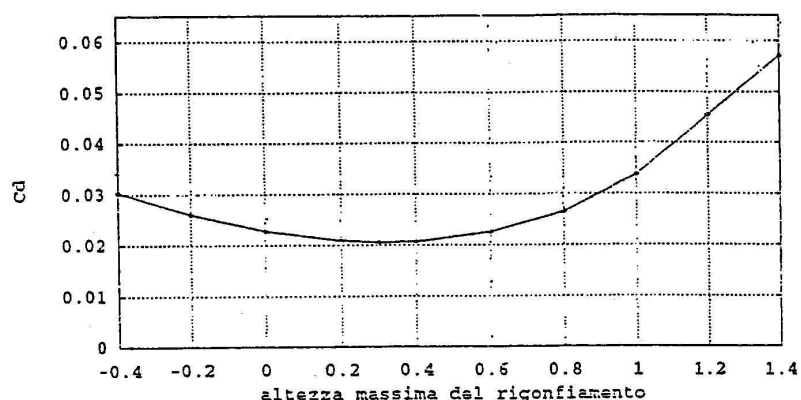


Figura 9.12: Andamento del coefficiente di resistenza d'onda in funzione dell'altezza massima del rigonfiamento

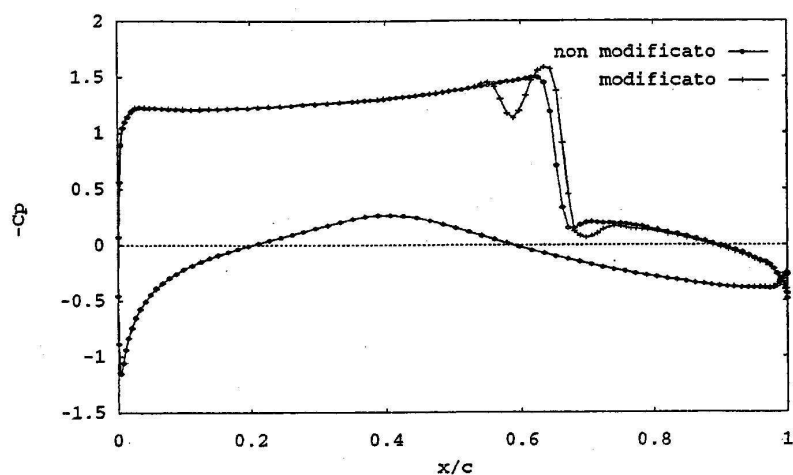


Figura 9.13: Andamento del coefficiente di pressione sul profilo *RAE 2822* ($M_\infty = 0.734$; $C_l \simeq 1$)

λ) seguita da una lieve espansione che precede l'urto normale. Si vede come il salto di pressione sia più intenso sul profilo non modificato.

In ogni caso occorre considerare l'andamento del coefficiente di pressione non solo sul corpo, ma in tutta la regione dell'urto, anche lontano dal profilo: questo per valutare complessivamente l'indebolimento dell'urto e la relativa riduzione di resistenza. Questa considerazione naturalmente vale per tutti i dispositivi che mirano a ridurre l'intensità dell'onda d'urto.

9.6 Conclusioni

Lo strato limite può essere affrontato sia risolvendo direttamente le equazioni di Prandtl (a derivate parziali), oppure, in qualche modo, con minore difficoltà, minor dettaglio nella soluzione, ma con risultati soddisfacenti per l'Aerodinamica Applicata, l'equazione integrale di Von Karman.

Si vuole evidenziare il ruolo fondamentale che giocano transizione e separazione sulle caratteristiche aerodinamiche delle superfici portanti e non. Avere transizione molto a valle certamente assicura sforzi viscosi alla parete minori, e quindi minore resistenza di attrito; il rischio è nella possibilità di una separazione laminare. Per contro una transizione anticipata garantisce un comportamento ottimale nei confronti della separazione, che può essere controllata; la resistenza di attrito certamente è più elevata.

In caso di flusso tridimensionale la transizione è quasi sempre molto anticipata, ma non sempre si riesce ad eliminare la possibilità di separazioni del flusso legate proprio alla tridimensionalità.

La previsione ed il controllo della transizione in tutte le condizioni di volo sono comunque requisiti assoluti della progettazione aerodinamica impostati in fase progettuale, il cui soddisfacimento va verificato durante le prove di volo: eventuali discrepanze fra previsione progettuale e comportamento effettivo dell'aeromobile possono generare cattivi funzionamenti dell'aeromobile, e vanno eliminate con interventi ad hoc che però certamente degradano qualche prestazione.

Capitolo 10

Metodi di strato limite e di interazione Eulero/Strato Limite

10.1 Introduzione

Anche se la conoscenza del campo non viscoso consente tutta una serie di applicazioni a livello progettuale, il calcolo delle caratteristiche aerodinamiche non può prescindere dalla corretta valutazione degli effetti viscosi. La soluzione delle NS (equazioni complete del moto) può essere in tal senso interessante ed utile, ma

- è abbastanza onerosa, in termini di esperienza progettuale necessaria;
- può essere “ridondante”, in quanto le tecniche di calcolo basate sull'accoppiamento tra campo esterno e strato limite -sicuramente meno impegnative- possono essere accurate nel campo di funzionamento lineare del profilo e fino al pre-stallo, oltre a dare, al progettista esperto, indicazioni anche per lo stallo e per il post-stallo di accuratezza confrontabile alle soluzioni NS;
- anche tecniche semiempiriche, basate sulle grandi banche di dati sperimentali e teorici (ESDU, Data Sheet), in questa come in tutte le altre discipline della tecnica, possono dare inoltre un importante contributo nella fase di progetto preliminare ed avanzato.

Si introdurrà allora in questo capitolo il classico metodo di calcolo aerodinamico di accoppiamento tra campo esterno e strato limite: avendo già trattato i metodi di calcolo non viscoso e la fenomenologia dello strato limite occorre studiare i solutori di strato limite.

Nel paragrafo (8.2.2) si è visto che le equazioni dello strato limite su una superficie portante vanno risolte separatamente su dorso e ventre, e possono essere risolte in modo diretto oppure in modo inverso. Nei metodi di soluzione diretta si assume nota la distribuzione di velocità U_e (e quindi la quantità dU_e/dx), e si vogliono calcolare le altre grandezze di strato limite; in un metodo inverso invece si assegna la distribuzione di uno dei parametri integrali di strato limite, le incognite essendo tutte le altre grandezze di strato limite e la distribuzione di velocità.

Per un profilo, Fig. 10.1, l'inizio del calcolo è il punto di ristagno anteriore (oltre al quale si sono indicati gli altri punti significativi lungo il profilo, mentre in seguito si discuterà il tipo di soluzione, diretto o inverso, tratto per tratto).

Le grandezze che intervengono nella soluzione sono, per ogni punto della superficie, la velocità esterna (assegnata o incognita), e, per lo strato limite, le quantità globali (gli spessori di spostamento δ^* , quantità di moto θ ed energia θ^*), il fattore di forma $H = \delta^*/\theta$, il coefficiente di attrito C_f e quello di scambio termico alla parete, la velocità (normale) indotta sul bordo esterno dello strato limite- sia l'andamento delle grandezze termofluidodinamiche attraverso lo strato limite (distribuzioni di velocità, temperatura, sforzo di attrito, e così via). Comunque le tecniche di strato limite cui si farà riferimento saranno quelle integrali in campo bidimensionale: in tal modo sarà possibile sviluppare esaurientemente a livello didattico gli aspetti più interessanti del problema delle correzioni viscosi. Si fa presente peraltro che il ricorso alla tecnica alle differenze finite (mol-

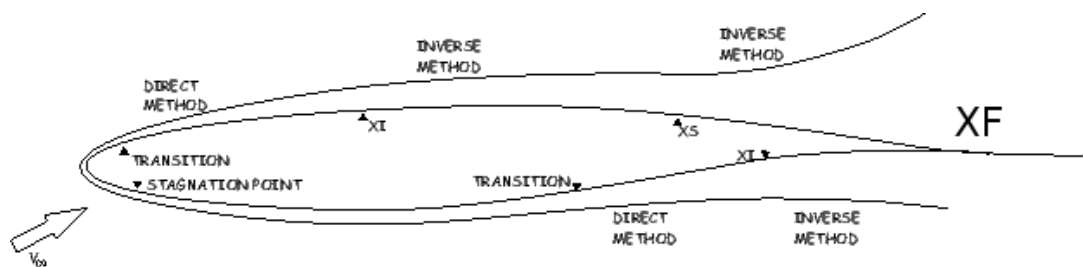


Figura 10.1: Struttura del calcolo dello strato limite su profili alari in alta portanza

to più onerosa in termini di tempo di calcolo, e quindi di costo), è, tranne che per applicazioni particolari, del tutto equivalente per la progettazione aerodinamica di superfici portanti.

Base dei metodi integrali di strato limite è l'equazione di Von Karman (8.11) che per moti 2-D incomprimibili (laminari, turbolenti e transizionali), si scrive nella forma

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{2}C_f - (H + 2)\frac{\theta}{U_e} \frac{dU_e}{dx} \quad (10.1)$$

La variabile indipendente x è un'ascissa curvilinea che corre lungo una superficie, a partire da un'origine prefissata che potrebbe essere, per esempio, un punto di ristagno o il bordo di attacco di una lastra piana¹. All'equazione di Von Karman occorre aggiungere ulteriori equazioni per la chiusura del problema; è la scelta del numero e del tipo delle relazioni ausiliarie che caratterizza il metodo di soluzione.

Si introdurranno nel seguito, a livello applicativo, metodi di calcolo per

- strato limite laminare;
- calcolo della regione di transizione;
- strato limite turbolento attaccato;
- strato limite turbolento in modo inverso;

Si illustrerà poi il metodo di calcolo di flussi viscosi sia per sovrapposizione diretta (limitatamente alle basse incidenze) sia con tecnica iterativa.

10.2 Il metodo di Thwaites per lo strato limite laminare

Si ponga preliminarmente

$$l = \frac{\theta}{U_e} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_w \quad e \quad \lambda = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{d}{dx}(U_e) \quad (10.2)$$

Le grandezze adimensionali l e λ sono dette rispettivamente parametro di forma dello sforzo tangenziale e parametro di forma del profilo di velocità. Il significato fisico di λ è deducibile se si osserva che il θ^2/ν è il tempo di propagazione degli sforzi tangenziali in una regione di spessore θ , mentre dU_e/dx è l'inverso del tempo di variazione della velocità per il flusso all'esterno dello strato limite. Questi due effetti sono simultanei: negli strati limiti con gradiente di pressione la velocità varia e la diffusione viscosa determina la forma del profilo di velocità conseguente. Così, per bassi valori di λ , il tempo di diffusione è piccolo rispetto al tempo di variazione ed è da prevedere che il profilo di velocità sia simile a quello che si realizza in assenza di gradiente di pressione.

È facile mostrare che

$$C_f = \frac{2l}{Re_\theta}, \quad \text{con} \quad Re_\theta = \frac{U_e \theta}{\nu}$$

¹In certi metodi di interazione si risolve lo strato limite anche a valle di un profilo, lungo le linee di scia.

e che quindi l'equazione di Von Karman può essere scritta come

$$\frac{U_e}{\nu} \frac{d}{dx}(\theta^2) = 2[l - (H + 2)\lambda] \quad (10.3)$$

La distribuzione di velocità $U_e(x)$ si intende assegnata; le grandezze θ , l , H , λ , sono incognite, ma λ è una combinazione di U_e e θ , e quindi le incognite effettive sono tre.

Il metodo impiega correlazioni dedotte da una grande mole di dati derivanti da soluzioni simili e dati sperimentali, tutti relativi sia a flussi su lastra piana che a flussi con gradiente di pressione. Le correlazioni per $l(\lambda)$ e $H(\lambda)$ sono riportate in Fig. 10.2, e ricostruite analiticamente in (10.4):

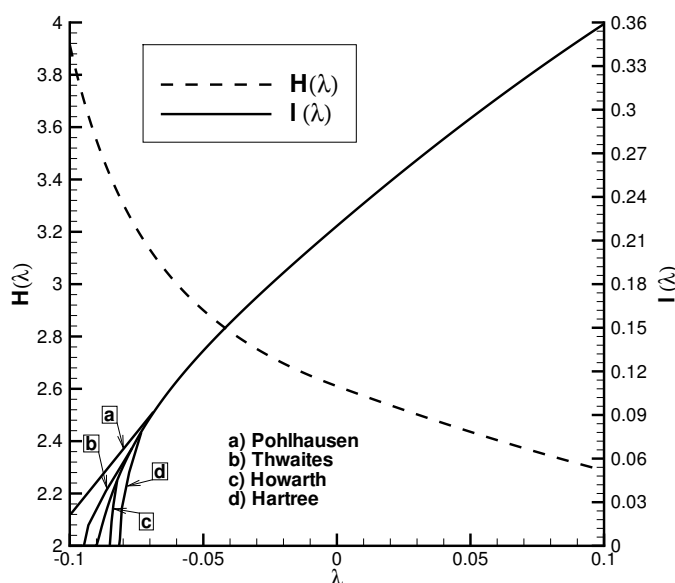


Figura 10.2: Curve di correlazione per $H(\lambda)$ ed $l(\lambda)$

$$\begin{cases} l(\lambda) = .22 + 1.57\lambda - 1.8\lambda^2 & \text{per } 0 \leq \lambda \leq .1 \\ l(\lambda) = .22 + 1.40\lambda - .018\lambda/(\lambda + .107) & \text{per } -.1 \leq \lambda \leq 0 \end{cases} \quad (10.4)$$

$$\begin{cases} H(\lambda) = 2.61 - 3.75\lambda + 5.24\lambda^2 & \text{per } 0 \leq \lambda \leq .1 \\ H(\lambda) = 2.088 + 0.0731/(\lambda + .14) & \text{per } -.1 \leq \lambda \leq 0 \end{cases}$$

Per il secondo membro della (10.3) Thwaites ha potuto assumere una forma funzionale che porta ad una soluzione in forma chiusa (essendo peraltro in ottimo accordo con la ricostruzione che ne deriva dalle (10.4), Fig. 10.3):

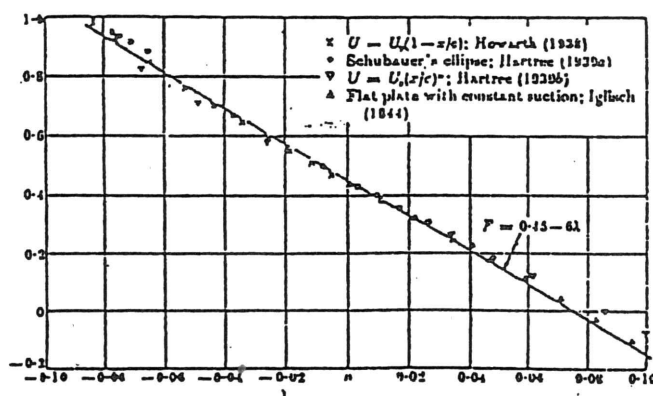
$$F(\lambda) = .45 - 6\lambda = .45 - 6\frac{\theta^2}{\nu} \frac{d}{dx}(U_e) \quad (10.5)$$

La (10.3) diventa

$$\frac{U_e}{\nu} \frac{d}{dx}(\theta^2) + 6\frac{\theta^2}{\nu} \frac{d}{dx}(U_e) = .45 \quad (10.6)$$

e moltiplicando ambo i membri per U_e^5 si ottiene infine

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\theta^2 U_e^6}{\nu} \right) = .45 U_e^5 \quad (10.7)$$

Figura 10.3: Correlazione per $F(\lambda)$

La (10.7) può essere integrata per separazione delle variabili dal punto in cui si intende iniziare il calcolo dello strato limite laminare e fino all'ascissa attuale x : se si inizia il calcolo da $x = 0$, e posto che sia $\theta^2 U_e^6 = 0$ per $x = 0$, si ha

$$\frac{\theta^2 U_e^6}{\nu} = .45 \int_0^x U_e^5 d\xi \quad (10.8)$$

In riferimento ad una lunghezza L ed alla velocità U_∞ , in forma adimensionale la (10.8) diventa

$$\left(\frac{\theta}{L}\right)^2 = .45 \left(\frac{U_\infty}{U_e}\right)^6 \frac{1}{Re_\infty} \int_0^{x/L} \left(\frac{U_e}{U_\infty}\right)^5 d\left(\frac{\xi}{L}\right) \quad (10.9)$$

Una volta determinato, ad ogni ascissa, il valore di θ , è semplice calcolare il valore di λ , quindi le grandezze $l(\lambda)$ e $H(\lambda)$, e dunque i valori del coefficiente di attrito e dello spessore di spostamento.

L'utilità (ed una verifica dell'accuratezza) del metodo si ha, con semplici considerazioni analitiche, particolarizzando le due forme della soluzione di Thwaites (10.8) e (10.9) a due casi, fondamentali, per i quali è nota la soluzione in forma algebrica:

- si ritrovano i risultati del paragrafo (8.2.3) relativi alla lastra piana (U_e costante con x);
- in una zona di ristagno ($U_e = Kx$, $K = d(U_e)/dx$ per $x = 0$), e fintantoche la velocità aumenta linearmente, lo strato limite ha spessore costante².

L'accurato utilizzo di correlazioni su flussi di base può spiegare il successo di questo metodo, che riesce ad attingere -sulle grandezze integrali di strato limite- gli stessi livelli di accuratezza dei metodi alle differenze finite, cadendo in difetto solo in condizioni di separazione incipiente, quando cioè la linearità della (10.5) non può approssimare in modo del tutto corretto i dati sperimentali.

È semplice verificare che non è possibile risolvere in una modalità inversa il metodo di di Thwaites che si è scelto come riferimento per lo strato limite laminare per la sua semplicità e chiarezza: esistono comunque metodi che possono essere applicati in modo inverso.

10.3 Metodi per la previsione della transizione

Dal punto di vista fisico il passaggio da flusso laminare a turbolento, su superfici levigate e in condizioni di bassa turbolenza della corrente incidente, è, in realtà, il risultato di un processo di transizione che va dalla recettività fino al regime turbolento attraverso l'amplificazione prima lineare e poi non lineare di piccoli disturbi sovrapposti al moto base dello strato limite.

La teoria lineare della stabilità consente solo di modellare il secondo passo del processo (l'amplificazione lineare delle onde) mentre il punto di transizione è determinato mediante correlazioni

²questa soluzione è importante come condizione iniziale per il calcolo dello strato limite su un profilo

con dati sperimentali. Per poter comprendere i metodi usati per la previsione della transizione è necessario allora introdurre alcuni concetti di teoria lineare della stabilità (da approfondire eventualmente, in altre specifiche discipline).

Il problema generale della stabilità fluidodinamica consiste nel seguire l'evoluzione di un disturbo presente nel moto base e che si può amplificare sia nello spazio che nel tempo. ma si può più convenientemente procedere seguendo due differenti teorie, quella temporale e quella spaziale. Con la prima si segue l'evoluzione del disturbo nel tempo, e ci si domanda se un disturbo applicato in un determinato istante si amplifica o meno. Nell'approccio spaziale si segue l'evoluzione del disturbo nello spazio, e ci si chiede se un disturbo applicato costantemente ad una certa ascissa viene amplificato oppure smorzato più a valle.

L'approccio classico nella trattazione del problema della stabilità dei flussi laminari consiste nel derivare le equazioni del disturbo dalle equazioni di Navier-Stokes nelle ipotesi di piccole perturbazioni e di flusso quasi parallelo. La velocità, la pressione e la temperatura sono quindi date dalla somma di una componente media e di un piccolo disturbo, funzione dello spazio e del tempo:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_i &= U_i(x, y, z, t) + u'_i(x, y, z, t) \\ \tilde{p}_i &= P_i(x, y, z, t) + p'_i(x, y, z, t) \\ \tilde{\tau}_i &= T_i(x, y, z, t) + \tau'_i(x, y, z, t)\end{aligned}\quad (10.10)$$

Il sistema di riferimento è definito in Fig. 10.4: l'asse x è parallelo alla direzione della linea di corrente esterna, l'asse z ha direzione perpendicolare ad x e giace sulla superficie alare e l'asse y è diretto normalmente alla superficie alare. U_i rappresenta la generica componente della velocità media con $U_1 = U$ diretta lungo x , $U_2 = V$ diretta lungo y , $U_3 = W$ diretta lungo z e u'_i la generica componente della velocità perturbata.

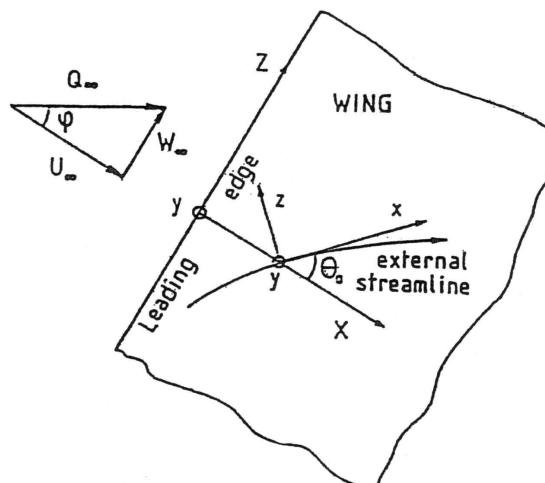


Figura 10.4: Flusso su ala a freccia, notazioni e sistemi di riferimento

Le grandezze caratteristiche del fluido, esclusa la pressione, si assumono indipendenti dalla direzione principale del moto x e dipendono solo dalla componente normale al corpo:

$$U = U(y); \quad W = W(y); \quad T = T(y); \quad V = 0 \quad (10.11)$$

Questa ipotesi di flusso quasi parallelo, anche se è verificata solo in particolari condizioni, ci permette di dire che la stabilità ad una particolare stazione (x, z) è determinata dalle condizioni locali a quella stazione ed è, quindi, indipendente da tutte le altre.

Le equazioni del disturbo ammettono allora soluzioni del tipo onde piane

$$\begin{aligned} u'_i &= u_i(y)e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} \\ p' &= p(y)e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} \\ \tau' &= \tau(y)e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} \end{aligned} \quad (10.12)$$

dette anche modi normali. α e β sono i numeri d'onda, ω è la frequenza. Nel caso generale, α, ω, β sono numeri complessi.

Per flussi bidimensionali, incomprimibili, con $\beta = 0$, le equazioni, ottenute sostituendo le (10.12) nelle equazioni di Navier-Stokes, possono essere combinate in modo da ottenere una singola equazione per la componente verticale del disturbo v (equazione di Orr-Sommerfeld)

$$v^{IV} - 2\alpha^2 v'' + \alpha^4 v - iR_l[(\alpha U - \omega)(v'' - \alpha^2 v) - \alpha U''v] = 0 \quad (10.13)$$

con le condizioni

$$\begin{aligned} v(0) &= 0, & v'(0) &= 0 \\ v(y) &= 0, & v'(y) &\rightarrow 0 \quad \text{per } y \rightarrow \infty \end{aligned}$$

(il disturbo si annulla sul bordo esterno dello strato limite e sulla parete).

L'equazione (10.13) e le condizioni al contorno sono omogenee e, quindi si ha un problema agli autovalori: assegnato il flusso base, soluzioni non banali esistono solo per particolari combinazioni dei parametri α, ω e del numero di Reynolds locale R_l . Il problema è sinteticamente espresso dalla cosiddetta relazione di dispersione

$$F(\alpha, \omega, R_l) = 0 \quad (10.14)$$

costituita da due equazioni reali e da cinque incognite reali ($\alpha_r, \alpha_i, \omega_r, \omega_i, R_l$).

Nell'ambito della teoria spaziale ω è assunto reale, α è complesso ($\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$), nella relazione (10.14) vi sono quattro parametri reali e la si può risolvere assegnando la frequenza ω_r ed il numero di Reynolds locale R_l .

L'amplificazione del disturbo dipende dal segno di α_i in quanto si ha

$$v' = v(y)e^{-\alpha_i x} e^{i(\alpha_r x - \omega t)} \quad (10.15)$$

e si possono distinguere i seguenti tre casi:

- 1) $\alpha_i > 0$ onda smorzata - flusso stabile
- 2) $\alpha_i < 0$ onda amplificata - flusso instabile
- 3) $\alpha_i = 0$ onda neutrale - flusso in equilibrio indifferente

Si definisce curva neutra il luogo dei punti sul piano x, ω_r , o equivalentemente sul piano R_l, ω_r , in cui è nulla l'amplificazione locale del disturbo α_i . La curva mostra l'intervallo delle frequenze instabili ad ogni stazione x , Fig. 10.5. Si consideri un'onda che si propaghi con una frequenza fissata ω_1 : la Fig. 10.5 mostra che quest'onda è smorzata fino ad x_o , poi è amplificata fino ad x_1 e di nuovo smorzata più a valle.

METODO E^N

Ad ogni stazione $x > x_o$, l'ampiezza A dell'onda può essere messa in relazione con l'ampiezza A_o nel punto neutro x_o tramite l'integrazione

$$A/A_o = \exp \int_{x_o}^x -\alpha_i dx \quad \text{oppure} \quad \ln A/A_o = \int_{x_o}^x -\alpha_i dx \quad (10.16)$$

A_o è detta "ampiezza iniziale del disturbo". Il suo valore è collegato ai disturbi dell'ambiente attraverso meccanismi di recettività. La funzione (10.16) è mostrata nella Fig. 10.6, per varie

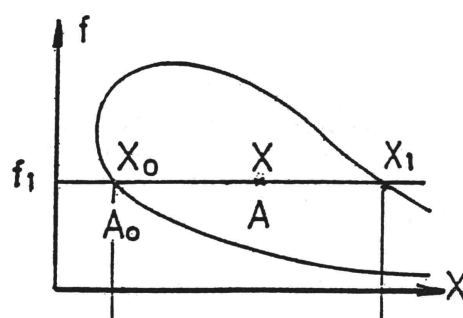


Figura 10.5: Curva neutra di stabilità

frequenze $\omega_1, \omega_2, \omega_3$: la linea tratteggiata rappresenta l'involuppo di queste curve ed il valore che rappresenta è chiamato fattore di amplificazione n :

$$n = \max_{\omega} [\ln A/A_0] \quad (10.17)$$

Il punto di transizione è ancora sconosciuto: per poterlo individuare è necessaria un'ulteriore assunzione che fu suggerita da Smith e Gamberoni e, indipendentemente, da Van Ingen nel 1956. L'osservazione di molti dati sperimentali indicava che nel punto di transizione n era all'incirca costante, e compreso tra 7 e 9: si assume dunque il passaggio da moto laminare a turbolento quando l'ampiezza dell'onda più amplificata diventa da $e^7 (= 1097)$ a $e^9 (= 8103)$ volte l'ampiezza iniziale. In molti casi il calcolo del fattore di amplificazione n risulta piuttosto difficile, specialmente per flussi comprimibili e/o tridimensionali. Una seconda difficoltà è la scelta del valore di n all'inizio della transizione in quanto la regola (n compreso tra 7 e 9) non è universale; ad esempio n è uguale a 15 per le bolle, [65].

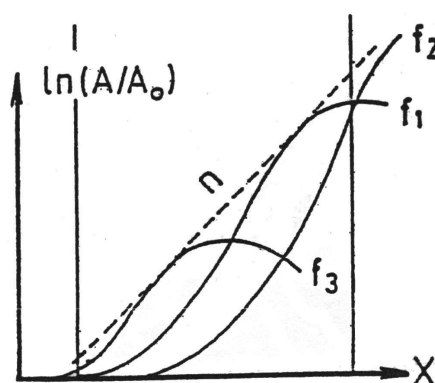


Figura 10.6: Fattore di amplificazione n

METODO DI SCHLICHTING-ULRICH

Il calcolo del punto di instabilità è effettuato tramite la curva neutra di stabilità, ottenuta da Schlichting-Ulrich, applicando la teoria di Tollmien, con diversi valori dei gradienti di pressione. Questa curva fornisce il numero di Reynolds critico minimo, espresso in termini dello spessore di quantità di moto, in funzione del parametro di forma $\lambda = \theta^2/\nu(dU_e/dx)$ del profilo di velocità. La regione al di sotto della curva rappresenta condizioni di flusso stabile; si trova il punto di instabilità quando il numero di R_θ locale coincide (o è di poco superiore) con il valore della curva di Fig. 10.7

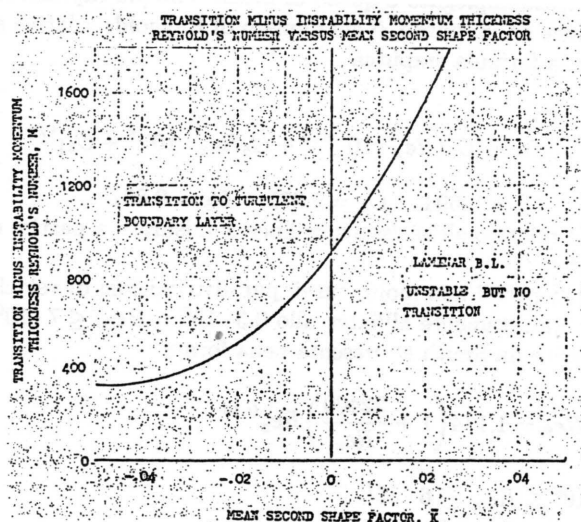


Figura 10.7: Curva neutra di Schlichting - Ulrich

La distanza tra il punto di instabilità ed il punto di transizione viene determinata calcolando la differenza

$$\left(\frac{\theta U_e}{\nu}\right)_{trans.} - \left(\frac{\theta U_e}{\nu}\right)_{inst.} \quad (10.18)$$

dove $(\theta U_e/\nu)_{trans.}$ è il numero di Reynolds per lo spessore di quantità di moto nel punto di transizione da determinare, $(\theta U_e/\nu)_{inst.}$ è il numero di Reynolds corrispondente al punto di instabilità già ottenuto, ed s/c è la distanza corrente lungo la superficie del profilo.

Impiegando la curva di correlazione di Granville, Fig. 10.8, per valori della (10.18) al di sotto della curva si hanno condizioni di strato limite laminare instabile; la transizione si determina quando la differenza (10.18) calcolata, coincide (o è di poco superiore) al valore della curva di Granville.

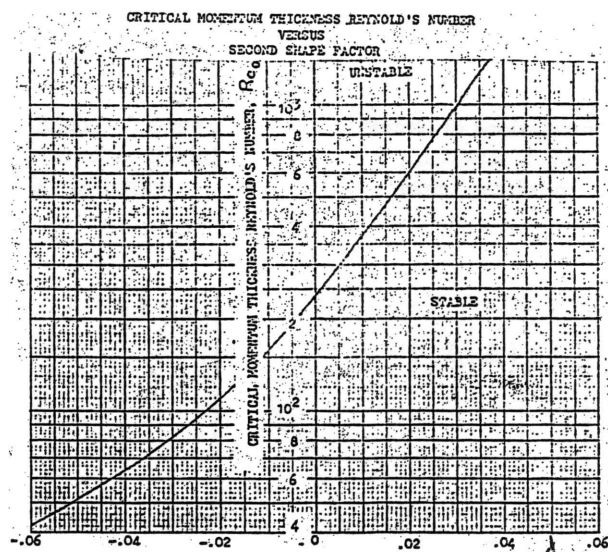


Figura 10.8: Curva di correlazione di Granville

METODO DI MICHEL-SMITH

Un procedimento empirico largamente impiegato è quello di Michel che più rapidamente suppone che la regione di transizione si riduce ad un punto, il cui numero di Reynolds relativo allo spessore di quantità di moto Re_θ soddisfa la formula empirica

$$Re_\theta \cdot 10^{-3} = C_1 Re_x \cdot 10^{-6} + C_2 + [C_3(Re_x \cdot 10^{-6})^2 + C_4 Re_x \cdot 10^{-6} + C_5]^{1/2} \quad (10.19)$$

con $C_1 = -0.710$; $C_2 = -0.687$; $C_3 = 0.694$; $C_4 = 2.871$; $C_5 = 0.831$

Nella (10.19) $Re_x = (U_e x)/\nu$ è relativo all'ascissa curvilinea x misurata a partire dal punto di inizio di sviluppo dello strato limite.

La (10.19) dà buoni risultati per profili non molto curvi, per distribuzioni di velocità regolari e per bassi valori della turbolenza, limitatamente all'intervallo $0.3 \cdot 10^6 \leq Re_\infty \leq 7 \cdot 10^6$.

La curva di correlazione suggerita da Smith si presenta nella forma

$$Re_\theta = 1.174 \left(1 + \frac{22400}{Re_x} \right) Re_x^{0.46} \quad (10.20)$$

relativamente all'intervallo $0.1 \cdot 10^6 \leq Re_\infty \leq 6 \cdot 10^7$

10.4 Metodi integrali -diretti ed inversi- per lo strato limite turbolento

Questi metodi devono essere sviluppati in particolare in caso di gradiente di pressione avverso, sia per flussi attaccati che per flussi separati. Anche per flussi turbolenti ovviamente occorre impiegare relazioni ausiliarie, in numero congruo, le quali caratterizzano ciascun metodo.

Occorre poi assegnare condizioni iniziali per una tra le grandezze U_e , θ , C_f e H , a seconda che il metodo sia diretto oppure inverso. Se lo strato limite turbolento segue un tratto laminare già risolto, dopo la transizione si può assumere che lo spessore di spostamento sia continuo nel punto di transizione, mentre il valore iniziale per il fattore di forma H_{in} può essere determinato tramite relazioni empiriche o, più semplicemente, si può porre $H_{in} = 1.4$ (flusso di lastra piana), mentre il valore di C_f va determinato dalle relazioni ausiliarie.

La velocità di trascinamento

È risultato, da diverse ricerche, che per il calcolo dello sviluppo dello strato limite turbolento incompressibile con metodi integrali è importante il concetto di "trascinamento" (*entrainment*), introdotto per la prima volta, da Head [66]: si tratta della quantità di fluido introdotto attualmente nello strato limite, che Head è riuscito, per primo, a correlare con le caratteristiche della turbolenza del flusso.

La portata volumetrica Q che attraversa una generica sezione x dello strato limite è

$$Q(x) = \int_0^\delta u dy \quad (10.21)$$

e ad essa si possono associare lo spessore di flusso di massa ed il relativo fattore di forma H_1 :

$$\Delta(x) = \frac{Q}{U_e} = \int_0^\delta \frac{u}{U_e} dy = \delta - \delta^*, \quad H_1 = \frac{\Delta}{\theta} \quad (10.22)$$

Questa portata cambia lungo lo strato limite, in dipendenza dalle vicende del flusso, e dunque in dipendenza dalla distribuzione di velocità U_e all'esterno dello strato limite, dalle condizioni alla parete, dai numeri caratteristici e dalle condizioni del flusso: in particolare, notevole influenza ha il fatto che il flusso sia laminare o turbolento. L'incremento attuale di Q definisce una velocità

$$E(x) = \frac{dQ}{dx} = \frac{d}{dx}(U_e \Delta) = \frac{d}{dx}(U_e H_1 \theta) \quad (10.23)$$

detta di trascinamento, alla quale si collega la quantità di fluido che entra nello strato limite.

Un'interessante relazione si può ricavare per integrazione dell'equazione di conservazione della massa. Si osserva preliminarmente che è

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta u dy = \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy + U_e \frac{d\delta}{dx} \quad (10.24)$$

(in quanto l'estremo superiore di integrazione dipende da x) e che, in assenza di traspirazione,

$$\int_0^\delta \frac{\partial v}{\partial y} dy = V_e$$

essendo V_e la velocità normale al bordo dello strato limite. È allora

$$\int_0^\delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = \frac{d}{dx} \int_0^\delta u dy - U_e \frac{d\delta}{dx} + V_e = 0$$

e quindi

$$\frac{d}{dx} Q(x) = U_e \frac{d\delta}{dx} - V_e \quad (10.25)$$

con chiara interpretazione fisica: la quantità di fluido indisturbato che "entra" nello strato limite dipende dall'incremento dello spessore dello strato limite e dalla velocità normale sul bordo.

IL METODO DI HEAD - MODO DIRETTO

Nel metodo di Head per lo strato limite turbolento, [66], come per quasi tutti i metodi integrali per flussi attaccati, si adotta la relazione di Ludwig-Tilmann per il coefficiente di attrito

$$C_f = 0.246 \cdot 10^{-0.678H} \left(\frac{U_e \theta}{\nu} \right)^{-0.268} \quad (10.26)$$

(che non vale in regioni di strato limite separato in quanto non può dare valori negativi per il coefficiente di attrito C_f).

Head assume che il grado di trascinamento, misurato dal rapporto $F = E/U_e$, dipenda fondamentalmente dal profilo di velocità, e quindi dal fattore di forma H : in particolare, Head ha mostrato che in un'ampia serie di casi è $F = F(H_1)$, con $H_1 = H_1(H)$.

Le relazioni -di natura sperimentale- che Head ha proposto sono le seguenti:

$$F(H_1) = 0.0306(H_1 - 3)^{-0.653} \quad (10.27)$$

$$H_1 = G(H) = 3.3 + 0.8234(H - 1.1)^{-1.287} \quad \text{per } H \leq 1.6 \quad (10.28)$$

$$H_1 = G(H) = 3.3 + 1.5501(H - 0.6778)^{-3.064} \quad \text{per } H \geq 1.6$$

Utilizzando la (10.27) la (10.23) diventa

$$F = \frac{E}{U_e} = \frac{1}{U_e} \frac{d}{dx} \left(\theta H_1 U_e \right) = 0.0306(H_1 - 3)^{-0.653} \quad (10.29)$$

che, insieme alle (10.1), (10.26) e (10.28), fornisce un completo sistema di equazioni differenziali, la cui integrazione può dare lo sviluppo dello strato limite turbolento incompressibile attaccato.

Operativamente, un buon metodo di procedere è quello di ridurre il sistema a due sole equazioni nel modo seguente:

- si introduce la (10.26) nella (10.1), pervenendo all'equazione differenziale

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{2} \cdot 0.246 \cdot 10^{-0.678H} \cdot \left(\frac{U_e \theta}{\nu} \right)^{-0.268} - (H + 2) \frac{\theta}{U_e} \frac{dU_e}{dx}$$

che formalmente si può presentare come

$$\frac{d\theta}{dx} = F_1(U_e, \theta, H) \quad (10.30)$$

- si scrive la (10.29) nella forma

$$\frac{\theta H_1}{U_e} \frac{dU_e}{dx} + \theta \frac{dH_1}{dH} \frac{dH}{dx} + H_1 \frac{d\theta}{dx} = .0306(H_1 - 3)^{.653} \quad (10.31)$$

che, eliminando H_1 mediante la (10.28) e tramite la (10.30), può essere scritta come

$$\frac{dH}{dx} = F_2(U_e, \theta, H) \quad (10.32)$$

Il sistema formato dalle (10.30) e (10.32) può essere convenientemente risolto, per assegnate condizioni iniziali, con il metodo Runge-Kutta.

IL METODO DI HEAD - MODO INVERSO

È pensabile di voler calcolare in modo inverso lo strato limite assegnando alternativamente la distribuzione dello spessore di spostamento δ^* , dello spessore di quantità di moto θ del fattore di forma H o del coefficiente di attrito C_f ; i casi in cui si assegna θ o H possono essere trattati a partire dalle (10.30) e (10.32) ponendole, con semplici manipolazioni algebriche, nella forma

$$\frac{dU_e}{dx} = F(U_e, \theta, H) \quad (10.33)$$

$$\frac{dH}{dx} = G(U_e, \theta, H) \quad (10.34)$$

se si assegna lo spessore di quantità di moto θ , oppure

$$\frac{d\theta}{dx} = F(U_e, \theta, H) \quad (10.35)$$

$$\frac{dU_e}{dx} = G(U_e, \theta, H) \quad (10.36)$$

se si assegna il fattore di forma H . Questi due casi sono comunque i meno interessanti dal punto di vista applicativo.

Di gran lunga più importante è la soluzione inversa per un'assegnata distribuzione dello spessore di spostamento $\delta^* = H\theta$; in questo caso, essendo

$$\frac{d\delta^*}{dx} = H \frac{d\theta}{dx} + \theta \frac{dH}{dx}$$

è possibile manipolare le (10.33,10.34) eliminando θ e facendo comparire a secondo membro δ^* ; si perviene quindi ad un sistema nella forma

$$\frac{dU_e}{dx} = F(U_e, \delta^*, H) \quad (10.37)$$

$$\frac{dH}{dx} = G(U_e, \delta^*, H) \quad (10.38)$$

Maggiormente complicato è il calcolo inverso dello strato limite quando si assegna la distribuzione del coefficiente di attrito in quanto non è più possibile (per evitare la scomparsa di C_f dalle equazioni) la sostituzione della (10.26) nella (10.1), che ha consentito di ottenere il sistema (10.30,10.32) alla base dei tre casi precedenti. Si può allora procedere derivando la relazione di Ludwig-Tillman (10.26), pervenendo quindi ad un sistema di tre equazioni differenziali, del tipo

$$\frac{d\theta}{dx} = F(U_e, \theta, H, C_f) \quad (10.39)$$

$$\frac{dH}{dx} = G(U_e, \theta, H, C_f) \quad (10.40)$$

$$\frac{dU_e}{dx} = L(U_e, \theta, H, C_f) \quad (10.41)$$

Quest'ultimo caso può essere importante dal punto di vista applicativo, ad esempio nel *design* di profili alari che, in certe condizioni, non presentino separazioni fino a un punto prefissato.

Ciascuno dei sistemi di equazioni differenziali ora derivati può essere risolto, per assegnate condizioni iniziali, con il metodo di Runge-Kutta allo stesso modo del caso diretto.

Il metodo di Head su cui ci si è basati per questa trattazione non è idoneo all'applicazione delle tecniche inverse quando si hanno separazioni (e cioè proprio nelle condizioni in cui queste tecniche sono necessarie) a causa della limitazione della correlazione di Ludwig-Tillman (10.26) a valori positivi di C_f .

METODO DI GREEN - MODO DIRETTO

Nell'ambito dei metodi integrali riveste un ruolo fondamentale il modello proposto da Green, (con le modifiche successivamente apportate da East). Il metodo di Green, [67], si basa sulla soluzione del sistema composto dalle equazioni

- di Von Karman, qui trattata nella forma comprimibile (8.12)
- del trascinamento
- del ritardo del trascinamento

nelle incognite $\theta(x)$, $H(x)$, $C_e(x)$, che rappresenta la velocità di trascinamento adimensionale

$$C_e = \frac{V_e}{U_e} = \frac{1}{\rho_e U_e} \int_0^\delta \rho u \, dy \quad (10.42)$$

Introducendo il trascinamento $C_e(x)$ nell'equazione di Von Karman (8.12) si ha

$$\frac{d\bar{H}}{dx} = \frac{1}{\theta} \frac{d\bar{H}}{dH_1} \left\{ C_e - H_1 \left[\frac{C_f}{2} - (H+1) \frac{\theta}{U_e} \frac{dU_e}{dx} \right] \right\} \quad (10.43)$$

dove

$$H_1 = \frac{1}{\theta} \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_e U_e} \, dy = \frac{\delta - \delta^*}{\theta} \quad (10.44)$$

$$\bar{H} = \frac{1}{\theta} \int_0^\delta \frac{\rho}{\rho_e} \left(1 - \frac{u}{U_e} \right) \, dy \quad (10.45)$$

L'equazione rappresentativa della peculiarità del metodo di Green è stata ottenuta partendo dall'equazione dell'energia cinetica turbolenta media, e consente di determinare meglio l'evoluzione del flusso quando le sue grandezze evolvono rapidamente. Tale relazione, che si scrive

$$\frac{1}{2} \rho \left(u \frac{\partial \bar{q}^2}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{q}^2}{\partial y} \right) + \rho \bar{u}'v' \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{p}'v' + \frac{1}{2} \rho \bar{q}^2 v' \right) + \rho \epsilon = 0 \quad (10.46)$$

esprime un bilancio tra termini diffusivi, convettivi e di produzione. La grandezza $\bar{q}^2 = \bar{u}'^2 + \bar{v}'^2$ è appunto l'energia cinetica turbolenta ed ϵ è il termine dissipativo. Modificando opportunamente la (10.46) si giunge all'equazione del ritardo di trascinamento dC_e/dx^3 .

Il problema si chiude introducendo delle relazioni ausiliarie per il coefficiente di attrito ed i parametri di forma. Green valuta il C_f con la legge di correlazione

$$\frac{C_f}{C_{f_0}} = 0.9 \left(\frac{H}{H_0} - 0.4 \right)^{-1} - 0.5 \quad (10.47)$$

³Rifacendosi alla schematizzazione dei modelli di turbolenza basata su tipo e numero di equazioni, il metodo originario di Head rientra nella classe di quelli a zero equazioni, poiché per il trascinamento propone una semplice legge empirica; diversamente da Head, Green ed East esprimono la variazione del trascinamento con l'ascissa curvilinea con una ulteriore equazione differenziale, in cui compaiono gli altri parametri integrali di strato limite (modelli ad una equazione).

e per H_1 propone

$$H_1 = 3.15 + \frac{1.72}{\bar{H} - 1} - 0.01(\bar{H} - 1)^2 \quad (10.48)$$

dove il suffisso 0 è relativo al flusso con gradiente di pressione nullo. Il termine H_0 è valutato come

$$1 - \frac{H}{H_0} = 6.55 \left[\frac{C_{f0}}{2} (1 + 0.4M^2) \right]^{0.5} \quad (10.49)$$

mentre la relazione tra H e \bar{H} è

$$H + 1 = (\bar{H} + 1) \left(1 + \frac{M^2}{5} \right) \quad (10.50)$$

Dai confronti dei risultati forniti dal metodo del ritardo del trascinamento con i dati sperimentali è emersa la buona applicabilità per risolvere flussi attaccati o moderatamente separati. La discrepanza aumenta, invece, nel caso di separazioni più estese; in questo caso il metodo si mostra inadatto a prevedere gli elevati valori del parametro di forma H misurati sperimentalmente. Ciò è da imputarsi ai limitati valori che il termine $d\bar{H}/dH_1$ può assumere.

Le modifiche apportate da East, [68], al modello di Green per la correlazione $H_1 = f(\bar{H})$ raggiungono lo scopo di migliorare i risultati numerici. L'espressione (10.48) è dunque sostituita dalle due relazioni

$$\begin{aligned} H_1 &= 3.15 + \frac{1.72}{\bar{H} - 1} && \text{per } \bar{H} \leq 1.6 \\ H_1 &= 4.5455 + 295e^{-3.55\bar{H}} && \text{per } \bar{H} > 1.6 \end{aligned} \quad (10.51)$$

10.5 Individuazione teorica della separazione dello strato limite

Trattasi di argomento di fondamentale importanza nel calcolo delle caratteristiche aerodinamiche di una superficie portante: la presenza di zone di flusso separato è chiaramente correlata ad un decadimento delle prestazioni aerodinamiche.

Quando si affronta il problema della determinazione, sperimentale o teorica, del flusso attorno ad un profilo alare può sembrare naturale, a prima vista, collegare l'insorgere della separazione con l'annullarsi del coefficiente di attrito C_f .

Nella realtà questa assunzione è completamente inattendibile, per diversi motivi. In generale, come è noto dall'evidenza sperimentale (e tanto più quanto le separazioni sono estese), la separazione è un fenomeno instazionario anche se il flusso è macroscopicamente stazionario, per cui sarebbe meglio parlare di una regione nella quale avviene il distacco. Inoltre le misurazioni sperimentali oppure i metodi di calcolo viscoso nella maggior parte dei casi perdono di accuratezza in condizioni di separazione incipiente. Limitatamente ai metodi teorici prima descritti, il metodo di Head, per esempio, non dovrebbe poter "vedere" un valore negativo o nullo per il C_f , mentre le correlazioni alla base del metodo di Thwaites per lo strato limite laminare cadono in difetto proprio vicino al distacco della corrente. Inoltre anche per quei metodi nei quali è possibile attingere valori negativi per il coefficiente di attrito sono prevedibili notevoli difficoltà per l'impossibilità di calcolare con metodi diretti le caratteristiche dello strato limite immediatamente a valle di un punto di separazione⁴.

La via che di solito viene seguita nell'Aerodinamica Applicata per ovviare all'inaffidabilità della previsione della separazione sulla base del valore calcolato per il C_f consiste nel collegare l'insorgere della separazione con il valore assunto da parametri integrali e/o globali dello strato limite. I due criteri maggiormente affidabili, e quindi più largamente seguiti nella pratica industriale, consistono nell'assumere la separazione del flusso nel modo seguente:

⁴Questo aspetto è alquanto delicato: si dovrebbe trattare esplicitamente la singolarità, detta di Goldstein, che si incontra nella soluzione in forma diretta delle equazioni dello strato limite in corrispondenza di un punto di separazione, quindi della possibilità di trovare soluzioni non univoche a valle del punto di separazione, nonché delle diversità tra i metodi di soluzione alle differenze finite ed i metodi integrali, ma il tutto esula dai limiti che questa trattazione si è imposta.

- nel caso di flusso laminare, quando risulta $\lambda < \approx -0.09$, dove λ è il parametro di Thwaites definito nella (10.2);
- per flussi turbolenti, quando $H > 1.8 \div 2.4$.

Si potrebbe rimanere perplessi a causa dell'indeterminatezza dei parametri che si sono indicati come caratteristici dei flussi in incipiente separazione; la cosa comunque è molto più "piana" in quanto

- il valore sia di λ che di H tende a divergere molto rapidamente in prossimità della separazione, per cui l'assunzione di un valore "preciso" non fa altro che spostare di poco il punto individuato come punto di separazione: l'errore che si può commettere è, in generale, minore dell'approssimazione che la discretizzazione della superficie introduce (come dire che si riesce ad individuare sempre correttamente due punti della superficie tra i quali c'è separazione);
- in realtà la posizione "esatta" della separazione o non ha senso o non interessa eccessivamente.

10.6 Accoppiamento tra soluzione esterna e strato limite

Si affronta adesso il problema del calcolo teorico del campo di moto e delle prestazioni di oggetti aerodinamici a partire da solutori di strato limite e di flusso non viscoso. A volte si legge che si tratta di correggere la distribuzione di pressione Euleriana mettendo in conto l'influenza su di essa dello strato limite, ma questa dizione non descrive correttamente il fatto che l'influenza tra campo esterno (non Euleriano!) e strato limite è mutua.

Sull'uso della soluzione in modo inverso dello strato limite

È opportuno fare presente che la soluzione inversa è significativa tanto quanto quella diretta, anche dal punto di vista fisico: sarebbe errato considerare che un problema "reale" debba prevedere come un fatto naturale l'assegnazione della velocità esterna, e che invece una soluzione in modo inverso sia una forzatura verso qualcosa che non ha senso dal punto di vista fenomenologico.

Dal punto di vista operativo invece le differenze sono sostanziali, e le possibilità di applicazione pure. Se si rimane nell'ambito dei flussi attorno a profili alari, l'impossibilità di trattare in modalità diretta strati limiti separati ne confina l'applicabilità esclusiva a pochi semplici campi di moto.

Occorre invece tenere presente che l'accoppiamento tra soluzione esterna e strato limite è un modello di simulazione di campi di moto che può essere più o meno approssimato, ma che comunque ha senso se riesce a portare a risultati aderenti alla realtà, indipendentemente dalla modalità di soluzione.

Nella soluzione delle equazioni dello strato limite occorre comunque risolvere un sistema di equazioni differenziali di tipo parabolico: rispetto alla formulazione diretta quella inversa introduce l'importante vantaggio della eliminazione della singolarità in corrispondenza di un punto di separazione, e questo è decisivo per le procedure di previsione aerodinamica, alcune delle quali saranno descritte in seguito.

L'equivalenza dal punto di vista formale del trattamento dello strato limite in modo diretto ed inverso consente poi di estendere molti dei discorsi sviluppati in questo capitolo: è possibile per esempio risolvere lo strato limite in modo inverso sia con metodi integrali che alle differenze finite: cambia solo il ruolo che hanno alcune delle variabili dipendenti.

SOVRAPPOSIZIONE DIRETTA (Questa tecnica è oggi obsoleta!)

Quando gli strati limiti sono sottili, senza separazioni significative, si riesce a calcolare una soluzione sufficientemente accurata con una sola correzione viscosa (senza cioè ricalcolare soluzione esterna e strato limite). In questo caso si parla di un metodo di sovrapposizione diretta. Occorre che eventuali separazioni turbolente al bordo di uscita siano di estensione non superiore al 5% della corda, e che eventuali bolle siano di piccolissima estensione ed abbiano effetti aerodinamici limitati (in concreto, senza possibilità che esplodano). Si opera senza ricorrere a soluzioni inverse dello

strato limite impiegando opportunamente gli indicatori di incipiente separazione introdotti in (10.5) per evitare che il calcolo diretto dello strato limite vada in crisi.

Operativamente si calcola la soluzione non viscosa, e, individuati i punti di ristagno anteriori (si possono trattare anche profili a più componenti!) e le linee di corrente del dorso e del ventre, si procede al calcolo dello strato limite laminare, quindi della transizione/separazione laminare. Se si incontra transizione, si procede al calcolo del tratto turbolento. Se invece si trova separazione laminare si ipotizza la presenza di una bolla laminare: nulla può in quest'ambito essere detto sul flusso, invero alquanto complicato, che si ha a valle del punto di separazione laminare, si segue il semplice approccio basato su criteri empirici o semiempirici, [69], per valutare in prima approssimazione le caratteristiche della bolla e, se si è sicuri che sia lecito, si procede semplicemente imponendo la transizione nel punto di separazione laminare. Una tale procedura è evidentemente inadeguata se si è direttamente interessati alla determinazione delle caratteristiche delle bolle, come nel caso di flussi a basso numero di Reynolds.

Se -a causa di incipiente separazione- non si riesce a completare il calcolo viscoso fino al bordo di uscita (per il dorso o/e per il ventre) si procede ad estrapolazioni opportune delle grandezze di strato limite. Si calcolano infine le caratteristiche aerodinamiche.

È evidente che si perviene a risultati attendibili solo per flussi attorno a profili alari ad incidenze piccole e medie e ad alti valori del numero di Reynolds.

INTERAZIONE TRA FLUSSO ESTERNO E STRATO LIMITE (VII)

Per superare i limiti del metodo di sovrapposizione diretta è necessario prevedere l'interazione mutua tra soluzione esterna e strato limite. Si tratterà qui il metodo della traspirazione, rimandando eventualmente alla letteratura per informazioni sul metodo dell'ispessimento, o del corpo equivalente, la cui concezione risale a Prandtl: gli inconvenienti che esso presenta ne hanno limitato lo sviluppo.

È noto che sul bordo esterno dello strato limite viene indotta una velocità normale, cfr. (8.4), detta velocità di traspirazione, o soffiamento, cui è possibile associare un flusso di massa di traspirazione, e che Lighthill ha mostrato potersi mettere nella forma

$$V_n = \frac{d}{dx}(U_e \delta^*) \quad (10.52)$$

L'interpretazione della (10.52) dal punto di vista fisico è abbastanza immediata. La portata volumetrica di fluido che attraversa la sezione dello strato limite all'ascissa x può cambiare (tramite la V_n) se cambiano la velocità esterna o δ^* . Questa portata può aumentare o diminuire in dipendenza dal segno di V_n : lungo lo strato limite ci sono zone di aspirazione e zone di soffiamento.

Se si considera che nella soluzione esterna lo spessore dello strato limite è evanescente, e che perciò la velocità di soffiamento viene "vista" come applicata sulla superficie del corpo, si può concludere che la presenza dello strato limite introduce per il flusso esterno una violazione della condizione di impermeabilità (o la modifica del flusso di massa prescritto qualora il corpo non sia impermeabile). Introdotta da Lighthill intorno al 1950, l'interazione tra flusso non viscoso e strato limite si valuta calcolando una nuova soluzione esterna che annulli il flusso di traspirazione. Anche se calcolata come non viscosa, la nuova soluzione esterna risente evidentemente degli effetti della viscosità, per cui il flusso risultante viene detto "flusso non viscoso equivalente" (al flusso reale, ovviamente), in breve *EIF*. È chiaro che il metodo della traspirazione è un metodo di approssimazioni successive: infatti ad un nuovo campo esterno non corrisponderà più lo strato limite che si è usato per determinarlo, e quindi è necessario introdurre una procedura iterativa (che sia poi convergente).

Si mette qui in evidenza il fatto che le procedure per implementare questo metodo non sono semplici, e si vuol dare qui la giustificazione di questa affermazione.

In effetti un metodo di calcolo aerodinamico deve funzionare anche se nel campo vi sono separazioni, più o meno estese. Ora per determinare dalla (10.52) il flusso di interazione per un'assegnata soluzione dell'*EIF* è indispensabile calcolare le caratteristiche dello strato limite e del flusso esterno su tutto il corpo: ma a valle dei punti di separazione è possibile calcolare solo soluzioni inverse di strato limite, per le quali è necessario conoscere a priori proprio la distribuzione di qualche gran-

dezza di strato limite, ad esempio δ^* , che si sperava di calcolare partendo dall'EIF! Esiste inoltre una ambiguità di fondo: infatti, quand'anche si riuscisse ad avere in qualche modo una stima del δ^* , il calcolo in modo inverso darebbe, per una certa parte delle linee di corrente, una distribuzione di U_e che non coincide con quella dell'EIF dal momento che è stata calcolata in modo indipendente.

Si rinvia comunque ai lavori specifici per gli approfondimenti su come può essere sviluppato operativamente un metodo di interazione. Comunque un diagramma di flusso di un possibile schema VII viene proposto in Fig. 10.9, con riferimento ai simboli di Fig. 10.1. In esso si è previsto l'impiego di un metodo a pannelli per il flusso esterno (le matrici di influenza si calcolano una sola volta, così come la matrice inversa), di una soluzione diretta per il tratto laminare (eventuali bolle vengono trascurate), della soluzione diretta ed inversa in modalità δ^* per il tratto turbolento. x_T e x_I indicano rispettivamente le ascisse (lungo le linee di corrente) dei punti di transizione e di inizio del tratto inverso. Ad ogni iterazione si calcola la transizione e si fissa l'inizio del tratto inverso (in merito a quest'ultimo punto si precisa che occorre usare criteri che garantiscano che il calcolo turbolento diretto non trovi la separazione: occorre lavorare in sicurezza sul fattore di forma H che, come scritto in precedenza, in condizioni di incipiente separazione aumenta in modo brusco). La procedura di aggiornamento di δ^* nella regione inversa è in genere dipendente dalla differenza tra velocità esterna calcolata in modalità inversa e quella calcolata nell'EIF: viene usata per condizionare la convergenza del procedimento, e la sua scelta caratterizza i diversi metodi presenti in letteratura. Per una migliore comprensione dello schema di Fig. 10.9 conviene non considerare il ciclo interno.

L'impiego di metodi di VII consentono di calcolare in modo agevole campi aerodinamici anche in presenza di forte interazione tra regioni "non viscoso" e regioni viscoso legata alla presenza di estese regioni di flusso separato: è indispensabile però che chi usa il metodo abbia un buon livello di esperienza. Le soluzioni VII possono avere un livello di accuratezza confrontabile con quello delle soluzioni RANS (anch'esse calcolate da operatore esperto!).

Un buon metodo di calcolo, concettualmente equivalente a quello qui illustrato ma implementato in modo abbastanza diverso, è implementato nel codice Xfoil, [2], di largo uso in campo aeronautico.

10.7 Calcolo della polare di un profilo

Il calcolo delle caratteristiche aerodinamiche di un profilo alare, affidabile fino ad incidenze di stallo, può essere sviluppato con la VII. Fino ad incidenze medie può essere praticabile il metodo di sovrapposizione diretta.

Portanza e momento si ottengono dal campo delle pressioni che deriva dalla soluzione del campo esterno.

Resistenza

Per la resistenza la cosa è più complicata, anche se l'integrazione della pressione del campo esterno fornisce comunque la resistenza detta di pressione (questo contributo alla resistenza è nullo solo in campo subsonico bidimensionale non viscoso, e che diventa importante quando vi siano significative separazioni).

Quando si siano calcolate le caratteristiche dello strato limite lungo le linee di corrente del dorso e del ventre, si può pensare di determinare la resistenza di attrito integrando lo sforzo di attrito. Questa procedura porta raramente a risultati in accordo con i dati sperimentali a causa dell'inaccuratezza con cui si riesce a determinare il C_f : questo sia che si usino metodi integrali che metodi alle differenze finite.

Una formulazione soddisfacente, basata su considerazioni sul difetto di quantità di moto, largamente impiegata in campo aeronautico per i profili alari, è quella che porta alla nota formula di Squire-Young, [7], con la quale si riesce a calcolare la resistenza in funzione delle caratteristiche del campo di moto calcolate al bordo di uscita, e qui contrassegnate col suffisso te :

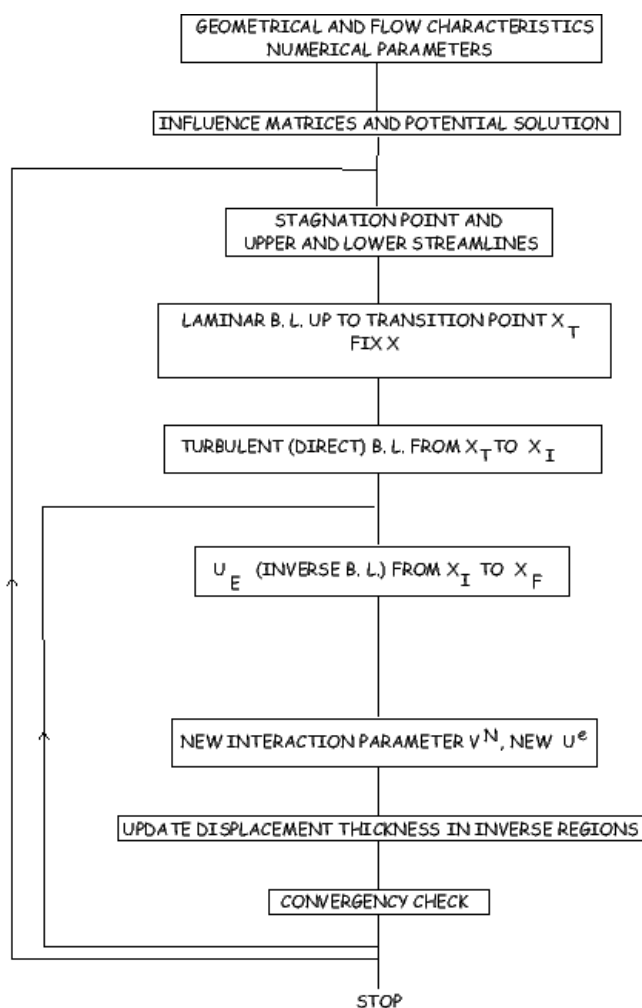


Figura 10.9: Schema di calcolo di strato limite su profili alari

$$C_d = 2\theta_\infty = 2 \left[\frac{\theta_{te}}{c} \left(\frac{U_{te}}{U_\infty} \right)^{\frac{H_{te}+5}{2}} \right]_{dorso} + 2 \left[\frac{\theta_{te}}{c} \left(\frac{U_{te}}{U_\infty} \right)^{\frac{H_{te}+5}{2}} \right]_{ventre} \quad (10.53)$$

L'uso della (10.53) fornisce risultati soddisfacenti fino ad incidenze medie o alte. Tale formula viene ricavata a partire dalla (C.39) correlando il difetto di quantità di moto lontano dal corpo alle caratteristiche dello strato limite al bordo di uscita mediante un'opportuna modellazione delle caratteristiche della scia. Nella (10.53) si può pensare inglobato anche il termine di pressione, tranne che nel campo siano presenti onde d'urto.

10.8 Un metodo per campi 3-D: *Strip Theory*

Si tratta di un metodo approssimato di sovrapposizione diretta che consente la valutazione degli effetti della viscosità per oggetti 3-D quali ali e fusoliere evitando le difficoltà di soluzione dello strato limite 3-D (o delle equazioni di NS). In questo modo si calcolano rette e curve di portanza di velivoli completi in modo abbastanza realistico sempre che non ci siano separazioni significative.

Il metodo prevede il calcolo dello strato limite 2-D su un certo numero di linee di corrente che involuppano opportunamente l'intera geometria: in questo modo si può ricoprire la superfi-

cie con tutte le informazioni viscoso e valutare le prestazioni in modo realistico e con impegno computazionale sostenibile.

Nel caso di ali la semplicità topologica consente spesso di dividere le ali, anche a freccia, in strisce longitudinali (*strips*) ognuna delle quali viene trattata come un concio di ala infinita (*ceteris paribus* per le fusoliere).

10.9 Esercizi

ESERCIZIO 1. Si sviluppi e si convalidi un codice di calcolo per la soluzione dello strato limite laminare su una assegnata linea di corrente. Traccia: occorre, in sostanza,

- 1) capire che significa “assegnata linea di corrente”,
- 2) calcolare la derivata di una funzione assegnata per punti,
- 3) calcolare un integrale ad estremo superiore variabile.

ESERCIZIO 2. Introdurre nel codice di calcolo dello strato limite laminare dell’esercizio precedente il calcolo dell’ascissa di transizione secondo i metodi riportati ed interpretare i risultati.

Convalidare il codice confrontandone le soluzioni con quelle relative al flusso laminare sulla lastra piana ad opportuni valori del numero di Reynolds.

ESERCIZIO 3. Accoppiare il codice dell’esercizio precedente ai codici a pannelli per la soluzione del campo portante attorno ad un profilo alare.

Applicare quindi il codice risultante per lo studio dello spostamento del punto di transizione al variare del numero di Reynolds e dell’angolo di attacco.

ESERCIZIO 4. Includere nel codice di strato limite il calcolo del tratto turbolento con il metodo di Head.

Traccia: occorre prevedere la soluzione del sistema (10.29), (10.32) con il metodo Runge-Kutta a partire dal punto di transizione, assumendo come condizioni iniziali le condizioni dello strato limite a valle della transizione.

N.B.: prestare particolare attenzione alla determinazione delle condizioni iniziali.

ESERCIZIO 5. Completare il codice di strato limite sviluppato includendo il calcolo della resistenza lungo la linea di corrente per integrazione del coefficiente di attrito.

ESERCIZIO 6. Accoppiare il codice di strato limite con il codice a pannelli in modo da poter calcolare il coefficiente di resistenza di un profilo alare. Discutere i limiti di applicabilità.

ESERCIZIO 7. Completare il codice di analisi potenziale e calcolo dello strato limite su linee di corrente finora sviluppato in modo da poter calcolare le caratteristiche aerodinamiche con il metodo di sovrapposizione diretta in assenza di interazioni forti.

Traccia: occorre, in pratica, “aggiungere” alla soluzione potenziale calcolata con il metodo a pannelli l’effetto di un campo di sorgenti che sia in grado di annullare il flusso di traspirazione di origine viscosa.

Parte V

AERODINAMICA APPLICATA

Capitolo 11

Sul funzionamento dei profili alari

11.1 Considerazioni preliminari

La progettazione aerodinamica ha alcune sue peculiarità; in particolare è

- (ancora) piuttosto empirica
- si basa su procedure iterative (fasi principali: *design* ed analisi di avanprogetto, progetto, verifica, modifiche),
- lunga ed onerosa.

Il calcolo aerodinamico teorico di un aereo è una sequenza, comunque iterata, di

- metodi semiempirici di avanprogetto (ESDU, USAF DATCOM, Schrenk, ad esempio),
- metodi di campo non viscoso (linearizzati: soluzioni dell'equazione di Prandtl-Glauert, teoria di Prandtl, ad esempio; soluzioni esatte dell'equazione di Laplace o delle equazioni di Eulero),
- metodi per campi viscosi: interazione viscosa (accoppiamento tra soluzione non viscosa e strato limite), soluzione delle equazioni di Navier-Stokes.

I metodi teorici sono poi complementari alle prove di galleria per la definizione del progetto.

La categoria del velivolo e la sua fascia di livello vincolano le scelte, ad esempio il livello tecnologico del prodotto; il propulsore è il principale componente che deve essere definito da subito.

In genere i punti di progetto sono molteplici. Certamente ci sono le crociere -qualunque velivolo, anche supersonico, deve prevedere la crociera subsonica- e c'è la bassa velocità (l'alta portanza), c'è l'autonomia, nonché alcune condizioni di malfunzionamento che non devono dare situazioni problematiche (ad esempio, per un velivolo bimotore la condizione *one engine off* è prova di certificazione).

È naturale ed ovvio partire dall'esistente, che va interpretato e, necessariamente, superato.

11.2 Profili ed ala

L'ala è il punto maggiormente delicato nella progettazione aerodinamica al fine della riuscita dell'aeromobile.

Un'ala è vista come formata da un insieme di sezioni alari che devono dare il comportamento complessivo desiderato: pertanto il suo comportamento è determinato dal comportamento di tutte le sue sezioni. La conoscenza di tale comportamento per ciascuna delle sezioni è quindi fondamentale: riportando in qualche modo il comportamento di ciascuna sezione alare a quello del corrispondente profilo si comprende allora come sia fondamentale la conoscenza dell'aerodinamica di ciascun profilo alare impiegato per il disegno dell'ala, in ciascuna delle condizioni di volo previste per l'aeromobile.

A titolo di esempio, si supponga di lavorare in crociera subsonica: la teoria di Prandtl per l'ala dritta, eventualmente estesa all'ala a freccia, insieme alle opportune tecniche per le correzioni

viscose, costituiscono uno strumento sufficiente per determinare il comportamento aerodinamico di un'ala. Inoltre i risultati così ottenuti forniscono poi dati di partenza per determinare i comportamenti in altre condizioni di volo.

Si mette in evidenza l'importanza della grandezza $cC_l/2b$, detta carico alare lungo l'apertura, funzione dell'ascissa laterale y , la cui comprensione è necessaria per capire poi il funzionamento dell'ala. Il carico alare dipende dalla geometria dell'ala e dall'angolo di attacco. Ad ogni stazione lungo l'asse y il carico alare contiene l'informazione sia sulla dimensione longitudinale del profilo (la corda c) sia il modo in cui sta lavorando (C_l). Normalmente il carico alare viene determinato in una precisa condizione (tipicamente a $C_L = 1$ oppure ad angolo d'attacco unitario), e poi scalato linearmente al variare della condizione di volo: questo discorso è valido ovviamente nell'intervallo di C_L nel quale la caratteristica di portanza è lineare, ma nell'applicazione di alcune tecniche ingegneristiche può esteso anche oltre l'ambito lineare.

È il carico alare desiderato che il progettista mette al centro della progettazione di un'ala.

I profili impiegati per il disegno di un'ala sono in linea di principio non numerabili. Essi differiscono per la lunghezza della corda lungo l'apertura (l'ala rastremata ha le linee dei bordi di attacco e di uscita rettilinee e non parallele) ed anche per la forma di base (la forma che si ottiene normalizzando la corda di ciascun profilo): i profili alari (normalizzati) di un'ala possono differire tra loro sia per lo spessore percentuale che per la curvatura della linea media, e potrebbero differire anche per la legge di distribuzione lungo la corda dello spessore e della linea media.

L'ala rettangolare ha come forma in pianta un rettangolo (smussato), e il profilo è in genere unico in apertura: è l'ala più semplice ed economica da realizzare (e non funziona tanto male).

Questi discorsi si estendono a settori diversi dall'aerospazio: si citano ad esempio l'Ingegneria dell'Automobile, l'Energetica, l'Ingegneria del Vento, l'Ingegneria Navale.

11.3 L'importanza dello studio dei profili

Il profilo alare è una macchina ideale che si può pensare come una qualunque sezione longitudinale di un'ala a sezione costante e di apertura infinita (meglio, di allungamento che tende all'infinito, fissata la superficie in pianta): il funzionamento di ciascuna sezione di questo tipo di ala è uguale a quello di tutte le altre, quindi nella descrizione del campo di moto si può eliminare la dimensione lungo l'apertura, e il campo di moto è detto bidimensionale¹.

A titolo di esempio, si riportano nella Fig. 11.1 alcuni profili alari impiegati attualmente.

In generale nel disegno aerodinamico di un'ala si fa riferimento ad un preciso profilo alare, coincidente con il profilo che effettivamente si impiega in una sezione posta, grosso modo, a metà di ciascuna semiala. Gli altri profili dell'ala si ottengono scalando opportunamente il profilo di riferimento a seconda della posizione lungo l'apertura. Per esempio, i profili verso la radice in genere hanno corda e spessore percentuale più grandi (principalmente per motivi strutturali). E ancora, i profili verso l'estremità potrebbero presentare curvature più elevate per elevare il valore del C_{lmax} (per prevenire lo stallo d'estremità). Quindi tutti i profili di un'ala possono essere riportati, sostanzialmente con molta buona volontà, ad un solo profilo alare, detto profilo base o di riferimento.

L'aerodinamica del profilo di base deve essere conosciuta con certezza in tutta la gamma di volo del velivolo, insieme all'effetto che le variazioni della geometria lungo l'apertura hanno sull'aerodinamica del profilo.

La forma del profilo base, la sua aerodinamica e l'effetto delle variazioni geometriche vengono determinati, per quanto possibile accuratamente, con metodi teorici che sono diversi per i diversi regimi di volo dell'aeromobile: si parte da metodi semplici di avanprogetto (per ciascun regime di volo) e si procede con l'impiego di metodi via via più accurati.

¹Si ricorda che in presenza di turbolenza -cioè *sempre* nelle applicazioni aeronautiche- i campi di moto esterni sono tridimensionali, e l'ipotesi di moto bidimensionale in certi casi non è sostenibile.

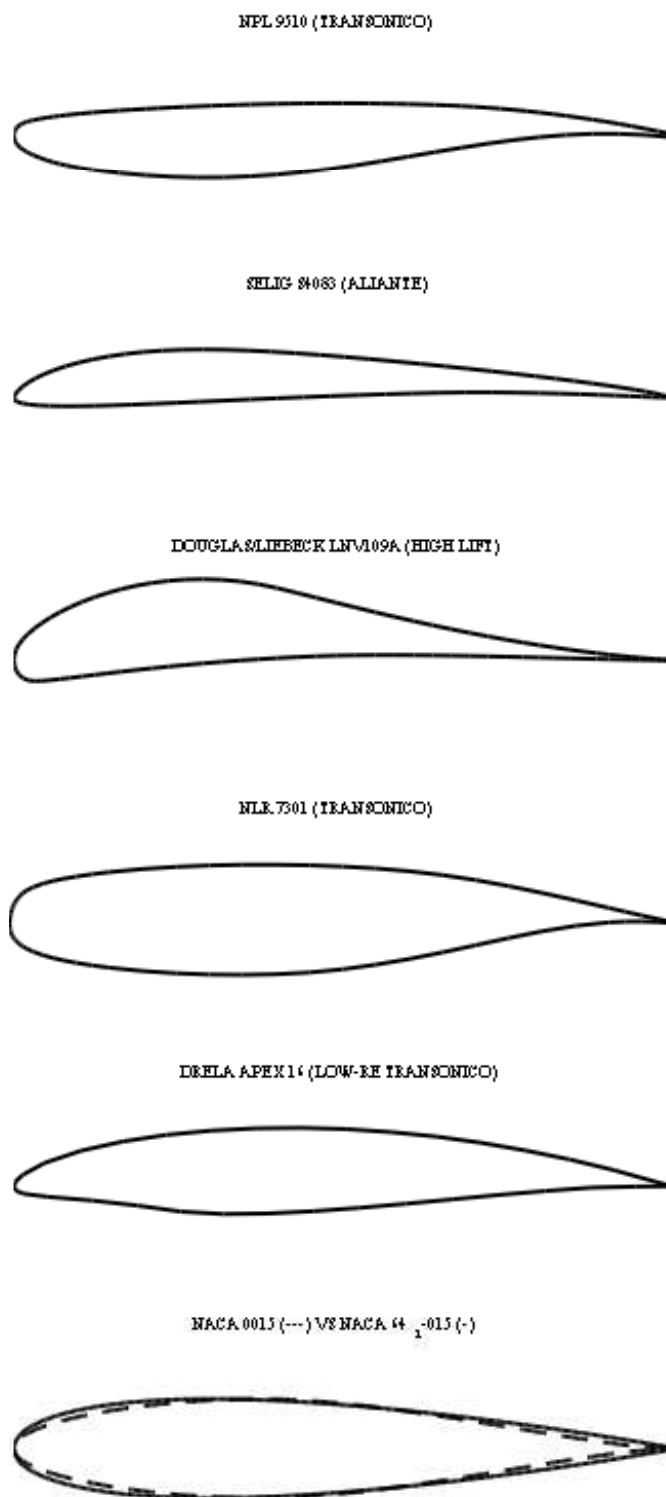


Figura 11.1: Profili alari disegnati per specifici campi di applicazione

Successivamente i risultati teorici del disegno e del comportamento aerodinamico devono essere convalidati con ripetute campagne di prove sperimentali in gallerie del vento, generalmente diverse per i diversi regimi di moto. Per un certo regime di volo si possono impiegare in successione diverse gallerie del vento, sempre più precise (o, meglio, in cui si possono approssimare più accuratamente le condizioni di volo): man mano si converge verso un risultato che può essere considerato definitivo (alcune delle prove conclusive vanno effettuate in condizioni “strane” ma da tenere in conto, come ad esempio quelle relative alla formazione di ghiaccio sul profilo: questo lo si fa presso impianti specializzati).

È bene osservare, per inciso, che sul velivolo (parziale o completo) un ciclo, più complesso, di prove aerodinamiche viene effettuato in varie fasi dello sviluppo della progettazione. Ma il punto di partenza è sempre il profilo di riferimento, mentre il punto di arrivo è sempre la prova di volo.

LA SCELTA DEL PROFILO DI RIFERIMENTO

Ora in genere il progettista non procede ex novo nel disegno del profilo base, così come non fa per l'intera configurazione. Esistono un'estesa schiera di profili alari già disegnati e di prestazioni certe tra cui scegliere quanto meno un punto di partenza. Certamente i profili alari più 'famosi', non certo i più moderni, indicati per il volo subsonico, sono contenuti nelle cosiddette famiglie di profili NACA “low speed”:

1. NACA A 4 CIFRE
2. NACA A 5 CIFRE
3. SESTA SERIE NACA LAMINARE.

Il progetto di queste famiglie di profili è anteriore 1940: ma è bene osservare che la grande maggioranza dei velivoli oggi operativi hanno ali i cui profili appartengono a una delle famiglie indicate, o sono da esse derivati. Ancora oggi, quando si avvia il progetto di un nuovo velivolo subsonico per la scelta del profilo di riferimento ci si rivolge ad un profilo NACA.

MODIFICHE DELLA FORMA DI UN PROFILO ALARE ESISTENTE

I profili alari sono stati sviluppati a partire dall'origine della Scienza del Volo. Fino al 1930 l'evoluzione delle geometrie, in termini di distribuzione di spessore e curvatura, ha portato a risultati pressoché 'ottimi', in relazione alle condizioni di volo consentite dalla tecnologia dell'epoca, sistematizzate nelle famiglie di profili (NACA, ad esempio, come più importante riferimento per l'area occidentale).

Pertanto sono da pensare come ottimi, e già inclusi nelle distribuzioni di spessore consolidate, alcuni particolari geometrici dei profili alari, principalmente il contorno del profilo intorno al bordo di attacco e l'angolo del bordo di uscita.

È comprensibile peraltro che le caratteristiche aerodinamiche di un profilo possono essere alterate se si modifica, anche di poco, la sua forma.

Per certi profili i costruttori di aerei hanno spesso proposto significative modifiche della geometria di profili esistenti per cercare di conseguire un vantaggio nel comportamento aerodinamico di un'ala in specifiche condizioni.

Si possono pertanto trovare, in letteratura ed anche operativi, varianti di un profilo base ottenute modificando la forma del bordo di attacco (tipicamente circolare, parabolico oppure ellittico) per influire sull'espansione, combinati con valori diversi dell'angolo del bordo di uscita per influire sul recupero di pressione. Anche distribuzioni di spessore leggermente differenti rispetto a quelle codificate sono state spesso disegnate ed impiegate.

11.4 Determinazione teorica del comportamento dei profili

Come si può calcolare teoricamente il comportamento aerodinamico di un profilo alare?

Le equazioni che si usano normalmente per descrivere il moto di un oggetto in un fluido, le equazioni di Navier-Stokes, sono piuttosto complicate da studiare e risolvere.

In Aeronautica spessissimo si approfitta del fatto che la descrizione del campo di moto retta dalle equazioni di Navier-Stokes è ridondante, e si può molto più agevolmente lavorare con modelli più semplici. Il comportamento di un profilo alare, in molte condizioni di volo, può essere in buona parte desunto dall'analisi della soluzione non viscosa, quella Euleriana nel caso generale. Informazioni ulteriori possono dare una conoscenza completa del comportamento del profilo a partire dalla soluzione Euleriana, ad esempio mediante la determinazione delle correzioni viscosse secondo il modello di strato limite.

Giova qui chiarire che se il comportamento in crociera di un aeromobile non è determinabile in modo sufficientemente accurato secondo un modello "Eulero + strato limite" questo vuole dire che l'aeromobile non è stato correttamente disegnato.

SOLUZIONE NON VISCOSA

Se si confina il funzionamento dell'aeromobile -e quindi dei suoi profili alari- a numeri di Mach più bassi del numero di Mach critico inferiore (campo subsonico) allora per il moto non viscoso ci si può riportare in qualche modo al modello di moto retto dall'equazione di Laplace, che quando il numero di Mach tende a 0 fornisce la soluzione esatta. Fissata la geometria del profilo ed il valore del coefficiente di portanza (oppure dell'angolo d'attacco), sono fissate le condizioni al contorno di un problema di Neumann; imponendo una condizione di chiusura al bordo di uscita che garantisca la regolarità del flusso si può ottenere il campo di moto ideale². Ciò premesso, è chiaro che il comportamento in ambito non viscoso del profilo dipende da

- geometria (spessore e curvatura)
- coefficiente di portanza (oppure angolo di attacco).

Gli effetti di spessore, curvatura ed angolo di attacco possono anche essere valutati separatamente se ci si limita a coefficienti di portanza (angoli di attacco) piccoli o medi: l'approssimazione che si ottiene trascurando l'accoppiamento degli effetti è, in genere, abbastanza soddisfacente in quanto i profili alari con cui si tratta sono poco spessi e poco ricurvi.

In realtà il comportamento in ambito non viscoso di un profilo può essere intuitivamente motivato da semplici considerazioni. Si usa spesso dire che un profilo ad incidenza positiva porta perché la linea di corrente che lambisce la superficie sul lato superiore è a pressione mediamente più bassa di quella relativa alla linea di corrente che lambisce il ventre: questo perché il punto di ristagno anteriore sta sul ventre del profilo, quindi lungo la linea di corrente del dorso le particelle percorrono uno spazio maggiore, ed inoltre le particelle che lambiscono la superficie sul dorso e sul ventre impiegano più o meno lo stesso tempo per andare dal punto di ristagno anteriore al bordo di uscita (in ambito viscoso, ma in assenza di separazione, questo fatto è bene verificato per le particelle che scorrono appena all'esterno dello strato limite).

CONSIDERAZIONI LEGATE AGLI ASPETTI VISCOSI: LO STRATO LIMITE

Come indicato dalla teoria dello strato limite, in prima (e spesso buona) approssimazione la valutazione degli effetti viscosi può essere fatta con calcoli di strato limite, separatamente sul dorso e sul ventre del profilo, a partire dal punto di ristagno anteriore e fino al bordo d'uscita, una volta nota una soluzione non viscosa.

Occorre tenere ben presente che buona parte della progettazione aerodinamica è collegata al problema del controllo (e quindi dell'accurata determinazione) della transizione. Informazioni circa il comportamento dello strato limite in termini di spessore, punti di transizione e separazione, coefficiente di attrito ed altro possono essere ottenute se si conosce l'effetto sullo sviluppo dello strato limite di

²Per i profili delle serie NACA una buona approssimazione della soluzione (esatta) retta dall'equazione di Laplace è il metodo NACA, che pertanto si può assumere come punto di partenza per un'analisi non viscosa.

- gradiente di pressione, che dipende, per una certa geometria, solo dall'angolo di attacco;
- turbolenza iniziale;
- stato di finitura (rugosità, contaminazione) e vibrazioni della superficie del profilo;
- numeri di Reynolds e Mach (nel caso subsonico solo del numero di Reynolds).

Una volta fissati

- un livello di turbolenza della corrente (per il volo, determinabile dalle condizioni meteorologiche),
- una certa geometria, insieme con il suo stato di finitura superficiale,
- la velocità e la quota di volo, quindi il coefficiente di portanza del velivolo (e dunque il coefficiente di portanza di ciascun profilo), ed i numeri di Mach e Reynolds,

si possono fare alcune considerazioni generali che riguardano gli effetti che la viscosità induce sul comportamento del profilo, e quindi trarre utili indicazioni sul suo comportamento effettivo.

1. LA TRANSIZIONE certamente, in campo bidimensionale, avviene a valle della cresta (il punto di massimo scorrimento), e tanto prima quanto più elevati sono il picco di espansione ed il numero di Reynolds. La transizione viene spesso artificialmente fissata (meglio, si fa in modo che non possa occorrere oltre un certo punto), con l'uso dei cosiddetti turbolatori; una maggiore rugosità superficiale (da contaminazione da insetti o formazione di ghiaccio, ad esempio) ovviamente anticipa la transizione.
2. LA SEPARAZIONE DEL FLUSSO può avvenire
 - in flusso turbolento, dopo la transizione, verso il bordo di uscita, oppure
 - in flusso laminare, anche poco a valle della cresta.

Ovviamente in questo secondo caso non c'è stata transizione, e la corrente

- può riattaccare (turbolenta) dopo la separazione (si parla di bolla laminare), oppure
- può rimanere separata fino al bordo di uscita (situazione pericolosa!).

Per quanto detto al punto 1. al crescere del numero di Reynolds la tendenza alla separazione in flusso laminare si riduce: per questo è a basso numero di Reynolds ($Re < 500000$, tanto per dare un'idea) che il comportamento dei profili presenta aspetti molto delicati, e di difficile previsione teorica. L'aerodinamica dei bassi numeri di Reynolds è complicata perché è molto difficile avere sperimentazioni in galleria del vento efficaci, tali da fornire dati su cui fondare un buon metodo di previsione del flusso viscoso.

3. LA PRESENZA DI ZONE SEPARATE comporta un aumento di resistenza aerodinamica in forma di resistenza di pressione, determinata dalla scia spessa ed a bassa pressione (rispetto alla pressione asintotica). Inoltre quando la separazione è estesa l'ispessimento della zona separata diventa tale da mettere in ombra la parte poppiera del profilo, con una conseguente "perdita" di curvatura: si verifica allora l'abbattimento del picco di espansione sul bordo di attacco, con relativa caduta di portanza (ed è questa la genesi del fenomeno dello stallo).
4. LO SFORZO TANGENZIALE ALLA PARETE è più grande -a parità di spessore dello strato limite e di velocità esterna- se lo strato limite è turbolento: pertanto in generale la resistenza di attrito sarà maggiore al crescere della parte di strato limite turbolento. Però non è assolutamente detto che per avere minore resistenza sia consigliabile mantenere il più possibile lo strato limite laminare sul profilo, a causa del pericolo della separazione laminare.

Tutto ciò premesso, si può cercare di capire alcuni aspetti fondamentali del comportamento di un profilo alare: si tratta comunque di informazioni di massima, ed occorre che caso per caso sia evidenziato in ogni situazione l'effetto del numero di Reynolds (nonché, in generale, del numero di Mach) e di tutti gli altri parametri di volo.

11.5 Comportamento dei profili alari *low speed*

EFFETTO DELL'ANGOLO D'ATTACCO

Riferendosi ad un profilo simmetrico, ad angolo di attacco nullo il flusso è simmetrico, la portanza è nulla. Ad incidenza il flusso perde la simmetria.

La portanza aumenta con l'angolo di attacco fino ad un certo angolo detto di stallo, a partire dal quale la portanza decresce (lo stesso si ha, reciprocamente, nel volo rovescio). Lo stallo è un fenomeno legato alla viscosità, e dunque l'angolo di stallo dipende principalmente dal numero di Reynolds. Molte delle considerazioni relative allo stallo sono state proposte nel Cap. 9.

In un certo intervallo dell'angolo di attacco la portanza varia abbastanza linearmente (si parla di campo lineare): la cosiddetta curva di portanza è in quest'intervallo una retta, il cui coefficiente angolare cresce con lo spessore (almeno per spessori non troppo grandi) a partire dal valore $\sim 2\pi/\text{radiante}$ (ossia $\sim .110/\text{grado}$). Grosso modo, la curva di portanza è rettilinea finché sul profilo non compare una separazione del flusso al bordo di uscita (sul dorso o sul ventre, rispettivamente ad incidenze positive o negative).

AL CRESCERE DELL'INCIDENZA, in campo lineare, il punto di ristagno anteriore tende a spostarsi sul ventre verso il bordo di uscita (l'ascissa del punto di ristagno è proporzionale al quadrato dell'angolo d'attacco). Quindi sul dorso la cresta si sposta in avanti e lo scorrimento massimo aumenta (il picco di espansione anticipa e si innalza): di conseguenza si riduce la regione di espansione ed i gradienti di pressione lungo la superficie diventano più elevati. Sul ventre succede l'opposto. Oltre il tratto lineare della curva di portanza (al comparire della separazione) questi effetti si riducono, e la distribuzione di pressione presenta il tipico plateau di pressione in corrispondenza della regione separata. A partire dall'angolo di stallo il picco di espansione non aumenta più (allo stallo il valore del coefficiente di pressione minimo è di -14 circa), anzi tenderà a decrescere.

EFFETTO DELLO SPESSORE

Ad angolo di attacco nullo questo effetto può essere desunto a partire dalla distribuzione di spessore dei profili NACA direttamente dalle tabelle relative allo spessore (flusso simmetrico, $C_l = 0$): si vede che al crescere dello spessore lo scorrimento massimo aumenta, non linearmente, sul dorso e sul ventre. Applicando poi il metodo NACA, fissato il C_l o l'incidenza, si può poi verificare che in ogni caso al crescere dello spessore la differenza di scorrimento tra dorso e ventre si accentua.

In generale, per classi di profili simili (la classe delle ellissi, o i profili NACA di una certa famiglia, ad esempio) il gradiente della retta di portanza cresce al crescere dello spessore, a partire dal valore di lastra piana; la crescita è strettamente collegata al flusso ideale. Questo vale fino a spessori non troppo elevati (minori del 20 % circa), oltre i quali si possono avere effetti di separazione poppiera anche a incidenze piccole, con conseguente decrescita del gradiente della retta di portanza.

Ci si chiede ora cosa accade se si modifica un certo profilo spostando l'ascissa di spessore massimo all'indietro. Giova osservare preliminarmente che se si lascia invariata la superficie interna del profilo si ha una riduzione del raggio del bordo di attacco. Nel caso di flusso simmetrico (profilo simmetrico ad angolo d'attacco nullo) la regola è che la cresta si sposta all'indietro: ciò significa che si estende la regione di espansione (e si riduce la regione di compressione).

Nel caso di flusso ad incidenza il bordo di attacco più aguzzo determina picchi di espansione (e dunque gradienti di pressione) maggiori, e più veloci spostamenti del picco verso il bordo d'attacco: la cosa ha una forte implicazione sulle prestazioni del profilo legate agli aspetti viscosi, principalmente sulla prestazione di stallo.

EFFETTO DELLA CURVATURA

L'introduzione di una curvatura (linea media curva) determina l'esistenza di un angolo di attacco per il quale la portanza è nulla (angolo di portanza nulla), pur non essendo il flusso simmetrico: a titolo di esempio si può vedere la relativa distribuzione di pressione dall'applicazione per $C_l = 0$

del metodo NACA ad un profilo NACA non simmetrico. A curvatura positiva (freccia massima verso l'alto) corrisponde un valore negativo dell'angolo di portanza nulla³.

L'aumento di curvatura del (la linea media del) profilo determina un aumento (di segno negativo) dell'angolo di portanza nulla (la retta di portanza si sposta a sinistra).

Per tutti i profili esiste poi un angolo di attacco detto ideale (che è nullo per i profili simmetrici) al quale il flusso presenta i gradienti di pressione mediamente più limitati e regolari: pertanto

- un profilo simmetrico lavora in condizioni ideali ad angolo d'attacco nullo;
- i profili di un'ala che deve essere portante (l'ala di un velivolo in crociera, ad esempio) devono essere curvi per lavorare in condizioni ottimali ad un valore del coefficiente di portanza molto prossimo a quello ideale.

L'angolo di portanza nulla e l'angolo di attacco ideale dipendono in modo molto marginale dalla distribuzione di spessore: essi sono una proprietà della linea media.

È abbastanza intuitivo che un profilo a curvatura positiva (freccia verso l'alto) avrà il coefficiente di portanza massimo più elevato nel volo dritto rispetto a quanta accade nel volo rovescio: quindi la curva di portanza si sposta verso sinistra ed in alto al crescere della curvatura.

La posizione di freccia massima non può essere spostata troppo all'indietro perché la compressione poppiera sarebbe troppo forte, con pericolo di separazione anticipata; valori della freccia massima troppo elevati danno lo stesso inconveniente. Per i profili alari che lavorano in aria libera la freccia massima è dell'ordine del centesimo della corda (il valore di .06 a cui sono riferite le linee medie NACA a 4 cifre è in effetti un valore elevatissimo!). Per applicazioni a flussi confinati, ad esempio per le palette a schiera delle macchine rotanti, la curvatura assume valori molto più grandi, fino al 30% della corda ed oltre.

11.6 Funzionamento dei profili per il volo subsonico

Si illustrano qui le caratteristiche di funzionamento dei profili alari in tutte le condizioni quando il moto non è molto veloce, senza che si formino onde d'urto sulla superficie.

CARATTERISTICA DI PORTANZA

Incidenze basse e medie - crociera

Lo strato limite è sempre attaccato, il profilo lavora nel tratto lineare della caratteristica di portanza. L'effetto del numero di Reynolds sulla portanza è molto limitato, ed infatti la distribuzione di pressione è molto simile a quella Euleriana, che si può ottenere in modo abbastanza semplice e preciso (metodi esatti o metodi approssimati ma accurati, come il metodo NACA).

Incidenze medio alte - approccio alla pista

La separazione è limitata ($x_{sep} > 95\%c$), la caratteristica di portanza si incurva, esiste una significativa differenza tra la distribuzione di pressione Euleriana e quella effettiva, per calcolare la quale (a partire da una soluzione Euleriana esatta) i metodi teorici sono abbastanza accurati, ma non semplici: l'effetto del numero di Reynolds sulla portanza è quindi significativo.

Incidenze alte - atterraggio, stallo

La separazione si sposta più o meno bruscamente verso la prua del profilo, anche per piccoli aumenti dell'angolo di attacco (tipicamente, $x_{sep} < 80\%c$). La caratteristica di portanza esibisce un massimo. La differenza tra la distribuzione di pressione Euleriana e quella effettiva è sostanziale: il deficit di portanza rispetto al valore Euleriano è causato dalla presenza di una estesa separazione sul profilo, ma numericamente deriva dalla conseguente sostanziale diminuzione (rispetto al valore

³In campo supersonico (e quindi per profili supersonici...) accade il contrario: a curvatura positiva corrisponde un valore positivo dell'angolo di portanza nulla

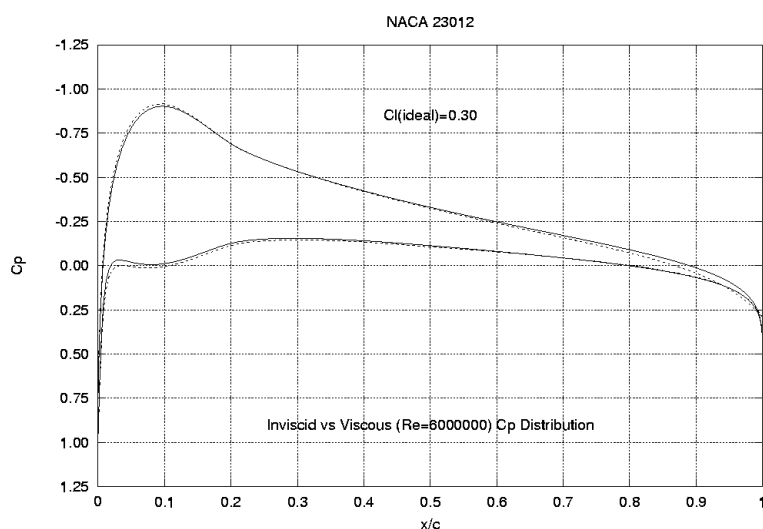


Figura 11.2: Crociera: confronto tra soluzione Euleriana e soluzione viscosa

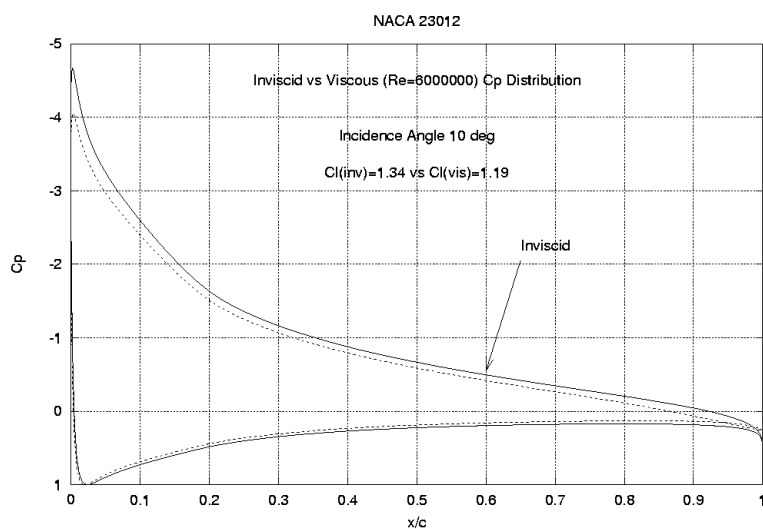


Figura 11.3: Incidenza media - confronto tra soluzione Euleriana e soluzione viscosa

Euleriano) del picco di espansione nella regione del bordo di attacco. La zona di flusso separato determina, in una accezione di corpo equivalente secondo lo schema di Prandtl, un inspessimento del profilo, a partire dal punto di separazione, che non è piccolo, come nella parte di profilo in flusso attaccato: esso anzi è di dimensioni confrontabili con il massimo spessore. Il profilo perde, in pratica, la curvatura a partire dal punto di separazione, nello schema equivalente la corrente al bordo di uscita abbandona il profilo lungo la bisettrice del profilo equivalente, e quindi devia di meno: la conseguenza è chiaramente una minore rotazione intorno al bordo di attacco (il punto di ristagno anteriore nello schema equivalente è più a monte), e si ha una riduzione dell'espansione. Quindi allo stallo è il bordo di attacco che porta di meno pur essendo il flusso separato a poppa, anzi la leggera espansione tipica delle regioni separate determina un maggior contributo alla portanza della regione del bordo di uscita (sempre rispetto alla soluzione Euleriana!): si genera quindi in alta portanza anche un'importante variazione del momento, ovviamente a picchiare. Il numero di Reynolds influisce in modo decisivo sul valore massimo del coefficiente di portanza.

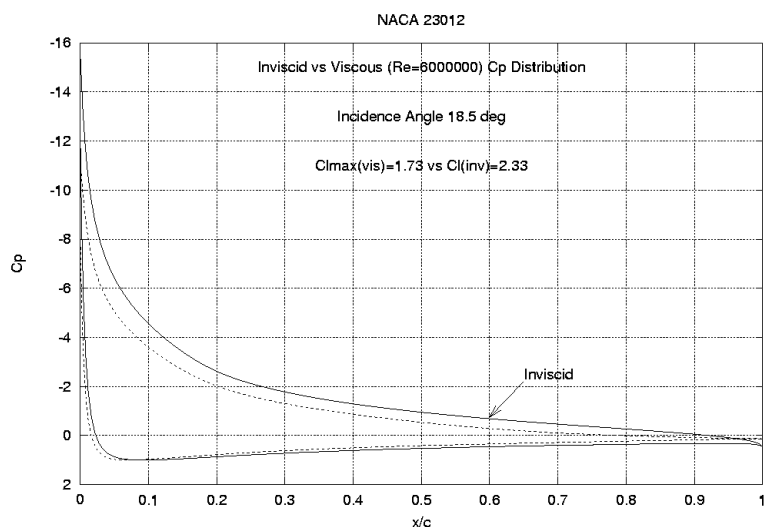


Figura 11.4: Stallo - confronto tra soluzione Euleriana e soluzione viscosa

CARATTERISTICA DI RESISTENZA

La resistenza dei profili alari in campo subsonico ha i due contributi viscosi di attrito e di pressione. La resistenza di pressione è molto piccola in assenza di separazione. Il discorso della resistenza va impostato diversamente a seconda del campo in cui il profilo lavora.

Incidenze medie ed elevate

Il coefficiente di resistenza cresce costantemente al crescere dell'incidenza, e quindi anche allo stallo. La resistenza di attrito non cambia troppo, comunque. L'aumento di resistenza è da imputarsi esclusivamente alla maggiore estensione della regione separata e, quindi, al conseguente scostamento della distribuzione di pressione effettiva da quella Euleriana. In pratica nella regione di ristagno anteriore si genera una componente di forza in direzione della velocità asintotica che non è più equilibrata da una componente uguale ed opposta, come accade invece nella soluzione Euleriana: questo sia a causa della bassa pressione nella regione poppiera, sia per la perdita della forza di spinta del bordo d'attacco, (4.2.5).

Incidenze piccole - crociera

La resistenza è in questo caso essenzialmente di attrito in quanto non vi sono separazioni: essendo la soluzione Euleriana praticamente accettabile, la resistenza di pressione è molto piccola, in genere trascurabile. L'andamento della resistenza in funzione dell'angolo di attacco può essere complesso, e la curva caratteristica della resistenza in funzione della portanza può presentarsi in forme diverse, sostanzialmente riconducibili a due: assenza o presenza di una sacca laminare. Il ruolo che gioca la transizione è fondamentale.

11.7 La polare

PROFILI CONVENZIONALI

Il picco di espansione, e quindi la transizione su dorso e ventre, si trova abbastanza presto, entro il 10-15% del profilo; dunque ben oltre il 50% dello strato limite è turbolento. In crociera il valore della resistenza si aggira, tipicamente, intorno a 60 *Drag Count*. Un esempio di tale comportamento si ha per i profili NACA a quattro e cinque cifre.

Per significare la tendenza nel settore dell'Aviazione Generale nelle figure seguenti si riporta la geometria di un profilo concettuale di nuova generazione, insieme alle prestazioni stimate per

via teorica, Fig.11.7. La geometria del profilo base di un velivolo innovativo non dovrebbe essere molto diversa da quella qui riportata.

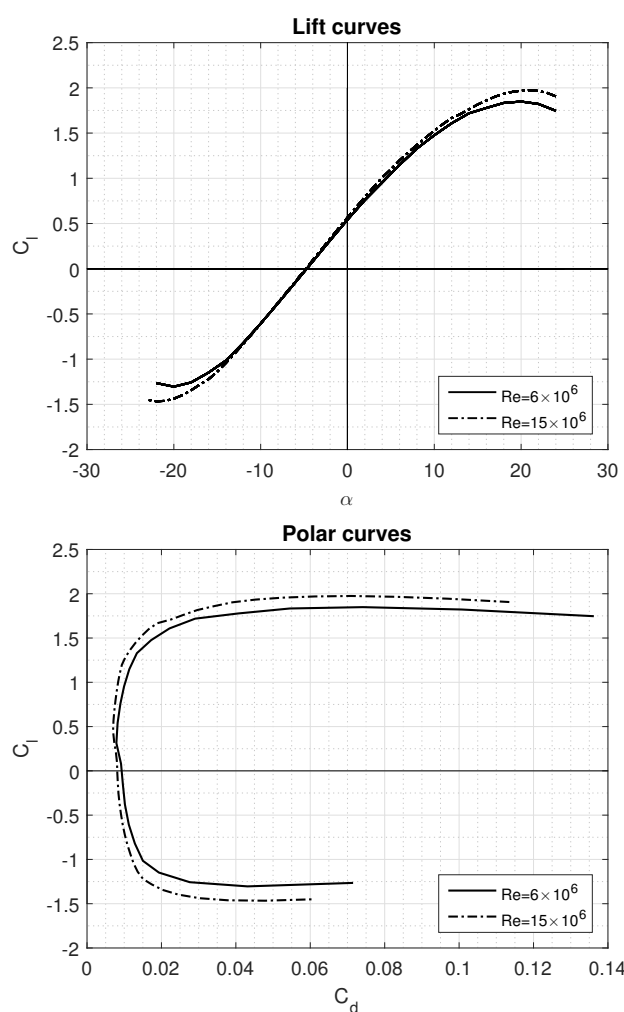
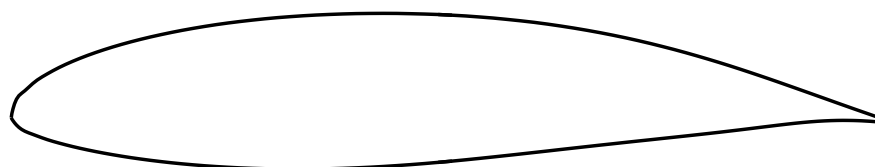


Figura 11.5: Un profilo concettuale di nuova generazione e le sue prestazioni aerodinamiche. Stima teorica (Xfoil, [2])

PROFILI LAMINARI

Tali profili sono progettati per lavorare in un preciso intervallo del coefficiente di portanza, in modo da avere sul dorso e sul ventre la transizione non prima di una fissata ascissa. In questo modo in quell'intervallo di C_l la regione di strato limite laminare è prefissata, e si riesce ad attingere valori del coefficiente di resistenza fino a 40 *Drag Count* (molto minori di un profilo convenzionale di uguale spessore percentuale). La polare presenta la cosiddetta sacca laminare: è in quella sacca che il profilo lavora in crociera. Al centro della sacca laminare si ha l'assetto detto ideale, o di

progetto. Tale risultato si raggiunge essenzialmente disegnando la geometria in modo da aver in crociera un flusso in espansione (sul dorso e sul ventre) fino all'ascissa fissata, e questo lo si ottiene

- 1) spostando verso il bordo di uscita l'ascissa di spessore massimo (ma in questo modo si assottiglia il bordo di attacco), e
- 2) disegnando la linea media in modo da avere il relativo carico basico (all'angolo di attacco ideale) costante fino all'ascissa fissata.

Ad assetti immediatamente precedenti quello dello spostamento in avanti della transizione si ha un "plateau" di pressione, o sul dorso o sul ventre.

La resistenza (tutta legata all'attrito) è praticamente costante in sacca: appena fuori sacca o sul dorso o sul ventre si ha il picco di espansione subito dopo il bordo di attacco, il punto di transizione scatta in avanti, verso il bordo di attacco, e si perde la condizione di bassa resistenza.

La generazione di un profilo laminare è complessa, in quanto lo strato limite laminare molto esteso ed il bordo di attacco abbastanza aguzzo possono caratterizzare in modo sfavorevole le prestazioni del profilo quando lavora al di fuori della sacca laminare (ad esempio, allo stallo, che può risultare troppo brusco). Tipici profili laminari classici sono i profili della Sesta Serie NACA. Si fa presente che non sempre questi profili si sono adoperati per le loro caratteristiche di bassa resistenza: piuttosto è stato il campo transonico che ha visto la più importante applicazione dei profili della Sesta Serie, in modo da avere in un certo intervallo del coefficiente di portanza (lo stesso della sacca laminare!) una relativamente piccola variazione del numero di Mach critico inferiore. Questa proprietà dei profili laminari, così come l'esistenza della sacca di bassa resistenza, deriva praticamente in modo esclusivo dalla qualità della soluzione Euleriana.

EFFETTO DEL NUMERO DI REYNOLDS: UN ESEMPIO

La Fig. 11.7 mostra quale può essere l'effetto del numero di Reynolds sulle prestazioni di un profilo alare. A numeri di Reynolds bassi -al giorno d'oggi di interesse sempre crescente- il comportamento aerodinamico è completamente diverso rispetto a situazioni "convenzionali": l'aerodinamica è dominata dalle bolle laminari, mentre previsioni teoriche ed indagini sperimentali possono essere molto difficoltose, e di scarsa affidabilità.

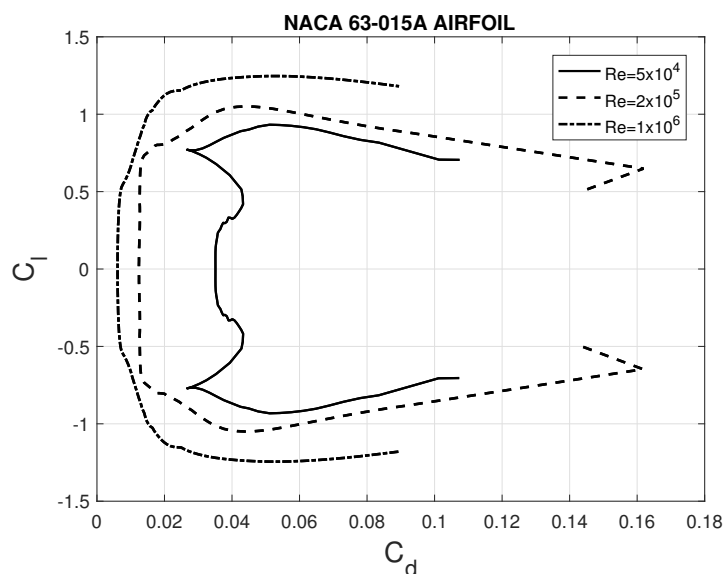


Figura 11.6: Effetto del numero di Reynolds sulle polari di profilo. Stima teorica (Xfoil, [2])

Capitolo 12

Metodi per l'alta portanza

12.1 Ala: curva di portanza e polare

L'ala ha una caratteristica di portanza che presenta un tratto lineare (i cui limiti dipendono dal numero di Reynolds di volo) ed un tratto non lineare, comprendente lo stallo. Un'eccezione è costituita dall'ala a delta alle basse velocità, che esibisce un comportamento del tutto diverso, [1]: la portanza aumenta più che linearmente, e cioè il gradiente della curva di portanza aumenta al crescere dell'incidenza e fino allo stallo, cfr. (9.3.2).

La polare di un'ala a basse incidenze può essere vista, [1], pag. 323, come costituita da un contributo di resistenza indotta, parabolica con il coefficiente di portanza, che si somma ad un contributo viscoso C_{D_0} abbastanza poco variabile: la polare resta quindi parabolica. Ad incidenze medie il contributo viscoso comincia a crescere, e diventa significativo quando sull'ala compaiono regioni separate: pertanto C_{D_0} diventa funzione di C_L , e l'approssimazione parabolica perde significato. Per l'ala a delta l'esistenza del vortice di grande scala aumenta ulteriormente sia la resistenza sia la portanza (fino allo stallo) rispetto all'ala convenzionale.

L'influenza del numero di Reynolds su portanza e resistenza può essere ritenuta simile a quella che si ha per il profilo.

12.2 Metodi teorici per la previsione dell'alta portanza

In alta portanza la presenza di significativi flussi separati sulle ali comporta caratteristiche del flusso molto complesse e varie, sia per i profili che per le ali, e non è possibile oggi -A.D. 2017- ottenere soluzioni ingegneristiche efficienti con l'ausilio di soli metodi teorici.

Alcune delle complessità si possono intuire considerando una configurazione di profilo multi-componente estesa, con slat e flap (singolo o doppio canale): gli aspetti chiave per una completa descrizione del flusso sono rappresentati dalle scie viscosive relative ai singoli componenti del profilo. I punti di separazione dalla superficie e le intensità di tali scie variano con l'incidenza e con tutti i fenomeni che innescano la transizione, in generale di diverso tipo nelle diverse regioni del campo di moto. A ciò occorre aggiungere gli effetti connessi alla confluenza di scie e strati limite, nonché la presenza di estese zone di flusso invertito, specie se a valle del componente principale del profilo. Questi aspetti sono poi fortemente influenzati dai numeri di Reynolds e di Mach.

Nella previsione dell'alta portanza, sia per i profili che, a maggior ragione, per le ali, non si riesce a prescindere dalla applicazione di criteri che si basano su una certa dose di empirismo.

Nella letteratura tecnica esistono numerose pubblicazioni (*Data Sheet*), ad esempio la collana *ESDU*, [77], fondate quasi esclusivamente sulla grande messe di dati sperimentali prodotta nel passato, prossimo e remoto, con prove di volo e nelle gallerie del vento di tutto il mondo, che propongono abbastanza semplici relazioni che consentono di predire il C_{Lmax} di una qualunque configurazione (ed il C_{lmax} di profili anche multilappati) in funzione delle caratteristiche geometriche, nelle varie condizioni di flusso, includendo l'influenza dei numeri di Reynolds e Mach. Tali metodi rispondono alla esigenza tipica della fase di avvanprogetto, quando cioè è generalmente richiesta una valutazione di massima ed in termini globali per le scelte da effettuare nella definizione della configurazione. La loro applicazione del resto è quasi sempre collegata alla definizione degli

elementi basilari del progetto: profilo, dispositivo di alta portanza, forma in pianta alare, etc. Nelle successive fasi di *design* vero e proprio è invece sentita la necessità di poter effettuare una previsione più specifica, riferita alla geometria in via di definizione: calcolazioni teoriche più spinte per determinare forze, momenti e campi di moto sono abbinate alle prime campagne di prova in galleria, generalmente su modelli semplici per verificare le assunzioni sui punti tipici del progetto, quale, ad esempio, è senz'altro da considerarsi quello della scelta del sistema di alta portanza.

Ovviamente in presenza di estese separazioni il modello Euleriano è del tutto inattendibile (al contrario di quanto vale per le condizioni di crociera, nelle quali non vi sono regioni di flusso separato, e non ci sono flap estesi...).

Due sono le tecniche numeriche in uso:

- l'Interazione Viscoso/Non Viscoso (VII) estesa all'alta portanza;
- la soluzione numerica delle equazioni di Navier-Stokes.

TECNICHE DI INTERAZIONE

La VII è implementata in codici "consolidati", ma con ridottissimo potenziale di sviluppo. Per il profilo si citano i codici *single-component* Xfoil (MIT) e *multi-element* MSES (MIT) e Multim (UNINA/AERITALIA); per geometrie complesse il riferimento è VSAERO (Analytical Methods).

Certamente utile in condizioni di crociera o con flusso debolmente separato, essa può essere validamente applicata fin quasi allo stallo, con risultati spesso accettabili per i valori sia del coefficiente di portanza massimo che dell'angolo di attacco di stallo. Cade però in difetto in presenza di estese separazioni: la necessità di particolari procedure di calcolo dell'interazione ha reso le tecniche VII abbastanza delicate, e l'estensione al post-stallo non si è mostrata affidabile.

Per i profili con stallo per separazione turbolenta del flusso a partire dal bordo d'uscita (ed, in particolare, per i profili ad un unico componente), è possibile citare più di una metodologia che consente in qualche modo di tener conto del progressivo estendersi della zona di flusso separato sulla superficie del profilo.

In particolare, è ampiamente dimostrato, [78], [79], [80], che la VII, in generale assai robusta ed efficace sino a condizioni di flusso moderatamente separato, non riesce a descrivere il *plateau* di pressione nella zona del flusso separato sul profilo e, in generale, di cogliere il valore di C_{lmax} ; quasi sempre si perviene a soluzioni con zone separate meno estese rispetto alla realtà.

Per ovviare a tali limiti varie tecniche sono state proposte nel tempo: in [81], ad esempio, si riporta l'artificio di introdurre una distribuzione di sorgenti addizionale, di legge assegnata, nella zona di flusso separato predetto, la cui intensità, calcolata con l'introduzione di opportune condizioni aggiuntive, permette di "forzare" l'estensione della zona di flusso separato in modo da fornire una migliore previsione della stessa e del valore del coefficiente di portanza massimo.

Altri artifici, più sofisticati, sono quelli che si propongono di modellare in qualche maniera il flusso nelle zone di separazione. In [82], [83], [84], [85] ad esempio, il modello prevede anche una legge per il profilo di velocità nella zona di ricircolo della scia a valle del punto di separazione.

Una citazione particolare meritano i metodi che sfruttano il principio della determinazione di un profilo equivalente, che si comporta, in flusso non viscoso, come il profilo in esame nel caso reale [86], [87], [88], [89]: tale 'profilo', Figg. 9.4, è costituito dalla parte della geometria in esame che è in flusso attaccato e dai tratti liberi delle scie *near* e *far*, secondo le definizioni già fornite in (9.1). Il procedimento di disegno del profilo equivalente è iterativo, basato sull'aggiornamento della geometria in dipendenza dallo spostamento a monte dei punti di separazione; il calcolo non viscoso viene comunemente effettuato con un metodo a pannelli imponendo condizioni al contorno di tipo misto (Neumann-Dirichlet) per introdurre realistici vincoli per le distribuzioni di pressione sulla scia. Rispetto all'accoppiamento viscoso/non viscoso, i metodi di profilo equivalente permettono in generale di ottenere una distribuzione di pressione più realistica sulla porzione di profilo con flusso separato, consentendo di ottenere una più veritiera valutazione della forza aerodinamica globale (non del solo C_L quindi, ma anche del C_D di forma e del C_M). Parametri determinanti, ed incogniti, nel processo iterativo per il disegno del profilo equivalente sono a) la previsione del punto di separazione turbolenta e b) la lunghezza della parte di scia che si modella: per la stima di entrambi ci si riferisce a criteri empirici.

È inoltre possibile trovare in letteratura tutta un'ampia serie di metodologie intermedie, più o meno farcite e condizionate dall'uso di criteri empirici dedotti e proposti dai vari autori, con limiti di applicabilità più o meno estesi per geometrie e condizioni di flusso diverse.

CFD - SOLUZIONE NUMERICA DELLE EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES

Per le applicazioni aeronautiche (e più in generale per applicazioni industriali) si impiega il modello RANS (2.15), nella versione U-RANS per flussi instazionari. Modelli più avanzati (*Large Eddy Simulation*, LES, ad esempio) al momento non mostrano un'adeguata solidità e vantaggi decisivi.

È certamente richiesta la disponibilità di adeguate relazioni ausiliarie: si pensi alle relazioni per il calcolo del flusso transizionale e dello sviluppo della turbolenza. Purtroppo, nonostante complesse indagini per la loro determinazione, sperimentale o teorica, ancora non esistono modelli "universali" di generale applicabilità in qualunque condizione di flusso separato.

Limitatamente ai profili alari, i tempi di calcolo sono in genere accettabili, ma le indicazioni sullo stallo sono alquanto inattendibili se non si ha la necessaria esperienza e non si compie un certo lavoro di indagine numerica, vista la forte dipendenza delle soluzioni da parametri numerici che occorre assegnare: insomma non c'è un automatismo per la previsione dello stallo. Occorre che la ricerca superi i due punti critici connessi con questo problema, così come per altri flussi complicati: la previsione della transizione e la modellistica della turbolenza.

ALA A DELTA A BASSA VELOCITÀ: L'ANALOGIA DI POLHAMUS

Il ricorso alla soluzione numerica delle equazioni di Eulero e di Navier-Stokes non sembra ad oggi uno strumento maturo per la previsione in fase di progetto delle complesse caratteristiche aerodinamiche dell'ala a delta, e cioè l'andamento superlineare della caratteristica di portanza, Fig. 12.1, e la complessa dinamica dello stallo. In particolare, la sensibilità del comportamento dell'ala alle piccole modifiche della forma del bordo di attacco (alle quali si ricorre per migliorare significativamente il comportamento dell'ala), è fuori della capacità di calcolo dei metodi numerici per flussi viscosi.

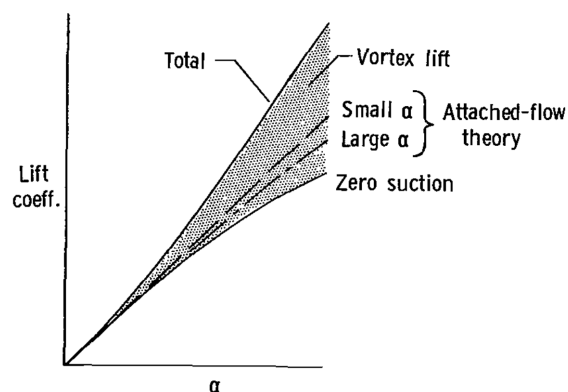


Figura 12.1: Caratteristica non lineare dell'ala a delta

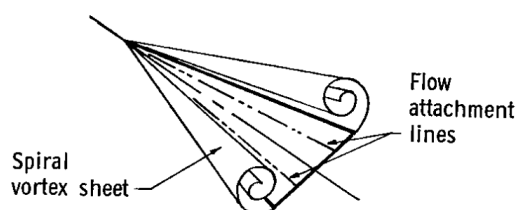


Figura 12.2: Schema del sistema vorticoso sull'ala a delta

In media ed alta portanza è presente un sistema vorticoso di grande scala estremamente complesso, schematizzato in Fig. 12.2, che impegna gran parte del dorso: si tratta di un flusso separato, esteso praticamente all'intero dorso dell'ala, che determina una forte depressione il cui effetto è la *Vortex Force*, e quindi le *Vortex Lift* e *Vortex Drag*. Questo sistema vorticoso, complesso anche a livello topologico, con la sua evoluzione al crescere dell'angolo d'attacco causa la progressiva perdita della suzione del bordo d'attacco (la forte depressione nella parte anteriore dell'ala), perdita che determina l'aerodinamica dell'ala a delta.

Il metodo per la previsione della curva di portanza di un'ala a delta impiegato a partire dal 1960, ed ancora oggi valido in avanprogetto, è basato sull'Analogia di Polhamus, [73], che modella la *Vortex Lift* a basse e medie incidenze, e, di conseguenza, consente di valutare il comportamento superlineare della portanza.

Polhamus propone l'idea che a causa della separazione del flusso intorno al bordo di attacco la forza di spinta, Fig. 12.3 (a) e (b), introdotta per i profili in (4.2.5) come importante risultato della Teoria del Profilo Sottile (e che esiste anche per superfici portanti sottili 3-D), ruoti di 90° verso l'alto, Fig. 12.3 (c). Questa rotazione, che Polhamus ipotizza avvenire intorno alla bolla di separazione presente nel flusso reale su un bordo di attacco sottile ad incidenza, "trasforma" un contributo *potenziale* di forza assiale (la spinta sul bordo di attacco) in una forza portante, di genesi essenzialmente viscosa.

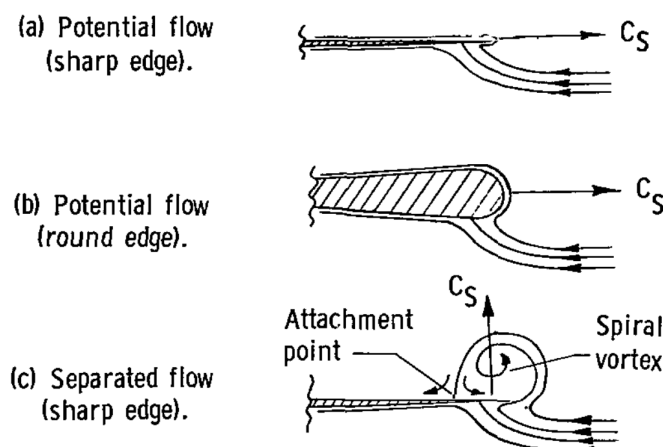


Figura 12.3: Rotazione della forza di spinta del bordo di attacco per un profilo secondo Polhamus

Riportato all'ala, Fig. 12.4, il contributo alla portanza legato alla rotazione della forza di spinta modella in maniera abbastanza soddisfacente la superportanza dell'ala a delta.

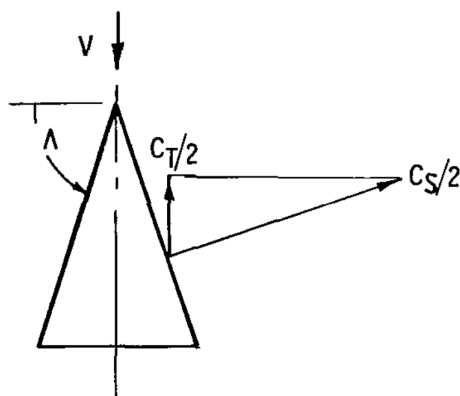


Figura 12.4: Analogia di Polhamus: la componente assiale di spinta C_T ruota di 90° verso l'alto

Va detto che successivi tentativi di modificare L'Analogia di Polhamus in dipendenza della forma in pianta e della forma del bordo di attacco si sono rivelati di scarsa generalità.

Per l'applicazione dell'Analogia è necessario ovviamente disporre di un metodo di calcolo per ali sottili in campo non viscoso, anche incompressibile: tipicamente, un metodo a reticolo di vortici, dalla cui soluzione occorre "estrarre" la forza di spinta per applicare l'Analogia¹.

Lo stallo dell'ala a delta avviene quando la tipica struttura vorticoso perde di coerenza, degradando progressivamente fino a scomparire. È questa la dinamica dello stallo dell'ala a delta, che avviene ad angoli di attacco molto elevati e con ottima qualità, essendo dolce e graduale.

¹La soluzione delle equazioni di Eulero, abbastanza complessa per superfici portanti a bordo di attacco aguzzo e ovviamente non in grado di catturare (almeno in linea di principio) la separazione del flusso, non è di grande ausilio: essa sarebbe di non semplice trattamento per l'estrazione della forza di spinta.

CONCLUSIONI

Nel confronto con le tecniche VII la soluzione delle equazioni di Navier-Stokes presenta l'indubbio vantaggio di una minore labilità delle procedure di calcolo. La tecnica VII per contro si conferma più veloce ("senza tempo" rispetto al calcolo RANS, sia in fase di *preprocessing* che in esecuzione).

Per quanto prima detto sulla complessità delle caratteristiche del flusso, un aspetto comune è che la possibilità di predire C_{lmax} (e C_{Lmax}) è legata alla capacità di applicare criteri empirici che, sulla base delle distribuzioni di pressione superficiali o dai valori che assumono certi parametri viscosi, diano un significativo *warning* al verificarsi di certe condizioni.

Una precisazione è d'obbligo su un dato fondamentale. Ancor oggi (A.D. 2017) la soluzione CFD non risolve il problema della determinazione a priori della transizione sulla base dei dati di volo. Nell'analisi dello strato limite -parte integrante delle tecniche VII- sono comunemente adottati "classici" metodi e criteri che garantiscono un'accurata previsione per la separazione, laminare e turbolenta, e per la transizione, e quindi un'analisi accurata delle caratteristiche delle bolle laminari. Basata su un enorme bagaglio di conoscenze per flussi di strato limite, questa tecnologia di calcolo ancora non è stata inserita in modo completo e soddisfacente nei solutori CFD: ma questo inserimento non è affatto semplice, dal momento che un solutore CFD "ignora" l'esistenza dello strato limite...

E pertanto l'aspetto chiave dell'esatta previsione della transizione -quando non imposta- viene affrontato solo dalla VII².

12.3 Metodi teorici per la previsione della resistenza

L'industria richiede, per diversi motivi, standard di accuratezza nella previsione della resistenza che fino a qualche tempo fa non interessavano, anche perchè di impossibile raggiungimento.

In assenza di flussi separati il calcolo della resistenza si presenta già da qualche decennio attendibile. Si tratta di un contributo viscoso, essenzialmente di attrito, e di un contributo di pressione, la resistenza indotta e l'eventuale resistenza d'onda. E pertanto in crociera, ad angoli di attacco piccoli o medi, le tecniche numeriche -VII e CFD- si presentano attendibili per la previsione delle polari e delle dipendenze dai numeri di Mach e Reynolds.

In condizioni di alta portanza, in presenza di flussi separati, diventa importante l'influenza della viscosità sulla resistenza di pressione, che aumenta, mentre la resistenza di attrito diventa piccola: l'accuratezza delle soluzioni numeriche consentita dall'attuale tecnologia di calcolo può dare utili informazioni per la portanza, mentre la previsione della resistenza -di un o.d.g. minore della portanza- difficilmente è attendibile.

Si è fatto ricorso allora a procedure di *post-processing*, [75, 76], per "depurare" la soluzione numerica da tutti gli errori e rendere attendibile il calcolo della resistenza: in concreto, si parla di eliminazione dalla soluzione dell'entropia spuria prodotta dalle procedure numeriche in regioni lontane dallo strato limite, regioni nelle quali l'entropia dovrebbe mantenersi costante. Con tali procedure, ancora in fase di messa a punto, si può ottenere una buona previsione della resistenza anche in prossimità dello stallo.

12.4 Valore limite del coefficiente di portanza dei profili

Si vuole qui introdurre il concetto di portanza limite, ossia del massimo valore ipotizzabile di forza portante per determinate condizioni di volo.

Sostituendo nella espressione della portanza

$$l = 0.5\rho_\infty V_\infty^2 C_{lcrif} \quad (12.1)$$

il termine della pressione dinamica $q_\infty = 0.5\rho_\infty V_\infty^2$ riscritto sulla base delle relazioni

²Tecniche ibride basate su un modello misto "Navier-Stokes/Strato Limite", [74], risultano oggi utili per la determinazione della transizione sulle ali a freccia, ma solo in condizioni di crociera (transonica), cfr. (8.2).

$$p = \rho RT, \quad M = \frac{V}{a}, \quad a = \sqrt{1.4RT} \quad (12.2)$$

come

$$q_\infty = 0.7p_\infty M_\infty^2 \quad (12.3)$$

si ottiene

$$\frac{l}{p_\infty} = 0.7c_{rif}(M_\infty^2 C_l) \quad (12.4)$$

La (12.4) indica chiaramente che, per un corpo di assegnate caratteristiche geometriche (superficie di riferimento c_{rif}), ad una data quota (p_∞), la portanza è funzione del prodotto $M_\infty^2 C_l$, in cui anche $C_l = C_l(M_\infty)$. La massima portanza realizzabile è dunque quella in corrispondenza del massimo valore di tale prodotto.

Ora dalla definizione di coefficiente di pressione C_p si ha

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{q_\infty} = \frac{p - p_\infty}{0.7p_\infty M_\infty^2} = \frac{1}{0.7M_\infty^2} \left[\left(\frac{1 + 0.2M_\infty^2}{1 + 0.2M^2} \right)^{3.5} - 1 \right] \quad (12.5)$$

mentre per profili molto sottili, poco ricurvi ed a piccola incidenza si ha

$$M_\infty^2 C_l = M_\infty^2 \int_0^1 (C_{pl} - C_{pu}) d\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{1}{0.7} \int_0^1 \left[\left(\frac{1 + 0.2M_\infty^2}{1 + 0.2M_l^2} \right)^{3.5} - \left(\frac{1 + 0.2M_\infty^2}{1 + 0.2M_u^2} \right)^{3.5} \right] d\left(\frac{x}{c}\right) \quad (12.6)$$

Il valore limite del C_l si può valutare ipotizzando il vuoto assoluto sulla superficie superiore ed il ristagno del flusso sulla superficie inferiore: si ha allora $p_u = 0$, $M_u = \infty$, e quindi, dalla (12.5)

$$C_{pu} = -\frac{1}{0.7M_\infty^2}, \quad M_\infty^2 C_{pu} = -1.43 \quad (12.7)$$

mentre nell'ipotesi di ristagno su tutta la superficie ventrale del profilo si ha $M_l = 0$, e pertanto

$$M_\infty^2 C_{pl} = 1.43[(1 + 0.2M_\infty^2)^{3.5} - 1] \quad (12.8)$$

Sostituendo la (12.7) e la (12.8) nella (12.6), si ha che il valore limite del prodotto $M_\infty^2 C_l$ è

$$(M_\infty^2 C_l)_{lim} = 1.43 (1 + 0.2M_\infty^2)^{3.5} \quad (12.9)$$

La (12.9) è ovviamente senza significato concreto, sia per le ipotesi di distribuzione uniforme (costante) di *zero pressure* sul dorso e di pressione di ristagno sul ventre del profilo, sia perché per valori supersonici del numero di Mach l'inevitabile compressione mediante onde d'urto non può essere considerata isentropica.

Il valore limite in campo subsonico del C_{lmax} si ottiene dalla (12.9) per $M_\infty = 1$

$$C_{lmax} = 2.71 \quad (12.10)$$

mentre il valore limite per la portanza può essere calcolato dalla (12.4).

In realtà, sulla base della vastissima sperimentazione condotta nel corso del tempo sui profili (con e senza dispositivi di alta portanza), si è visto (Mayer, [71], e Smith, [72]) che in corrispondenza del C_{lmax} un valore più attendibile di $M_\infty^2 C_{pu}$ da assumere è -1, ossia il 70% del valore (-1.43) ottenuto con l'ipotesi del vuoto perfetto (ovviamente tale valore si registra solo in un punto sul profilo, ossia quello del C_{pmin} , e non su tutta la superficie superiore come finora ipotizzato). Tale risultato sperimentale risulta verificato in particolare per i casi a $M_\infty > 0.4$.

Assumendo allora $M_\infty^2 C_{pu} = -1$ il limite superiore per $(M_\infty^2 C_l)_{lim}$ non è la (12.9) bensì

$$(M_\infty^2 C_l)_{lim} = 1.43 \left[(1 + 0.2M_\infty^2)^{3.5} - 1 \right] + 1 \quad (12.11)$$

che per $M_\infty = 1$ fornisce $C_{lmax} = 2.28$, valore più realistico di quello espresso dalla (12.10).

Per i casi a $M_\infty < 0.4$ si è visto che il massimo (minimo...) valore di C_{pmin} per i profili con dispositivi di ipersostentazione, ottenuto sperimentalmente in corrispondenza del C_{lmax} , è prossimo al valore del C_p critico (C_p^*), corrispondente ad un valore sonico della velocità ed ad un numero di Mach unitario; dalla (12.5) è

$$C_p^* = \frac{1.43}{M_\infty^2} \left[\left(\frac{1 + .2M_\infty^2}{1.2} \right)^{3.5} - 1 \right] \quad (12.12)$$

Per i profili *clean* (a singolo componente) il massimo valore di C_{pmin} misurato in galleria, in particolare a $M_\infty = 0.2$, è stato di circa -13 , che corrisponde al C_p^* se nella (12.12) si pone $M_\infty = 0.223$. La (12.12) per $M = 0.2$ fornisce invece il valore $C_p^* = -16.3$ mentre assumere che al picco di espansione si raggiunga il 70% del vuoto assoluto fornisce $C_{pmin} = -25$.

Le osservazioni di natura teorico-sperimentale riportate danno delle utili indicazioni per la previsione del C_{lmax} limite per un profilo. Si può infatti assumere, in prima approssimazione, che il C_{lmax} per $M < 0.4$ si ha quando $C_{pmin} = C_p^*$ (con la limitazione a -13 per i profili *clean*), e per $M > 0.4$ quando risulta $M_\infty^2 C_{pmin} = -1$. Con tale criterio la valutazione del C_{lmax} può anche essere effettuata con una semplice analisi non viscosa (ad esempio, un metodo potenziale a pannelli). Va ovviamente sottolineato che il criterio empirico ora introdotto indica, in generale, il valore limite del C_{lmax} : in particolare, esso risulta verificato soddisfacentemente per i profili di spessore inferiore al 12%. Non è in generale verificato per i casi in cui lo stallo viene raggiunto per separazione turbolenta dal bordo di uscita, come nel caso dei profili di elevato spessore.

12.5 Ali: portanza massima e portanza massima utile

Si vogliono ora evidenziare alcuni aspetti connessi allo stallo 3-D (ali) per mostrarne il differente approccio, come accennato nel paragrafo (9.1), rispetto al caso dei profili.

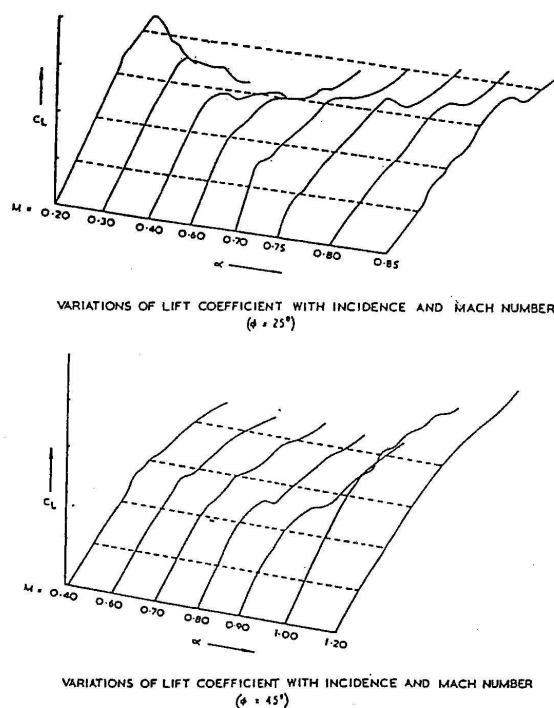


Figura 12.5: Curve di portanza al variare del numero di Mach e della freccia

In Fig. 12.5 sono riportati tipici andamenti delle curve di portanza $C_L = C_L(\alpha)$ per ali di moderato allungamento e diverso valore della freccia (25° e 45°), per vari valori di M_∞ . Tali

curve possono essere rappresentative di quelle che vengono rilevate con prove di galleria. Da tali diagrammi si evince abbastanza nettamente che per bassi valori di M_∞ il C_L ha un ben definito valore massimo che rappresenta il limite di portanza producibile per quell'ala. L'andamento della stessa curva è del tutto paragonabile a quella tipica per un profilo alare. Evidentemente la massima portanza effettivamente utilizzabile sarà determinata, in fase di progetto, dalle prestazioni, dalle qualità di volo e dai regolamenti di certificazione che si prevede di dover soddisfare, e sarà senz'altro inferiore a tale valore massimo. Al crescere di M_∞ si nota che tale valore massimo di riferimento diviene sempre più difficilmente individuabile. L'andamento irregolare delle curve suggerisce, inoltre, che fenomeni connessi alla separazione alle varie sezioni lungo l'apertura dell'ala renderanno sicuramente inferiore ai valori misurati sul modello la portanza effettivamente utilizzabile in volo. Se si considera infine il diagramma relativo all'ala con freccia più elevata, si vede che il limite di portanza producibile non può essere neppure rilevato sperimentalmente e che, sulla base dei valori di C_L e M in gioco, la massima portanza utilizzabile sarà determinata dal verificarsi dei fenomeni connessi al raggiungimento dei limiti locali di *buffet*.

In fase di progetto, come già evidenziato in precedenza, occorre garantirsi che il velivolo abbia un comportamento stabile allo stallo, quando si manifesta, in generale, un incremento di resistenza che fa diminuire la velocità di volo e il valore della portanza, unitamente ad una variazione del momento di beccheggio dovuto allo spostamento del punto di applicazione della forza aerodinamica: dover rendere stabile intrinsecamente un velivolo (ossia fare in modo da ottenere allo stallo un automatico *nose down* che riduca l'incidenza di volo predisponendo il velivolo all'uscita dalla condizione di stallo) può significare dover ulteriormente rinunciare alla massima portanza producibile.

Infine si ricorda, senza entrare in dettaglio, che altri motivi di rinuncia alla portanza potenzialmente producibile sono costituiti dall'assicurare in ogni caso la funzionalità (efficacia) delle superfici di controllo (alettoni), dal garantire delle capacità di trim dell'equilibratore al manifestarsi del *nose down* di stallo e, per i velivoli con configurazione di coda detta a T , dalla possibilità di entrata in *deep stall* (superstallo).

12.6 Criteri empirici per la previsione dello stallo

Per il caso di profili con stallo da bordo d'attacco (bolle lunghe e corte) e per profili con flap ed, eventualmente, slat la previsione teorica del C_{lmax} è quasi del tutto demandata ai criteri empirici, applicati peraltro in modo a volte indipendente dai metodi teorici impiegati. Ad esempio, per un dato profilo che stalla per esplosione di bolla sul bordo d'attacco si ritiene valida l'analisi effettuata con una tecnica tipo potenziale/viscoso sino al valore di incidenza alla quale le relazioni empiriche in [90] predicono l'esplosione della bolla: si assumerà per il C_{lmax} il valore di C_l calcolato all'incidenza immediatamente precedente.

I criteri empirici descritti nel paragrafo (12.4) sono fra i più largamente utilizzati nell'ambito industriale. In particolare, i criteri basati sul C_p^* e sul 70% della *vacuum pressure* (criteri di A.M.O. Smith) sono delle relazioni molto semplici che, tuttavia, hanno un notevole campo di applicabilità. Il criterio del $C_{pmin} = -13$, che deriva dall'ipotesi di un'espansione fino al 70% del vuoto, è forse quello più largamente utilizzato anche se

- non prevede alcuna dipendenza dai numeri di Reynolds e Mach;
- non si applica a profili ipersostentati per i quali picchi del coefficiente di pressione anche di -22 sono stati sperimentalmente rilevati.

In generale, una configurazione di profilo con ipersostentazione raggiungerà lo stallo quando il primo elemento, sia esso lo slat o il *main* arriverà allo stallo. Infatti un flap risente del *downwash* prodotto dagli elementi che immediatamente lo precedono, per cui lavora ad una incidenza effettiva relativamente bassa, anche per un elevati angoli di deflessione.

Una interessante tecnica per estendere la validità del criterio del C_{pmin} viene proposta in [82], dove l'autore, sulla base delle osservazioni di una vasta mole di dati sperimentali e delle relative correlazioni, evidenzia la similitudine che si realizza sui vari elementi di un profilo, quando ciascuno di essi arriva allo stallo, relativamente alla distribuzione lungo la propria corda dei C_p normalizzati

rispetto al C_{pmin} dello stesso elemento. In particolare si osserva che tali curve, peraltro già molto simili fra loro, se normalizzate tendono praticamente a collapsare in un'unica curva all'aumentare del numero di Reynolds, e da tale circostanza si conclude che è ipotizzabile l'esistenza di un unico criterio per la previsione dello stallo da applicarsi, indipendentemente, sull'elemento anteriore (sia esso lo slat od il *main*) di una generica configurazione con ipersostentazione: si è individuato tale criterio in una relazione in funzione dei numeri di Reynolds e Mach riscontrata sperimentalmente allo stallo per la differenza tra il C_{pmin} ed il C_p al bordo d'uscita $C_{pt.e.}$ (*Pressure Difference Rule*), riportata in Fig. 12.6. Dal diagramma si vede che per valori elevati del numero di Reynolds (a partire da 5×10^6) e per $M_\infty \leq 0.2$ la suindicata differenza di pressione tende al valore limite di -14 . Per valori di $M_\infty > 0.2$ sembra invece più attendibile il criterio basato sul C_{pmin} che raggiunge il valore di -13 .

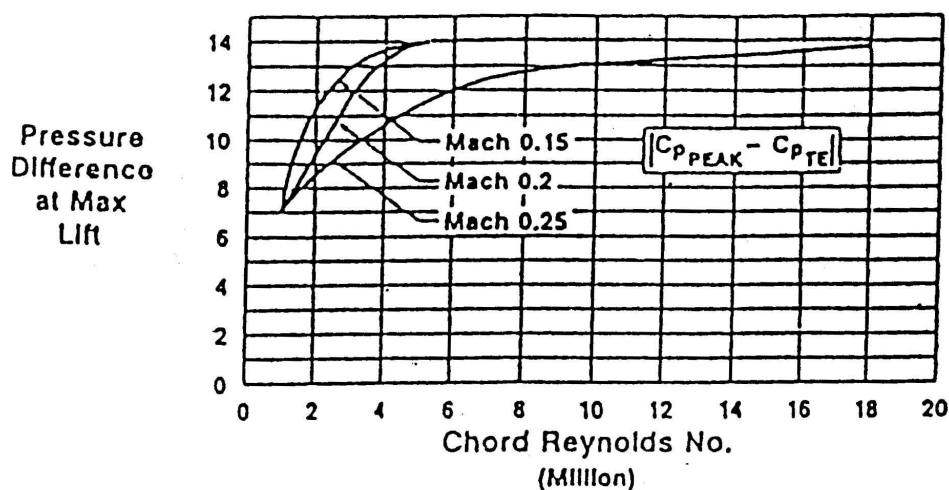


Figura 12.6: *Pressure Difference Rule* al bordo di uscita per la previsione del C_{Lmax} , da [82]

Particolarmente semplice ed efficace è l'applicazione della *Pressure Difference Rule* alla previsione del C_{Lmax} e del sentiero di stallo, sia per una semplice ala, che per una (molto complessa) configurazione completa di velivolo da trasporto analizzate con un metodo a pannelli 3-D. In ambo i casi, per una data ala con una certa distribuzione di corde in apertura si calcolano lungo l'apertura, assegnati M_∞ , Re_∞ e, dal diagramma di Fig. 12.6, il valore limite della differenza $|C_{pmin} - C_{pt.e.}|$. La determinazione del sentiero di stallo e, quindi, del C_{Lmax} avviene quindi sulla base dei valori calcolati con l'analisi potenziale della differenza $|C_{pmin} - C_{pt.e.}|$ lungo l'apertura alare.

A conclusione di questo paragrafo sui metodi per la previsione del C_{Lmax} è comunque doveroso sottolineare che, in generale, la corretta e sicura applicazione dei criteri di tipo empirico, per quanto semplici possano sembrare rispetto, ad esempio, ad un sofisticato modello *CFD*, richiede sempre la preventiva acquisizione di un certo grado di esperienza in attività di correlazione teorico-sperimentale.

12.6.1 Criteri empirici per la previsione del tipo di stallo di un profilo

L'interesse per questo argomento è notevole in quanto per la previsione numerica dello stallo di bassa velocità occorre sviluppare metodi in grado di prevedere in modo accurato, deterministico, flussi separati su superfici portanti, e questo ad oggi -A.D. 2017- non si sa ancora fare.

Pertanto si sono sviluppati e messi a punto diversi criteri empirici o semiempirici, di prezioso ausilio in fase di avanzoprogetto.

CRITERIO DI THAIN E GAULT

L'effetto combinato del numero di Reynolds e della geometria dei profili, qui individuata dall'ordinata all'1.25% della corda, sul tipo di stallo che si può manifestare, può essere desunta dal classico diagramma di Gault e Thain, riportato in Fig. 12.7, che, in quanto classico, può trovare significative eccezioni se si applica a profili di tecnologia nuova. Esso è stato sviluppato dall'analisi del comportamento allo stallo di un grande numero di profili di tutte le famiglie NACA.

L'aumento dello spessore del profilo determina un aumento del raggio di curvatura del bordo di attacco: il merito di Gault e Thain sta nell'aver individuato una precisa ordinata del dorso del profilo come significativa del legame tra spessore, numero di Reynolds e tipo di stallo.

Il criterio indica, tra l'altro, che una determinata geometria può realizzare differenti tipi di stallo a seconda del numero di Reynolds.

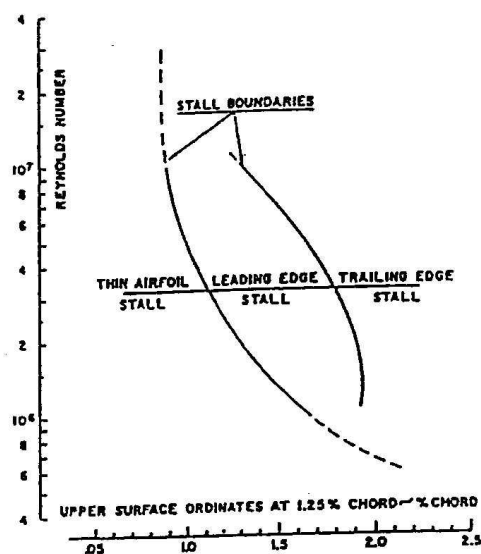


Figura 12.7: Effetto del numero di Reynolds sulle caratteristiche di stallo di un profilo - criterio di Thain e Gault

CRITERI DI GORADIA-LYMAN E DI CRABTREE PER LO STALLO DA BOLLA

Secondo Goradia e Lyman (Fig. 12.8) per valori di dU_e/dx calcolato alla separazione laminare che stanno al di sotto della curva permane la bolla, seguita dal riattacco turbolento, mentre per condizioni corrispondenti a punti al di sopra della curva si ha lo stallo laminare.

Secondo Crabtree invece l'esplosione della bolla avviene quando vale la relazione $\sigma > 0.35$ per il fattore di recupero di pressione definito come

$$\sigma = \frac{C_{p_{trans}} - C_{p_{sep}}}{1 - C_{p_{sep}}}$$

12.7 Determinazione dell'assetto critico e del cammino di stallo

Si è definito in (9.3.2) l'angolo di attacco critico α^* , angolo al quale una prima sezione alare stalla, con un coefficiente di portanza dell'ala $C_{L_{maxc}}$: si parla di stallo convenzionale dell'ala, essendo l'angolo di stallo effettivo ed il $C_{L_{max}}$ sicuramente più grandi di α^* e di $C_{L_{maxc}}$ in quanto lo stallo effettivo si manifesterà certamente quando la zona di flusso separato sulla superficie si sarà estesa per un certo tratto in apertura.

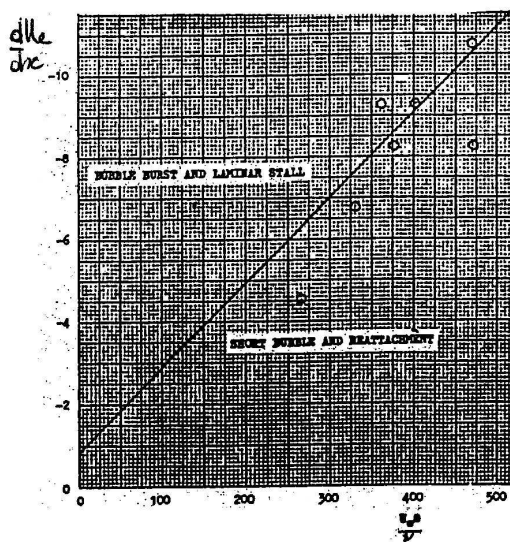


Figura 12.8: Il criterio di Goradia-Lyman per la previsione del tipo di stallo

Da un punto di vista progettuale la definizione convenzionale di stallo dell'ala e del relativo C_{Lmaxc} significa individuare il tratto della curva di portanza nel quale ci si scosta poco dall'andamento lineare (e quindi si può assumere che le associate derivate di stabilità $C_{L\alpha}$ e $C_{M\alpha}$ mantengano un valore pressoché costante, caratteristica questa particolarmente gradita nell'ambito delle prestazioni e delle qualità di volo); inoltre consente di riservarsi, cosa necessaria in ogni fase di progetto, un certo margine di sicurezza.

Si determina quindi la sezione che per prima raggiunge lo stallo, e dunque la condizione di stallo convenzionale. Incrementando ulteriormente l'angolo di attacco la regione stallata aumenta: si determina la legge che indica la propagazione in apertura dello stallo, detta sentiero di stallo dell'ala, fondamentale per la stima in avanprogetto del modo di stallare di un'ala.

Questo calcolo ha quali premesse indispensabili la conoscenza delle distribuzioni lungo l'apertura di carico basico ed addizionale, e quindi delle relative distribuzioni del coefficiente di portanza in condizioni di flusso attaccato, nonché del valore del C_{lmax} 2-D dei profili dell'ala, ovviamente associati al valore che il numero di Reynolds acquista localmente in dipendenza della corda, e che si rilevano dai profilari oppure si calcolano con qualcuna delle tecniche più o meno approssimate prima indicate. Per il calcolo del carico ci si può ricondurre ai metodi di Multhopp e di Weissinger³.

Il metodo che ora si descrive ipotizza che il carico cresca linearmente e che ciascun profilo sviluppi portanza lungo la sua retta di portanza: ciascuna di queste due ipotesi fa sì che il valore del C_{Lmaxc} stimato sia inferiore al C_{Lmax} reale, e questo conferisce un certo margine di sicurezza. Il metodo, semplice e veloce, ha un carattere prettamente ingegneristico, ma non ha un'alternativa deterministica in quanto -come già scritto- non si riesce ad oggi prevedere che cosa succede effettivamente alle prestazioni di un'ala in alta portanza.

Si fa riferimento alla Fig. 12.9. Si tracciano lungo l'apertura le distribuzioni del C_l basico C_{lb} , del C_l addizionale a $C_L = 1 C_{la1}$ e del C_{lmax} 2-D dei profili dell'ala. Si traccia quindi il diagramma della differenza $C_{lmax} - C_{lb}$, che indica il valore massimo che può attingere il carico addizionale prima dello stallo convenzionale.

Il valore minimo del rapporto $(C_{lmax} - C_{lb})/C_{la1}$ è il coefficiente di portanza massimo convenzionale dell'ala C_{Lmaxc} ; l'assetto che realizza questo valore del C_L è l'assetto critico α^* . La curva $C_{lmax} - C_{lb}$ e quella del coefficiente di portanza all'assetto critico C_{lc} sono tangenti (o quasi) in un punto la cui ordinata y_1 indica la sezione nella quale avrà inizio, convenzionalmente, lo stallo

³Per indicazioni preliminari su ali semplici si propone anche il metodo di Schrenk, eventualmente corretto secondo Pope & Haney

sull'ala.

Per conoscere in che modo si distribuiranno le corde che hanno superato la loro incidenza critica e costruire quindi il sentiero di stallo basta individuare i punti di intersezione tra la curva (fissa) $C_{l_{max}} - C_{l_b}$ e la curva (mobile) $C_l(\alpha)$ a partire da α^* .

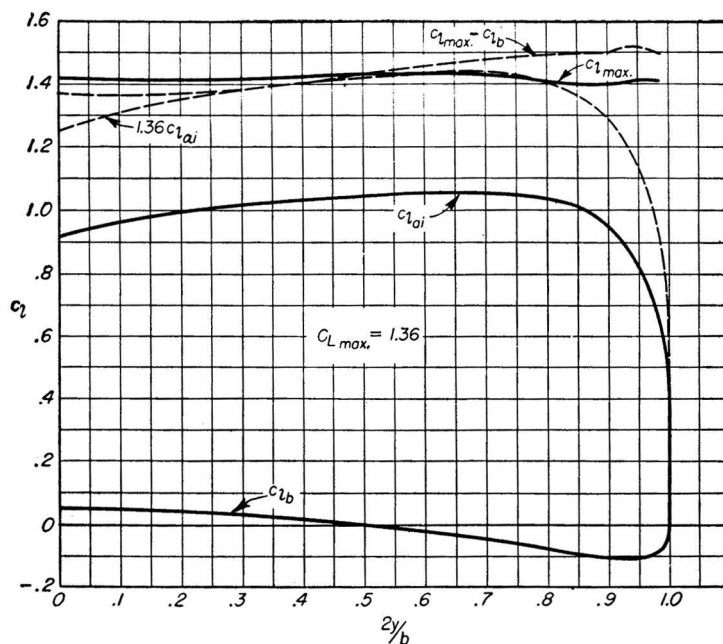


FIG. 16. Estimation of $C_{L_{max}}$ for example wing.

Figura 12.9: Il calcolo del sentiero di stallo - (da [11])

Il procedimento indicato è certamente approssimato per i motivi seguenti.

1. Si suppone che il carico aumenti linearmente con α (e quindi che l'ala lavori lungo la retta di portanza) anche in prossimità dello stallo: la conseguente sottostima di α^* conferisce sicurezza al metodo.
2. Si ammette che ciascuna sezione dell'ala lavori, in campo tridimensionale, fino allo stesso valore di $C_{l_{max}}$ che si realizza in flusso bidimensionale.
3. Il valore $C_{L_{maxc}}$ definito quale $C_{L_{max}}$ dell'ala può non avere altro significato che quello di una definizione, in quanto il coefficiente di portanza continua a crescere quando già una parte dell'ala è in stallo.

L'individuazione del sentiero di stallo mostra come per un'ala caratterizzata da forma in pianta, svergolamento e dal tipo di profili l'inizio e la progressione dello stallo possono dipendere dalle condizioni di volo attraverso il numero di Reynolds. Ed è semplice verificare quanto possa essere delicata la forma in pianta rastremata, specie per rastremazioni spinte. Inoltre lo spostamento dei carichi per l'ala a freccia convenzionale, valutabile anche tramite la (4.250), ne fa intuire la criticità e la conseguente necessità di introdurre un adeguato svergolamento. L'ala ellittica (che ha coefficiente di portanza costante lungo l'apertura) è critica in quanto il numero di Reynolds locale si riduce verso le estremità come le corde dei profili: con la conseguente riduzione del coefficiente di portanza massimo le estremità sono le prime a diventare critiche in alta portanza.

Un comportamento insoddisfacente allo stallo segnalato dal sentiero di stallo potrebbe essere corretto senza cambiare la forma in pianta introducendo uno svergolamento geometrico e/o aumentando la curvatura del profilo lungo l'apertura (con aumento dello svergolamento aerodinamico).

Capitolo 13

Sistema di ipersostentazione e comandi di volo

13.1 Introduzione

I sistemi di ipersostentazione sono comunemente definiti, in prima battuta, come quei dispositivi che consentono di aumentare il coefficiente di portanza massimo (C_{Lmax}) dei velivoli e, di conseguenza, diminuire le velocità minime di sostentamento (velocità di stallo, V_S). I comandi di volo sono preposti al controllo di tutte le fasi nel corso della missione di volo (cambiamenti di quota, direzione, velocità, ad esempio). Molti dei comandi di volo e dei sistemi di ipersostentazione si generano da modifiche della configurazione dell'aeromobile derivanti dall'azionamento di superfici mobili dell'ala o degli impennaggi.

Si può in generale affermare che i sistemi di ipersostentazione rappresentano, al pari di ogni altra superficie mobile (equilibratore, timone, alettoni, *spoiler*, etc.) un mezzo per alterare la curvatura, ed in taluni casi, anche l'estensione, delle superfici portanti e/o di controllo in modo da poter realizzare quelle variazioni nei coefficienti aerodinamici globali (in primo luogo il C_L , il C_D ed il C_M) rispetto alla configurazione *clean*, ossia con deflessione nulla delle superfici mobili, che consentono al velivolo di manovrare secondo i requisiti assunti nel progetto.

Nel quadro del miglioramento globale delle qualità degli aeromobili e della loro compatibilità con sempre più stringenti requisiti ambientali l'attività di ricerca verso tecnologie innovative in questo campo è costante.

Classificazione, principi di funzionamento, caratteristiche e prestazioni sono validamente trattati in [1] e [11]. In sintesi, esistono dispositivi fissi (*Gurney flap*, ad esempio), e mobili, quali *flap*, *slat*, *spoiler*, in certe applicazioni ci si basa sul controllo dello strato limite mediante aspirazione e soffiamento, oppure determinando l'incremento della circolazione mediante un getto orientato al bordo di uscita o mediante orientazione della spinta del motore.

In questo capitolo si evidenziano alcuni aspetti centrali dell'ipersostentazione. Ma va chiarito subito che si tratta di dispositivi comunque necessari. L'ipersostentazione comporta aggravio di peso e complicazioni progettuali; inoltre c'è la necessità di un processo di ottimizzazione in genere costoso, in quanto basato largamente su prove di galleria e prove di volo.

13.2 Considerazioni sui criteri di progetto del sistema di ipersostentazione

La definizione e la scelta del sistema di ipersostentazione per un dato velivolo viene effettuata, in primo luogo, sulla base di ben precisi requisiti di *performance* che si vuole assicurare al velivolo e, in parallelo, cercando di contenere il più possibile il conseguente aggravio di peso e di costi (di produzione e di *maintenance* in servizio) che l'introduzione del sistema inevitabilmente comporta. È bene rilevare tuttavia, che spesso le tecniche di realizzazione e produzione che costituiscono il

patrimonio culturale e di esperienza di un produttore aeronautico, possono costituire a loro volta dei requisiti di progetto: in tal caso il concetto di ottimizzazione, riferito all'intero velivolo o anche ad un particolare sistema, deve essere interpretato in senso molto più generale.

Nella definizione data poco più sopra si è fatto implicitamente riferimento ad una ben precisa tipologia di sistemi di ipersostentazione, e cioè a quella meccanica rappresentata cioè dalla deflessione di superfici mobili (*flap*, sia di bordo d'attacco che di bordo di uscita) che alterano la curvatura e/o l'estensione delle superfici portanti. Come riportato anche in [1], la variazione dei coefficienti aerodinamici ai fini dell'ipersostentazione può essere realizzata anche con tecniche di controllo dello strato limite (aspirazione e soffiamento) e con *jet flap*; esistono inoltre altri concetti, come ad esempio il controllo della circolazione con cilindri rotanti al bordo d'uscita (*power-assisted flap*, descritto in [97]), o la modifica fissa del bordo di uscita del *Gurney flap*, in grado di fornire un opportuno contributo alla portanza massima realizzabile.

Non ci si soffermerà in queste pagine sui principi di funzionamento da un punto di vista squisitamente aerodinamico dei vari sistemi di ipersostentazione. Con riferimento ai dispositivi di tipo meccanico ci si limita a ricordare che tutti i *flap* di bordo d'attacco, in pratica, ritardano la separazione del flusso consentendo di elevare l'angolo di stallo, mentre i dispositivi di bordo di uscita influenzano essenzialmente la circolazione totale. In Fig. 13.1 l'analisi del cambiamento dell'andamento della curva di portanza del profilo *NACA 64A010* con vari dispositivi di *flap* e *slat* consente di ritrovare perfettamente il concetto sinteticamente sopra esposto.

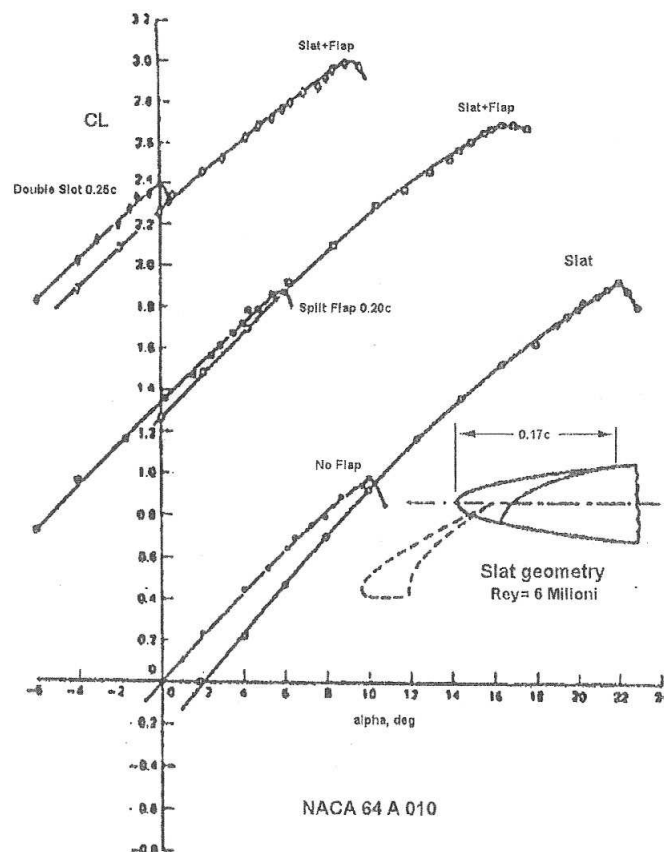


Figura 13.1: Curve di CL per il profilo NACA 64A010 con vari dispositivi di flap e slat

Si vuole però evidenziare che, data l'importanza non solo da un punto di vista delle prestazioni, ma anche dal punto di vista della sicurezza del volo, certe tecniche di ipersostentazione come

il controllo dello strato limite o i *jet flap*, pur essendo state dimostrate sperimentalmente come in grado di realizzare elevatissimi ΔC_{Lmax} , sono tuttora relegate a puri studi di fattibilità, con limitate applicazioni reali per lo più prototipali o militari. Infatti, a parte la complessità funzionale del sistema pneumatico di soffiamento e/o aspirazione e la sua tenuta in efficienza in esercizio (fori d'efflusso sempre liberi), bisogna anche considerare gli aspetti di sicurezza e di affidabilità che sono alla base di tutti i regolamenti di certificazione, ed in particolare di quelli civili (EASA e FAA).

Se un sistema di ipersostentazione è in grado di sviluppare un ΔC_{Lmax} di 8–9 e viene sfruttato in tutta la sua potenzialità, è anche facilmente intuibile cosa potrebbe accadere in caso di *failure*, quando cioè tutta questa portanza addizionale potrebbe venire improvvisamente a mancare. È evidente quindi che la possibilità di utilizzare su un velivolo civile un sistema di ipersostentazione non convenzionale (ossia non di tipo meccanico) con prestazioni spinte, è strettamente legata alla possibilità di realizzarlo con una affidabilità di funzionamento (probabilità di *failure*) pari, per lo meno, a quella di un attuale sistema di deflessione meccanica (*flap*).

13.3 Influenza dei sistemi di ipersostentazione sulle prestazioni del velivolo

Il requisito principale di cui si tiene conto nella definizione del sistema di ipersostentazione per un dato velivolo è costituito dalla necessità di realizzare un adeguato C_{Lmax} , tale cioè da consentire una accettabile velocità di stallo "1g", V_{S1} ,

$$V_S(1g) = V_{S1} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S} \frac{1}{C_{Lmax}}} \quad (13.1)$$

per ogni peso (W) e quota operativa (densità ρ dell'aria) del velivolo.

Comunemente, e per ovvie ragioni di sicurezza, i regolamenti prescrivono di operare ad una velocità minima superiore alla V_{S1} , in genere a $1.2V_{S1}$ per il decollo (JAR/FAR 25.107) e fra V_{L1} e $1.25V_{L2}$ (JAR/FAR 25.479) per il contatto con il suolo all'atterraggio, considerando i *flap* ed il carrello nella configurazione prevista per queste fasi. La V_{L1} coincide con la V_{S0} , ossia con la V_S al peso d'atterraggio da considerare in condizioni di ISA *sea level*, mentre la V_{L2} è la V_{S0} al peso di atterraggio e alla quota da considerare in *hot day* (ISA + 41°F). Da notare che in atterraggio, sino all'ostacolo di riferimento (50 ft), la velocità di approccio non deve essere inferiore a $1.3V_{S1}$ (JAR 25.119): da qui al contatto la velocità longitudinale (*ground speed*) deve diminuire sino alla V_{L1} o $1.25V_{L2}$, ma la velocità totale deve tener conto anche della componente di velocità verticale.

Considerando la fase di decollo, il requisito di $1.2V_{S1}$ si traduce in un C_L operativo pari a $1/1.44C_{Lmax}$. Nella fase di salita, le equazioni di equilibrio del moto uniforme, con riferimento alla Fig. 13.2, sono rispettivamente (con ovvio significato della simbologia usata):

$$\begin{aligned} L &= W \cos \gamma \\ T &= D + W \sin \gamma \end{aligned} \quad (13.2)$$

Dividendo membro a membro la seconda equazione con i termini della prima si ottiene

$$\tan \gamma = \frac{T}{L} - \frac{D}{W \cos \gamma} \quad (13.3)$$

e, per valori piccoli dell'angolo di rampa ($\sin \gamma \simeq \gamma$ e $\cos \gamma \simeq 1$, da cui $L = W$), si ha in definitiva:

$$\gamma = \frac{T}{W} - \frac{D}{L} = \frac{T}{W} - 1/\frac{C_L}{C_D} \quad (13.4)$$

Per ragioni di sicurezza, i regolamenti impongono che il velivolo nella peggiore delle situazioni, rappresentata dalla condizione di $W = MTOW$ (*Maximum Take-Off Weight* di progetto) e di piantata del motore critico, sia in grado di realizzare un prefissato valore del gradiente di salita, ossia di γ (JAR/FAR 25.121). Assumendo quindi di operare alla massima spinta disponibile, risulta evidente che il rispetto dei requisiti di prestazione, $V = 1.2V_{S1}$ e γ fissato, può avvenire con un

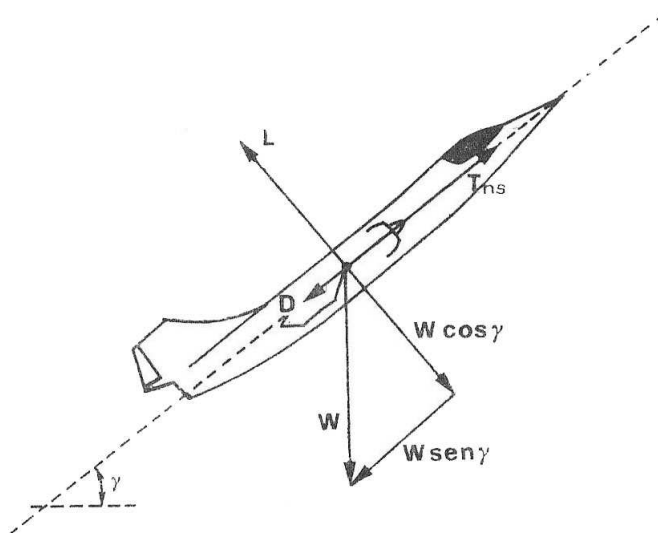


Figura 13.2: Moto di salita uniforme

sistema di ipersostentazione che oltre a fornire un adeguato C_{Lmax} garantisca pure un sufficiente livello di efficienza aerodinamica.

La capacità di incrementare il C_{Lmax} (e quindi di ridurre la V_S) rende anche possibile il contenimento della lunghezza della pista di atterraggio. Essendo però la lunghezza della pista in decollo, generalmente, superiore a quella di atterraggio -anche perché il MLW , *Maximum Landing Weight*, o peso massimo all'atterraggio, è generalmente inferiore al $MTOW$ (peso massimo al decollo) e le V_L (*Landing Speed*) sono, come detto, inferiori a $1.2V_{S1}$ - i requisiti in genere più stringenti per la scelta ed il progetto del sistema di ipersostentazione sono rappresentati dalle prestazioni in decollo ed in salita.

La scelta ottima del sistema di ipersostentazione e delle deflessioni da assumere per le fasi di decollo/salita può essere fatta a partire dalle polari del velivolo (ed in stima preliminare, quando cioè occorre selezionare il sistema di ipersostentazione da adottare, dalle polari del profilo alare dotato di vari sistemi di *flap/slat*) in funzione dell'angolo di deflessione del *flap*, considerando la condizione di $C_L = 1/1.44 C_{Lmax}$ e valutando il corrispondente valore C_L/C_D .

Si tenga conto che quando si opta per una soluzione *slat + flap* usualmente lo *slat* viene ad essere definito in un'unica deflessione che ottimizza la separazione sul *main component* del profilo, per cui la deflessione da scegliere per ottimizzare le fasi di decollo/salita riguardano solo il *flap* di bordo di uscita. Può anche accadere che, per casi particolari di decolli da aeroporti in alta quota e/o con temperature significativamente diverse dallo standard ISA, la configurazione ottima per il decollo sia rappresentata dal solo *slat* deflesso.

La Fig. 13.3 mostra un esempio di diagramma relativo proprio al caso, tratto da [98], in cui si è scelto un sistema di ipersostentazione formato da *slat + flap*. Siffatte curve vengono ad essere aggiornate nel corso dello sviluppo del progetto, man mano che si rendono disponibili i dati del comportamento aerodinamico dell'intero velivolo: in Fig. 13.3, per esempio, si avverte che i dati non tengono conto dell'influenza del carrello (che però è nulla considerando che lo stesso viene retratto subito dopo il distacco dal suolo), dell'effetto suolo e della asimmetria causata dal motore non operativo.

Nelle fasi di atterraggio, la capacità di attingere ad elevati C_{Lmax} consente di ridurre sia la velocità di avanzamento longitudinale all'impatto (*touchdown*) che la distanza necessaria per l'arresto (*full stop landing*).

La scelta della deflessione ottima del sistema di ipersostentazione per le fasi di approccio e atterraggio può essere fatta in maniera analoga a quanto visto per il decollo. A partire dalle equazioni di equilibrio, in cui si può ipotizzare di trascurare la spinta (in atterraggio il regime

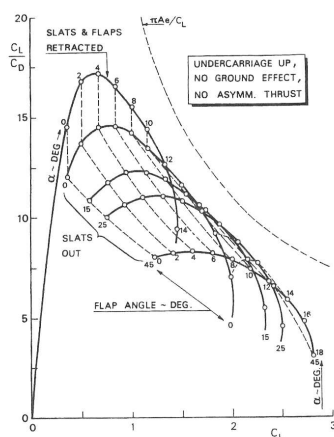


Figura 13.3: Polari velivolo tipo B727 con sistema di ipersostentazione formato da *flaps* e *slats*

motore selezionato è comunque superiore a quello minimo di *idle*, ed è tale da produrre un valore di spinta/potenza pari al valore di spinta/potenza che si ottiene in 8 secondi muovendo la manetta dalla posizione di *idle* al valore massimo, e ciò per garantire il gradiente di salita in *full operative engines* in caso di atterraggio abortito, JAR/FAR 25.119), e con riferimento alla Fig. 13.4, è

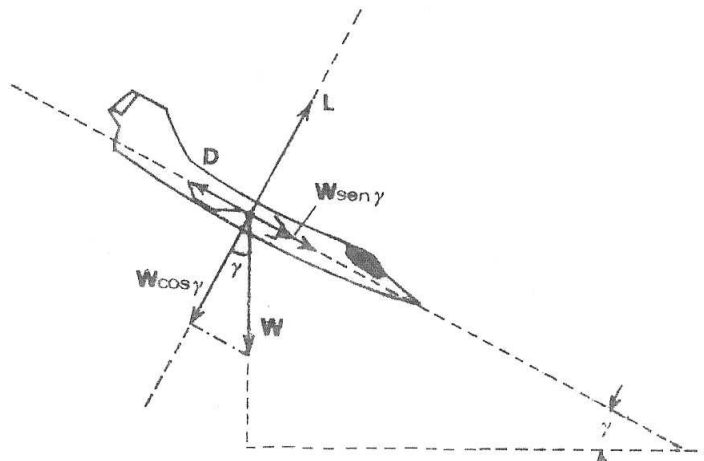


Figura 13.4: Moto di discesa uniforme

$$\begin{aligned} L &= W \cos \gamma \\ D &= W \sin \gamma \end{aligned} \quad (13.5)$$

e si ricava facilmente che il gradiente di discesa è dato da

$$\tan \gamma = \frac{D}{L} = \frac{1}{C_L/C_D} \quad (13.6)$$

Pertanto un'elevata resistenza può essere sfruttata per realizzare un approccio più ripido (e quindi più rapido).

Anche in questo caso tuttavia, occorre tener conto di alcuni vincoli. In primo luogo, il velivolo deve garantire (e dimostrare) delle qualità di volo, ossia capacità di controllo, accettabili alle alte

incidenze e basse velocità. In secondo luogo, deve essere dimostrato che in caso di atterraggio abortito la successiva riattaccata deve avvenire rispettando il requisito regolamentare sul gradiente di salita JAR/FAR 25.119, relativo questa volta alla condizione di *full flap*, per cui un certo livello di efficienza aerodinamica deve sempre essere conservato anche in atterraggio.

In questo caso, tuttavia, essendo i pesi in gioco generalmente più bassi ($MLW < MTOW$) e poiché i regolamenti permettono di considerare l'utilizzo di tutta la potenza disponibile (ossia non viene contemplata la eventualità di doppia *failure*, atterraggio abortito + avaria motore), il rispetto del requisito sul gradiente di salita in riattaccata (*balked landing*) è meno critico.

Le considerazioni espresse in questo paragrafo consentono di concludere che gli elementi di cui occorre tener conto per la scelta ed il progetto di un sistema di ipersostentazione sono essenzialmente i requisiti di *performance* (propri del velivolo ed imposti dai regolamenti) e le caratteristiche aerodinamiche in termini di polari del profilo alare (in prima battuta) e di tutto il velivolo non appena disponibile.

La disponibilità delle polari (curve C_L vs C_D) per profili ed ali con *flap/slat* riveste un ruolo chiave per la scelta ed il progetto del sistema di ipersostentazione. Purtroppo la sola analisi teorica può dimostrarsi insufficiente nel fornire le informazioni relative al C_D , specie quando le soluzioni costruttive che si andranno poi ad adottare rendono particolarmente ardua l'analisi del flusso nella zona del *flap - well* o del canale fra *slat* e *main component*. In questi casi le prove in galleria rimangono il solo mezzo sia per ottimizzare il funzionamento (ossia la posizione reciproca dei vari elementi che compongono il sistema e degli eventuali portelli mobili, come la bavette in Fig. 13.5, per meglio indirizzare il flusso negli *slot* e *flap well*) che per ottenere adeguate stime delle polari.

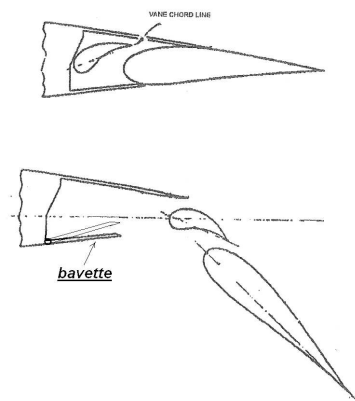


Figura 13.5: Canalizzazione del flusso mediante una *bavette*

13.4 Aspetti costruttivi ed operativi

Alcuni aspetti fondamentali di cui bisogna tener conto per l'installazione di un sistema di ipersostentazione sono sicuramente lo spazio a disposizione all'interno dell'ala per il sistema di attuazione ed il tipo di cinematismo per realizzare le deflessioni operative previste. Per entrambi, i fattori in gioco che determinano le scelte di progetto sono, da un lato, i carichi agenti (determinati secondo i requisiti di certificazione) e dall'altro la necessità di contenere al massimo le penalità in termini di peso e di incremento di resistenza aerodinamica per sprofilamenti dal profilo base dell'ala.

La determinazione dei carichi di certificazione, unitamente all'estensione (e quindi alla massa) delle superfici da movimentare ed ai requisiti operativi in termini di velocità di attuazione (ossia in quanto tempo è possibile passare dalla posizione non deflessa alla massima deflessione) permette di stabilire in primo luogo la potenza necessaria per l'attuazione. In base alla potenza necessaria ed allo spazio disponibile si seleziona il sistema di attuazione che, generalmente, è rappresentato o da

martinetti idraulici o da sistemi vite-madrevite azionati da motori elettrici. Le linee di comando degli attuatori possono essere, secondo il tipo di velivolo, o di tipo meccanico (cavi tiranti) o di tipo elettrico.

In genere, gli attuatori idraulici sono selezionati quando le potenze in gioco per l'attuazione sono notevoli e sono quindi quelli che principalmente vengono impiegati per i grandi velivoli, dove l'area delle superfici da movimentare è rilevante.

Circa la velocità del sistema di attuazione occorre considerare che essa deve essere scelta in modo da non produrre subitane variazioni di configurazione, per ovvi motivi di controllabilità, e, nello stesso tempo, deve poter garantire il rispetto del requisito sulla riattaccata in caso di atterraggio abortito, quando cioè a partire dalla *decision height* il velivolo deve poter passare dalla fase di approccio a quella di risalita con il prescritto gradiente senza scendere al disotto di una certa altezza fissata dai regolamenti (JAR/FAR 25.1329).

I cinematismi di estensione sono funzione del numero di elementi che compongono il *flap* (*single/double/triple slot*, etc) e del centro di cerniera virtuale da realizzare (un caso veramente critico è il *fowler flap*). Se si sceglie la soluzione più semplice di un solo punto di cerniera, Fig. 13.6, allora il punto di cerniera reale coincide con quello virtuale e sarà posizionato abbastanza

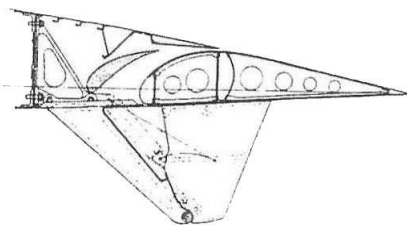


Figura 13.6: Cinematismo a cerniera singola esterna

lontano dall'ala, con conseguente necessità di dover coprire il cinematismo con un *fairing* vistoso. Un cinematismo più sofisticato (a più barre di movimentazione e con più punti di cerniera, come ad esempio in Fig. 13.7), consente di limitare le dimensioni del *fairing*, ma ovviamente ciò viene

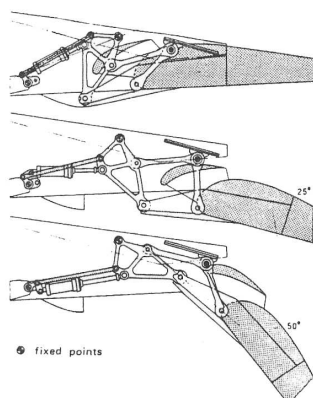


Figura 13.7: Cinematismo a cerniere multiple

pagato con una maggiore complessità costruttiva e di peso. Il *fairing* per il cinematismo di attuazione del *flap* è necessario per la salvaguardia dei livelli di resistenza aerodinamica e incide a sua volta sul peso complessivo del sistema di ipersostentazione.

L'attuazione elettrica con sistema vite-madrevite è praticabile quando le potenze in gioco per l'attuazione dei *flap* sono abbastanza contenute. Sono sistemi poco ingombranti e spesso possono essere installati congiuntamente ad un sistema di guide *flap* interne al profilo alare che consentono comunque di realizzare cerniere virtuali abbastanza distanti dall'ala. L'assenza di cinematismi esterni all'ala da coprire con *fairings* va a tutto vantaggio del peso e dell'aerodinamica. Un'attuazione di questo tipo è però sicuramente più lenta rispetto a quanto realizzabile con un sistema idraulico: possono essere necessari anche più di 10-12 secondi per consentire una deflessione completa (sino a $45^\circ - 50^\circ$) a partire dalla configurazione *clean*.

La robustezza strutturale di un sistema *flap*, una volta selezionato il tipo di attuazione, il cinematismo e l'estensione delle superfici da movimentare, dipende dai carichi che occorre considerare per il dimensionamento. Questi sono determinati a partire dalle velocità massime alle quali si prevede di utilizzare il sistema stesso. I carichi che si sviluppano sui *flap* sono essenzialmente di natura aerodinamica. Le forze inerziali legate alla loro massa sono quasi sempre trascurabili rispetto alle forze aerodinamiche e, peraltro, sono quasi sempre di segno contrario, per cui, in una valutazione conservativa dei carichi totali, spesso tali forze di massa vengono del tutto ignorate.

I regolamenti, [Autori Vari], prescrivono di definire le velocità V_F di estensione dei *flap*, JAR/FAR 25.335, per ciascuna delle posizioni (deflessioni) previste nelle condizioni operative di impiego, che devono essere considerate per il dimensionamento strutturale (unitamente ad altre indicazioni in JAR/FAR 25.345, come per esempio, il massimo fattore di carico, l'intensità di raffica, il peso del velivolo, etc.). Per ciascuna V_F occorre definire conservativamente la corrispondente velocità operativa (sufficientemente inferiore) detta V_{FE} , o *flap extension speed*, che deve rappresentare la soglia di velocità massima che il pilota deve rispettare nell'attivazione ed utilizzo del sistema a quella deflessione. Le V_{FE} , come prescritto dagli stessi regolamenti, devono essere indicate in cabina su apposite targhette (*placards*).

In aggiunta, in caso di superamento (accidentale) della V_{FE} prescritta per una data deflessione del *flap*, è anche previsto l'attivazione di un allarme sonoro in cabina ed il pilota, nel *briefing* post volo (o anche in modo automatico, se il velivolo è dotato di un sistema di monitoraggio per la salvaguardia strutturale, *SHM*, *Structural Health Monitoring*) deve avvisare dell'avvenuta eccedenza di impiego del sistema *flap* per dar luogo alle *task* di manutenzione (in primo luogo le ispezioni) previste in questi casi.

Pur realizzandosi giocoforza con continuità, le deflessioni d'impiego del sistema di ipersostentazione sono fissate in un numero discreto in corrispondenza di ciascuna delle fasi di volo (*take-off*, *approach*, *loiter*, *landing*, etc.) in cui è previsto il loro impiego. In altre parole, il pilota, raggiunta la velocità a partire dalla quale può utilizzare i *flap* in una delle deflessioni previste, aziona il comando di attuazione selezionando la deflessione ammissibile. A questo punto, tutte le manovre saranno effettuate con tale deflessione dei *flap* sino al cambiamento della selezione. Sebbene questo rappresenti senz'altro un impedimento al miglioramento delle prestazioni rispetto ad un utilizzo continuo della deflessione del *flap* (come avviene per le superfici di controllo vere e proprie come l'equilibratore, il timone o gli alettoni), bisogna considerare che l'utilizzo dei *flap* come superficie di controllo rappresenterebbe un onere in generale non sostenibile dal pilota in caso di *failure* ed è, infatti, proibito dai regolamenti.

Tutto quanto sopra esposto rende abbastanza l'idea dell'importanza in termini di sicurezza che i regolamenti danno nell'utilizzo del sistema di ipersostentazione.

Come già accennato, il peso apportato dal sistema di ipersostentazione è funzione della sua complessità meccanica. Quest'ultima è tanto più incrementata quanto più elevata è l'efficienza aerodinamica che si vuole realizzare con il sistema di ipersostentazione. La Fig. 13.4, tratta da [98], rende perfettamente l'idea con riferimento ai sistemi *flap* di bordo di uscita. Sempre da [98], infine, le Figg. 13.4, 13.4 forniscono una valutazione di avanprogetto, con riferimento a tecnologie convenzionali, del peso specifico (per unità di area) dei sistemi di ipersostentazione meccanica (*flap* di bordi d'attacco e di uscita) in funzione del *MTOW* del velivolo.

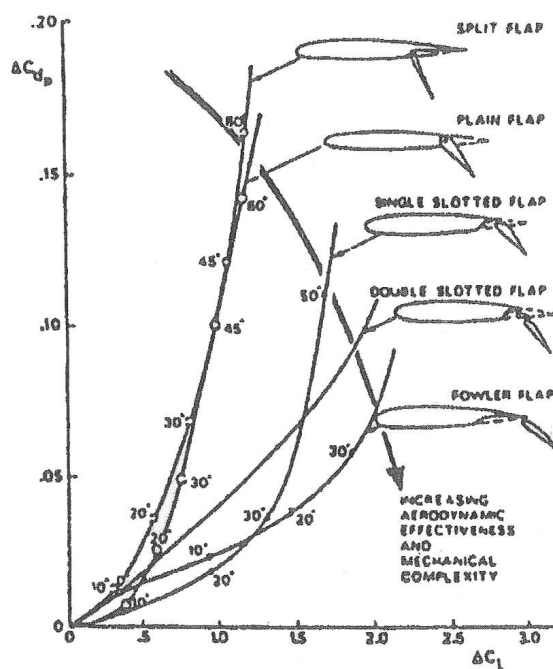


Figura 13.8: Efficienza aerodinamica di diversi sistemi di ipersostentazione da bordo di uscita (incremento di C_l vs. incremento di C_d)

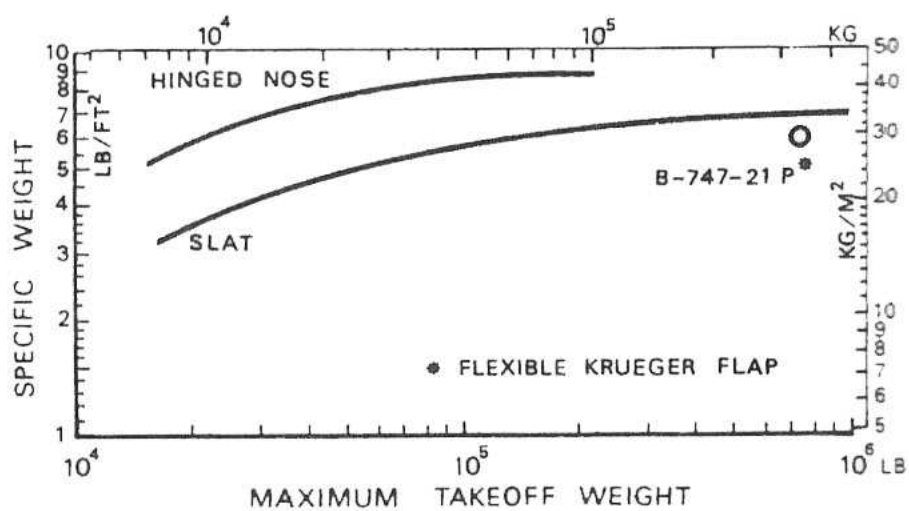


Figura 13.9: Peso (specifico) di diversi sistemi di ipersostentazione da bordo di attacco

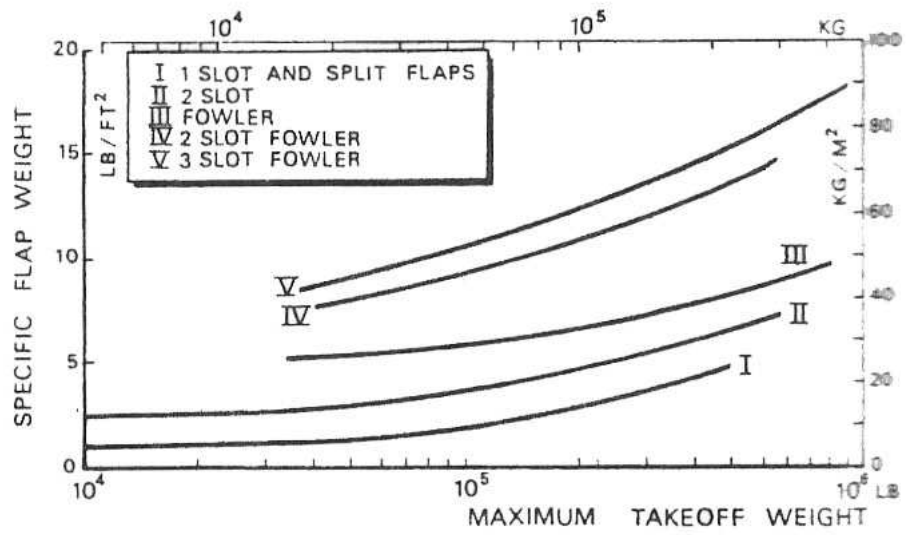


Figura 13.10: Peso (specifico) di diversi sistemi di ipersostentazione da bordo di uscita

Capitolo 14

Modifiche della geometria ed effetti sulle prestazioni aerodinamiche

14.1 *Wing tip device: winglet*

Si propone qui l'analisi delle prestazioni di un aeromobile conseguenti all'introduzione delle appendici alari dette *winglet*, Fig. 14.1. Vengono dapprima presentati le esigenze e il percorso storico che hanno condotto all'utilizzo di tali dispositivi, nati principalmente al fine di aumentare l'efficienza aerodinamica. Vengono poi descritte le *winglet*, nella loro geometria classica e nelle configurazioni alternative. Si procede, infine, all'analisi del funzionamento delle *winglet*, presentando un bilancio tra benefici apportati e possibili peggioramenti nelle prestazioni. Emerge la difficoltà di un giudizio univoco riguardo il reale contributo delle *winglet* alla configurazione aerodinamica del velivolo (a parte l'influenza sull'aspetto esteriore dell'aeromobile: le compagnie spesso preferiscono operare con velivoli dotati di *Winglet* per motivi di *design*, sfruttandone l'indubbio vantaggioso effetto estetico).



Figura 14.1: Winglet

Sistemi non planari

È noto che il carico ellittico (caratterizzato dalla resistenza indotta minima) presenta una distribuzione di *downwash* costante lungo l'apertura.

Con metodi variazionali si potrebbe mostrare che per una superficie alare "non planare" lungo l'apertura una distribuzione di *downwash* ottima dovrebbe prevedere una variazione lungo l'apertura associata al coseno dell'angolo diedro locale.

Poiché la massima intensità della vorticità libera si concentra alle estremità alari, è necessario cercare di operare sulla distribuzione di carico in tale regione. Una soluzione è l'applicazione di superfici portanti non planari grazie alle quali l'intensità dei vortici di estremità risulta significativamente ridotta se confrontata con sistemi piani (ala semplice), a parità di apertura e portanza totale.

Le *winglet* sono estensioni verticali poste sulle estremità alari allo scopo di aumentare l'efficienza aerodinamica, riducendo l'intensità dei vortici di estremità. Progettate come piccole ali, sono oggi adottate sulla maggior parte dei velivoli in uso, sia su quelli di nuova progettazione sia come *retrofit* in post-produzione.

L'aumento di efficienza è raggiunto grazie alla riduzione del contributo di resistenza indotta associata alla presenza di vortici generati dalla differenza del campo di pressione tra parte superiore e inferiore dell'ala; l'intensità di questi vortici dipende dall'allungamento alare \mathcal{A} e dall'angolo d'attacco. Un elevato allungamento alare riduce il coefficiente di resistenza indotta C_{D_i} ma, al contempo, aumenta le dimensioni dell'ala, il peso, la robustezza strutturale, con peggioramento di prestazioni e manovrabilità. Le *winglet*, quindi, hanno il compito di emulare l'effetto di un maggiore allungamento alare senza tuttavia modificare eccessivamente l'apertura.

Evoluzione storica

L'idea di un dispositivo che permettesse di ridurre la resistenza indotta risale agli albori della storia dell'aviazione, ai primi voli dei fratelli Wright, nel 1905; e già ancor prima l'aerodinamista inglese F. W. Lancaster, alla fine del 1800, aveva proposto soluzioni che non ebbero però sviluppi. La prima modifica di una certa efficacia è stata l'aggiunta di superfici verticali alle estremità alari, gli *endplates* (ma anche le taniche d'estremità sono influenti), cfr. (4.3.4). L'effetto è comunque minimo: una (piccola) superficie posta all'estremità riduce sì la massima intensità del vortice ma ne aumenta il diametro (diffusione del vortice), in modo che la circolazione totale si mantenga costante.

Nel 1952 S. F. Hoerner propose le *Horner tips*, estremità alari "ripiegate" che influenzavano la direzione dei vortici.

Solo nel 1970 Richard Whitcomb, ricercatore presso la NASA (*Langley Research Center* di Hampton), ridefinì il concetto di *winglet*: alle ipotesi di Lancaster riguardo l'effetto di una generica superficie verticale posta sull'estremità dell'ala affiancò la scelta dei profili più adatti allo scopo. Le prove di galleria indicarono la possibilità di incrementare l'efficienza aerodinamica in crociera di un velivolo da trasporto del 6-9% se si montavano le *winglet*; questo risultato venne poi confermato da un successivo programma di ricerca promosso dalla NASA nel 1979-80.

Quasi contemporaneamente agli studi di Whitcomb, ma indipendentemente da questi, la LearJet presentò il prototipo LearJet 28 provvisto di *winglet*: le prestazioni in crociera e la stabilità direzionale risultavano notevolmente migliorate.

Gli studi sulle *winglet* continuarono in programmi coordinati da NASA, Boeing, U.S. Air Force, confermando ancora i risultati di Whitcomb.

L'attenzione verso l'incremento di efficienza aerodinamica derivò principalmente dalla crisi del petrolio del 1973, con aumento vertiginoso del prezzo dei carburanti: migliorare l'efficienza mediante riduzione della resistenza indotta significava ridurre i consumi.

Attualmente le continue innovazioni tecnologiche in campo aerodinamico hanno permesso lo sviluppo di ali molto efficienti, per le quali l'utilizzo delle *winglet* può non apportare benefici decisivi.

Funzionamento e caratterizzazione

A parità di intensità globale della vorticità che si realizza intorno ad un velivolo in volo la riduzione della resistenza indotta può essere conseguita mediante la redistribuzione della vorticità sull'ala. Grosso modo, la questa riduzione si può associare alla riduzione del *downwash* conseguente al-

l'azione delle *winglet* se e quando si ha una diffusione su una lunghezza maggiore della vorticità rilasciata al bordo d'uscita. Il campo di moto intorno alla *winglet*, che dipende dall'angolo diedro locale, presenta, in condizioni di corretto funzionamento, un *downwash* costante oltre l'ala. Sembra importante inoltre il *sidewash* sulla *winglet*, che deve essere nullo in condizioni di ottimo.

La riduzione di resistenza è direttamente collegata all'estensione della regione sulla quale si redistribuisce la vorticità: superfici troppo piccole non sarebbero efficaci.

Per produrre un cambiamento significativo della resistenza evitando un incremento eccessivo di area bagnata le *winglet* si configurano come superfici ad elevato allungamento.

Fissata l'estensione geometrica dell'ala, una *winglet* ben progettata può dare, in certe condizioni di volo precise, riduzioni della resistenza indotta significative. Comunque occorre tenere presente che, come qualunque superficie esposta, la *winglet* contribuisce alla resistenza viscosa, il cui incremento non deve ovviamente annullare il beneficio sulla resistenza indotta.

Comunque la relazione tra *winglet* e variazione di resistenza indotta è complessa, e ulteriori complessità sorgono se si introducono gli effetti della comprimibilità.

Considerazioni di *Design*

I principali parametri costruttivi di una *winglet* sono indicati nella Fig. 14.2. Trattandosi poi di un'ala di dimensioni ridotte sono importanti la distribuzione delle corde e l'allungamento, oltre al tipo di profilo alare impiegato.

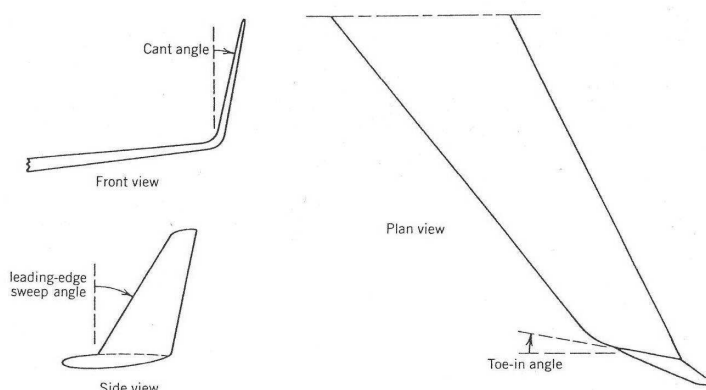


Figura 14.2: Winglet: elementi caratteristici

Il progetto aerodinamico della *winglet* è quello di un'ala, ma occorre considerare il fatto che ciascuna coppia ala-*winglet* ha una sua prestazione (ad esempio, un suo proprio rapporto tra le portanze sviluppate dall'ala e dalla *winglet*): l'ottimizzazione della *winglet* è quindi ad un processo iterativo basato sulle plausibili variazioni di prestazioni della coppia ala-*winglet*.

Si tratta di determinare preliminarmente il carico che produca un'interazione favorevole col campo di velocità indotto sull'ala. Comunque un carico troppo elevato sulla *winglet* (rispetto all'ala) significa una sollecitazione eccessiva sull'estremità alare.

Quindi c'è da valutare la distribuzione delle corde lungo la *winglet*. A parità di carico una corda piccola aumenta il coefficiente di portanza: ciò rende la *winglet* inefficiente a bassa velocità e potrebbe condurre allo stallo (in condizioni estreme).

Un altro aspetto da considerare è il numero di Reynolds relativo alla *winglet*, basso in caso di corda molto piccola (a parità di superficie). Interviene qui il bilanciamento tra resistenza di attrito e resistenza indotta della *winglet*.

Il peso della *winglet* dipenderà da tutte le valutazioni e le scelte relative ai precedenti *trade-off*.

La distribuzione di carico sulla *winglet* può essere modulata anche tramite la freccia e lo svergolamento.

Il *toe-in angle* permette, seppur con piccole riduzioni di efficienza, di ridurre i problemi di peso causati dall'aumento di momento flettente. Esso controlla, infatti, il carico sull'intera *winglet*, così come il suo effetto sulla distribuzione di carico sull'ala. Poichè l'angolo d'attacco della *winglet* è funzione del coefficiente di portanza dell'ala, in genere il valore che si sceglie per il *toe angle* risulta ottimale per un'unica condizione di volo.

Per quanto riguarda il *cant angle*, se esso fosse nullo la *winglet* si comporterebbe come una comune superficie verticale, e la sua forza normale non contribuirebbe alla portanza, mentre se giacesse nel piano dell'ala consisterebbe semplicemente in un'irregolare estensione dell'apertura alare: un valore ottimo del *cant angle* deve garantire il compromesso tra l'efficienza della *winglet* e l'aumento della resistenza (viscosa) dovuta alla sua interazione con l'ala.

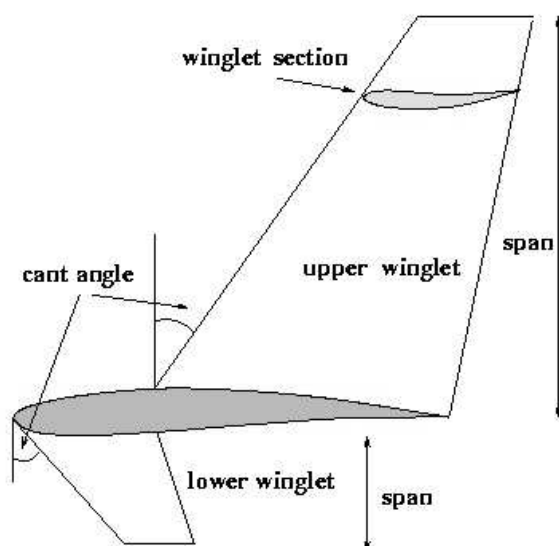


Figura 14.3: Winglet: configurazione classica

Per un'idea della complessità del progetto si consideri la geometria proposta da Whitcomb, Fig. 14.3. Whitcomb ha mostrato come l'elemento superiore, più largo, provvede alla riduzione della resistenza (indotta) legata ai vortici liberi; quando esso è spostato verso poppa si riduce l'interazione con il bordo d'attacco dell'ala, cosa importante in condizioni di C_L elevato. L'elemento inferiore, più piccolo, può essere inclinato verso l'esterno, riducendo il diedro effettivo e l'inerzia torsionale, minimizzando, quindi, l'impatto sulla velocità di *flutter*; esso in generale migliora l'efficienza complessiva della *winglet* in condizioni di alta portanza ed in condizioni supercritiche.

Una configurazione di questo tipo, secondo test effettuati dallo stesso Whitcomb in galleria del vento, per numero di Mach $M = 0.78$ e coefficiente di portanza $C_L = 0.44$, ha comportato una riduzione di resistenza indotta del 20% e un aumento di efficienza del 9% circa.

Le prove di volo (importanti quelle effettuate da Boeing Business Jets e Aviation Partners Inc.) hanno definitivamente mostrato la possibilità di riduzione della resistenza indotta, con riduzione del consumo o della corsa di decollo, strettamente connessa alla riduzione dell'intensità dei vortici liberi.

Tuttavia una fissata geometria della *winglet* presenta problemi di efficienza in condizioni di volo diverse da quelle ottimali: determinata ad esempio la configurazione adatta ad una riduzione di resistenza alle alte velocità, la stessa configurazione comporta peggioramenti in alta portanza.

Un'importante applicazione di questa tecnologia sembra poter essere il miglioramento delle prestazioni di salita, prestazione fondamentale di un aeromobile.

Configurazioni

Diverse sono le configurazioni fino ad oggi utilizzate. Di seguito se ne indicano due.

Wingtip fences Si tratta di *winglet* che si estendono sia superiormente che inferiormente, Fig. 14.4. Ideate da Whitcomb, sono installate principalmente su velivoli Airbus. La somma delle superfici è minore o al più uguale a quella di una *winglet* semplice di caratteristiche aerodinamiche simili, con minore impatto sull'architettura del velivolo.

Blended winglet Sono *winglet* a sviluppo graduale: mostrano una curvatura che rende il passaggio tra l'estremità alare e la *winglet* meno aggressivo, riducendo l'interferenza e la resistenza associata, Fig. 14.4.

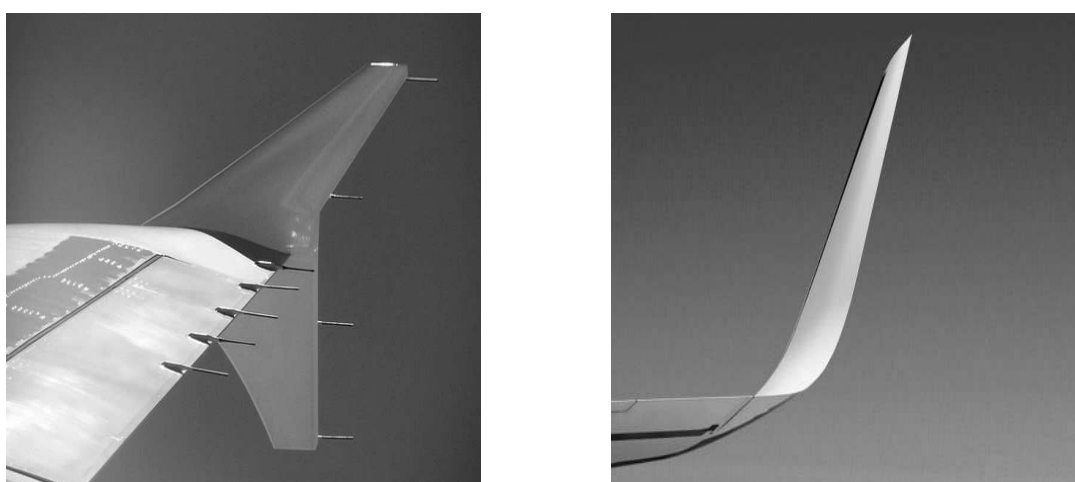


Figura 14.4: Esempi di *wingtip fences* (a) e *blended winglet* (b)

Funzionamento

Il compito principale della *winglet* è la diffusione trasversale dei vortici di estremità. Ciò si traduce in alcuni benefici:

- riduzione dei consumi di combustibile, quindi risparmio per le compagnie aeree, calo delle emissioni inquinanti, aumento dell'autonomia di distanza e del *payload*;
- aumento del rateo di salita;
- riduzione della lunghezza di decollo (e del relativo inquinamento acustico).

Contemporaneamente, la presenza delle *winglet* provoca alcuni effetti collaterali:

- aumento della resistenza viscosa alle alte velocità, a causa dell'aumento di area bagnata;
- (per ali a freccia), l'aumento della resistenza di *trim*, a causa dell'arretramento del punto neutro;
- aumento della resistenza di interferenza, con eventuali separazioni nella zona di transizione ala-*winglet*;
- variazione della resistenza d'onda in campo transonico, per la redistribuzione del carico aerodinamico.

Il calo di resistenza indotta, quindi, coincide con l'aumento delle altre forme di resistenza. Per osservare un reale beneficio aerodinamico è necessario che la progettazione valuti forma in pianta, svergolamento, profili, zone di giunzione con l'ala, altezza; il progetto inoltre va fatto per il

singolo velivolo, essendo il comportamento di tali dispositivi direttamente legato alla distribuzione di portanza sull'ala.

Dal punto di vista strutturale, i fenomeni da prendere in considerazione conseguenti all'introduzione delle *winglet* sono principalmente carichi statici, carichi dinamici e *flutter*.

I carichi statici prevalenti riguardano manovre a $2.5g$ e manovre di rollio. Il carico sulle *winglet* aumenta il momento flettente lungo l'ala, proporzionalmente all'altezza dell'appendice e al *cant angle*. In particolare, sulle estremità si aggiunge l'effetto del *sideslip*, poichè sulla *winglet* agisce un carico aerodinamico maggiore, con un forte aumento del momento flettente verticale e nel piano.

Rilevante risulta poi il contributo dei carichi dinamici. In caso di raffiche la posizione in estremità delle *winglet* e il loro peso generano carichi aerodinamici aggiuntivi.

Un ulteriore svantaggio è l'impatto negativo sul *flutter*. Ancora la posizione e il peso della *winglet*, circa l'1-2% di quello dell'ala, provocano una diminuzione della pressione dinamica di *flutter*, proporzionale al peso stesso: la frequenza del primo modo torsionale viene, infatti, ridotta, influenzando il modo critico del *flutter* (che dipende dal primo modo torsionale e dal primo modo flessionale).

Compaiono, infine, alcuni meccanismi instabili a frequenze piuttosto elevate, non rilevati sul velivolo privo di *winglet*.

Riguardo la controllabilità del velivolo e la qualità di volo, va considerata l'influenza delle *winglet* sul moto latero-direzionale: si verifica un aumento dell'effetto diedro e , in caso di ala a freccia, un peggioramento della stabilità statica direzionale.

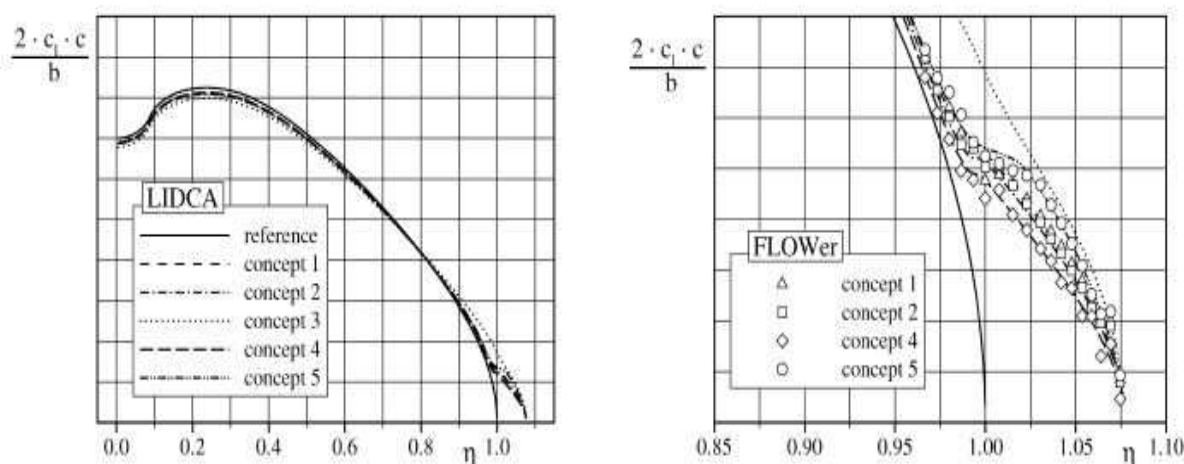


Figura 14.5: Distribuzione di carico sull'ala, al variare di *sweep angle* φ e diedro ν , in condizioni di $C_L = 0.5$, $M = 0.85$, $Re = 54.2 \cdot 10^6$

La Fig. 14.5 mostra come con l'installazione di una *winglet* l'apertura risulta effettivamente aumentata, con una variazione nell'andamento del carico di estremità, che va riducendosi.

Il problema della distribuzione di carico sulle estremità risulta, tuttavia, di difficile risoluzione. In genere si preferisce una configurazione con estremità scariche, ma alcuni autori suggeriscono lo spostamento del carico stesso sulla *winglet*, a beneficio dell'ala.

Conclusioni

La valutazione delle *winglet*, componenti non primarie dell'architettura introdotte al fine di migliorare le prestazioni aerodinamiche di un velivolo, è una questione complessa, che può avere risultati non univoci. Alcune conclusioni che si possono trarre sono elencate di seguito.

- L'utilizzo di *winglet* correttamente progettate comportare una riduzione di resistenza indotta e contemporaneamente influenza, spesso negativamente, altri aspetti importanti (aumento

delle altre forme di resistenza, aggravii strutturali, difficoltà in fase di manovra).

- L'installazione su ali già efficienti o, comunque, su velivoli già esistenti e ottimizzati senza *winglet*, introduce peggioramenti in alcune prestazioni. Per esempio, se montata su un'ala con distribuzione di carico ellittica, cui compete, secondo Prandtl, la minima resistenza indotta, la *winglet* porta un aumento di resistenza conseguente alla modifica della forma in pianta iniziale. La soluzione è la loro installazione su configurazioni che presentano un carico distribuito come in Fig. 14.6, con estremità scariche (come accade sulla maggior parte dei grandi velivoli): in questo caso si insegue una distribuzione di carico ottimale ai fini della resistenza indotta e delle caratteristiche di stallo.

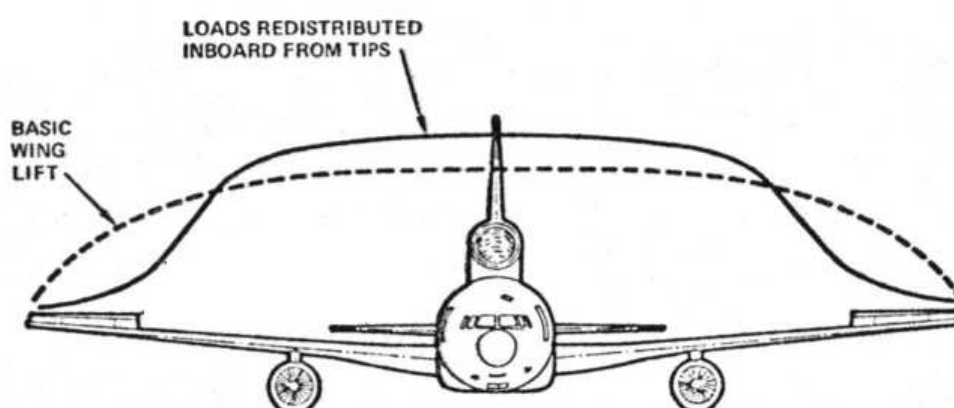


Figura 14.6: Distribuzione di carico prossima a quella ellittica con carico ridotto in estremità

- Scelta, in progetto, una condizione di volo da ottimizzare mediante *winglet*, è necessario verificare le prestazioni nelle altre condizioni: per osservare un reale beneficio, occorre comunque bilanciare aspetti strutturali e aerodinamici. E' necessario poi mettere in luce l'influenza delle *winglet* non solo sul velivolo parziale (ala e fusoliera) ma sul velivolo completo; occorre una progettazione accurata, risultato di analisi multidisciplinari, che valuti tutti gli aspetti mostrati, al fine di non amplificare, piuttosto che ridurre, i problemi legati alla configurazione aerodinamica.
- Per la valutazione teorica dei benefici derivanti dall'introduzione di *winglet* può essere sufficiente in via preliminare risolvere le equazioni di Eulero (operando quindi in ambito non viscoso), e verificare a posteriori in alcuni casi critici gli effetti della viscosità.

Utili riferimenti circa gli effetti delle *winglet* sulla resistenza sono [117], [118], [119].

Capitolo 15

L'accrescimento ghiaccio sulle superfici dei velivoli

15.1 Introduzione

L'accrescimento ghiaccio sulle superfici dei velivoli è un fenomeno di grande impatto in ambito aeronautico in quanto di fondamentale importanza nella sicurezza del volo. In pratica, le formazioni di ghiaccio sulle superfici, portanti e non portanti, costituiscono delle variazioni di geometria che possono generare delle variazioni, anche brusche, delle forze aerodinamiche agenti su di esse. Inoltre, poiché alle formazioni di ghiaccio superficiali sono quasi sempre da associarsi fenomeni di flusso separato, tali variazioni delle forze aerodinamiche assumono anche spiccate caratteristiche instazionarie. Da queste semplici considerazioni si capisce come l'accrescimento ghiaccio produca un decadimento, sia delle prestazioni propriamente aerodinamiche (incremento di resistenza e riduzione della massima portanza utilizzabile), che delle caratteristiche di manovrabilità del velivolo (riduzione della stabilità e del controllo). Anche gli apparati propulsivi possono essere fortemente condizionati dalle formazioni di ghiaccio sulle prese d'aria (con incremento dei livelli di distorsione del flusso che arriva al compressore), sulle pale delle eliche e, anche, direttamente, su quelle dei primi stadi del compressore, nonché dall'impatto su queste ultime del ghiaccio staccatosi dal bordo d'attacco delle prese d'aria, con conseguenti perdite di potenza (stalli al compressore e *flame-out*, danneggiamenti e distacchi delle pale del compressore) e, spesso, spegnimento.

Some Icing Related Accidents Involving Civil Aircraft				
Aircraft	Location	Date	Occu/Fatal	Description
ATR 72	Roselawn	31/10/94	68/68	Descent - loss of control in Icing
SF-340	UK	23/3/94	1/0	Climb - stalled in Icing, lost 2000 ft
BAe 748	Canada	11/11/93	7/7	Take-off - Into snow & Icing
F 100	Skopje	1/3/93	1/77	Take-off - Inadequate ground de-icing
F 28-4000	LaGuardia	1/3/92	1/27	Take-off - Inadequate ground de-icing
MD 80	Stockholm	27/12/91	?	Take-off - wing ice ingested by engines
BAe ATP	UK	11/8/91	63/0	Cruise - stalled in Icing, lost 3500 ft
ATR 42	UK	11/8/91	1/0	Cruise - wing drop in Icing
DC9-10	Cleveland	16/2/95	1/1	? - light snow
F27-200	UK	7/1/91	25/0	Cruise - double engine flame out - ice ingestion
BAe Jetstream	USA	26/12/89	6/6	Landing - lost control
F28	Kimpo	25/11/89	1/1	? - dense fog, airframe Icing
F28	Ontario	1/3/89	24/0	Take-off - Inadequate ground de-icing
Piper PA-11	Montana	23/12/88	1/1	? - wing ice probable cause
SD3-30	Switzerland	17/2/88	1/1	Cruise performance lost in severe Icing
Cessna 188B	California	6/2/88	1/1	? - Inadequate de-icing
Cessna 402	New Mexico	18/1/88	1/1	? - Inadequate de-icing probable
DC-9-10	Denver	15/11/87	1/1	? - moderate snow, fog
ATR 42	Lake Como	15/10/87	37/37	Cruise - lost control
F 27	EMA UK	18/1/87	2/0	Landing - crew failed to use de-icing
ATR 42	USA	18/12/86	1/0	Descent - stall in severe Icing

Tabella 15.1: Alcuni incidenti causati dalla formazione di ghiaccio

Nella Tab. 15.1 sono riportati alcuni fra i più gravi incidenti dovuti al ghiaccio verificatisi fra il 1986 ed il 1995. Dai rilevamenti statistici a partire dal 1975, si evince che ogni anno si verificano in media circa 30 incidenti “gravi” (cioè con danni al velivolo ed ai passeggeri), imputabili al ghiaccio. In termini percentuali, anche se solo l’1% di tutti i tipi di “incidenti” dell’aviazione generale (dalle semplici *failure* agli incidenti “fatali”, cioè con perdite di vite umane) sono causati dal ghiaccio, questo è responsabile del 3.4% di tutti gli incidenti fatali. Se si considerano i soli incidenti causati dal ghiaccio, quelli con esito nefasto sono circa il 50% del totale.

Per i pericoli che ne possono provenire al volo nelle condizioni ambientali favorevoli alla formazione del ghiaccio, gli enti preposti alla certificazione dei velivoli civili, la FAA (Federal Aviation Authority nel Nord America) e la JAA (Joint Aviation Authority in Europa) hanno stabilito delle specifiche norme per ottenere la cosiddetta “certificazione in ghiaccio” riportate nelle parti 23 (velivoli leggeri) e 25 (velivoli da trasporto) delle FAR/JAR (Federal Aviation Regulation/Joint Aviation Regulation). Tali norme sono in massima parte valide anche per l’analoga certificazione dei velivoli militari. Il requisito base di tutti i regolamenti è che la sicurezza del volo deve essere dimostrata e conservata in tutto l’involuppo di volo previsto per il velivolo. La certificazione in ghiaccio può essere ottenuta solo se il velivolo è equipaggiato con sistemi di protezione dal ghiaccio. Nel caso che un velivolo non sia certificato in ghiaccio, è proibito che lo stesso possa anche solo decollare se già a terra esistono le condizioni per la formazione di ghiaccio sulle superfici. Se tali condizioni sopraggiungono in volo, la missione deve essere modificata (cambiamento di rotta, di quota, atterraggio presso il più vicino aeroporto).

Per tutti i velivoli inoltre, è raccomandato il decollo solo con ali non contaminate (*clean wing concept*): pertanto, dopo il trattamento con liquidi sghiaccianti delle superfici portanti, il pilota deve poter effettuare il decollo entro l’intervallo di tempo di efficacia del liquido. L’attivazione dei sistemi antighiaccio è a discrezione del pilota, che deve comunque rispettare la normativa di attivare tali sistemi prima di qualsiasi condizione di volo e manovra in condizioni di ghiaccio.

Overview of Conventional Ice Protection Systems			
De-icing systems:	Characteristics:	Advantages:	Disadvantages:
Pneumatic Impulse De-icing System	The tubes within the fabric-reinforce synthetic rubber boot are inflated alternately to fracture and to debond the ice accretion on the surface to be protected.	<ul style="list-style-type: none"> - relatively cheap - relatively light-weight - low bleed air consumption - proven technology 	<ul style="list-style-type: none"> - aerodynamic effects (inflated/deflated boots and ice build-up between cycles) - restrictions concerning transonic speed - limited life due to wear and erosion - low resistance to oil and hydraulic fluids - water ingress through pinholes in rubber - water ingress through air supply - constant suction required when not in use
Fluid Ice Protection System	FPD (Freezing Point Depressant) fluid is pressed through porous skin onto the surface to be protected, to lower freezing point of the impinged supercooled water droplets.	<ul style="list-style-type: none"> - no bleed air consumption - clean leading edge (dirt) - proven technology 	<ul style="list-style-type: none"> - high weight; reservoir required - logistics (fluid availability and costs) - environmental restrictions - L.E. skin must remain porous (holes open) - drag can be caused by roughness of porous leading edge
Electro Thermal Systems	Heating elements on skin surface area provide heat to melt the build-up ice	<ul style="list-style-type: none"> - no bleed air required - proven technology 	<ul style="list-style-type: none"> - high energy consumption (typical 12 W/in²) - weight (additional generator) - FOD (Foreign Object Damage) sensitive - cyclic use (controller or thermostat required) - (over) heating problems when used in combination with composites
Hot Air Systems	Hot air is applied to raise the skin temperature to prevent freezing of the supercooled droplets or to melt the ice.	<ul style="list-style-type: none"> - aerodynamic clean when it is a fully evaporative system - proven technology - reduction of bleed air consumption can be achieved by changing system into a de-icing system without major re-design/development 	<ul style="list-style-type: none"> - weight of air distribution system, air temperature and airflow control units - aerodynamic degradation in icing conditions when used as de-icing system - significant engine performance penalty (bleedair) for advanced high bypass ratio engines - aerodynamic degradation caused by runback ice when it is a running wet system

Tabella 15.2: Principali sistemi antighiaccio

I sistemi di protezione dal ghiaccio si dividono essenzialmente in due categorie: quelli *de-icing*, che rimuovono il ghiaccio in fase di formazione, e quelli *anti-icing*, che ne prevengono la formazione. In Tab 15.2 sono illustrate le caratteristiche, i vantaggi e gli svantaggi dei sistemi di protezione dal ghiaccio comunemente usati nell’aviazione generale.

Overview of New De-icing Systems under Development			
De-icing Systems:	Characteristics:	Advantages (according to vendor):	Disadvantages:
Electro-Expulsive Separation System or Electro-Expulsive De-Icing System (EES, EEDS)	Consists of conductors embedded in elastomeric blanket (boot) covering the ice accreting surfaces. Opposing currents in two legs create opposing magnetic fields causing a repulsive force between the top and bottom conductor layers. The top surface of the blanket is accelerated so as to destroy the ice-blanket bond.	<ul style="list-style-type: none"> - effective for removing thin ice layer. - minimizing aerodynamic penalties. - easy manufacturing retrofitting. - low power consumption. 	<ul style="list-style-type: none"> - typical de-icing penalties (consisting of aerodynamic effects due to residual ice and ice build-up between cycles) - elastomeric boots tend to get pulled away from surface (smoothness) - unknown effects of lightning strike - service life: dependent on ability of elastomeric materials to withstand rain, sand, erosion, oil and hydraulic fluids
Eddy Current Repulsion De-Icing Boot (ECRDIB)	(same as above but use of eddy currents instead of opposing magnetic field).	[see above]	[see above]
Pneumatic Impulse Ice Protection System (B.F. Goodrich) (PIIP)	Pneumatic impulse tubes covered by titanium skin on top of aircraft leading edge skin. High pressure air is supplied to impulse valve which discharges a pulse into the impulse tubes, snapping the surface outward. The surface is stretched more than ice is capable of stretching without fracturing.	<ul style="list-style-type: none"> - reduced intrusion of inflated de-icer into airstream. - provides a superior weather & erosion resistant surface material. - improves ability of ice protector to remove thin ice (0.03 inch). - low power and low system weight. 	<ul style="list-style-type: none"> - typical de-icing penalties - high pressure air required - cannot be bonded to aluminium skin - fatigue of titanium skin (aerodynamic smoothness and accuracy reduced; service life).
Electromagnetic Impulse De-Icing (EIDI)	Flat-wound coils inside the leading edge induce eddy currents in metal skin, with the result that skin and ice layer are deformed.	<ul style="list-style-type: none"> - low power consumption and low maintenance costs. - does not alter external surfaces, so no aerodynamic impacts. 	<ul style="list-style-type: none"> - typical de-icing penalties. Does not adapt readily for retro-fitting. - possible fatigue and EMI (Electro-Magnetic Interference) - unproven for transport aircraft - unknown effects of lightning strike - maintenance of active system is a problem (lethal electric power level).

Overview of New De-icing Systems under Development (Continued)			
De-icing Systems:	Characteristics:	Advantages (according to vendor):	Disadvantages:
Shape Memory Alloy Based De-Icing System (SMA). Innovative Dynamics, Inc. developed two De-Icing Systems and IDI patent is pending. For more details see Gerardi et al. (1995).	Shape Memory Alloys (SMA's) exhibit a large temperature induced dimensional change (up to 8% strain for a NiTi-alloy) over a relatively narrow transition temperature range. In addition internal stresses in the SMA generate a force during the shape change. When cooled the shape expands and returns to its original shape when heated and so an ice braking action is created.	<ul style="list-style-type: none"> - SMA de-icer is designed for application on rotor blades and propellers substantial power savings over existing electrothermally powered de-icing systems with greater durability and erosion resistance. - results of NASA Lewis IRT test results encourages further developments. 	<ul style="list-style-type: none"> - for fixed wing application an additional system may be required to aid in the shedding of the debonded ice from the surface due to the lack of rotational dynamics that propellers and rotorblades do have to expel the debonded ice. - under development, not yet installed on helicopter or propeller for inservice trials.
Space Age Electro-Thermal System Using Nickel Coated Carbon Fiber Mat (Thermion No-Ice™)	Very Light Very Thin Cloth-like Nickel Coated Carbon Fiber Heater Mat. Can be laid up in E-glass or sandwiched in silicon embedded cloth. Can be layered for increased power density. Used in power applications from 12 vdc to 280 vac.	<ul style="list-style-type: none"> - Very close to surface - Reduced power required - Eliminates circuit breakage discontinuities - Very light weight (2 lb. per 500 sqft) - Self regulating (design for temperature) - Easily tested for continuity - Life of airframe reliability 	<ul style="list-style-type: none"> - Lay-up applications must be professionally done and quality controlled - Requires cycling circuitry for efficient power control

Tabella 15.3: Sistemi antighiaccio in fase di studio o sviluppo

Nelle Tab. 15.3 sono riportati, invece, i principali sistemi attualmente in fase di studio. I regolamenti prevedono che tali sistemi di protezione devono essere presenti sui seguenti componenti del velivolo:

- i bordi d'attacco delle ali, degli impennaggi, delle prese d'aria motore;
- le pale delle eliche e dei rotori degli elicotteri;
- i parabrezza della cabina di pilotaggio;
- i sensori degli strumenti di volo (pitots);
- particolari "appendici" esterne come antenne, lampade. etc., se la formazione di ghiaccio su di esse può, in qualunque modo, ridurre la sicurezza del volo.

In aggiunta, come già accennato, il pilota può richiedere, immediatamente prima del decollo, nel caso che le condizioni ambientali siano favorevoli alla formazione del ghiaccio con velivolo a

terra, il trattamento delle superfici dell'ala e degli impennaggi con liquido sghiacciante (*anti-icing fluids*).

In generale, l'adozione del tipo di sistema di protezione dipende dalla categoria del velivolo e, quindi, dall'energia che lo stesso può rendere disponibile per il funzionamento di tali sistemi. Così, ad esempio, per la protezione del bordo d'attacco delle superfici portanti, un velivolo turbogetto di medie/grandi dimensioni adotterà un sistema *anti-icing* basato sul riscaldamento interno del bordo d'attacco (a volte realizzato con uno *spray-tube*), utilizzando aria ad alta temperatura spillata dal motore, in modo da provocare l'evaporazione istantanea delle goccioline d'acqua. Un velivolo turboelica, invece, utilizzerà a tale scopo un sistema *de-icing*, tipo *pneumatic boot*, che, gonfiato ciclicamente, frattura lo strato di ghiaccio in formazione sulla superficie provocandone il distacco e che richiede un minore impegno di potenza da sottrarre al motore. Per i *lip* delle prese d'aria il sistema adottato è quasi sempre un *anti-icing*, in quanto occorre salvaguardare le pale del compressore dall'eventuale ingestione di pezzi di ghiaccio. Infine, per i rotori degli elicotteri e le pale delle eliche si deve necessariamente adottare un sistema *anti-icing* (guaine formate da resistenze elettriche).

Si evidenzia che le procedure di certificazione e qualificazione in ghiaccio del velivolo e dei relativi sistemi di protezione sono lunghe e costose. Inoltre, nell'ambito del normale inviluppo di volo, devono essere definite e dimostrate le procedure da attuarsi in caso di avaria dei sistemi antighiaccio. Le avioinee commerciali d'altro canto richiedono ai costruttori di velivoli la capacità di volare in tutte le condizioni meteorologiche. Tali considerazioni rendono da sole l'idea dell'importanza della messa a punto di tecniche di progettazione e di studio delle problematiche connesse all'accrescimento del ghiaccio.

Dal punto di vista dell'aerodinamica, i problemi di certificazione o di procedure di qualificazione sono riconducibili alla previsione del degrado delle caratteristiche aerodinamiche delle varie componenti del velivolo dovute all'accrescimento del ghiaccio. Poiché in fase di qualificazione/certificazione non sempre risulta facile individuare e localizzare le condizioni ambientali più critiche previste dagli stessi regolamenti, tali fasi possono risultare particolarmente onerose in termini di tempi e costi. È stata perciò accettata dagli enti certificanti l'idea di verificare la sicurezza del volo in condizioni di ghiaccio utilizzando forme di ghiaccio simulate in sostituzione degli accrescimenti di ghiaccio "naturale", sempreché, ovviamente, tali forme simulate siano rappresentative di quelle che effettivamente si generano nelle reali condizioni ambientali. Ciò ha consentito lo sviluppo di nuovi e più sofisticati metodi CFD congiunto all'impiego della sperimentazione in galleria per la previsione dell'accrescimento ghiaccio e per la valutazione del degrado delle caratteristiche aerodinamiche.

15.2 Il fenomeno fisico dell'accrescimento ghiaccio

Di norma, il ghiaccio che si forma sulle superfici dei velivoli ha forma cristallina a simmetria esagonale e, questo, indipendentemente dalle diverse modalità con cui esso si forma. Al fine di spiegare la fenomenologia che presiede all'accrescimento, si introducono alcune definizioni:

- droplet** : goccioline d'acqua allo stato liquido di diametro inferiore a 0.1 mm;
- drizzle** : goccioline d'acqua allo stato liquido di diametro da 0.1 a 1 mm (tali sono dette le gocce che si originano per coalescenza di goccioline più piccole);
- rain** : gocce d'acqua allo stato liquido di diametro superiore ad 1 mm;
- riming** : accrescimento ghiaccio per collezione di *droplets*;
- clumping** : accrescimento ghiaccio per collezione di cristalli di ghiaccio.

La contemporanea esistenza di più fasi di una stessa sostanza è descritta dalle condizioni di pressione e temperatura previste dal "diagramma di fase": in Fig. 15.1 si riporta quello relativo all'acqua. Le trasformazioni di fase avvengono con l'attraversamento delle curve di saturazione del vapore, che rappresentano condizioni in cui si ha il massimo valore di pressione del vapore

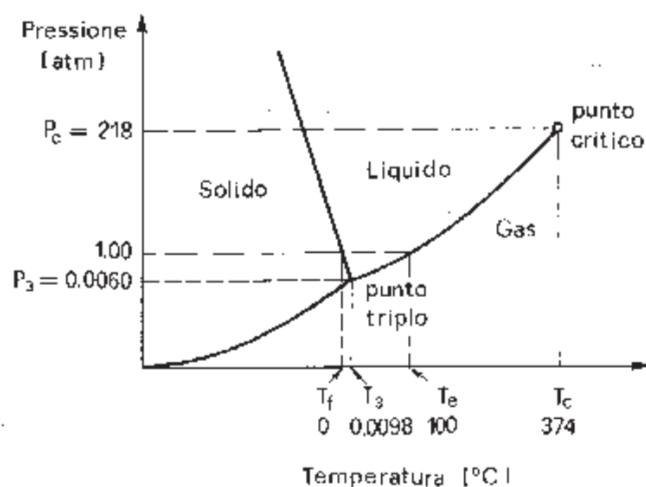


Figura 15.1: Diagramma di stato dell'acqua.

in equilibrio con il proprio liquido. Il punto triplo, prossimo al punto di congelamento (0°C a $P = 1\text{ atm}$) in presenza di aria, individua il punto in cui coesistono in equilibrio le tre le fasi. In realtà, acqua allo stato liquido può esistere a temperature decisamente inferiori a 0°C in condizioni di instabilità. In particolare, goccioline d'acqua liquida possono esistere in condizioni di super-raffreddamento fin quando non avvengono fenomeni di coalescenza con creazione di nuclei di congelamento o di condensazione. Nelle nuvole può essere presente acqua liquida super raffreddata (LWC, *Liquid Water Content*) anche in parecchi grammi per metro cubo. Tali *supercooled droplets* ghiacceranno quando incontreranno altre particelle di ghiaccio o le superfici solide come quelle di un velivolo. Tale processo detto di *riming* è responsabile sia delle formazioni di ghiaccio sulle superfici dei velivoli che dei fenomeni atmosferici della grandine, neve e pioggia ghiacciata (*freezing drizzle/rain*).

La dimensione delle goccioline d'acqua sospese nell'aria ha una notevole importanza nel processo di "cattura" di acqua sulle superfici dei velivoli: in generale, le goccioline di pochi *micron* (μm) di diametro tendono a seguire le linee di corrente mentre quelle di diametro maggiore risentono in misura minore della perturbazione del campo di moto prodotto dal velivolo. La dimensione delle *droplets* che si incontra più diffusamente in natura, nell'ambito di condizioni atmosferiche standard è quella di un diametro di volume medio (MVD, *Median Volume Diameter*) di $20\mu\text{m}$. Tale dimensione è, in pratica, assunta come riferimento in quasi tutti gli studi teorici e sperimentali comunemente effettuati. Poiché fenomeni pericolosi per la sicurezza del volo, come accertato, sono attribuibili anche a gocce di dimensioni maggiori, l'intero spettro di dimensioni possibili in natura (già definito da Langmuir intorno al 1940), deve essere preso in considerazione ai fini certificativi.

La formazione di ghiaccio in volo ha luogo quando il velivolo attraversa nuvole dove sono sospese gocce super raffreddate (a temperature cioè anche di qualche decina di $^\circ\text{C}$ negativi). Tali gocce impattano sulle superfici prodriere delle varie componenti del velivolo (bordi d'attacco di ali, impennaggi, prese d'aria, etc.) che, in condizioni stazionarie, possono essere considerate come pareti adiabatiche. Immediatamente dopo l'impatto, le gocce possono ghiacciare in tutto o in parte in dipendenza dal risultato del bilancio termico che si realizza. Infatti la trasformazione di stato liquido-solido è caratterizzata dal rilascio del calore latente di fusione che tende quindi a riscaldare sia il ghiaccio in formazione che la superficie solida sottostante. D'altra parte, l'interazione del flusso di aria con le superfici del velivolo promuove sia la dissipazione di calore per convezione che il riscaldamento della superficie per l'energia cinetica di impatto. Se la temperatura ambiente ed il LWC sono bassi, la temperatura del ghiaccio in formazione rimane al di sotto di 0°C e tutta l'acqua che impatta sulla superficie ghiaccia completamente. Viceversa, con alti valori di LWC e/o di temperatura ambiente (prossima allo 0°C), la temperatura del ghiaccio in formazione rimane a 0°C e solo una parte dell'acqua che impatta sulla superficie ghiaccia all'istante: la restante

scorrerà sulla superficie (*run back*) per ghiacciare eventualmente più a valle.

Definendo n come *freezing fraction*, rapporto fra l'acqua che ghiaccia sul totale di acqua che arriva (o, come si dice in gergo, "è stata catturata") su una delimitata porzione di superficie, le condizioni in cui n è pressoché unitaria danno origine a quello che viene comunemente referenziato come *rime ice*. In tali condizioni il processo di accrescimento ghiaccio è relativamente semplice perché le goccioline d'acqua ghiacciano là dove impattano sulla superficie e la temperatura del ghiaccio in formazione rimane al di sotto di 0°C . I depositi di *rime ice* sono relativamente di forma semplice e di colore opaco bianco-latte (dovuto anche all'aria imprigionata all'interno), con superficie abbastanza rugosa.

Quando n è invece minore dell'unità, il ghiaccio che si viene a formare è denominato di tipo *glaze* ed è caratterizzato da forme molto più complesse in quanto il meccanismo dell'accrescimento è condizionato dal *run back* della frazione d'acqua che non ghiaccia nella zona di impatto. Tipica è, in tal senso, la forma di ghiaccio a "doppio corno". I depositi di *glaze ice* hanno un aspetto vetroso (trasparente) dovuto principalmente all'acqua liquida imprigionata all'interno (rimanendo la temperatura intorno a 0°C).

Un caso limite è costituito infine dal cosiddetto *beak ice*, che viene a formarsi, in condizioni di temperatura ambiente e/o di velocità abbastanza elevate, prevalentemente per acqua di *run back*, in zone (di scarso *impingement* diretto) dove il flusso d'aria sulla superficie del corpo è in espansione e consente, pertanto, l'abbassamento della temperatura locale intorno allo zero. Formazioni di ghiaccio di questo tipo sono frequenti sulle pale dei rotori degli elicotteri.

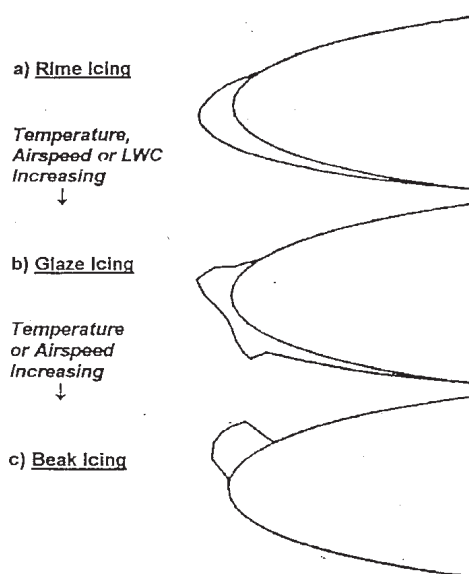


Figura 15.2: Diverse modalità di accrescimento ghiaccio

In Fig. 15.2 sono mostrati schematicamente i tre tipi di accrescimento ghiaccio sopra descritti.

Tra le suddette modalità di accrescimento, nella pratica si realizzano tutta una svariata quantità di forme miste di ghiaccio a seconda dei fattori che di volta in volta prevalgono. Esiste al riguardo una vastissima bibliografia con studi mirati proprio a stabilire il ruolo che ciascun fattore geometrico o aerodinamico o termodinamico gioca nel fenomeno dell'accrescimento ghiaccio. Senza dilungarsi al riguardo, ci si limita a citare le formazioni di ghiaccio a *lobster-tail* e a *feathers* sulle ali, particolarmente quelle a freccia, dovute sia alla presenza del cross-flow superficiale che ad effetti di messa in ombra di zone di superficie all'*impingement* delle *droplets* causato dalle formazioni di ghiaccio più avanzate. Altri fattori che influenzano la tipologia e la geometria delle formazioni di ghiaccio sono ad esempio la continuità dell'*impingement* (sono stati provati al riguardo anche modelli di tipo statistico), lo *splashing* (parcellizzazione) delle *droplets* (specie se grandi) all'impatto sulla superficie, lo *shedding* di pezzi da una formazione di ghiaccio.

In generale, il fenomeno dell'accrescimento ghiaccio, sebbene sia riconducibile ad uno schema abbastanza semplice di un bilancio termico fra il calore liberato dalla solidificazione e quello dissipato per convezione, è fortemente influenzato dalla variazione del valore del coefficiente di scambio termico convettivo fra la superficie e l'aria, proprio in virtù della variazione sia della superficie che dello strato limite che su di essa viene a svilupparsi. Gli stessi sistemi di protezione del ghiaccio possono innescare dei fenomeni di accrescimento anomali, come, ad esempio, quelli prodotti dal *run back* dell'acqua a valle dei *boots* pneumatici di *de-icing*.

Tutte le considerazioni fin qui illustrate (che, ovviamente, non esauriscono tutti gli aspetti della problematica in questione) sono comunque sufficienti per rendere l'idea della complessità e della vastità della stessa, specie nell'ottica della possibilità di approntare metodologie teoriche, sia per l'accrescimento ghiaccio che per la valutazione del degrado delle caratteristiche aerodinamiche che lo stesso produce.

15.3 Metodologia di predizione dell'accrescimento ghiaccio

La metodologia CFD (Computational Fluid Dynamic), ormai consolidata per la predizione del fenomeno dell'accrescimento ghiaccio, si basa su quattro fasi principali:

- analisi del campo aerodinamico *on/off body*;
- determinazione dell'*impingement* delle *droplets* sulla superficie del corpo (efficienza e limiti di cattura), attraverso l'integrazione dell'equazione delle traiettorie delle stesse e la determinazione dei punti di impatto;
- risoluzione del bilancio termodinamico per la determinazione del rateo di accrescimento del ghiaccio;
- definizione della nuova geometria "corpo+formazione di ghiaccio" e ripetizione delle tre precedenti fasi.

La ripetizione del ciclo delle quattro fasi sopra citate può essere effettuata con procedura *multistep* o *predictor-corrector*. Stabilito l'intervallo di tempo globale nel quale si vuole determinare l'accrescimento ghiaccio, con la tecnica *multistep* si suddivide questo in un numero finito di intervalli intermedi (*step*) in corrispondenza dei quali si effettua il suddetto ciclo di determinazione del rateo di accrescimento ghiaccio: ad ogni *step* la geometria di partenza è quella, corpo+ghiaccio, determinata alla fine dello *step* precedente. Con il procedimento *predictor-corrector*, invece, il suddetto ciclo viene effettuato una prima volta (*predictor*), assumendo che tutti i parametri che presiedono allo scambio termico e all'accrescimento non varino per tutto l'intervallo di tempo globale, e, successivamente, ricalcolati tali parametri sulla geometria predetta, si determinano i valori medi degli stessi con i quali si determina la geometria definitiva a partire dalla geometria originale.

La seconda tecnica è chiaramente meno onerosa in termini di sforzo computazionale e consente, in molti casi di interesse pratico, di ottenere la stessa geometria finale di accrescimento che si ottiene con la tecnica *multistep*. Va evidenziato comunque che non ci si può pronunciare a priori nettamente a favore dell'una o dell'altra, in quanto i confronti con le geometrie di ghiaccio ottenute sperimentalmente nelle stesse condizioni di simulazione ambientale e di intervallo di tempo globale hanno spesso esito contrastante.

Analisi del campo aerodinamico

L'analisi del campo aerodinamico può essere effettuata (sia in 2-D che in 3-D) con un metodo a pannelli o con un metodo alle differenze finite (a griglia). Il tipo di analisi (potenziale Laplaciana, *full-potential*, Euleriana, Navier-Stokes, viscoso/non viscoso) che si adotta è funzione della versatilità e velocità del metodo che si ha a disposizione e dell'accuratezza che si richiede al modello matematico. In generale, i metodi a pannelli (potenziali o potenziali/viscosi) sono computazionalmente meno onerosi dei metodi a griglia e più versatili per l'aggiornamento della geometria: per contro, sono più onerosi per il calcolo del campo *off-body* necessario per l'integrazione delle

equazioni delle traiettorie delle *droplets*. Tale campo *off-body* nei metodi a griglia si riduce di fatto a una semplice interpolazione fra i valori del campo nei nodi più vicini al punto di interesse, mentre con i metodi a pannelli occorre calcolare i coefficienti di influenza di tutti i pannelli in tale punto.

Da un punto di vista dell'accuratezza del modello matematico, la sola analisi potenziale può essere ritenuta sufficiente per molti casi di interesse pratico: gli effetti della compressibilità e della viscosità sulla determinazione delle traiettorie sono in generale trascurabili, anche se, ad esempio, nel caso dell'*impingement* sul *flap* di un profilo la presenza dello strato limite sul componente principale può influenzare notevolmente il campo di moto locale. Analogamente, la determinazione del coefficiente di scambio termico convettivo sulla superficie è funzione delle caratteristiche locali dello strato limite: nel caso quindi che non si effettui l'analisi viscosa occorrerà ricorrere a delle espressioni empiriche (generalmente ottenute dalla sperimentazione su lastre piane o cilindri) per il calcolo del suddetto coefficiente di scambio termico.

Calcolo delle traiettorie delle *droplets* e dell'efficienza di cattura

Nei casi di interesse, è ampiamente accertata la validità delle ipotesi che le *droplets* siano di forma sferica e che le sole forze non trascurabili agenti su di esse siano quelle aerodinamiche (di sola resistenza, per la suddetta ipotesi di sfericità) e di gravità. Tali ipotesi sono da ritenersi valide per dimensioni delle *droplets* sino a $250\mu\text{m}$ di diametro (in genere per dimensioni inferiori ai $100\mu\text{m}$ è lecito trascurare anche la forza gravitazionale), sia in 2-D che in 3-D.

Definito qui con t_s il tempo, l'equazione del moto della particella di massa m è quindi data da

$$m \frac{dV_m}{dt_s} = \underline{D} + m \underline{g} \quad (15.1)$$

dove V_m è la velocità della particella e $D = \frac{1}{2} \rho_a V_r^2 S_m C_d$ è la resistenza aerodinamica, funzione della velocità relativa $V_r = V_m - V$ (V è la velocità locale del campo di moto) e del coefficiente di resistenza C_d della particella adimensionalizzato rispetto alla superficie $S_m = \pi d^2/4$, con d il diametro della particella e ρ_a la densità locale dell'aria.

Facendo riferimento per semplicità al caso 2-D, detto (X, Z) il sistema di coordinate solidale al corpo (profilo di corda c), con Z asse verticale lungo il quale agisce l'accelerazione di gravità g costante, e detta V_∞ la velocità del flusso asintotico, effettuando le adimensionalizzazioni

$$v_m = \frac{V_m}{V_\infty}, \quad v = \frac{V}{V_\infty}, \quad t = t_s \frac{V_\infty}{c}, \quad x = \frac{X}{c}, \quad z = \frac{Z}{c} \quad (15.2)$$

con X, Z coordinate della particella, la (15.2) si esplicita nelle

$$\begin{aligned} \frac{d v_{mx}}{d t} &= -\frac{C_d Re}{24 K} (v_{mx} - v_x) \\ \frac{d v_{mz}}{d t} &= -\frac{C_d Re}{24 K} (v_{mz} - v_z) - \frac{g c}{V_\infty^2} \end{aligned} \quad (15.3)$$

in cui $K = \rho_{H_2O} d^2 V_\infty / (18 \mu c)$ è detto "parametro inerziale" ed il numero di Reynolds $Re = \rho_a V_r d / \mu$ è riferito al diametro della particella (ρ_{H_2O} è la densità della particella considerata costante e pari a 1000 Kg/m^3). μ è la viscosità (locale) dell'aria esprimibile in funzione della temperatura locale T , ad esempio, con la Formula di Sutherland

$$\mu = 0.14876 \cdot 10^{-6} \frac{T^{3/2}}{T + 110.6} \quad (15.4)$$

con T in K . Una conveniente espressione empirica che lega il coefficiente di resistenza di una sfera al numero di Reynolds locale è data da Langmuir e Blodgett in [103]

$$\frac{C_d Re}{24} = 1 + 0.197 Re^{0.63} + 0.00026 Re^{1.38} \quad (15.5)$$

con uno scarto massimo del 7% sino a $Re = 1000$ (in genere i valori del Re in gioco sono inferiori a tale limite). In letteratura sono comunque reperibili altre relazioni empiriche del genere.

Le (15.2) sono integrabili, ad esempio, con uno schema del quarto ordine di Runge-Kutta. Da notare che la risoluzione delle (15.2) è, in effetti, la risoluzione di un problema di valore iniziale: in generale si fa partire l'integrazione ad una sufficiente distanza dal corpo in modo da assumere che le particelle, sospese nell'aria, abbiano la stessa velocità del flusso asintotico. In Fig. 15.3 si mostrano alcuni esempi di calcolo di traiettorie sul profilo NACA 0012 tratti da [104]: da notare come aumentano i limiti di *impingement* al crescere delle dimensioni delle *droplets*.

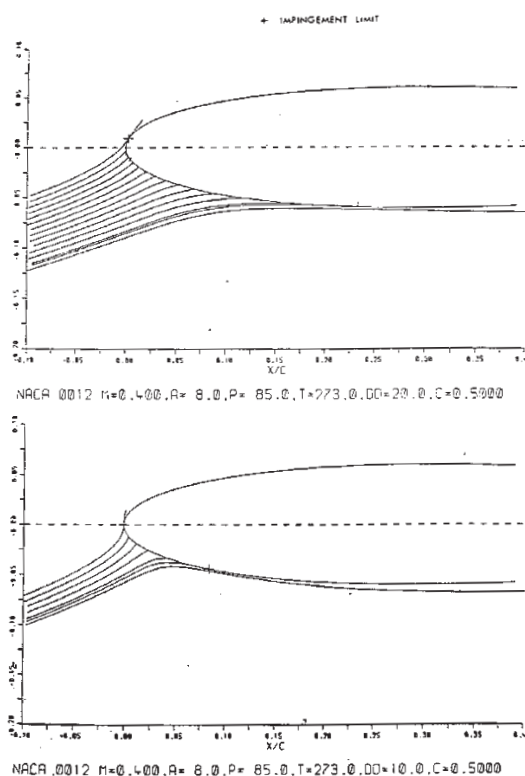


Figura 15.3: Traiettorie d'acqua intorno al profilo NACA 0012

In parallelo alla determinazione della traiettoria, è possibile calcolare la variazione temporale della temperatura della goccia risolvendo ad ogni punto della traiettoria il bilancio termico

$$m c_{p,w} \dot{T}_p = h (T - T_p) S_w \quad (15.6)$$

Nella (15.6) le grandezze sono così definite:

- m = massa della gocciolina;
- $c_{p,w}$ = calore specifico dell'acqua;
- T = temperatura locale dell'aria;
- S_w = superficie bagnata della gocciolina;
- T_p = temperatura della particella;
- h = coefficiente di scambio termico della gocciolina.

Il coefficiente h è esprimibile con relazioni empiriche, in funzione del numero di Reynolds Re basato sulla velocità relativa della gocciolina e definito in precedenza. In particolare,

$$\begin{aligned} h &= 0.0483/d && \text{per } Re < 1 \\ h &= 1003.2 (2.2/Re + 0.48/\sqrt{Re}) \rho_a V_r && \text{per } 1 < Re < 25 \\ h &= 0.008935 Re^{0.6}/d && \text{per } Re > 25 \end{aligned}$$

La risoluzione dell'ultima equazione consente di ottenere la T_p all'impatto che viene quindi utilizzata nel bilancio termico descritto nel successivo paragrafo.

Senza dilungarsi ulteriormente su tutte le problematiche connesse alla integrazione delle equazioni delle traiettorie, ci si limita a segnalare la importanza del parametro inerziale K che, essendo funzione del rapporto d^2/c , fornisce, come si evidenzierà in seguito, una significativa relazione fra le dimensioni delle goccioline e quelle rappresentative del corpo al fine di valutare la capacità di cattura d'acqua da parte di quest'ultimo.

La cattura d'acqua viene determinata sulla base dell'area del corpo in cui avviene l'impatto delle *droplets*, delimitata dalle traiettorie limiti di tangenza al corpo. Con riferimento alla Fig. 15.4, si definiscono sia una efficienza di cattura totale E che l'efficienza di cattura locale β data da

$$\beta = \frac{dy_0}{ds} = \frac{\Delta y_0}{\Delta s} \quad (15.7)$$

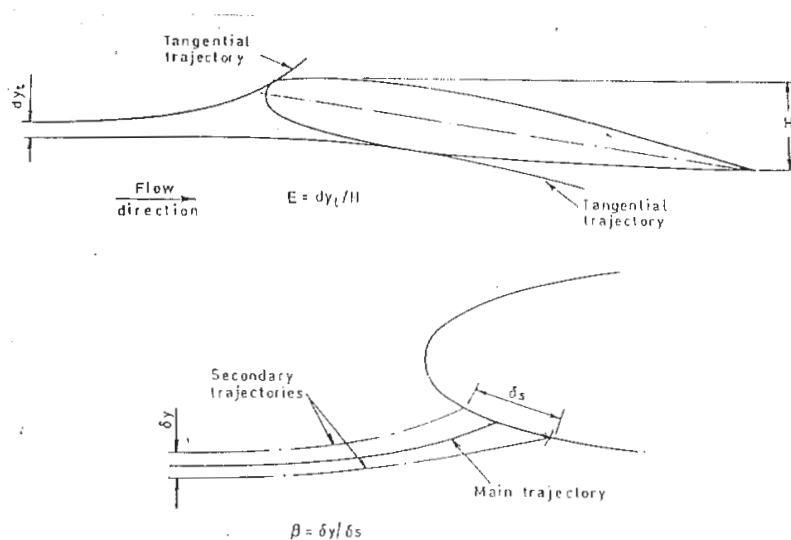


Figura 15.4: L'efficienza di cattura

Considerando che il flusso d'acqua sia costante all'interno di un tubo definito da due traiettorie (quattro in 3-D), in riferimento all' i -esimo elemento di superficie, si ottiene la relazione

$$LCW_{\infty} V_{\infty} \Delta y_0 = LWC(i) V_m(i) \Delta s(i) \quad (15.8)$$

Pertanto la portata d'acqua di *impingement* locale (per unità di superficie) viene espressa come

$$\dot{m}(i) = \beta(i) LWC_{\infty} V_{\infty} \quad (15.9)$$

In Fig. 15.5 sono presentati i diversi modi di definizione dell'efficienza di cattura locale in 2- e 3-D.

In 2-D è si usa calcolare l'efficienza di cattura locale come derivata della curva $y_0 = y_0(s)$, determinata con apposito processo di *spline-fitting* a partire da pochi valori locali calcolati con un numero ridotto di traiettorie di *impingement* (Figg. 15.6 e 15.7). In 3-D l'efficienza di cattura locale deve necessariamente essere calcolata come rapporto fra l'area delimitata da quattro traiettorie all'infinito a monte e quella intercettata dalle stesse sulla superficie del corpo. È stato evidenziato da più parti che per area all'infinito a monte deve intendersi, a rigore, quella della sezione normale alle traiettorie, che sarà quindi inclinata degli angoli di attacco e di derapata rispetto al sistema di riferimento assi corpo che si è adottato.

Bilancio termico

La finalità di tutti i modelli di accrescimento ghiaccio referenziati in letteratura è quella di determinare il rateo di accrescimento in ogni punto della superficie in base al bilancio di massa e di

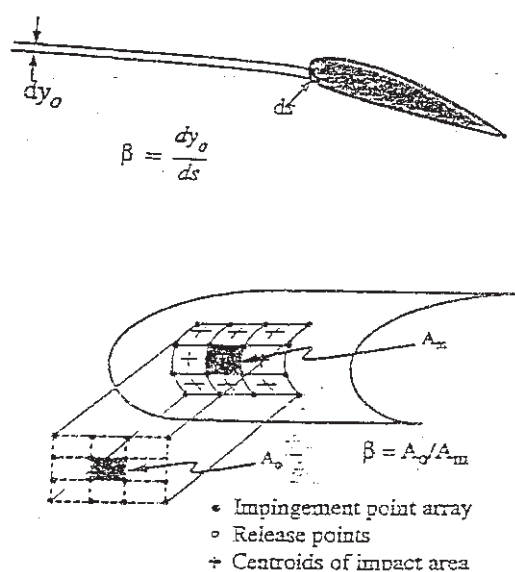


Figura 15.5: Definizione dell'efficienza di cattura in 2- e 3-D

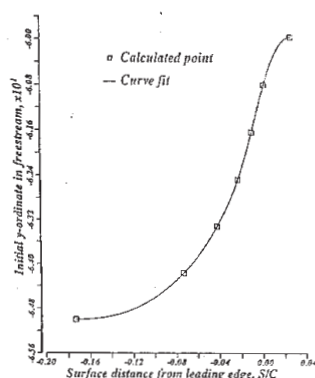


Figura 15.6: Relazione tra punto iniziale e punto di impatto per la traiettoria di una goccia

scambio termico per primo formulato da [107]. Va peraltro sottolineato che le suddette equazioni di bilancio sono riportate in modo abbastanza diverso dai vari autori, a seconda delle ipotesi esemplificative assunte e dello stato dell'arte.

La superficie del corpo viene discretizzata in elementi sui quali si considera un volume di controllo in cui tutte le grandezze termodinamiche si assumono costanti. Relativamente al bilancio di scambio termico, si assumono, inoltre, che le trasformazioni fisiche siano istantanee e che siano trascurabili i flussi di calore per radiazione (in generale) e quelli conduttivi fra le masse di ghiaccio e/o acqua. Tali assunzioni sono da ritenersi senz'altro valide per piccoli intervalli di tempo.

Con riferimento alla Fig. 15.8, in cui si illustra un volume di controllo su una porzione di superficie 2-D, le equazioni di bilancio di massa e di energia relative a tale volume di controllo permettono la determinazione di due incognite, la cui identità dipende dalle condizioni che si verificano sulla superficie: se su di essa tutta l'acqua che arriva ghiaccia, la superficie viene assunta *dry*, se su di essa permane acqua allo stato liquido, la stessa si dice *wet*. In tale ultimo caso, se c'è formazione di ghiaccio, la temperatura sulla superficie deve essere 0°C e le incognite saranno la quantità di acqua che ghiaccia e quella che scorrerà nel volume di controllo *downstream* a $T = 0^{\circ}\text{C}$ (*run back flux*), altrimenti occorrerà determinare la temperatura di equilibrio che sarà associata anche all'acqua di *run back* in uscita. Per le condizioni di *rime ice* (superficie asciutta), l'unica incognita è la temperatura di equilibrio ($< 0^{\circ}\text{C}$), in quanto la quantità di acqua che ghiaccia è pari

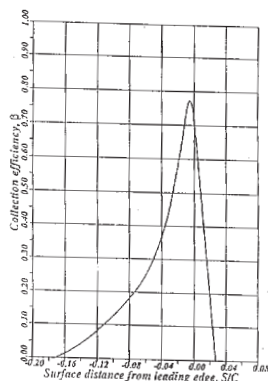


Figura 15.7: Esempio di efficienza di cattura ricavata dalla pendenza della curva di Fig. 15.6

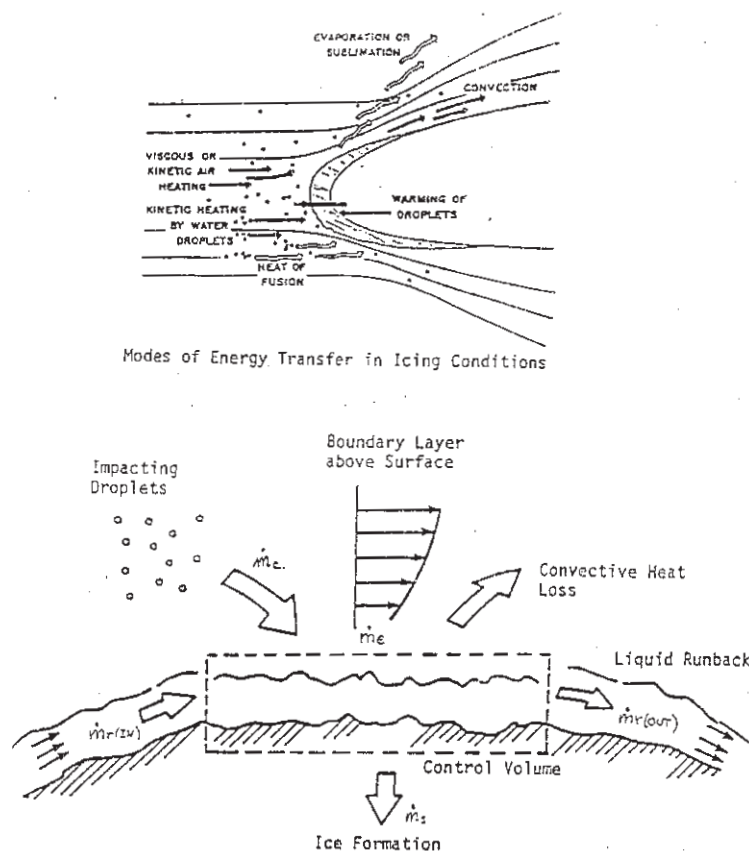


Figura 15.8: Bilanci di materia ed energia in un volume di controllo che attraversa il ghiaccio

a tutta l'acqua che entra nel volume di controllo.

In analogia con la *freezing fraction* n introdotta nei paragrafi precedenti, si introduce per comodità il parametro f come *non-freezing fraction*, che indica l'aliquota di acqua che non solidifica su tutta l'acqua che entra nel volume di controllo. Nelle suddette ipotesi di quasi-stazionarietà le due equazioni di bilancio possono esprimersi come

$$\dot{m}_i = \dot{m}_c + \dot{m}_r(in) - \dot{m}_r(out) - \dot{m}_e \quad (15.10)$$

$$\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 + \dot{Q}_3 + \dot{Q}_4 + \dot{Q}_5 = 0 \quad (15.11)$$

Il significato dei singoli contributi nella (15.10) è descritto di seguito, dove con il termine “portata” si deve intendere il flusso di massa per unità di superficie nell’unità di tempo.

- \dot{m}_c = portata d’acqua di cattura diretta (*impingement*) = $\beta V_\infty LWC_\infty$;
 \dot{m}_e = portata d’acqua che evapora/sublima per variazione della pressione di vapore saturo, con
 $\dot{m}_e = 0.622 (h/c_p Le^{2/3})(P_2 - P_1)/P_m$, dove
 h = coefficiente di scambio termico convettivo;
 c_p = calore specifico dell’aria;
 Le = Numero di Lewis (assunto normalmente = 0.875);
 P_1, P_2 = pressione di vapore saturo dell’acqua alle temperature T_∞
 e di impatto sulla superficie, fornite dalla relazione empirica

$$P = 3.7141 + 1.8833 x + 0.3749 x^2 + 0.0255 x^3$$
 con $x = 0.16 T + 0.4$ (T in $^{\circ}C$)
 P_m = pressione media dell’aria fra le condizioni asintotiche
 e quelle che si realizzano sulla superficie;

- \dot{m}_r = portata d’acqua di *run back* in ingresso e uscita dal volume di controllo;
 \dot{m}_i = portata d’acqua che solidifica = $(1 - f)(\dot{m}_r(in) + \dot{m}_c - \dot{m}_e)$.

In modo analogo, i flussi di energia nella (15.11), sono esprimibili come:

- \dot{Q}_1 = calore scambiato per convezione = $\dot{Q}_c + \dot{Q}_a$, con
 $\dot{Q}_c = h(T - T_e)$ = calore scambiato per variazione della temperatura
 dell’aria da T alla temperatura di equilibrio T_e ;
 $\dot{Q}_a = h(V_\infty^2 / (2c_p))$ = calore prodotto per riscaldamento aerodinamico del flusso d’aria
 sulla superficie A di base del volume di controllo;
- $\dot{Q}_2 = \dot{m}_e(f L_v + (1 - f) L_s)$ = calore scambiato per evaporazione/sublimazione dell’acqua
 con L_v, L_s calori latenti di vaporizzazione e sublimazione;
- $\dot{Q}_3 =$ energia connessa alla portata d’acqua di cattura, pari a $\dot{Q}_d + \dot{Q}_i + \dot{Q}_f + \dot{Q}_e$, con
 $\dot{Q}_d = \dot{m}_c c_{p,w} T_p$;
 $c_{p,w}$ = calore specifico dell’acqua;
 T_p = temperatura delle goccioline (*droplets*) all’impatto sulla superficie,
 calcolata come espresso nel precedente paragrafo
 oppure assunta pari alla T aria locale;
 $\dot{Q}_i = \dot{m}_c V_m^2 / 2$, con V_m velocità delle goccioline all’impatto;
 $\dot{Q}_f = \dot{m}_c (1 - f) L_f$, con L_f calore latente di fusione dell’acqua;
 $\dot{Q}_e = -\dot{m}_c (T_e (f c_{p,w} + (1 - f) c_{p,i}))$, con $c_{p,i}$ calore specifico del ghiaccio;
- $\dot{Q}_4 =$ energia connessa alla portata d’acqua di *run back* proveniente dal volume di controllo
 upstream, esprimibile come \dot{Q}_3 , sostituendo a $\dot{m}_c, \dot{m}_r(in)$ e a $T_p, T_e(in)$ pari alla T_e
 di equilibrio del volume di controllo da cui l’acqua di *run back* proviene;
- $\dot{Q}_5 =$ energia eventualmente immessa nel volume di controllo,
 ad esempio, per simulare l’azione di un sistema antighiaccio.

Per la determinazione del termine \dot{Q}_1 è necessario valutare il coefficiente di scambio termico convettivo h , che è il parametro che più influenza il calcolo dell’accrescimento ghiaccio. Come ordine di grandezza, invece, i termini \dot{Q}_c e \dot{Q}_f sono quelli predominanti per i casi di bassa velocità, mentre

\dot{Q}_a e \dot{Q}_i diventano significativi per velocità elevate. Il valore di h dipende dalle caratteristiche locali dello strato limite e dalla rugosità superficiale.

Esistono vari metodi in letteratura per la valutazione di h . Alcuni, [105], assumono semplicemente per esso le espressioni

$$h(s) = \frac{1}{2} K_L \sqrt{\left(\frac{dU_e}{ds}\right)_{ris/\nu}} \quad (15.12)$$

($ris = ristagno$) per la zona di ristagno e come limite inferiore per l'espressione

$$h(s) = C \cdot 0.0296 K_L Pr^{1/3} Re_s^{4/5}/s \quad (15.13)$$

valida per flusso turbolento. Nelle (15.12) e (15.13), s è l'ascissa curvilinea dal punto di ristagno, U_e la velocità all'esterno dello strato limite, Pr il numero di Prandtl per il flusso turbolento, K_L la conducibilità termica dell'aria, ν è la viscosità cinematica, Re_s il numero di Reynolds basato su s e C un fattore determinato dalla correlazione teorico/sperimentale (valore suggerito in [105]: $C = 2$) per tener conto della rugosità superficiale.

Secondo un approccio più specifico, si assume il criterio empirico di Horton e von Doenhoff di

$$\frac{U(s) K_s}{\nu} = 600 \quad (15.14)$$

per la transizione da flusso laminare a turbolento. Nel tratto laminare si assume che la rugosità (K_s è l'altezza max, adimensionalizzata rispetto alla corda c o la "rugosità equivalente") non influenzi h , ossia che valga l'ipotesi di superficie liscia. Smith e Spalding, con l'ulteriore assunzione di flusso incomprimibile, forniscono l'espressione di $h(s)$ come

$$h(s) = 0.296 K_L \left[\nu U_e^{-2.88} \int_0^s U_e^{1.88} ds \right]^{-1/2} \quad (15.15)$$

essendo K_L la conducibilità termica dell'aria. Per il tratto turbolento si valuta lo spessore di quantità di moto θ in funzione di s , per esempio con il metodo di Thwaites, e, quindi, dopo la determinazione del coefficiente di attrito C_f

$$\frac{1}{2} C_f = \frac{0.168}{[\ln(864\theta/K_s)]^2} \quad (15.16)$$

dalla definizione del numero di Stanton St , si ricava il valore di h :

$$St = \frac{h(s)}{\rho_a c_p U_e} = \frac{1}{2} C_f \left[Pr + \sqrt{C_f/2/St_k} \right] \quad (15.17)$$

con $St_k = 0.52 \cdot (u_t K_s/\nu)^{-0.45} Pr^{0.8}$ ed $u_t = \sqrt{0.0125 U_e^2 (\theta U_e/\nu)^{-0.25}}$.

I valori di h valutati con tale secondo approccio risultano in buon accordo con quelli ottenuti dalla misurazione sperimentale su cilindri con superficie rugosa. Le equazioni (15.10) e (15.11) sono comunemente risolte attraverso uno schema implicito, iterativo, a partire dal volume di controllo nel punto di ristagno e procedendo *downstream* sulle linee di corrente che da esso si dipartono. In ciascun elemento occorre soddisfare entrambe le equazioni con valori consistenti di T_e ed f (o della sua complementare $n = 1 - f$). I valori iniziali di T_e ed f assunti nel primo volume di controllo vanno quindi aggiornati sino a rientrare nella tolleranza assunta per la convergenza.

In 3-D, comunemente, il bilancio termico viene risolto con l'approssimazione 2-D, ossia su sezioni di superfici in cui si fa l'ipotesi di flusso 2-D: al più ci si spinge ad individuare le strisce di superficie delimitate da linee di corrente, su cui applicare il modello 2-D. Ciò al fine di evitare le complicazioni connesse al dover tener conto degli effetti del cross-flow. Tale approccio, del resto, risulta sufficientemente valido per quasi tutti i casi di interesse pratico (ali, impennaggi, lip di prese d'aria).

Calcolo dell'accrescimento ghiaccio e modifica della geometria

In 2-D la formazione di ghiaccio viene simulata con l'aggiunta di uno spessore a ciascuna base del volume di controllo. Tale spessore si determina noto che sia il valore di \dot{m}_i calcolato con il bilancio termico relativo all'intervallo dt . Se ρ_{ice} è la densità del ghiaccio -ricavabile, ad esempio, da formule empiriche che tengono conto delle modalità di formazione (diametro delle goccioline, temperatura e velocità di impatto, etc.) come espresse da Macklin in [106]- e ds è l'area dell'elemento (pannello) di base, tale spessore (considerato costante su tutto il pannello) è dato da

$$d_{ice} = \frac{\dot{m}_i dt}{\rho_{ice}} \quad (15.18)$$

Oggetto di verifica da parte di più studiosi è stata la definizione della direzione di accrescimento, che, comunemente, si fa coincidere con la normale alla superficie dell'elemento. Anche in questo caso, il confronto fra le formazioni di ghiaccio sperimentali e quelle ottenute considerando come direzione di accrescimento la normale alla superficie o la tangente alle traiettorie di impatto principale o direzioni intermedie, non ha fornito una risposta definitiva: in generale, l'accrescimento nella direzione normale alla superficie risulta usualmente conservativo (si predicono cioè formazioni di ghiaccio un po' più grandi di quelle effettive). Dette n_x , n_z le componenti della direzione di accrescimento prescelta, le nuove coordinate della geometria saranno date da:

$$x_{ice} = x + d_{ice} n_x, \quad z_{ice} = z + d_{ice} n_z \quad (15.19)$$

In 3-D l'ispessimento superficiale per l'accrescimento ghiaccio viene pertanto messo in conto con una ridefinizione della griglia superficiale che dipende dall'approccio "quasi 2-D" adottato. Se si è scelto, ad esempio, di effettuare il bilancio termico sulle strisce di superficie delimitate da due linee di corrente, in genere si ridefinisce la pannellazione in modo che le linee di corrente diventino anche linee di griglia. Associando quindi l'ispessimento al centroide di ciascun pannello, si procede ad una nuova ridefinizione della pannellazione costruendo una preventiva superficie interpolante.

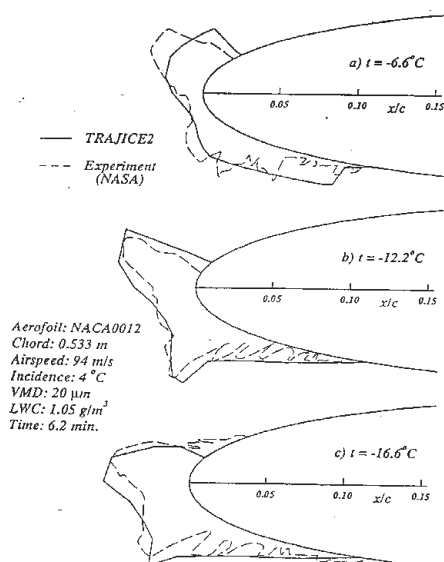


Figura 15.9: Confronto tra forme di ghiaccio calcolate e misurate (NASA Lewis)

In Fig. 15.9 si riportano alcuni esempi di previsione teorica di accrescimento ghiaccio, confrontato con forme di ghiaccio ottenute sperimentalmente. In particolare, ci si riferisce ai risultati ottenuti con il programma TRAJICE2 della DRA (*Defence Research Agency*, UK); altri codici di calcolo simili referenziati in letteratura sono, in primo luogo, il LEWICE della NASA Lewis di Cleveland (USA), che è forse il più importante sia per essere stato storicamente il primo che

per essere attualmente forse il più sofisticato, e quello della francese ONERA (ONERA2). Tali codici sono riconosciuti dagli stessi enti certificanti FAA e JAA come idonei al calcolo teorico delle formazioni di ghiaccio sui profili.

15.4 Considerazioni sul degrado delle prestazioni del velivolo per accrescimento ghiaccio

L'accrescimento ghiaccio e, più in generale, l'operare in condizioni ambientali che possono innescare il fenomeno dell'accrescimento, producono un degrado delle caratteristiche aerodinamiche di tutte le superfici del velivolo (particolarmente quelle portanti) sia perché, come detto nel primo paragrafo, si ha una alterazione macroscopica della forma geometrica originale causata dalla formazione di ghiaccio, e sia perché, quand'anche la suddetta variazione geometrica è piccola, si produce una alterazione dello stato di lisciatura superficiale con la generazione di rugosità. Quest'ultima, in particolare, si genera anche sulla parte di superficie non alterata dalla formazione di ghiaccio.

In generale, con riferimento alle superfici portanti, il suddetto degrado delle caratteristiche aerodinamiche è essenzialmente costituito da un marcato aumento del coefficiente di resistenza e una diminuzione del C_{Lmax} e dell'angolo di stallo. Un'idea dell'entità di tali variazioni prodotte dalla sola rugosità superficiale si può ricavare dai dati sperimentali sui profili NACA, [11], considerando che la rugosità simulata sui modelli (corda di 24 in) con carborundum di altezza media di 0.011 in era sparsa per l'8%c intorno al solo bordo d'attacco. Il profilo NACA 0012 a $Re_c = 6 \cdot 10^6$ presenta, ad esempio, una diminuzione del C_{Lmax} da 1.6 a 1.03, una diminuzione dell'angolo di stallo da 16° a poco più di 12° , un incremento del C_{do} da 0.006 a 0.010.

Nelle Figg. 15.10 e 15.11 si riportano le variazioni delle caratteristiche aerodinamiche di un profilo adottato per l'aviazione commerciale (B737), in corrispondenza di accrescimento ghiaccio di tipo *rime* e *glaze* rispettivamente, allo stesso angolo di incidenza (5°). I dati sono quelli ottenuti dalla sperimentazione nell'*Icing Research Tunnel* della NASA Lewis (Cleveland, Ohio). In Fig.

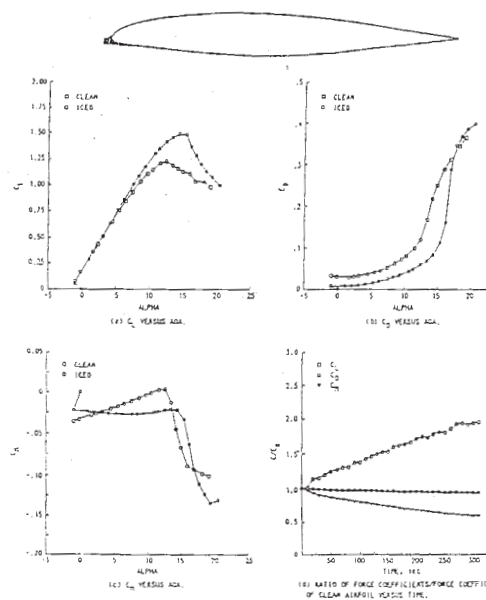


Figura 15.10: Degrado delle prestazioni di un profilo in presenza di *Rime Ice*

15.12 si riportano le analoghe variazioni per lo stesso profilo con ipersostentazione (*full-slat* e *flap* deflesso di 15°), con ghiaccio di tipo *glaze* generato sempre a 5° di incidenza. Si nota come la perdita di $C_{L,max}$ causata dal ghiaccio di tipo *glaze* (-40%) sia praticamente il doppio di quella realizzata con il ghiaccio di tipo *rime*, così come la riduzione dell'angolo di stallo (-5° ca. con

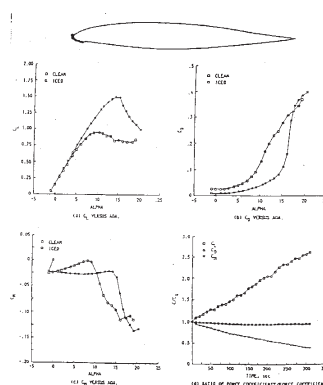


Figura 15.11: Degrado delle prestazioni di un profilo in presenza di *Glaze Ice*

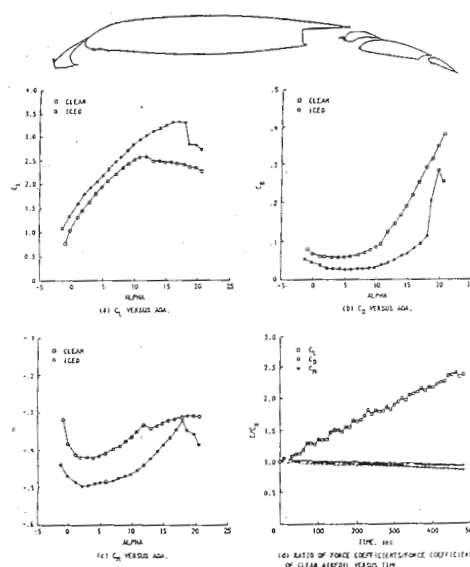


Figura 15.12: Degrado delle prestazioni di un profilo ipersostentato in presenza di *Glaze Ice*

ghiaccio *glaze*, -3° ca. con ghiaccio *rime*). Gli incrementi di resistenza, invece, sono decisamente più elevati: anche fino a 5 volte, rispetto al caso di profilo non contaminato, per incidenze prossime allo stallo. Da notare pure la variazione dei valori del coefficiente di momento (sempre più cabranti) e della pendenza delle curve in funzione dell'incidenza, che indicano significativi cambiamenti in termini di stabilità.

In termini di prestazioni, ci si limita ad evidenziare che riduzioni di $C_{L,max}$ per un'ala si traducono in considerevoli incrementi della velocità di stallo, con ovvie ripercussioni, ad esempio, circa la possibilità di effettuare il decollo. Analogamente, le variazioni delle suddette caratteristiche aerodinamiche per accrescimento ghiaccio, applicate ai profili delle eliche, si traducono in drastiche perdite di efficienza, anche in condizioni di moderato accrescimento. La Saab, per il suo turboelica S-340, ha sperimentato perdite di efficienza superiori al 20% per un non adeguato dimensionamento/funzionamento del sistema di *de-icing* elettrico sulle pale delle eliche, che hanno impedito al velivolo la salita oltre la quota di 12000 ft.

Come già accennato nel paragrafo di introduzione, per le prese d'aria motore l'accrescimento del ghiaccio sul lip può causare sia l'incremento della distorsione del flusso al compressore con, relativa perdita di potenza, che l'ingestione da parte del motore di pezzi di ghiaccio con possibile danneggiamento delle stesse palette del compressore. Per cautelarsi da quest'ultima eventualità spesso si realizza, specie per i motori turboelica, all'interno della presa d'aria, un apposito condotto di

scarico (separatore inerziale) per la fuoruscita dei corpi estranei casualmente ingeriti. Si evidenzia che anche all'interno delle prese d'aria, soprattutto se queste sono costituite da condotti di forma complessa, si può formare ghiaccio pur con temperature esterne di $+3^{\circ}\text{C}$ / $+5^{\circ}\text{C}$: l'accelerazione del flusso, infatti, può provocare abbassamenti della temperatura anche di $8^{\circ}\text{C} - 10^{\circ}\text{C}$.

È utile, al fine di ben valutare il problema del degrado delle caratteristiche aerodinamiche e delle prestazioni prodotto dalle formazioni di ghiaccio superficiali, effettuare alcune considerazioni sulle dimensioni e la tipologia dei velivoli per evidenziare il diverso peso che il suddetto problema ha per gli stessi.

In generale, l'efficienza di cattura di un profilo, come illustrato nel precedente paragrafo, è funzione del parametro inerziale K . In particolare, l'efficienza di cattura cresce all'aumentare di K : il rateo di accrescimento ghiaccio, a sua volta, è maggiore per valori dell'efficienza di cattura più elevati. In Fig. 15.13 si riportano le diverse formazioni di ghiaccio ottenute, a parità di condizioni

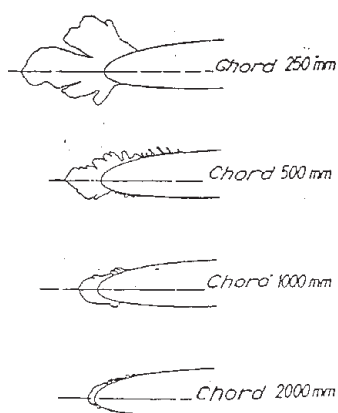


Figura 15.13: Forme di ghiaccio sul profilo NACA 2412 al variare della corda

ambientali e di tempo di accrescimento, sul profilo NACA 2412 con diverse lunghezze di corda. In Fig. 15.14 si riporta la variazione dell'efficienza di cattura locale per il NACA 0012 al variare

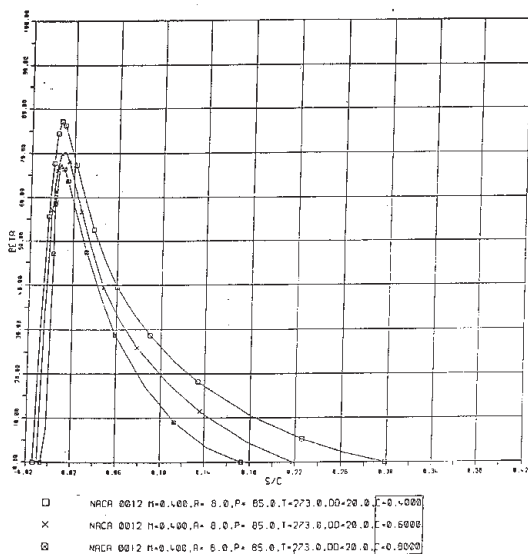


Figura 15.14: Efficienza di cattura sul profilo NACA 2412 al variare della corda

delle dimensioni della corda. Le conclusioni che si traggono sono eloquenti: la cattura d'acqua e l'accrescimento ghiaccio sono tanto maggiori quanto più piccole sono le dimensioni del profilo. Ciò

da solo consente di spiegare perché il ghiaccio non rappresenta un problema per i grandi velivoli da trasporto, che, peraltro, hanno quote operative e velocità di crociera così elevate da impedire che lo stesso fenomeno della formazione ghiaccio possa aver luogo.

Le suddette considerazioni spiegano perché le ali di un C-5A sono del tutto prive di sistemi di protezione dal ghiaccio. Analogamente i B-747/757/767, gli MD11/12, gli A-300/340, hanno l'antighiaccio solo sul bordo d'attacco dello *slat* dell'*outboard wing*: l'*inboard wing* ha profili di corde così grandi da non necessitare di alcuna protezione. Stesso discorso vale per i piani di coda: solo l'MD11, per il quale si è preferito, in fase di progettazione, privilegiare le prestazioni (resistenza, efficacia), è dotato di un sistema *anti-icing* sul piano orizzontale, essendo stata ridotta del 30% la superficie in pianta rispetto a quella del suo predecessore, il DC-10, che, viceversa, non installava nessun sistema anti-ghiaccio.

Statisticamente è stato rilevato che l'accrescimento ghiaccio a livelli di pericolosità ha luogo, per il 60% dei casi, a quote inferiori ai 3000 m (10000 ft); la probabilità scende al 7% per quote intorno agli 8000 m (26000 ft). Le temperature più frequenti alle quali il fenomeno si manifesta in modo evidente sono comprese nell'intervallo 0°C , -15°C .

La velocità di volo ha due opposte influenze sul fenomeno dell'accrescimento: al suo aumentare, infatti, incrementano sia la convezione che la portata di acqua di *impingement*, fattori entrambi favorevoli alla formazione del ghiaccio, che il riscaldamento delle superfici prodotto dall'energia cinetica del flusso di aria all'impatto, fenomeno quest'ultimo che contrasta l'accrescimento.

Per ogni velivolo esiste quindi una velocità (Mach) minima alla quale il riscaldamento cinetico delle superfici prevale sui fattori favorevoli alla formazione del ghiaccio, che quindi non ha luogo. Ciò giustifica, ad esempio, perché le procedure di uscita dalle condizioni di ghiaccio prescrivono sempre di aumentare la velocità di volo: l'incremento della velocità oltre il suddetto livello di equilibrio, favorisce, del resto, l'azione meccanica di "pulizia" delle superfici contaminate, andando a contrastare le forze di adesione superficiale del ghiaccio e di coesione degli accrescimenti stessi che, come illustrato, sono spesso di tipo non omogeneo, contenendo sia aria che acqua liquida. L'aumento di velocità, infine, consente di ottenere la portanza utile ad incidenze più basse e ciò costituisce una garanzia sulla riduzione del C_{Lmax} e dell'angolo di stallo provocata dal ghiaccio.

Le precedenti considerazioni permettono di concludere che il problema dell'accrescimento ghiaccio riguarda prevalentemente i velivoli "piccoli e lenti", che hanno, peraltro, quote operative proprio nell'intervallo più favorevole all'accrescimento ghiaccio, potenze installate ridotte per l'alimentazione di sistemi antighiaccio e sistemi propulsivi (turboeliche, rotori di elicotteri) più sensibili al fenomeno della formazione del ghiaccio. Per i velivoli di grandi dimensioni il ghiaccio costituisce un problema essenzialmente per i motori. Per i velivoli militari (caccia), che pure sono piccoli, l'esubero di potenza installata, le elevate velocità (e quote) operative e l'aerodinamica delle superfici portanti (con bordi d'attacco aguzzi ed a freccia), rappresentano adeguate garanzie nei confronti del problema ghiaccio.

15.5 Cenni sui regolamenti di certificazione in ghiaccio

I requisiti di base per la certificazione in ghiaccio sono contenuti nel capitolo 25.1419 delle FAR/JAR. L'appendice C degli stessi regolamenti definisce le condizioni meteorologiche più gravose per la verifica della rispondenza ai requisiti di sicurezza richiesti e le note ACJ 25.1419 e JAR AMJ (Advisory Material Joint) 25.1495, del 1992 (queste ultime in via di accettazione da parte delle varie autorità di certificazione nazionale), contengono una abbastanza dettagliata e concreta guida delle modalità con le quali è possibile effettuare la suddetta verifica.

Ci si limita, nel seguito, a citare alcune fra le norme basilari contenute nei suddetti regolamenti.

- Condizioni meteorologiche: occorre verificare i casi più gravosi fra quelli di seguito descritti.
 1. Maximum Continuous Icing, ossia volo continuo in condizioni di ghiaccio (attraversamento di una nuvola di data temperatura, LWC e con *droplets* di 20 *microns*), per la durata di 30 minuti;

2. Maximum Intermittent Icing, ossia volo attraverso 3 nuvole di 5 Km di estensione orizzontale, intervallato da volo in aria secca per la stessa estensione, con le nuvole aventi la stessa temperatura e *droplet size* del caso 1;
 3. L'intero spettro delle dimensioni delle *droplets* reperibili in natura (è accettato quello di Langmuir), per la determinazione dell'efficienza di cattura, e le dimensioni di max 50 *microns*, per la definizione dei limiti di *impingement*.
- Prove di volo in ghiaccio naturale: vanno in ogni caso eseguite per validare gli studi che hanno consentito di generare le forme di ghiaccio più gravose provate in volo con forme simulate artificiali.
 - Prove di volo in ghiaccio simulato: occorre considerare anche il caso di avaria dei sistemi di protezione dal ghiaccio, provando le superfici più importanti con forme artificiali alte 3 *in*, e ciò indipendentemente dalle dimensioni del velivolo.

In generale, le modalità per ottenere la certificazione in ghiaccio di un velivolo vengono definite congiuntamente fra il costruttore e l'ente certificante, mediante la stesura di un programma di attività che, proposto dal costruttore, è oggetto di negoziazione con l'ente certificante fino alla sua accettazione. In pratica, deve essere sempre stabilito un certo numero di prove di volo in condizioni di ghiaccio naturale e, quindi, una volta dimostrato che le previsioni ottenute con modelli teorici e/o prove di galleria sono consistenti con i risultati provenienti dalle suddette prove di volo, è possibile estendere la verifica delle altre condizioni stabilite nel programma di certificazione, utilizzando anche i risultati ottenuti con tali modelli teorici e con la sperimentazione in galleria. In particolare, si può procedere con prove di volo con forme di ghiaccio simulate e, per verifiche "locali", con prove di volo dietro a velivoli *tanker*.

15.6 Riferimenti

La bibliografia sul problema dell'accrescimento ghiaccio è vastissima.

I contenuti di questo capitolo fanno riferimento principalmente ai contenuti a [108], documento emesso a conclusione dei lavori del *Working Group 20*, costituito nell'ambito del Fluid Dynamic Panel (FDP) dell'AGARD. Tale WG20, proposto nel 1991 a Tolosa nel congresso AGARD su *Effects of Adverse Weather on Aerodynamics*, ha svolto le sue attività fra il 1994 ed il 1996.

In [109] sicuramente possono essere trovati tutti gli aspetti di base sui problemi del ghiaccio in volo.

Si ritiene poi opportuno segnalare i riferimenti [110], [111], [112], [113], [114], [115], che possono essere assunti come punti di partenza per un approfondimento del tema a partire dallo stato dell'arte attuale della ricerca e delle soluzioni in uso in campo industriale. In particolare, le pubblicazioni AGARD, essendo collezioni di più articoli, sono a loro volta una fonte inesauribile di riferimenti.

Parte VI

**AERODINAMICA DELLA
PROPULSIONE: ELICHE E
PRESE D'ARIA**

Capitolo 16

Le eliche

16.1 Introduzione

L'elica, Fig. 16.1, è una macchina rotativa a fluido che ha la funzione di fornire al velivolo la spinta necessaria al volo trasmettendo al fluido la potenza fornita da un motore che ne aziona l'albero. Essa può essere dotata simultaneamente di due moti diversi, rotazione e traslazione, e il moto risultante di un suo punto è di tipo elicoidale. Se manca il moto rotatorio l'elica è detta bloccata, mentre in assenza di traslazione l'elica è detta a punto fisso.



Figura 16.1: Eliche Dowty sul velivolo C-130 Hercules

Parti costitutive essenziali di un'elica sono il mozzo, le pale e l'albero motore. Il mozzo è la parte centrale, è fissato all'albero e su di esso sono calettate le pale (più o meno ortogonalmente all'albero); presenta una carenatura ogivale per presentare la minima resistenza all'avanzamento. Le pale sono gli elementi che creano la forza lungo l'albero, e sono vere e proprie ali rotanti; il loro numero è variabile. L'albero motore (al quale si associa un asse t rigidamente collegato alla terna degli assi velivolo) è collegato, in genere tramite un opportuno riduttore del numero di giri, al motore che applica ad esso la coppia che mette in rotazione l'intero organo.

Il principio di funzionamento dell'elica è identico a quello di un convenzionale ventilatore: essa proietta aria all'indietro ottenendo sulle pale (e quindi sull'albero), per reazione, una spinta in avanti. Sul velivolo la massa di fluido viene accelerata nel verso opposto alla direzione del moto. Si tratta di una macchina ad alta efficienza meccanica massima.

È ben noto che l'applicazione originaria dell'elica è legata alla (sempre attuale) propulsione marina (e comunque un'elica progettata per operare efficacemente in acqua risulta estremamente inefficiente in aria). Per l'aeroplano (come per la nave o per il sottomarino) il compito primario dell'elica è produrre una forza -la spinta propulsiva- lungo l'asse e (più o meno) nella direzione

e nel verso del moto: peraltro una stessa elica può essere utilizzata sia per produrre una spinta in verso opposto al moto (elica frenante, estremamente utile per le prestazioni all'atterraggio: si accelera il fluido nel verso del moto¹), sia per le manovre a terra. Altra applicazione aeronautica si ha in campo elicotteristico, dove si parla di rotore piuttosto che di elica (qui i rotori sono almeno due, e la spinta del rotore principale è in gran parte perpendicolare alla direzione del moto).

Il principio di funzionamento dell'elica può essere invertito quando c'è una corrente in movimento che la investe: l'elica, od anche qualcosa di simile (un aerogeneratore, ad esempio), viene mossa dalla corrente e ne sfrutta l'energia per fornire potenza ad un albero².

L'azione dell'elica viene sviluppata attraverso un sistema di forze e momenti che si esercitano tra fluido e pale (esattamente come per le ali): pertanto nei modelli di funzionamento, sia semplici che avanzati, si ricorre all'adattamento opportuno di tutte le nozioni relative all'ala e di alcune teorie alari, introducendo però un certo peggioramento del grado di approssimazione in quanto le perturbazioni prodotte nel fluido dall'elica sicuramente sono più intense. Ed anche la possibilità oggi concreta di calcolare le azioni sull'elica risolvendo numericamente le equazioni di Navier-Stokes soffre indubbiamente di importanti limitazioni rispetto ad analoghi calcoli svolti su ala.

La propulsione ad elica in aria si applica (e si apprezza) per velocità massime di volo comunque subsoniche. Un miglioramento di alcune delle prestazioni di un'elica si ha inserendola in un condotto (elica intubata), come nel caso del *turbofan* (impiegato per la propulsione ad alta efficienza in campo transonico): la spinta prodotta dal *fan* -che è appunto un'elica intubata- si somma a quella prodotta dal *jet*.

C'è stretta somiglianza tra le diverse macchine rotanti a fluido (eliche, compressori e turbine, pompe, ad esempio). Il concetto funzionale "statore-rotore" può essere esteso a due eliche accoppiate controrotanti: si tratta di uno schema che al momento in Aeronautica ha applicazione abbastanza limitata, e che in un futuro abbastanza prossimo potrà essere la via giusta per estendere la propulsione ad elica anche al campo transonico, con significativi miglioramenti dell'efficienza complessiva della propulsione.

Alcune delle considerazioni di Aerotecnica applicata all'elica sono state tratte da [100].

16.2 Aerotecnica

In relazione al senso di rotazione, e dal punto di vista del pilota, un'elica può essere destrorsa o sinistrorsa a seconda che ruoti in verso orario o antiorario rispettivamente.

Si definisce diametro dell'elica, e lo si indica con D il diametro del cilindro circolare minimo circoscritto all'elica avente l'asse coincidente con quello di rotazione. Si definisce disco dell'elica il cerchio di diametro pari al diametro dell'elica e giacente nel piano normale all'asse di rotazione.

Un'elica che assorbe una coppia dal motore (elica positiva) può generare una trazione positiva (elica traente) o negativa (elica frenante). Vi sono poi eliche che forniscono una coppia all'albero (mulinelli, od eliche negative). Una stessa elica opportunamente costruita può svolgere in fase operativa tutte queste funzioni modificandone la geometria o la condizione di funzionamento.

L'elica è detta traente o spingente se collocata davanti oppure dietro il motore.

Si definisce l'asse r della pala (in analogia con l'asse velivolo y di un'ala), perpendicolare a t e giacente nel piano del disco, Fig. 16.2. La superficie alare che costituisce la pala è fortemente svergolata. Dato un punto P su r , la figura che si genera dall'intersezione della pala con un piano normale in P ad r è un profilo alare -l'elemento di pala - la cui corda è inclinata rispetto al piano di rotazione di un angolo θ , detto angolo di calettamento, che diminuisce lungo r affinché

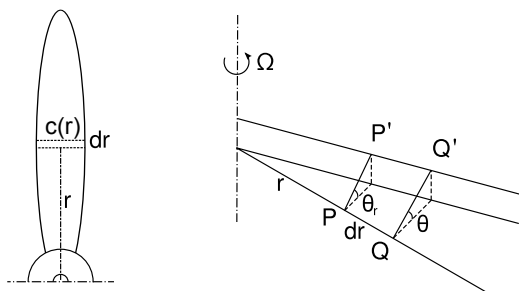


Figura 16.2: Pala ed elemento di pala

¹Su un velivolo la funzione frenante non si realizza invertendo il verso di rotazione dell'elica!

²Questo funzionamento inverso può essere utile su certi aeroplani per riavviare in volo il motore.

l'elemento di pala lavori ad un opportuno e conveniente angolo di attacco³. Si completa poi in P una terna (rotante), Fig. 16.3, avente un secondo asse parallelo a t (e quindi perpendicolare al piano del disco) ed un asse χ in direzione tangenziale al moto circolatorio di P (e quindi nel piano del disco).

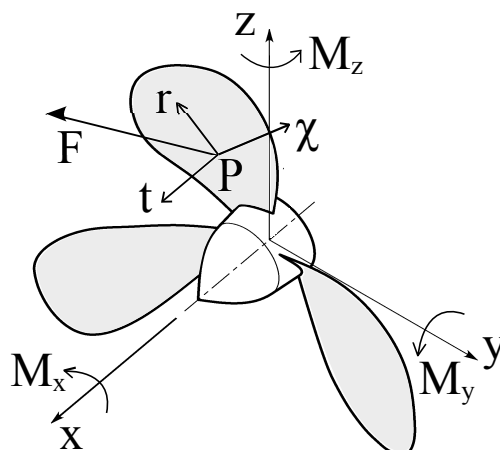


Figura 16.3: Forze e momenti agenti sulla pala (o sull'elica)

Ora su ciascuna pala si sviluppano, Fig. 16.3, una forza (applicata) ed una coppia: la pala ed il suo collegamento con l'albero saranno sufficientemente robusti da sopportare le sollecitazioni che si hanno in tutto l'involucro di volo. Componendo forze e coppie esercitate su tutte le pale si avranno come risultanti -nel caso più generale- una forza applicata \mathbf{F} ed una coppia \mathbf{M} . La forza risultante ha una componente T lungo t , la trazione (positiva o negativa), ed una componente nel piano del disco. Analogamente la coppia \mathbf{M} si decompone lungo t e lungo altre due direzioni ortogonali: in particolare, la coppia Q che si esercita lungo t coincide con la coppia all'albero trattata dall'elica (assorbita dal motore o ceduta al motore). Detta Ω la velocità angolare dell'elica, la grandezza $P = Q\Omega$ è la potenza trattata dall'elica. In quanto macchina l'elica ha un suo rendimento

$$\eta = \frac{TV_{\infty}}{Q\Omega} \quad (16.1)$$

dato dal rapporto tra la potenza utilizzata per mantenere in volo il velivolo e la potenza all'albero; il rendimento di un'elica può attingere valori massimi molto elevati, poco minori dell'unità in quanto nella conversione di energia prodotta dall'elica non sono coinvolte trasformazioni termodinamiche.

Per un'elica di N pale e raggio $R = D/2$ si introduce la solidità σ intesa come rapporto tra la superficie totale delle pale e la superficie del disco: $\sigma = N \int_0^R c \, dr / \pi R^2$.

Elica in flusso assiale

Per lo studio fondamentale delle eliche, sia nello sviluppo di modelli e metodi teorici che negli esperimenti, è conveniente mettersi nelle condizioni dette di flusso assiale assumendo che la velocità dell'elica sia orientata lungo il suo asse. In flusso assiale la forza sull'elica coincide praticamente con T (è applicata sull'asse dell'elica), le altre due componenti essendo trascurabili; inoltre l'unica componente della coppia \mathbf{M} è Q .

Nel caso dell'elica montata sul velivolo è come dire (con una certa approssimazione) che la velocità di volo sia allineata con l'asse dell'elica. In genere in condizioni operative la condizione di flusso assiale non si verifica in quanto l'albero dell'elica non è allineato con la direzione di V_{∞} se non in qualche particolare situazione della missione di volo: l'elica è rigidamente collegata al velivolo, e la sua posizione rispetto al vento dipende dagli angoli di assetto.

La restrizione al flusso assiale è abbastanza forte ma non decisiva: condizioni difformi possono essere importanti in sede di progetto del velivolo e delle sue prestazioni, e vengono trattate con considerazioni *ad hoc*.

³Quando la pala si discosta dal suo asse l'elemento di pala può essere definito in diverse maniere, esattamente come per un'ala a freccia.

L'ipotesi di flusso assiale sarà mantenuta nel seguito ad esclusione del paragrafo conclusivo.

Elica cilindrica e passo geometrico

Durante il moto rototraslatorio dell'elica ogni suo punto P descrive una curva detta "elica cilindrica". Questa curva può essere individuata sulla superficie laterale del cilindro circolare di raggio r passante per P ed il cui asse coincide con l'asse di rotazione, Fig. 16.4.

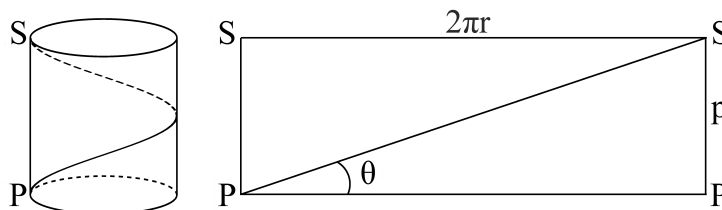


Figura 16.4: Elica cilindrica

Se si sviluppa questo cilindro l'elica cilindrica viene a coincidere con la diagonale del rettangolo corrispondente. È facile comprendere pertanto la proprietà: "la tangente all'elica cilindrica in ogni suo punto forma un angolo costante θ con il piano normale all'asse del cilindro, detta pendenza o inclinazione dell'elica cilindrica".

La lunghezza p della diagonale PS costituisce la spira dell'elica e si definisce "passo geometrico" associato all'elemento di pala all'ascissa r la distanza tra due spire consecutive misurata lungo l'asse del cilindro. Il calettamento θ è collegato strettamente al passo (sono la stessa cosa) in quanto

$$p = 2\pi r t g\theta \quad (16.2)$$

Tutti gli elementi di pala avanzano durante un giro della stessa quantità, l'avanzo per giro, o avanzamento, mentre il passo geometrico corrisponde all'avanzo per giro dell'elemento di pala qualora si muova in direzione della corda: la differenza tra passo geometrico ed avanzamento è detta regresso dell'elica⁴.

Dalla definizione di elica cilindrica discende quella di superficie elicoidale, ovvero della superficie generata dal moto elicoidale di ogni segmento rettilineo o curvo. Se ci si riferisce al segmento compreso tra i raggi r ed $r + dr$ di una pala d'elica, perpendicolare all'asse di rotazione, ogni punto di tale segmento descrive un'elica cilindrica ed i segmenti come PP' , Fig. 16.2, rappresentano le corde degli elementi di pala che si possono, per così dire, montare su queste corde.

16.3 Funzionamento approssimato dell'elemento di pala - Coefficienti di Rénard

Considerazioni abbastanza accurate sul modo in cui lavora un'elica si possono poi fare considerando un elemento di pala che si muova nel fluido di lavoro indipendentemente da tutti gli altri elementi ed approssimandone il moto come traslatorio, a velocità pari a quella periferica del punto materiale a distanza r dall'albero (si trascura il fatto che il moto in realtà è rotatorio). Si possono allora utilizzare tutti i risultati delle teorie bidimensionali relative al profilo alare, in campo viscoso ed anche in campo comprimibile: si suppone cioè noto il comportamento dell'elemento di pala al variare dell'angolo di attacco (e dei numeri di Reynolds e Mach) mediante conoscenza delle caratteristiche di portanza e delle polari di resistenza e di momento.

Sia V_∞ la velocità di volo dell'elica che ruota a n giri al minuto (come usa in campo elicistico, e quindi $\Omega = 2\pi n/60$ è la velocità angolare dell'elica in rad/sec). L'atto di moto di un elemento

⁴Probabilmente in passato si pensava che l'elica si avvittasse nel fluido come un bullone in un dado, donde la denominazione anglosassone *airscrew*, ciascun elemento di pala muovendosi lungo la direzione della sua corda.

di pala rispetto al fluido (fermo) e lo schema delle forze agenti su di esso sono mostrati nelle Figg. 16.5 e 16.6⁵.

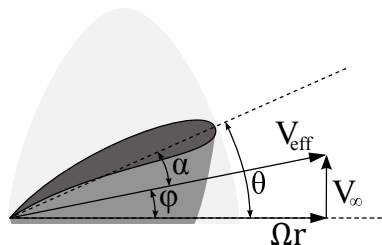


Figura 16.5: Moto di un elemento di pala

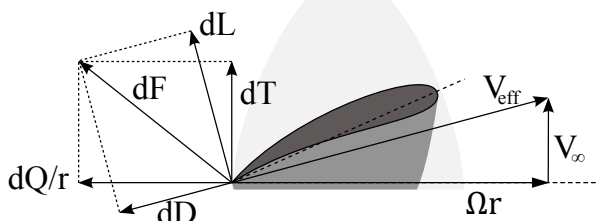


Figura 16.6: Forze aerodinamiche su un elemento di pala

Il moto dell'elemento di pala è caratterizzato dunque da una velocità effettiva

$$V_{eff} = \left[(2\pi nr)^2 + V_\infty^2 \right]^{1/2}$$

che investe il profilo con un angolo di attacco

$$\alpha = \theta - \varphi = \theta - \arctg \frac{V_\infty}{2\pi nr} \quad (16.3)$$

Assumendo in prima ipotesi che il profilo lungo r sia lo stesso la (16.3) mostra che calettamento e passo geometrico devono diminuire dal mozzo all'estremità se si vuole che ciascun elemento di pala lavori ad un angolo di attacco ottimale: questo a causa dell'aumento della velocità periferica. Si parla di elica a passo variabile lungo la pala, e si definiscono, per convenzione, passo dell'elica e valore nominale del calettamento il passo ed il calettamento in una sezione di riferimento (ad esempio, alla sezione $r = 3/8D$).

Scrivendo la (16.3) nella forma

$$\alpha = \theta - \arctg \frac{V_\infty}{nD} \frac{D}{2\pi r} \quad (16.4)$$

è immediato osservare che a parità di θ e D/r (si può pensare a due eliche geometricamente simili, di diametro D e D' , i cui profili ai raggi r ed r' abbiano la stessa geometria ed angolo di calettamento, con lunghezze delle corde proporzionali ai rispettivi diametri), l'angolo di attacco viene a dipendere dal rapporto di funzionamento γ definito come

$$\gamma = \frac{V_\infty}{nD} \quad (16.5)$$

L'angolo φ definisce il passo aerodinamico p_a , proporzionale all'avanzo per giro:

$$p_a = 2\pi r t g \varphi = \gamma D \quad (16.6)$$

Una prima analisi della genesi della spinta di un'elica può essere effettuata considerando le forze aerodinamiche elementari che si vengono a realizzare sull'elemento di pala, Fig. 16.6. L'elemento di forza dF (che per un profilo viene decomposto in portanza dL e resistenza dD) ha una componente normale al piano di rotazione che costituisce la spinta elementare dT , mentre la componente sul piano di rotazione genera una coppia resistente dQ e si può scrivere come dQ/r . L'integrale delle spinte elementare fornisce la spinta T prodotta dalla pala; l'integrale della coppia resistente

⁵Le definizioni di θ e di α , qui riferite alla direzione della corda dell'elemento di pala possono essere espresse anche in riferimento alla retta di portanza nulla.

elementare dà la coppia Q che dovrà essere equilibrata dalla coppia all'albero su cui è montata l'elica. Esprimendo la velocità effettiva come proporzionale a nD secondo la

$$V_{eff} = \left[(2\pi nr)^2 + V_\infty^2 \right]^{1/2} = \gamma nD \left[1 + \left(\frac{2\pi r}{D} \right)^2 \frac{1}{\gamma^2} \right]^{1/2} \quad (16.7)$$

la spinta T potrà essere espressa in termini di una pressione dinamica proporzionale ad $(nD)^2$ e di una superficie di riferimento proporzionale a D^2 come

$$T = C_T \rho n^2 D^4 \quad , \quad C_T = \frac{T}{\rho n^2 D^4} = C_T(\gamma) \quad (16.8)$$

Il coefficiente di spinta C_T riveste un ruolo simile a quello del coefficiente di portanza di un'ala.

Analogamente si può scrivere per coppia, potenza e rendimento (16.1)

$$Q = C_Q \rho n^2 D^5 \quad , \quad C_Q = \frac{Q}{\rho n^2 D^5} = C_Q(\gamma) \quad (16.9)$$

$$P = Q\Omega = C_P \rho n^3 D^5 \quad , \quad C_P = \frac{P}{\rho n^3 D^5} = C_P(\gamma) \quad (16.10)$$

$$\eta = \frac{TV}{Q\Omega} = \frac{C_T}{C_P} \gamma \quad (16.11)$$

È utile, per il prosieguo, esprimere spinta, coppia e potenza nella forma

$$T = T_c \pi R^2 \rho \Omega^2 R^2 \quad (16.12)$$

$$Q = Q_c \pi R^2 \rho \Omega^2 R^3 \quad (16.13)$$

$$P = P_c \pi R^2 \rho \Omega^3 R^3 \quad (16.14)$$

ed inoltre si ponga

$$\lambda = \frac{V_\infty}{\Omega R} \quad (16.15)$$

Confrontando le (16.12), (16.13), (16.14) e (16.15) con le (16.8), (16.9), (16.10) e (16.11) rispettivamente, si determinano i seguenti legami tra i due sistemi di coefficienti adimensionali:

$$C_T = \frac{\pi^3}{4} T_c \quad (16.16)$$

$$C_Q = \frac{\pi^3}{8} Q_c \quad (16.17)$$

$$C_P = \frac{\pi^4}{4} P_c \quad (16.18)$$

$$\gamma = \pi \lambda \quad (16.19)$$

I coefficienti C_T, C_Q, C_P ed il rendimento η evidentemente dovranno dipendere, eqq. (16.4) e (16.5), da γ , oltre che dagli appropriati valori dei numeri di Reynolds $Re = \rho \pi n D^2 / \mu$ e di Mach $M = \pi n D / a$.

Le (16.8)-(16.19) furono introdotte da Rénard.

Similitudine tra eliche

L'importanza degli studi teorici è certamente di fondamentale importanza, ma necessariamente per il progetto delle eliche si fa affidamento ad esperienze di laboratorio. Rénard stabilì che per applicare i risultati delle esperienze effettuate su modelli alle eliche al vero è necessario che siano rispettate due condizioni fondamentali di similitudine:

- similitudine geometrica, assicurata se tra modello ed elica al vero esiste un rapporto costante tra tutte le grandezze omologhe,
- similitudine aerodinamica (o cinematica), verificata se modello ed elica al vero presentano lo stesso rapporto di funzionamento.

16.4 Alcune considerazioni sul passo

Se fosse nullo lo spessore del profilo, l'elemento di pala così generato opererebbe, eq. (16.4), all'angolo di attacco

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{p}{2\pi r} - \operatorname{arctg} \frac{\gamma D}{2\pi r} \quad (16.20)$$

Qualora il valore di γ fosse uguale al rapporto p/D , l'incidenza sarebbe nulla per tutti gli elementi di pala ed il passo geometrico ed aerodinamico coinciderebbero; nel caso che $\gamma \neq p/D$ l'incidenza sarà variabile con r .

In genere le pale di un'elica sono costituite da elementi elicoidali con passo variabile con il raggio; riferendosi infatti al caso semplice in cui gli elementi di pala sono disegnati con la stessa forma geometrica (ovvero pala a profilo costante), volendo far operare gli elementi di pala ad un costante angolo di attacco, ad esempio all'angolo corrispondente alla massima efficienza, essendo

$$p = 2\pi r t g \theta = 2\pi r t g (\alpha + \varphi) = 2\pi r \frac{t g \alpha + t g \varphi}{1 - t g \alpha t g \varphi} = 2\pi r \frac{t g \alpha + \frac{\gamma D}{2\pi r}}{1 - t g \alpha \frac{\gamma D}{2\pi r}} \quad (16.21)$$

si ha che con $\alpha = \operatorname{cost} \neq 0$ e per un dato rapporto di funzionamento γ di progetto il passo p deve necessariamente variare con il raggio, come espresso dalla (16.21).

Si fa qui presente che per elica a passo fisso si intende un'elica con passo variabile con r le cui pale sono rigidamente fissate al mozzo.

Ovviamente, sia perché gli elementi di pala possono essere profili alari di forma diversa e sia perché, per motivi strutturali, lo spessore percentuale varia con r fino ad assumere valori elevati ($\tau = 30 \div 40\%$) in prossimità del mozzo, l'angolo di attacco ottimo può variare lungo il raggio. D'altra parte, con le eliche a passo fisso può non essere conveniente riferirsi ad una distribuzione ottimale di incidenze per consentire che il rendimento dell'elica non diminuisca bruscamente, quando ci si allontana dal valore del rapporto di funzionamento di progetto.

Si osserva ora che se tutti gli elementi di pala di un'elica a passo fisso vengono ruotati di uno stesso angolo si viene a generare una nuova elica: l'elica a passo variabile in volo, indispensabile per applicazioni un minimo evolute, ha le pale che durante il funzionamento operativo possono essere ruotate rigidamente (dello stesso angolo) intorno al proprio asse mediante interposizione tra l'albero motore e le pale di un meccanismo apposito, il variatore di passo.

Quando si fa variare con continuità il calettamento delle pale, cioè si imprime una rotazione continua alle pale intorno al loro asse, si generano più eliche differenti (che si possono considerare come appartenenti ad una stessa famiglia), con caratteristiche aerodinamiche diverse l'una dall'altra.

È il caso di osservare che l'espressione "elica a passo variabile" è imprecisa in quanto è l'angolo di calettamento che è variabile anche se ciò comporta una variazione anche del passo. Si conviene quindi di indicare con lo stesso significato le espressioni "elica a passo variabile" e "elica a calettamento variabile".

16.5 Curve caratteristiche

Le curve caratteristiche di un'elica, Fig. 16.7, rappresentano le grandezze C_T, C_P (e/o C_Q) ed η in funzione di γ .

Come si osserva dalla (16.4) o dalla Fig. 16.6, all'aumentare di γ l'angolo di attacco di tutti gli elementi di pala diminuisce, sicché per incidenze minori di quelle critiche è lecito prevedere una diminuzione del coefficiente di spinta C_T ; per un dato valore di $\gamma = \gamma_1$ la spinta si annulla (l'angolo tra la velocità effettiva e la retta di portanza nulla dell'elemento di pala è piccolo). Se si considera che il maggiore contributo alla spinta deriva dalla portanza sviluppata dai profili, non è difficile comprendere che il coefficiente di spinta di un'elica assuma un andamento prossimo a quello lineare (con leggera curvatura verso il basso per la riduzione di inclinazione della forza aerodinamica).

Per $\gamma > \gamma_1$ la spinta risulterà negativa e l'elica si comporta come elica frenante.

Per quanto riguarda i coefficienti di coppia e di potenza è immediato prevedere che anche questi coefficienti dovranno decrescere all'aumentare del rapporto di funzionamento, con una legge approssimativamente quadratica dal momento che il maggior contributo alla coppia resistente, e quindi alla potenza assorbita, è da ascrivere alla resistenza aerodinamica degli elementi di pala; si ha poi che il valore di $\gamma = \gamma_2$ per cui si annulla la coppia e la potenza deve essere più elevato del valore $\gamma = \gamma_1$ per cui si annulla la spinta, se si segue la continua rotazione del vettore risultante delle forze aerodinamiche all'aumentare del rapporto di funzionamento. Per $\gamma > \gamma_2$, la coppia da resistente diventa motrice e l'elica anziché assorbire una coppia all'albero (elica mossa), cede una coppia all'albero (elica motrice).

Se si considera che, per definizione, $\eta = 0$ per $\gamma = 0$ e per $\gamma = \gamma_1$, si conclude che il rendimento dovrà raggiungere un valore massimo tra questi due valori (generalmente per $\gamma \simeq 0.7 \div 0.8\gamma_1$).

Le curve caratteristiche mostrate in Fig. 16.7 sono tipiche per un'elica che deve operare a basse velocità di avanzamento. Quando le velocità sono elevate, sia il passo che il valore nominale del calettamento devono aumentare; ciò comporta che per grandi valori di θ e per bassi valori del rapporto di funzionamento gli angoli di attacco possono superare i valori critici ed una certa porzione della pala dell'elica viene ad operare in condizioni di stallo. All'aumenta-

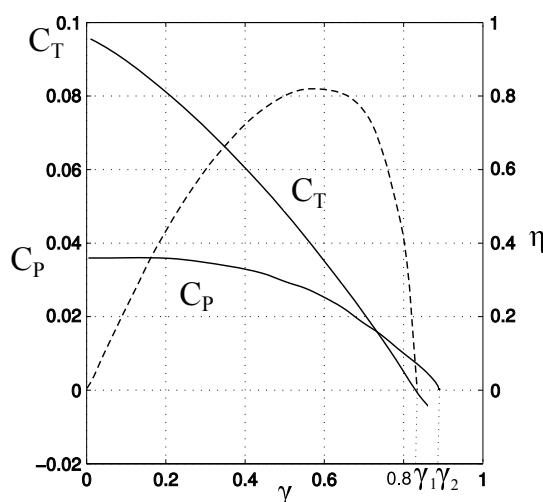


Figura 16.7: Curve caratteristiche di un'elica

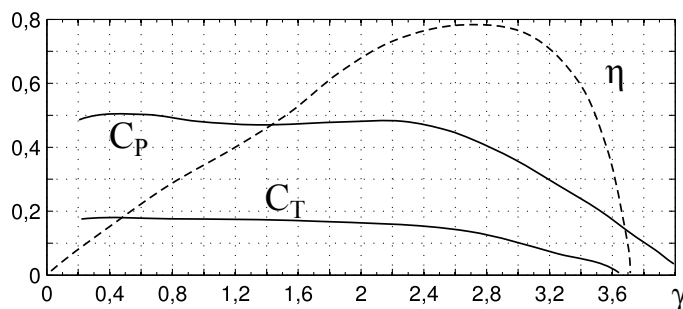


Figura 16.8: Curve caratteristiche di un'elica veloce

re del rapporto di funzionamento, quindi, la diminuzione dei coefficienti di spinta e di potenza conseguente all'inclinazione del vettore risultante delle forze aerodinamiche verso il piano di rotazione è compensata dall'aumento della portanza associata al diminuito valore dell'incidenza, e si giustifica l'andamento iniziale, all'incirca costante (in parte oscillante a volte), dei coefficienti di spinta e di potenza con il rapporto di funzionamento, Fig. 16.8.

È possibile determinare, in modo approssimato, le curve caratteristiche dell'elica riferendosi ad un "elemento di pala rappresentativo", inteso come quella sezione, posta ad una distanza opportuna dall'asse di rotazione, che si suppone sviluppare le stesse forze e gli stessi momenti (globali) di tutta l'elica. Si valutano, infatti, facilmente, le componenti della forza aerodinamica nelle direzioni normale e parallela al piano di rotazione come, Fig. 16.9,

$$T = C_L A \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\Omega r}{\cos \varphi'} \right)^2 \cos \varphi' - C_D A \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\Omega r}{\cos \varphi'} \right)^2 \sin \varphi' \quad (16.22)$$

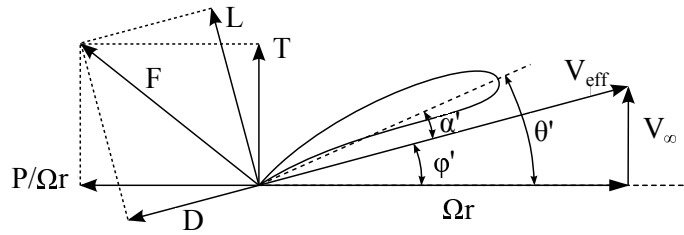


Figura 16.9: Schema semplificato delle condizioni di funzionamento di un elemento di pala

$$\frac{P}{\Omega r} = C_L A \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\Omega r}{\cos \varphi'} \right)^2 \sin \varphi' + C_D A \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\Omega r}{\cos \varphi'} \right)^2 \cos \varphi' \quad (16.23)$$

dove A è una superficie fittizia dell'elica, supposta concentrata al raggio r ; si deve parlare di superficie fittizia dal momento che non tutta la superficie effettiva delle pale dell'elica interviene efficacemente nella produzione delle forze aerodinamiche, particolarmente la regione in prossimità del mozzo. Per la (16.8) e (16.10), le relazioni (16.22) e (16.23) forniscono le espressioni dei coefficienti di spinta e di potenza

$$C_T = \frac{C_L \cos \varphi' - C_D \sin \varphi'}{\cos^2 \varphi'} \left(\frac{2\pi r}{D} \right)^2 \frac{A}{2D^2} \quad (16.24)$$

$$C_P = \frac{C_L \sin \varphi' + C_D \cos \varphi'}{\cos^2 \varphi'} \left(\frac{2\pi r}{D} \right)^3 \frac{A}{2D^2} \quad (16.25)$$

nelle quali appaiono esplicitamente la distanza relativa $\bar{r} = 2\pi r/D$ dell'elemento di pala rappresentativo e la grandezza $\sigma^* = A/2D^2$, legata alla solidità σ . Si ha inoltre

$$\gamma = \frac{V_\infty}{nD} = \frac{\Omega r}{nD} \operatorname{tg} \varphi' = \bar{r} \operatorname{tg} \varphi' = \bar{r} \operatorname{tg}(\theta' - \alpha') \quad (16.26)$$

Le relazioni (16.24), (16.25) e (16.26) consentono di determinare, a partire dalla polare del profilo rappresentativo, le quantità $C_T/\bar{r}^2 \sigma^*$, $C_P/\bar{r}^3 \sigma^*$ e γ/\bar{r} in funzione dell'angolo di attacco α' . Risulta poi immediato esprimere i coefficienti C_T e C_P ed il rendimento η in funzione del rapporto di funzionamento γ e dell'angolo di calettamento θ' , oltre che dei parametri \bar{r} e σ^* prima introdotti.

Valori correnti per i fattori di scala \bar{r} e σ^* sono $2.1 < \bar{r} < 2.3$ e $0.012 < \sigma^* < 0.016$ per eliche bipale, mentre per eliche tripale è $0.018 < \sigma^* < 0.024$.

16.6 Eliche a passo variabile in volo

Si consideri un'elica le cui pale abbiano un (ulteriore) grado di libertà che consente loro di ruotare contemporaneamente intorno all'asse r : una tal rotazione varia calettamento e passo geometrico, e conseguentemente variano le caratteristiche aerodinamiche dell'elica. Si può dire che imprimendo una rotazione continua alle pale intorno al loro asse si ottengono tanti elementi della stessa famiglia, con curve caratteristiche e rendimento massimo diversi.

Un'elica di tal tipo, indispensabile per applicazioni un minimo evolute, è detta a passo variabile in volo (il passo ovviamente varia comunque lungo la pala): montata su un velivolo insieme ad un opportuno congegno detto variatore del passo, essa consente al pilota di scegliere nelle diverse condizioni di volo, tra i tanti possibili, il passo al quale corrisponde il rendimento massimo. Il variatore di passo, analogo al cambio di marce di un veicolo terrestre, ha un suo peso, ma il vantaggio che presenta il suo impiego è irrinunciabile.

Agli inizi dell'aviazione il passo delle eliche era possibile variarlo solo a terra: le pale, cioè, potevano essere montate con diverso angolo sul proprio mozzo, scegliendo quello più idoneo ad

una particolare condizione di funzionamento, ma in volo si comportavano come un'elica a passo fisso (che esprimeva il migliore rendimento massimo nella condizione di volo per la quale era stata progettata, mentre in altre condizioni bisognava accontentarsi di un rendimento massimo minore). La successiva evoluzione ha portato ad eliche a calettamento variabile in volo su con due sole posizioni, la massima per il volo veloce, la minima per quello lento. Attualmente si ha la possibilità di variare con continuità il passo delle eliche in volo, e ciò conferisce al pilota la possibilità di scegliere in qualsiasi condizione di volo il passo che permette di esprimere in quella condizione il massimo rendimento.

Le eliche a passo variabile permettono di avere a disposizione una potenza per il volo che può variare modificando la potenza all'albero e/o l'angolo di calettamento. Diversamente, un'elica a passo fisso può fornire una potenza variabile solo se si modifica la potenza al proprio asse, ossia il numero di giri, con conseguenze negative sul rendimento del propulsore e sul consumo.

Con le eliche a passo variabile le piccole variazioni di potenza disponibile si possono ottenere semplicemente variando il passo, entro i limiti consentiti, e mantenendo il numero di giri costante; ciò permette di mantenere il motore sempre nelle stesse condizioni di funzionamento (e quindi con lo stesso rendimento meccanico e lo stesso consumo). Dovendo far fronte ad una variazione di potenza disponibile che esce dai limiti consentiti dalla variazione del passo, necessariamente occorre variare la potenza all'albero dell'elica con intervento sul motore.

Si propongono di seguito le caratteristiche operative offerte dalla variazione del passo in volo.

Eliche a giri costanti

L'utilizzo delle eliche a passo variabile in volo richiede al pilota un impegno non indifferente, in quanto per la scelta del passo più idoneo alle varie condizioni di volo occorre la considerazione contemporanea di fattori riguardanti sia il velivolo completo sia il motore. La scelta può essere agevolata ricorrendo al criterio di far ruotare l'elica, quindi il motore, a giri costanti ed affidando ad un regolatore il compito di modificare automaticamente il passo se i giri tendono a variare. Se, infatti, il numero di giri tende ad aumentare il regolatore fa aumentare il passo che, incrementando la coppia resistente, induce il motore a rallentare (l'inverso si verifica quando il numero di giri tende a diminuire). Il pilota dispone allora sempre della stessa potenza nominale del motore (la quale può variare solo intervenendo sulla manetta): si evita quindi l'inconveniente di un continuo intervento sulla manetta del gas del motore (connesso con l'impiego di eliche a passo fisso).

Eliche a passo reversibile

Un'ulteriore importante caratteristica delle eliche a passo variabile in volo è la possibilità di invertire la direzione della trazione conferendo calettamenti opportuni, a volte negativi: l'elica esercita così una azione frenante, particolarmente utile durante il rullaggio al suolo in fase di atterraggio, nonché nelle manovre a terra.

Eliche con passo a bandiera

La possibilità di disporre di eliche a passo variabile in volo consente al pilota di porre le pale, in caso di necessità, ad un angolo di calettamento intorno a 90° (cioè di taglio rispetto alla corrente). In tal caso le pale sono dette a bandiera, e presentano la minima resistenza all'avanzamento: questa peculiarità è importante in caso di avaria motore. Nei velivoli plurimotori l'eccentricità della trazione causata dalla piantata di un motore genera un momento imbarante anomalo, incrementato dalla resistenza dell'elica rimasta ferma (che quindi va messa in bandiera). E comunque in assenza di spinta, quando il volo diventa planato, l'autonomia viene incrementata riducendo in primis la resistenza complessiva del velivolo mettendo l'elica, o le eliche, in bandiera

16.6.1 Stadi di funzionamento

Come si è ora visto, l'elica è caratterizzata da distinti e significativi modi di operare, individuabili sulla base del valore del rapporto di funzionamento e dell'andamento delle curve caratteristiche.

Gli stadi di funzionamento, descritti in modo riassuntivo nella tabella di pag. 341 di [1] facendo riferimento alla sezione rappresentativa della pala, indicano appunto tutte le differenti funzioni che può svolgere un'elica. Negli schemi riportati nella tabella gli angoli di calettamento e gli angoli di attacco sono rappresentati con riferimento alla retta di portanza nulla dell'elemento.

Lasciando da parte il caso in cui $\gamma \rightarrow \infty$ dell'elica in bandiera, non è corretto pensare alla possibilità di percorrere tutti gli stadi di funzionamento a partire dal punto fisso semplicemente aumentando il valore della velocità di volo: sarebbe necessario attingere velocità troppo elevate. Occorre invece procedere variando il calettamento dell'elemento di pala in modo tale che il vettore rappresentativo della forza aerodinamica si sposti nei diversi quadranti.

16.7 Teoria impulsiva semplice

La teoria impulsiva semplice si basa su una serie di ipotesi iniziali, alcune delle quali sono in comune con la teoria impulsiva generale che sarà illustrata nel prossimo paragrafo. Si discutono, di seguito, queste ipotesi:

- l'elica è immersa in un fluido ideale; le perdite di energia dovute alle azioni viscosse non possono essere prese in considerazione sicchè le teorie impulsive possono fornire valori limiti o ideali del rendimento dell'elica;
- il moto è incomprimibile;
- l'elica ha un numero infinito di pale; questa ipotesi consente di trattare il campo di moto stazionario o permanente (invero i valori delle velocità e delle pressioni in un punto qualsiasi della scia dell'elica variano con il tempo e subiscono oscillazioni periodiche con un periodo pari al tempo che l'elica impiega a compiere $1/N$ di giro, dove N è il numero delle pale dell'elica).
- un'altra semplificazione, associata all'ipotesi del numero infinito di pale, è che le proprietà termodinamiche e dinamiche del fluido sono costanti su ogni circonferenza coassiale con l'elica, ovvero non dipendono dalla coordinata angolare.

Nella formulazione iniziale della teoria impulsiva, dovuta a Rankine e Froude, l'elica viene considerata come un "disco attuatore", cioè come una superficie infinitamente sottile che gode della proprietà di imprimere al flusso trattato un incremento di energia sotto forma di pressione Δp . Il disco si suppone che induca solo variazioni di velocità assiali mentre è nullo il campo indotto delle velocità tangenziali. L'andamento del tubo di flusso trattato dal disco attuatore, nel caso di elica propulsiva, è mostrato in Fig. 16.10; siano p_∞ e V_∞ la pressione e la velocità della corrente asintotica via via che il fluido si avvicina al disco la velocità aumenta (e la sezione del tubo diminuisce) raggiungendo il valore $V_\infty + u$ sul disco, mentre la pressione diminuisce fino al

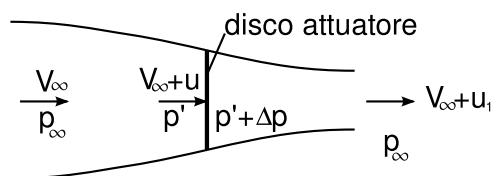


Figura 16.10: Modello di disco attuatore

valore p' nella sezione immediatamente a monte del disco. Attraverso il disco attuatore, mentre la velocità è costante e pari a $V_\infty + u$, la pressione aumenta, come si è detto, di Δp ; nella scia a valle la velocità continua ad aumentare raggiungendo il valore $V_\infty + u_1$ nella sezione infinitamente a valle e la pressione ritorna al valore asintotico p_∞ .

Le variazioni delle velocità e delle pressioni ora descritte richiedono alcune osservazioni.

Il campo delle velocità perturbate, indotte dall'elica, è caratterizzato in generale da una velocità assiale u , radiale v e tangenziale $w = \omega r$. Applicando l'equazione del momento della quantità di moto al flusso di massa che attraversa una generica sezione potremo scrivere

$$\omega r^2 = \text{cost} \quad (16.27)$$

nella quale, ovviamente, non intervengono le pressioni agenti sulla superficie laterale del tubo di flusso, che danno un momento nullo rispetto all'asse di rotazione. Applicando la (16.27) al tubo di flusso a monte del disco, essendo $\omega = 0$ all'infinito, la velocità tangenziale sarà ovunque nulla in tale regione.

Si supponga ora che gli incrementi delle velocità assiali siano piccoli: le variazioni delle aree delle sezioni trasversali saranno allora trascurabili, sicchè le velocità radiali, che sono proporzionali alle pendenze delle linee di corrente, saranno anch'esse trascurabili (del 2° ordine). La (16.27) indica poi che nella scia a valle la velocità angolare è costante e la variazione dell'energia cinetica rotazionale tra le sezioni immediatamente a valle del disco ed infinitamente a valle

$$\omega^2 r^2 - \omega_1^2 r_1^2 = \omega^2 r^2 \left(1 - \frac{\omega_1^2 r_1^2}{\omega^2 r^2}\right) \cong \omega^2 r^2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right) = \omega^2 r^2 (r - r_1) \left(\frac{r + r_1}{r^2}\right) \quad (16.28)$$

appare chiaramente del 3° ordine e pertanto trascurabile.

La teoria impulsiva semplice assume che non ci sia moto rotazionale nella scia dell'elica e, come vedremo, è lecito allora ritenere che la pressione nella sezione infinitamente a valle uguagli la pressione p_∞ . È poi facile controllare, applicando l'equazione della quantità di moto nella direzione dell'asse di rotazione, che la risultante delle forze di pressione agenti sulla superficie laterale del tubo di flusso trattato dal disco attuatore è del 2° ordine, e quindi trascurabile. Ne consegue che la spinta prodotta dall'elica è esprimibile solo in termini della variazione della quantità di moto assiale, e cioè

$$T = \rho(V_\infty + u)S u_1 \quad (16.29)$$

Applicando il teorema di Bernoulli separatamente ai tubi di flusso a monte e a valle del disco si ha

$$H_0 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 = p' + \frac{1}{2}\rho(V_\infty + u)^2 \quad (16.30)$$

e

$$H_1 = p' + \Delta p + \frac{1}{2}\rho(V_\infty + u)^2 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho(V_\infty + u_1)^2 \quad (16.31)$$

Sottraendo membro a membro si ha per la variazione di energia totale, ovviamente uguale all'energia somministrata,

$$H_1 - H_0 = \Delta p = \rho \left(V_\infty + \frac{u_1}{2}\right) u_1$$

da cui

$$T = S\Delta p = \rho \left(V_\infty + \frac{u_1}{2}\right) u_1 S \quad (16.32)$$

Confrontando la 16.29 con la 16.32 si ottiene la relazione tra le velocità indotte assiali u ed u_1

$$u = \frac{u_1}{2} \quad (16.33)$$

che stabilisce che l'incremento di velocità assiale si realizza per metà nel tubo di flusso a monte del disco e per l'altra metà nella scia a valle. È opportuno ricordare l'analogia tra il campo delle velocità assiali indotte dall'elica ed il campo del *downwash* indotto da un'ala finita, come ricavato con la teoria di Prandtl nella linea portante.

Il rendimento dell'elica, poiché si considera solo l'energia dissipata corrispondente agli incrementi di velocità assiale, è espresso da

$$\eta = \frac{TV_\infty}{T(V_\infty + u)} = \frac{1}{1 + a} \quad (16.34)$$

avendo indicato con $a = u/V_\infty$ il “fattore di interferenza assiale”.

La teoria impulsiva semplice è stata fin qui sviluppata nell'ipotesi che le proprietà del fluido siano costanti in ogni sezione trasversale del tubo di flusso e che quindi anche la spinta prodotta sia costante sul disco.

È immediato estendere la teoria all'elemento di tubo $dS = 2\pi r dr$ (anche se non c'è alcuna dimostrazione al riguardo) ed ottenere i valori della spinta e della potenza per semplice integrazione; ovviamente si suppone che ciascuna sezione elementare dS operi indipendentemente da tutte le altre. Con questa impostazione è però interessante determinare qual'è la distribuzione di carico sul disco che dia la minima perdita di energia ovvero il massimo rendimento, per una assegnata potenza utile $V_\infty T$. La (16.29) diventa per la superficie elementare dS

$$dT = 2\rho V_\infty^2 (1+a)a dS \quad (16.35)$$

utilizzando la definizione di fattore di interferenza assiale ed il risultato indicato dalla (16.33), naturalmente estendibile al flusso che attraversa la superficie dS . La perdita di energia per unità di tempo corrispondente sarà

$$dE = 2\rho V_\infty^3 (1+a)a^2 dS \quad (16.36)$$

Nelle (16.35) e (16.36) si intende che $a = a(r)$ ed il problema è di calcolare la funzione $a = a(r)$ cui corrisponda il massimo rendimento.

Si suppone, all'uopo, che questa distribuzione ottimale sia stata determinata, e si assegni poi un'arbitraria distribuzione di carico incrementale $\Delta(dT)$, cui sarà associata una corrispondente perdita di energia per unità di tempo $\Delta(dE)$. Si troverà una distribuzione ottimale, per le nuove condizioni di carico, se si pensa di sottrarre il $\Delta(dT)$ laddove $\Delta(dE)$ è più grande e viceversa aumentando il carico $\Delta(dT)$ laddove $\Delta(dE)$ è più piccolo. Pertanto la distribuzione ottimale del carico si realizza quando il rapporto $\Delta(dT)/\Delta(dE)$ è uguale per tutti i raggi del disco. Per la (16.35) e (16.36) si ricava facilmente che, se si incrementa il fattore di interferenza assiale di Δa , è

$$\Delta(dT) = 2\rho V_\infty^2 (1+2a)\Delta a dS$$

$$\Delta(dE) = 2\rho V_\infty^3 (2a+3a^2)\Delta a dS$$

e dunque dovrà essere

$$\frac{1+2a}{2a+3a^2} = \text{cost}$$

ovvero $a = \text{cost}$. Pertanto la minima perdita di energia si ottiene quando la spinta è uniformemente distribuita sul disco, ovvero il massimo rendimento si ottiene quando lo si calcola con la teoria impulsiva semplice di Rankine-Froude. Si ha così

$$T = 2\rho V_\infty^2 (1+a)aS \quad (16.37)$$

$$P = 2\rho V_\infty^3 (1+a)aS \quad (16.38)$$

mentre per il rendimento vale la (16.34). Si ottiene quindi

$$\frac{T}{\rho V_\infty^2 S} = 2(1+a)a = \frac{2(1-\eta)}{\eta^2} \quad (16.39)$$

e

$$\frac{P}{\rho V_\infty^3 S} = 2(1+a)a = \frac{2(1-\eta)}{\eta^3} \quad (16.40)$$

nelle quali η è il più alto rendimento realizzabile da un'elica che assorbe una certa potenza alla velocità di avanzamento V_∞ .

Dalla (16.40) segue che il rendimento ideale dell'elica, Fig. 16.11, diminuisce al crescere della potenza assorbita per unità di area del disco o al diminuire della velocità, come è facile verificare, se si considera che al diminuire della velocità deve aumentare l'accelerazione assiale. Si comprende anche che sia conveniente, sotto questo aspetto, aumentare il raggio R dell'elica.

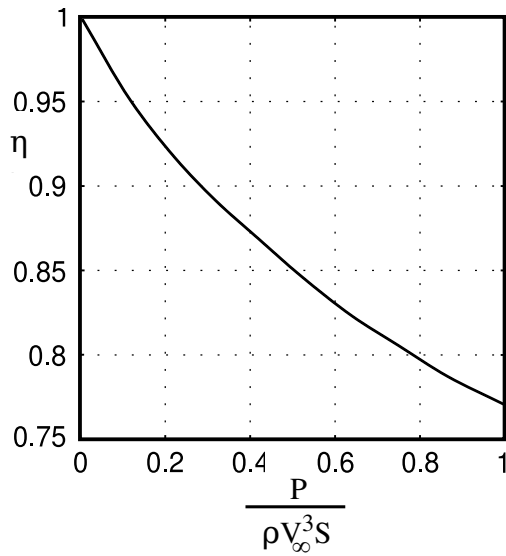


Figura 16.11: Rendimento ideale in funzione della potenza assorbita

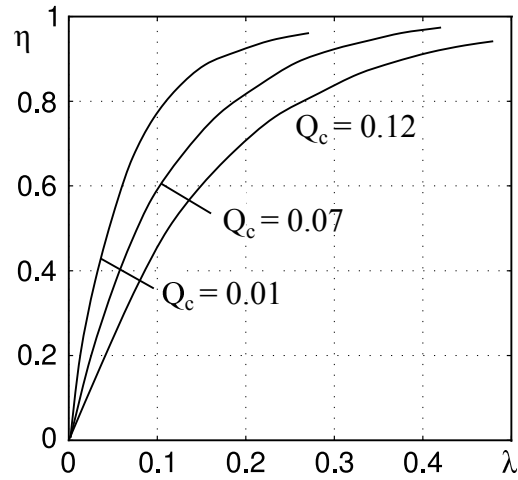


Figura 16.12: Rendimento ideale in funzione della velocità

La variazione del rendimento ideale con il rapporto di funzionamento si determina dalla relazione

$$Q_c = \frac{Q}{\pi R^2 \rho \Omega^2 R^3} = \frac{P}{\pi R^2 \rho \Omega^3 R^3} = \frac{P}{\pi R^2 \rho V_\infty^3} \lambda^3 = \frac{2(1-\eta)}{\eta^3} \lambda^3 \quad (16.41)$$

da cui, per le (16.17) e (16.19),

$$C_Q = \frac{1-\eta}{4\eta^3} \gamma^3 \quad (16.42)$$

Si osserva dalla (16.41) o dalla Fig. 16.12 come il rendimento ideale cresca molto rapidamente con l'aumentare di λ per poi tendere lentamente verso l'unità in modo asintotico. Anche questo risultato è di facile interpretazione fisica. È un utile esercizio dimostrare l'analogo comportamento $\eta_i \rightarrow 1$ per $\lambda \rightarrow \infty$ e $C_{D_{indotta}} \rightarrow 0$ per $\mathcal{R} \rightarrow \infty$.

16.8 Teoria impulsiva generale o teoria generale della quantità di moto

I risultati ottenuti nel paragrafo precedente valgono nella ipotesi che non ci sia moto rotazionale nella scia dell'elica. In generale la corrente sarà dotata di moto rotazionale (impartito come reazione della coppia dell'elica), e questo moto comporta un'ulteriore perdita di energia. Così l'elemento di coppia sarà uguale alla quantità di moto angolare impartita, nell'unità di tempo, al corrispondente elemento anulare, e cioè

$$dQ = \rho V_\infty (1+a) \omega r^2 dS \quad (16.43)$$

Quando si prende in considerazione il moto rotazionale l'equazione di Bernoulli applicata al tubo di flusso a valle del disco attuatore si scrive nella forma

$$H_1 = p' + \Delta p + \frac{1}{2} \rho [(V_\infty + u)^2 + v^2 + \omega^2 r^2] = p_1 + \frac{1}{2} \rho [(V_\infty + u_1)^2 + \omega_1^2 r_1^2] \quad (16.44)$$

mentre per il tubo di flusso a monte vale

$$H_0 = p_\infty + \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 = p' + \frac{1}{2} \rho [(V_\infty + u)^2 + v^2] \quad (16.45)$$

dove in generale, come si è detto, p_1 è minore della pressione asintotica, per la rotazione della corrente attorno all'asse.

La differenza tra la pressione totale a valle ed a monte del disco attuatore è così

$$H_1 - H_0 = \Delta p + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 \quad (16.46)$$

cioè è maggiore della spinta per unità di area del disco di una quantità che è uguale all'energia cinetica del moto rotazionale impartita al fluido.

Dalle (16.43) e (16.45) si valuta anche la differenza delle pressioni statiche

$$p_\infty - p_1 = H_0 - H_1 + \frac{1}{2}\rho u_1^2 + \rho V_\infty u_1 + \frac{1}{2}\rho\omega_1^2 r_1^2 = \frac{1}{2}\rho u_1^2 + \rho V_\infty u_1 + \frac{1}{2}\rho(\omega_1^2 r_1^2 - \omega^2 r^2) - \Delta p \quad (16.47)$$

nella quale si è tenuto conto della (16.46). Applicando ora l'equazione di Bernoulli al fluido relativo alle pale dell'elica che ruotano con velocità angolare Ω , la velocità angolare relativa diminuisce da Ω ad $\Omega - \omega$, da cui l'incremento di pressione Δp è dato da

$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho [\Omega^2 - (\Omega - \omega)^2] r^2 = \rho\omega r^2 \left(\Omega - \frac{\omega}{2} \right) \quad (16.48)$$

La perdita di pressione nella scia $p_\infty - p_1$ diventa, per la (16.48) ed essendo $\omega r^2 = \omega_1 r_1^2$,

$$p_\infty - p_1 = \frac{1}{2}\rho u_1^2 + \rho V_\infty u_1 - \rho\omega_1 r_1^2 \left(\Omega - \frac{\omega_1}{2} \right) \quad (16.49)$$

La spinta dell'elemento anulare può essere scritta come

$$dT = \rho(V_\infty + u_1)u_1 dS_1 - (p_\infty - p_1)dS_1 \quad (16.50)$$

ovvero

$$dT = \Delta p dS = \rho\omega r^2 \left(\Omega - \frac{\omega_1}{2} \right) dS \quad (16.51)$$

ed essendo per continuità $(V_\infty + u)dS = (V_\infty + u_1)dS_1$, uguagliando la (16.50) e la (16.51) ed introducendo le espressioni prima ricavate per Δp , eq. (16.48), e per $(p_\infty - p_1)$, eq. (16.49), si perviene alla relazione generale

$$\frac{1}{2}u_1^2 = \left[\frac{\Omega - \frac{\omega}{2}}{V_\infty + u} - \frac{\Omega - \frac{\omega_1}{2}}{V_\infty + u_1} \right] \omega_1 r_1^2 (V_\infty + u_1) \quad (16.52)$$

che collega le velocità assiali ed angolari del flusso trattato dall'elica. Si può poi ricavare un'equazione differenziale che collega anch'essa le velocità assiali e rotazionali nella scia derivando la (16.49) rispetto ad r_1 ed uguagliando il gradiente di pressione radiale dp_1/dr_1 alla forza centrifuga:

$$\frac{d}{dr_1} \left(\frac{1}{2}u_1^2 + u_1 V_\infty \right) = 2\omega_1 r_1 (\Omega - \omega_1) = (\Omega - \omega_1) \frac{d}{dr_1} (\omega_1 r_1^2) \quad (16.53)$$

Le equazioni (16.52) e (16.53), unitamente all'equazione di continuità e della conservazione della quantità di moto angolare (16.27), consentono di ricavare u_1 , u ed ω per fissati valori di $\omega_1(r)$ e quindi la spinta e la coppia dell'elica.

Una notevole semplificazione della teoria impulsiva generale si ottiene se si assume che la velocità angolare della corrente è molto piccola in confronto con la velocità angolare dell'elica, si da trascurare nelle equazioni precedenti i termini che contengono ω^2 . Così, da un lato nella (16.46) l'incremento di pressione totale viene ad eguagliare l'aumento di pressione sul disco, dall'altro, eqq. (16.44), (16.45) e (16.47), la pressione p_1 nella scia è uguale alla pressione iniziale del fluido.

Definito fattore di interferenza rotazionale il rapporto

$$a' = \frac{\omega}{2\Omega} \quad (16.54)$$

la spinta dell'elemento anulare può essere scritta con la (16.51) come

$$dT = \rho\omega r^2\Omega(1 - a')dS = 2\Omega^2r^2\rho(1 - a')a'dS \quad (16.55)$$

oppure, con la (16.50), che viene a coincidere con la (16.35),

$$dT = 2\rho V_\infty^2(1 + a)a dS \quad (16.56)$$

Eguagliando queste ultime due espressioni si ricava la relazione che intercorre tra i fattori di interferenza assiale e rotazionale

$$V_\infty^2(1 + a)a = \Omega^2r^2(1 - a')a' \quad (16.57)$$

mentre l'elemento di coppia viene ad esprimersi come

$$dQ = \rho V_\infty(1 + a)\omega r^2dS = 2\rho V_\infty(1 + a)\Omega a' r^2dS \quad (16.58)$$

Anche se la perdita di energia dovuta al moto rotazionale è piccola, in generale, l'esistenza della velocità tangenziale indotta dall'elica sulla scia a valle modifica sostanzialmente la distribuzione ottimale del carico sul disco e che è stata trovata essere costante nell'ambito della teoria impulsiva semplice. Invero il significato della (16.57) può essere inteso se si considerano le espressioni della spinta e della coppia prima ricavate; si ha infatti dalla (16.57), per la (16.56) e per la (16.58),

$$V_\infty(1 + a)dT = \Omega(1 - a')dQ \quad (16.59)$$

che può essere scritta nella forma

$$\Omega dQ - V_\infty dT = V_\infty a dT + \Omega a' dQ = dE \quad (16.60)$$

e si vede che il primo membro della (16.59) rappresenta l'eccesso di potenza assorbita dall'elica rispetto al lavoro utile fornito mentre il secondo membro rappresenta le perdite assiali e rotazionali.

Il rendimento dell'elemento anulare dS discende direttamente dalla (16.59), e risulta

$$\eta = \frac{V_\infty dT}{\Omega dQ} = \frac{1 - a'}{1 + a} \quad (16.61)$$

Introducendo per comodità l'ascissa radiale adimensionale $X = \Omega r/V_\infty$ e tenendo conto della (16.61) la (16.57) diventa

$$a = X^2\eta a' = X^2\eta[1 - \eta(1 + a)]$$

ed i fattori di interferenza assiale e rotazionale possono essere espressi in termini di X e di η :

$$a = X^2 \frac{\eta(1 - \eta)}{1 + X^2\eta^2} \quad (16.62)$$

$$a' = \frac{a}{X^2\eta} = \frac{1 - \eta}{1 + X^2\eta^2} \quad (16.63)$$

Si può anche qui seguire il criterio di ottimizzazione prima esposto, nel caso di perdite puramente assiali. Si impone cioè che $\Delta(dT)/\Delta(dE)$ sia costante con r , il che si riduce, la (16.60), ad imporre che $\Delta(dT)/\Delta(dQ)$ sia indipendente da r , dovendosi determinare la distribuzione ottimale del carico sul disco, cui cioè corrisponda la minima perdita di energia, per una data potenza propulsiva. Discende, così, nelle condizioni di ottimo per il carico sul disco, la seguente relazione tra il rendimento η (che deve considerarsi funzione di r) e la coordinata adimensionale X

$$\frac{(1 - \eta)X^2}{1 + \eta X^2(2 - \eta)} + \frac{1 + \eta X^2}{2\eta - 1X^2\eta^2} = cost \quad (16.64)$$

ed è facile dimostrare che nell'ipotesi che il rendimento sia di poco minore dell'unità ($\eta = 1 - \epsilon$, con $\epsilon \ll 1$) questa relazione conduce al risultato che il rendimento η deve essere costante con il raggio

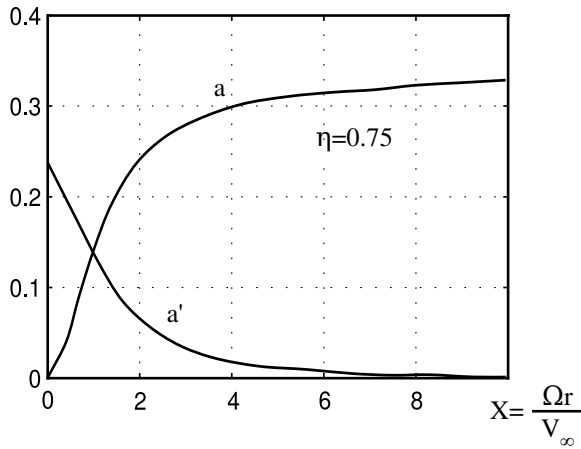


Figura 16.13: Andamento dei fattori di interferenza assiale (a) e rotazionale (a')

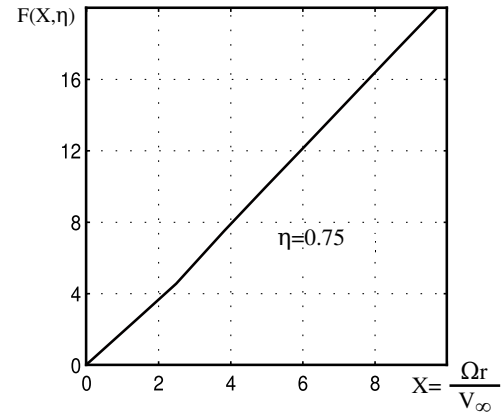


Figura 16.14: Distribuzioni di coppia e di spinta lungo la pala

r . Ad ogni buon conto le variazioni ottimali di a ed a' lungo la pala non sono sostanzialmente differenti nelle due soluzioni esatta, eq. (16.64), ed approssimata ($\eta \sim 1 - \epsilon$).

La variazioni dei fattori di interferenza assiale e rotazionale lungo la pala, nelle condizioni di ottimo, ora trovate, sono mostrate in Fig. 16.13.

Si osserva come il fattore di interferenza assiale cresca rapidamente in prossimità del mozzo e si mantenga all'incirca costante per tutta la zona periferica della pala; per contro il fattore di interferenza rotazionale è molto piccolo ovunque tranne che in prossimità del mozzo.

Il calcolo della spinta, della coppia e del rendimento, nell'ipotesi di rendimento costante lungo la pala, si effettua agevolmente. Si ha così per la spinta, (eqq. 16.56) e (16.62),

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dX} &= \frac{dT}{dr} \frac{dr}{dX} = 4\pi r \rho V_\infty^2 a \frac{V_\infty}{\Omega} = 4\pi r \rho V_\infty^2 (1+a) a \frac{V_\infty}{\Omega} \frac{V_\infty \Omega R^2}{V_\infty \Omega R^2} \times \\ &\times \left[1 + \frac{X^2 \eta (1-\eta)}{1+X^2 \eta^2} \right] \left[\frac{X^2 \eta (1-\eta)}{1+X^2 \eta^2} \right] = \pi R^2 \rho V_\infty^2 2\lambda^2 \frac{1-\eta}{\eta^2} F(X, \eta) \end{aligned}$$

dove $\lambda = V_\infty / \Omega R$ e

$$F(X, \eta) = \frac{2X^3 \eta^3 (1+X^2 \eta)}{(1+X^2 \eta^2)^2}$$

In modo analogo si ottiene per la coppia

$$\frac{dQ}{dX} = 4\pi r^3 \rho V_\infty \Omega (1+a) \frac{a}{X^2 \eta} \frac{V_\infty}{\Omega} = \frac{dT}{dX} \frac{\lambda R}{\eta}$$

da cui

$$\frac{\eta}{\lambda R} \frac{dQ}{dX} = \frac{dT}{dX} = \pi R^2 \rho V_\infty^2 2\lambda^2 \frac{(1-\eta)}{\eta^2} F(X, \eta)$$

La funzione $F(X, \eta)$ definisce quindi le distribuzioni della spinta e della coppia lungo le pale ed è mostrata in Fig. 16.14.

Integrando la relazione della spinta si ricava

$$\frac{T}{\pi R^2 \rho V_\infty^2} = \frac{2(1-\eta)}{\eta^2} G(\lambda, \eta) \quad (16.65)$$

con

$$G(\lambda, \eta) = \lambda^2 \int_0^{1/\lambda} F(X, \eta) dX$$

Confrontando la (16.65) con il risultato della teoria impulsiva semplice si trova che la funzione $G(\lambda, \eta)$ rappresenta il fattore correttivo per la spinta dell'elica, quando si prende in considerazione anche il moto rotazionale indotto nella scia.

È poi, analogamente, per il coefficiente di potenza

$$\frac{P}{\pi R^2 \rho V_\infty^3} = \frac{2(1-\eta)}{\eta^3} G(\lambda, \eta)$$

da cui segue per il coefficiente di coppia

$$Q_c = \frac{P}{\pi R^2 \rho \Omega^2 R^3} = \frac{2\lambda^3(1-\eta)}{\eta^3} G(\lambda, \eta) \quad (16.66)$$

Dalla (16.66) è possibile determinare il rendimento dell'elica in funzione del rapporto di funzionamento e del coefficiente di coppia, Fig.16.15.

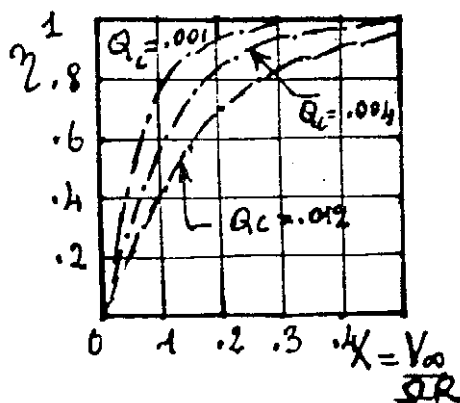


Figura 16.15: Rendimento ideale dell'elica

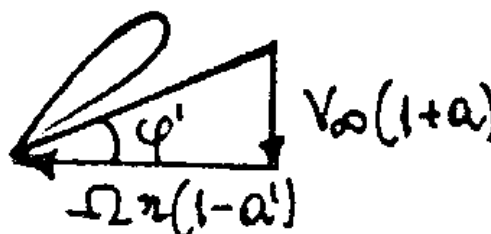


Figura 16.16: Velocità sull'elemento di pala nella Teoria Impulsiva Generale

La perdita del rendimento dovuta al moto rotazionale aumenta, come è naturale, con il coefficiente di coppia ed è comunque piccola (dell'ordine del 2% per $Q_c = 0.004$ e del 4% per $Q_c = 0.012$). È opportuno precisare, però, che la diminuzione del rendimento per le perdite rotazionali può diventare sensibile se la distribuzione del carico lungo la pala si allontana dalla legge ottimale prima ricavata, particolarmente nella regione del mozzo.

16.9 Calcolo dei rendimenti dell'elica

Il calcolo dei rendimenti fin qui sviluppato non ha tenuto conto delle perdite di energia dovute alle dissipazioni viscosse ma è facile includere queste perdite nella eq. (16.59) scrivendo

$$\Omega(1-a') \frac{dQ}{dr} = V_\infty(1+a) \frac{dT}{dr} + \frac{dE_v}{dr} \quad (16.67)$$

dove E_v è la dissipazione di energia di tipo viscoso nell'unità di tempo. Ovviamente le espressioni della spinta e della coppia, in quanto ricavate da considerazioni di quantità di moto, si suppone che rimangano inalterate.

Sia l'elica costituita da N pale, sia c la corda di ciascuna pala al raggio r e C_D il coefficiente di resistenza dell'elemento di pala; la potenza dissipata per le azioni viscosse dagli N elementi sarà

$$dE = cC_D \frac{1}{2} \rho V_{eff}^3 N dr \quad (16.68)$$

dove V_{eff} è la velocità effettiva della corrente in cui viene ad operare il profilo, risultante delle velocità assiale $V_\infty(1+a)$ e rotazionale $r(\Omega - \omega/2) = \Omega r(1-a')$, Fig. 16.16. Si ha pertanto

$$V_{eff} \sin \varphi' = V_\infty(1+a) \quad V_{eff} \cos \varphi' = \Omega r(1-a') \quad (16.69)$$

Per derivare un'equazione approssimata per il rendimento dell'elica è necessario introdurre alcune semplificazioni ed ipotesi.

- a) Come si è visto, per ottenere il massimo rendimento ideale è necessario che i fattori di interferenza assiale e rotazionale abbiano opportune distribuzioni lungo la pala. Si possono però sostituire le equazioni per gli elementi di spinta e di coppia con le loro forme integrali assumendo valori medi per a ed a' , ottenendo

$$T = 2\pi R^2 \rho V_\infty^2 (1+a)a$$

$$P = Q\Omega = 2\pi R^2 \rho V_\infty (1+a)\Omega^2 R^2 a'$$

$$\eta = \frac{V_\infty T}{P} = \frac{a}{a'} \lambda^2$$

- b) Nelle pale di elica di forma convenzionale la lunghezza della corda aumenta lentamente dal mozzo raggiungendo un valore massimo verso la mezzeria della pala, mentre per la diminuzione dello spessore percentuale del profilo si può ritenere che il coefficiente di resistenza diminuisca. Analogamente verso l'estremità della pala da un lato la lunghezza della corda diminuisce, dall'altro il coefficiente di resistenza aumenta, sia per le elevate velocità effettive (effetti della comprimibilità) sia per le peggiori condizioni del flusso.

Sembra così lecito assumere costante il prodotto \overline{cC}_D , sicchè integrando la (16.68) si ha

$$E = \frac{1}{2} \overline{cC}_D N \rho \int_0^R V_{eff}^3 = \frac{1}{2} \frac{\overline{cC}_D}{\pi R} N \rho \pi R \int_0^R V_{eff}^3 dr = K \rho \pi R \int_0^R V_{eff}^3 dr \quad (16.70)$$

con

$$K = \frac{1}{2} \frac{\overline{cC}_D}{\pi R} = \sigma \delta$$

dove σ è la solidità dell'elica e 2δ è il valore medio effettivo del coefficiente di resistenza.

Detto φ'_1 il valore di φ' all'estremità delle pale, è dalle (16.69),

$$\Omega r (1-a') \operatorname{tg} \varphi' = V_\infty (1+a) = \Omega R (1-a') \operatorname{tg} \varphi'_1$$

ovvero

$$r = R \operatorname{tg} \varphi'_1 \operatorname{ctg} \varphi'$$

e la velocità effettiva sarà

$$V_{eff} = V_\infty (1+a) \operatorname{cosec} \varphi' = \Omega R (1-a') \operatorname{tg} \varphi'_1 \operatorname{cosec} \varphi'$$

Sostituendo nella (16.70) si calcola, con semplici passaggi

$$E = \sigma \delta \pi R^2 \rho \Omega^3 R^3 (1-a')^3 f(\varphi'_1) \quad (16.71)$$

con

$$f(\varphi'_1) = \int_{\varphi'_1}^{\pi/2} \operatorname{tg}^4 \varphi'_1 \operatorname{cosec}^5 \varphi' d\varphi' \quad (16.72)$$

Valori per $f(\varphi'_1)$ sono riportati nella Tab. 16.1. Integrando la (16.67) si ha

$$(1-a')\Omega Q = (1+a)V_\infty T + E \quad (16.73)$$

mentre il rendimento η può essere espresso come $\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3$, dove η_3 rappresenta la frazione di rendimento corrispondente alle perdite di tipo viscoso e

$$\eta_1 = \frac{1}{1+a}, \quad \eta_2 = 1-a'$$

φ'_1	$tg\varphi'_1$	$f(\varphi_1)$
0	0	.250
5,7°	.10	.258
11,3°	.20	.282
16,7°	.30	.325
21,8°	.40	.393
26,5°	.50	.488

Tabella 16.1: Valori per la funzione (16.72)

Un procedimento iterativo per il calcolo dei rendimenti dell'elica si basa sul seguente sviluppo. Con le definizioni di η_1 ed η_2 il coefficiente di coppia è dato da

$$Q_c = \frac{\pi R^2 \rho V_\infty (1+a) \Omega^2 R^2 a'}{\pi R^2 \rho \Omega^3 R^3} = \lambda \frac{(1-\eta_2)}{\eta_1} \quad (16.74)$$

da cui

$$\eta_2 = 1 - \frac{\eta_1}{\lambda} Q_c \quad (16.75)$$

L'angolo φ'_1 all'estremità delle pale è poi

$$tg\varphi'_1 = \frac{V_\infty(1+a)}{\Omega R(1-a')} = \frac{\lambda}{\eta_1} / \eta_2 \quad (16.76)$$

La (16.73), d'altro canto, fornisce

$$\eta_2 P = \frac{\eta P}{\eta_1} + E$$

da cui, stante la (16.71), è possibile scrivere

$$P\eta_2(1-\eta_3) = \sigma\delta\pi R^2 \rho \Omega^3 R^3 \eta_2^3 f(\varphi'_1)$$

ed essendo

$$P = \pi R^2 \rho \Omega^3 R^3 Q_c$$

si ha

$$\eta_3 = 1 - \frac{\sigma\delta}{Q_c} \eta_2^2 f(\varphi'_1) \quad (16.77)$$

L'ultima relazione si ottiene dalla definizione di rendimento

$$\eta = \frac{V_\infty T}{\Omega Q} = \frac{V_\infty T_c \pi R^2 \rho \Omega^2 R^2}{\Omega Q_c \pi R^2 \rho \Omega^2 R^3} = \lambda \frac{T_c}{Q_c}$$

cioè

$$\eta Q_c = \lambda T_c$$

ed essendo

$$T_c = \frac{T}{\pi R^2 \rho \Omega^2 R^2} = \frac{2\pi \rho R^2 V_\infty^2 (1+a)a}{\pi R^2 \rho \Omega^2 R^2} = 2 \frac{\lambda^2}{\eta_1^2} (1-\eta_1)$$

si ha

$$\eta_1 = 1 - \frac{1}{2} \eta_2 \eta_3 Q_c \left(\frac{\eta_1}{\lambda} \right)^3 \quad (16.78)$$

Per assegnati valori del rapporto di funzionamento λ , di $\sigma\delta$ e del coefficiente di coppia Q_c , partendo da valori di tentativo di η_1/λ , con la (16.75) si valuta η_2 , con la (16.76) φ'_1 , con la (16.77) η_3 e con la (16.78) η_1 ; il procedimento può essere iterato fino a raggiungere una voluta accuratezza.

Si può completare il calcolo dei rendimenti determinando la resistenza del mozzo; se R_m è il raggio del mozzo ($\approx 0.1R$) si suole porre, con un coefficiente di resistenza corrispondente circa uguale all'unità

$$D_m = \pi R_m^2 \frac{1}{2} \rho V_\infty^2$$

e tale resistenza può essere sottratta dalla spinta dell'elica, introducendo un rendimento addizionale

$$\eta_4 = \frac{T - D_m}{T} = 1 - \frac{1}{4} \left(\frac{R_m}{R} \right)^2 \frac{\eta_1^2}{1 - \eta_1} \quad (16.79)$$

L'andamento dei diversi rendimenti dell'elica in funzione del rapporto di funzionamento è mostrato in Fig. 16.17.

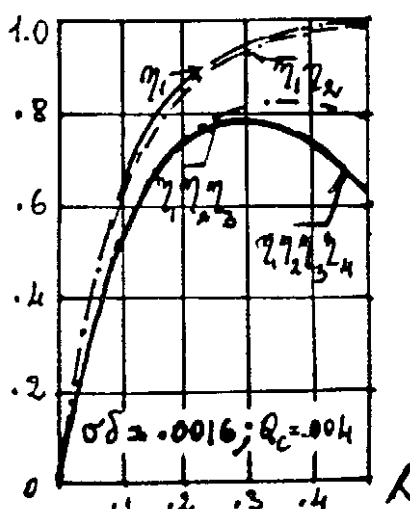


Figura 16.17: Andamento dei diversi rendimenti dell'elica

Ai bassi valori di λ la perdita principale è dovuta al moto assiale della corrente, che diventa trascurabile ($a \rightarrow 0$ per $\lambda \rightarrow \infty$) al crescere di λ . Le perdite rotazionali sono sempre piccole, mentre le perdite dovute alla resistenza delle pale sono sempre consistenti, passando dal 10% a bassi valori di λ al 20% ed oltre agli alti valori di λ . Infine le perdite dovute alla resistenza del mozzo, che sono trascurabili per bassi valori di λ , diventano via via più importanti, riducendo il valore del rendimento massimo del 4 ÷ 5%. È facile, infine, verificare che η_{max} diminuisce al crescere di $\sigma\delta$ e del coefficiente di coppia.

16.10 Teoria dell'elemento di pala. Risultati e limiti

Come si è visto le teorie impulsive consentono di determinare la spinta ed il rendimento ideale di un'elica dipendentemente dal rapporto di funzionamento oltre che dalla coppia (o potenza) assorbita, ma forniscono solo semplici (ed ovvie) indicazioni di massima sulla geometria che occorre disegnare per ottenere determinate prestazioni.

La teoria dell'elemento di pala che riduce, in parte, questi limiti è stata già indirettamente presentata nei paragrafi precedenti e si basa sulle seguenti assunzioni:

- le forze aerodinamiche sviluppate dall'elemento di pala sono quelle che si generano sul profilo, in corrispondenza al raggio r , investito dalla corrente asintotica $V_{eff} = (V_\infty^2 + \Omega^2 r^2)^{1/2}$ con un angolo di attacco $\alpha = \theta - \varphi$;

- b) le forze agenti sull'intera elica si ottengono per semplice sovrapposizione dei contributi degli elementi di pala.

Ovviamente la teoria non impone "a priori" alcun limite sulla scelta delle caratteristiche del profilo elementare e sotto questo aspetto consente indirettamente di introdurre l'interferenza tra i diversi elementi della pala.

Le espressioni (16.22) e (16.23) fornite nell'ambito della teoria dell'elemento rappresentativo possono essere riprese per gli N elementi di pala al raggio r , avendosi facilmente

$$dT = \frac{1}{2} \rho V_{eff}^2 N c (C_L \cos \varphi - C_D \sin \varphi) dr$$

$$dQ = \frac{1}{2} \rho V_{eff}^2 N c (C_L \sin \varphi + C_D \cos \varphi) r dr$$

Se si hanno tutti gli elementi per una completa soluzione [noti $\theta(r)$, N , $c(r)$, $\alpha = \theta - \varphi$, $\varphi = \arctan \frac{V_\infty}{\Omega r} = \arctan \frac{\lambda R}{r}$, $V_{eff} = (V_\infty^2 + \Omega^2 r^2)^{1/2}$, $C_L = C_L(\alpha, r)$, $C_D = C_D(\alpha, r, Re_{y_r})$], questa potrà essere ottenuta per integrazione (numerica o grafica) delle relazioni precedenti. Ma se si considera il rendimento dell'elemento di pala

$$\eta = \frac{V_\infty dT}{\Omega dQ} = \frac{V_\infty C_L \cos \varphi - C_D \sin \varphi}{\Omega r C_L \sin \varphi + C_D \cos \varphi} = \frac{1 - \epsilon \tan \varphi}{1 + \epsilon \cot \varphi}$$

dove $\epsilon = C_D/C_L$, si trova che il rendimento raggiunge un valore massimo quando $d\eta/d\varphi = 0$, ovvero per $\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan \epsilon \left(\approx \frac{\pi}{4} \right)$, ed inoltre che il rendimento è nullo per $r = \epsilon V_\infty / \Omega$.

L'esistenza di un diametro ottimo e il fatto che a partire da tale diametro ogni aumento del disco battuto comporta una diminuzione del rendimento sono chiaramente in contrasto con quanto ricavato con la teoria impulsiva. Se poi si aggiunge che il confronto della teoria dell'elemento di pala con l'esperienza indica che i valori dei coefficienti di spinta e di coppia sono determinati con errori dell'ordine del 10%, si può concludere che è indispensabile procedere a modificare la semplice teoria dell'elemento di pala. Sinteticamente i punti cruciali sono i seguenti.

-) Ogni elemento di pala lavora indipendentemente da tutti gli altri; questa affermazione deve potersi ritenere valida alla luce delle classiche esperienze di Lock, [54].
- b) La velocità effettiva è la risultante della velocità rotazionale Ωr e della velocità di avanzamento V_∞ . È questo un punto debole della teoria, come si comprende da quanto illustrato nell'ambito della teoria impulsiva generale ed alla luce della nota teoria alare di Prandtl della linea portante.
- c) Rimane l'indeterminatezza nel definire la modalità di scelta delle caratteristiche aerodinamiche dell'elemento di pala; in particolare occorre precisare il valore dell'allungamento effettivo in base al quale scegliere le funzioni C_L e C_D .

Si ritornerà su questi ultimi due punti dopo aver illustrato brevemente la teoria vorticoso dell'elica.

16.11 Teoria vorticoso dell'elica

Su ogni elemento di pala si viene a generare una circolazione Γ corrispondente alla portanza da esso prodotto; in generale Γ sarà di intensità variabile lungo la pala ed il campo vorticoso dell'elica sarà rappresentato da un sistema di vortici aderenti e liberi. I vortici liberi assumono un andamento elicoidale ed avranno una distribuzione continua nell'ipotesi di numero infinito di pale; se poi si trascura la contrazione della scia a valle del disco dell'elica, i vortici liberi elicoidali vengono a svilupparsi all'interno e sulla superficie cilindrica di diametro uguale al diametro dell'elica.

Nel caso che la circolazione Γ sia costante lungo la pala lo schema vorticoso dell'elica assume la forma di Fig. 16.18.

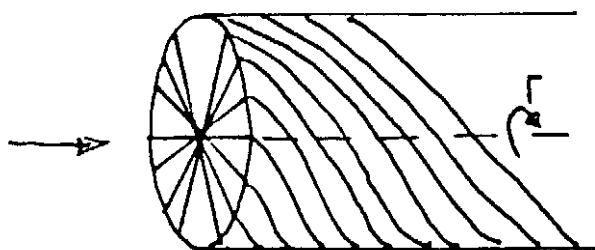


Figura 16.18: Schema del sistema vorticoso di un'elica

Considerando un generico elemento ds di un vortice elicoidale disposto sulla superficie laterale della scia è possibile sostituire, nella valutazione del campo indotto, questo elemento vorticoso elicoidale con due elementi vorticosi della stessa intensità, uno parallelo alla generatrice del cilindro (di lunghezza $\sin \delta ds$, con δ l'angolo di inclinazione dell'elemento vorticoso elicoidale sul piano trasversale della scia), e l'altro diretto secondo la tangente al cerchio nel punto considerato (di lunghezza $\cos \delta ds$). Pertanto lo schema vorticoso di un'elica con un numero infinito di pale, con scia cilindrica e circolazione costante lungo le pale, viene ad essere costituito da

- un sistema di vortici aderenti, disposti radialmente sul piano del disco dell'elica;
- un sistema di vortici liberi circolari;
- un sistema di vortici liberi rettilinei e paralleli alla generatrice della superficie cilindrica della scia, e disposti sulla stessa superficie;
- un sistema di vortici liberi rettilinei, che si distaccano in corrispondenza del mozzo lungo l'asse di rotazione.

Avendo trascurato la contrazione della scia a valle non ci si occuperà delle velocità radiali nella descrizione del campo indotto.

Considerando il campo indotto dai vortici aderenti si trova che la velocità assiale è nulla per motivi di simmetria (il contributo in ogni punto della scia dovuto al vortice aderente ad una delle pale è annullato dal contributo, uguale e contrario, dovuto al vortice aderente alla pala, simmetrica alla pala prima considerata rispetto al punto P). I vortici aderenti producono, però, velocità tangenziali $\omega''r$, nulle nelle sezioni a distanza infinita dal disco, a monte ed a valle ed uguali e di segno opposto in punti (a pari r) ad uguale distanza, a monte ed a valle, dal piano di rotazione dell'elica, Fig. 16.19.

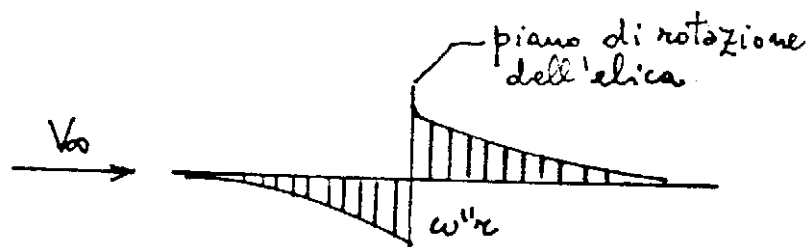


Figura 16.19: Teoria vorticoso - Induzione tangenziale dei vortici aderenti

I vortici liberi circolari inducono incrementi di velocità assiali; è facile osservare che le velocità assiali indotte, nulle nella sezione infinitamente a monte dell'elica, assumono un valore, sul piano

del disco dell'elica, pari alla metà della velocità assiale indotta nella sezione infinitamente a valle dell'elica, come nella teoria impulsiva semplice, in perfetta analogia con il campo delle velocità indotte dal sistema di vortici liberi di un'ala finita nella teoria della linea portante di Prandtl, Fig. 16.20.

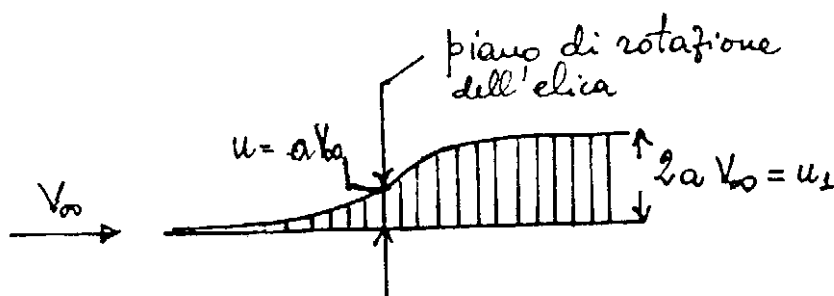


Figura 16.20: Teoria vorticoso - Induzione assiale dei vortici circolari

I sistemi di vortici liberi rettilinei, assiali e paralleli alla generatrice della superficie cilindrica della scia inducono nei punti a distanza r dall'asse di rotazione una velocità tangenziale $\omega'r$, che è nulla infinitamente a monte e che sul piano del disco è, anche qui, uguale alla metà del valore che si realizza infinitamente a valle, Fig. 16.21.

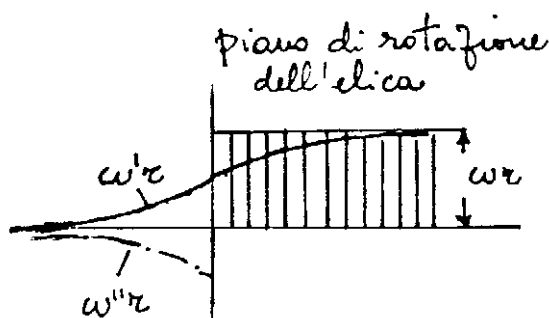


Figura 16.21: Teoria vorticoso - Induzione tangenziale dei vortici liberi

Poiché la velocità angolare totale, nel fluido a monte del disco è nulla, come si è visto nei paragrafi precedenti, segue che la velocità tangenziale indotta dai vortici aderenti deve essere, in ogni punto, uguale ed opposta alla velocità tangenziale indotta dai vortici liberi assiali e paralleli alla generatrice della superficie cilindrica della scia, e perciò, Fig. 16.21, la velocità angolare totale nella scia, ω , è costante. Prendendo poi in esame le due facce, immediatamente a monte ed a valle del disco, si ha dunque per la faccia a monte $\omega' + \omega'' = 0$ e per quella a valle $\omega' - \omega'' = 0$: si trova facilmente che il risultato $\omega' = \omega/2$, cioè la velocità angolare indotta dai vortici liberi in ogni punto del piano di rotazione dell'elica è la metà della velocità angolare totale.

La velocità effettiva del moto relativo del generico elemento di pala al raggio r \bar{V}_{eff} è quindi caratterizzata, Figg. 16.16 e 16.22, dalla componente assiale $V_\infty(1+a)$ e dalla velocità tangenziale $\Omega r(1-a') = (\Omega - \omega/2)r$.

La teoria impulsiva generale e la teoria vorticoso conducono quindi alle stesse conclusioni.

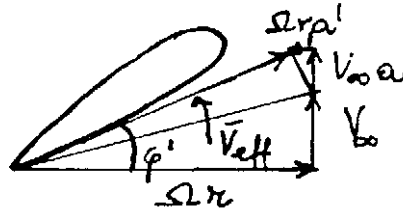


Figura 16.22: Velocità complessiva sull'elemento di pala

16.12 Perfezionamento della teoria dell'elemento di pala

Con riferimento alla velocità effettiva \bar{V}_{eff} le espressioni della spinta e della coppia dell'elemento di pala sono

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dr} &= \frac{1}{2} \rho \bar{V}_{eff}^2 N c C_y \\ \frac{dQ}{dr} &= \frac{1}{2} \rho \bar{V}_{eff}^2 N c r C_x\end{aligned}$$

dove N è il numero di pale ed inoltre

$$\begin{aligned}C_y &= C_L \cos \varphi' - C_D \sin \varphi' \\ C_x &= C_L \sin \varphi' + C_D \cos \varphi'\end{aligned}$$

Per le (16.12) e (16.13) le espressioni per dT/dr e dQ/dr , posto

$$\sigma = \frac{Nc}{2\pi r}$$

si scrivono come

$$R \frac{dT_c}{dr} = \sigma \left(\frac{r}{R}\right)^3 (1-a')^2 C_y \sec^2 \varphi' \quad (16.80)$$

$$R \frac{dQ_c}{dr} = \sigma \left(\frac{r}{R}\right)^4 (1-a')^2 C_x \sec^2 \varphi' \quad (16.81)$$

D'altra parte, dall'equazione del bilancio della quantità di moto assiale si ha

$$dT = \pi R^2 \rho \Omega^2 R^2 dT_c = 4\pi \rho V_{\infty}^2 (1+a) a r dr$$

ovvero

$$R \frac{dT_c}{dr} = 4\lambda^2 (1+a) a \frac{r}{R} \quad (16.82)$$

mentre dal bilancio della quantità di moto angolare segue

$$dQ = 2\pi \rho V_{\infty} (1+a) \omega r^3 dr$$

che diventa, per la (16.13) e per la definizione del fattore di interferenza rotazionale

$$R \frac{dQ_c}{dr} = 4 \left(\frac{r}{R}\right)^4 (1-a') a' \tan \varphi' \quad (16.83)$$

Finalmente, essendo

$$\lambda = \frac{V_{\infty}}{\Omega r} = \frac{r}{R} \frac{1-a'}{1+a'} \tan \varphi' \quad (16.84)$$

confrontando la (16.80) con la (16.82) e la (16.81) con la (16.83) si ricavano le relazioni

$$\frac{a}{1+a} = \frac{\sigma C_y}{4 \sin^2 \varphi} \quad (16.85)$$

$$\frac{a'}{1-a'} = \frac{\sigma C_x}{4 \sin \varphi \cos \varphi} \quad (16.86)$$

Le equazioni (16.80), (16.81), (16.84), (16.85) e (16.86), con le definizioni prima indicate per σ , C_y , e C_x , consentono di determinare la spinta e la coppia di un'elica una volta definito il numero N di pale, e la legge di variazione, lungo la pala, della corda c e dell'angolo di calettamento θ ; ovviamente si deve assumere nota la polare di ogni elemento di pala, ovvero l'andamento dei coefficienti aerodinamici C_L e C_D in funzione di α .

Rimane, tuttavia, da definire il valore dell'allungamento alare in base al quale valutare le caratteristiche aerodinamiche C_L e C_D e quindi C_y e C_x . Il procedimento che si espone, dovuto a Pistolesi, risolve in modo approssimato tale problema. Nell'ipotesi di fluido ideale la forza aerodinamica generata dall'elemento di pala viene a coincidere con la portanza elementare e si ha per la spinta corrispondente

$$\frac{dT}{dr} = \frac{1}{2} \rho \bar{V}_{eff}^2 N c C_L \cos \varphi'$$

mentre, applicando il bilancio della quantità di moto assiale risulta

$$\frac{dT}{dr} = 4\pi \rho \Omega r^2 w \sin \varphi'$$

con w velocità indotta totale, risultante della velocità indotta assiale e rotazionale. Uguagliando queste ultime due relazioni si ottiene

$$\frac{w}{\bar{V}_{eff}} = \frac{N c \bar{V}_{eff} C_L}{8\pi r^2 \Omega \tan \varphi'} \cong \frac{N c C_L}{8\pi r \sin \varphi'}$$

avendo trascurato, nell'ultimo passaggio, il fattore di interferenza rotazionale. Il rapporto w/\bar{V}_{eff} altro non è che un angolo di incidenza indotta, che, nel caso di distribuzione ellittica del carico lungo l'apertura, sarebbe espresso da

$$\frac{w}{\bar{V}_{eff}} = \frac{C_L}{\pi \mathcal{A}}$$

Si ha quindi

$$\mathcal{A} = \frac{8r \sin \varphi'}{N c}$$

16.13 Influenza delle perdite viscosse e del numero finito di pale

È importante determinare la geometria delle eliche che operano con il più alto rendimento. Il rendimento η oltre che dipendere dalla potenza assorbita, dalla velocità di avanzamento e dal diametro dell'elica, parag. (16.7), dipende dalla distribuzione della spinta lungo la pala, dal numero N delle pale e dalla resistenza di profilo degli elementi di pala assunti.

L'influenza della distribuzione della spinta lungo la pala è stata già considerata nello studio delle teorie impulsive. Betz ha affrontato il problema alla luce della teoria vorticoso dell'elica: la condizione per la distribuzione ottimale della circolazione lungo la pala è che il rapporto

$$k = \frac{V_\infty}{\Omega} \frac{\Delta(dT)}{\Delta(dQ)}$$

sia costante con r ; $\Delta(dT)$ e $\Delta(dQ)$ sono gli incrementi di spinta e di coppia corrispondenti ad un incremento di circolazione $\Delta\Gamma$ attorno all'elemento di pala al raggio r . Si ricava, Fig. 16.23,

$$\begin{aligned}\Delta(dT) &= \rho(\Omega - \omega)rdr\Delta\Gamma \\ \Delta(dQ) &= \rho(V_\infty + u)rdr\Delta\Gamma\end{aligned}$$

sicchè

$$k = \frac{V_\infty(\Omega - \omega)}{\Omega(V_\infty + u)}$$

cioè

$$\frac{V_\infty + u}{(\Omega - \omega)r} = \frac{V_\infty}{\Omega r} \frac{1}{k} = \tan \varphi = \frac{V_\infty + v'}{\Omega r}$$

La condizione di ottimo richiede quindi che v' sia una costante.

Si osserva che in assenza di velocità indotta la linea AC rappresenterebbe un elemento di superficie elicoidale con passo costante; per la costanza di $v' = CD$, anche la linea AD viene a rappresentare una superficie elicoidale a passo costante. In altri termini, nelle condizioni di ottimo i vortici liberi vengono a formare una superficie elicoidale rigida di passo costante che si muove con una velocità v' lungo l'asse dell'elica.

Se w_n è la componente di w normale ad AD , le componenti assiali e tangenziali della velocità indotta totale w , nella scia infinitamente a valle, sono

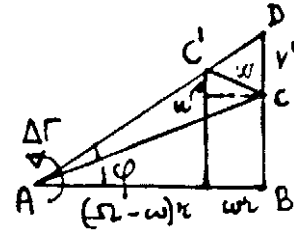


Figura 16.23: Schema della velocità nella sezione infinitamente a valle

$$\begin{aligned}w_{a_\infty} &= w_n \cos \varphi = v' \cos^2 \varphi = v' \frac{\Omega^2 r^2}{V_\infty^2 + \Omega^2 r^2} \\ w_{t_\infty} &= w_n \sin \varphi = v' \sin \varphi \cos \varphi = v' \frac{V_\infty \Omega r}{V_\infty^2 + \Omega^2 r^2}\end{aligned}$$

e pertanto la circolazione Γ attorno a ciascuno degli N elementi di pala sarà

$$\Gamma = \frac{2\pi r w_{t_\infty}}{N} = \frac{2\pi v'}{N} \frac{V_\infty \Omega r^2}{V_\infty^2 + \Omega^2 r^2}$$

da cui, con $X = \Omega r/V_\infty$

$$\frac{\Gamma N \Omega}{2\pi V_\infty v'} = \frac{X^2}{1 + X^2} \quad (16.87)$$

che rappresenta la distribuzione ottimale di circolazione lungo la pala; ovviamente il risultato ottenuto è valido per flussi non viscosi e per eliche con un numero infinito di pale.

In queste condizioni si può valutare la perdita di energia. Si avrà

$$\frac{dE}{dr} = \Omega \frac{dQ}{dr} - V_\infty \frac{dT}{dr}$$

e d'altra parte si può

$$\frac{dT}{dr} = N\Gamma\rho \left(\Omega - \frac{\omega}{2} \right) r \quad (16.88)$$

$$\frac{dQ}{dr} = N\Gamma\rho V r \quad (16.89)$$

Una seconda espressione per la spinta elementare segue dal bilancio della quantità di moto assiale

$$\frac{dT}{dr} = 4\pi\rho r V (V - V_\infty) \quad (16.90)$$

con $V = V_\infty + u$; uguagliando la (16.88) alla (16.90), con l'approssimazione

$$V(V - V_\infty) = \frac{1}{2} \left(\Omega - \frac{\omega}{2} \right) \omega r^2 \cong \frac{1}{2} \Omega \omega r^2$$

ed essendo $N\Gamma = 2\pi\omega r^2$, segue

$$V - V_\infty \cong \frac{1}{2} \frac{\Omega r^2}{V_\infty} \frac{N\Gamma}{2\pi r^2} \quad \Rightarrow \quad V = V_\infty + \frac{N\Gamma\Omega}{4\pi V_\infty}$$

Si ricava, pertanto, per la perdita di energia

$$\frac{dE}{dr} = N\Gamma\rho r \left[\Omega(V - V_\infty) + \frac{\omega}{2} V_\infty \right] = N\Gamma\rho r \left[\frac{N\Gamma\Omega^2}{4\pi V_\infty} + \frac{V_\infty}{2} \frac{N\Gamma}{2\pi r^2} \right] = \frac{N^2\Gamma^2\rho\Omega}{4\pi} \left[\frac{\Omega r}{V_\infty} + \frac{V_\infty}{\Omega r} \right] \quad (16.91)$$

Posto

$$K = \frac{N\Gamma\Omega}{2\pi V_\infty^2}$$

discende dalla (16.91)

$$\frac{dE}{dr} = \frac{2\pi\rho V_\infty^4}{\Omega} K^2 \frac{1 + X^2}{2X} \quad (16.92)$$

e la (16.88), scritta approssimativamente come

$$\frac{dT}{dr} \cong N\Gamma\rho\Omega r$$

fornisce

$$V_\infty \frac{dT}{dr} = \frac{N\Gamma\Omega}{2\pi V_\infty^2} 2\pi V_\infty^3 \rho r = K \frac{2\pi\rho V_\infty^4}{\Omega} X \quad (16.93)$$

Si vede ora come la resistenza di profilo altera la distribuzione ottimale prima ricavata per la circolazione Γ , eq. (16.87). Occorre aggiungere alla (16.92) la perdita di energia corrispondente alla resistenza di profilo

$$\frac{dE_D}{dr} = \frac{1}{2} \rho c C_D N \bar{V}_{eff}^3$$

Se ora nell'espressione della spinta dell'elemento di pala

$$dT = \frac{1}{2} \rho N c \bar{V}_{eff}^2 (C_L \cos \varphi - C_D \sin \varphi)$$

si trascura il contributo della resistenza, (φ è piccolo, $\bar{V}_{eff} \cong \Omega r$) si ha

$$dT \cong \frac{1}{2} \rho N c \Omega^2 r^2 C_L$$

e la perdita di energia dE_D/dr , posto $\epsilon = C_D/C_L$, assume la forma

$$\frac{dE_D}{dr} = \epsilon \Omega r \frac{dT}{dr} = \epsilon N\Gamma\rho\Omega^2 r^2 \quad (16.94)$$

La perdita di energia totale si ottiene sommando la (16.94) alla (16.92), cioè

$$\frac{dE}{dr} = \frac{2\pi\rho V_\infty^4}{\Omega} \left[K^2 \frac{1 + X^2}{2X} + \epsilon K X^2 \right]$$

La distribuzione ottimale della circolazione lungo la pala si ottiene imponendo che gli incrementi $V_\infty \Delta(dT)$ e $\Delta(dE)$, dovuti ad un incremento arbitrario (e piccolo) di Γ , ovvero di K , siano indipendenti dalla coordinata radiale; si ha, tenendo conto della (16.93), che dovrà essere

$$K \frac{1+X^2}{X} + \epsilon X^2 = CX$$

dove C è una costante, ovvero

$$K = \frac{N\Gamma\Omega}{2\pi V_\infty^2} = \frac{(C - \epsilon X) X^2}{1 + X^2} \quad (16.95)$$

Se si pone nella (16.87) $v' = CV_\infty$, la (16.87) diventa

$$\frac{N\Gamma\Omega}{2\pi V_\infty^2} = \frac{CX^2}{1 + X^2} \quad (16.96)$$

Confrontando la (16.95) e (16.96) si può osservare che è significativo l'effetto della resistenza di profilo sulla distribuzione ottimale della circolazione, che raggiunge, per $C_D \neq 0$, un valore massimo e poi diminuisce fino ad annullarsi per $X = C/\epsilon$, Fig. 16.24. Comunque all'estremità

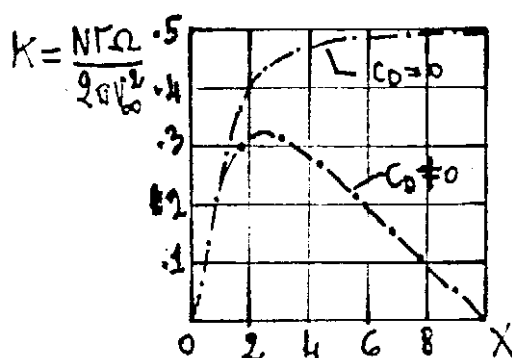


Figura 16.24: Influenza della resistenza di profilo sul rendimento dell'elica

delle pale si realizzano valori di $X < C/\epsilon$.

Si ha poi per il rendimento

$$\eta = \frac{V_\infty dT}{\Omega dQ} = \frac{V_\infty dT}{V_\infty dT + d\epsilon}$$

cioè

$$\frac{1-\eta}{\eta} = \frac{dE}{V_\infty dT} = K \frac{1+X^2}{2X^2} + \epsilon X$$

e per la (16.95)

$$\frac{1-\eta}{\eta} = \frac{1}{2}(C + \epsilon X)$$

e quindi

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}(C + \epsilon X)} \quad (16.97)$$

Si ritrova con la (16.97) che quando la resistenza di profilo è trascurabile il rendimento è costante lungo la pala; la variazione del rendimento dovuta alla resistenza di profilo diventa importante ai bassi valori del rapporto di funzionamento, quando cioè $X = (1/\lambda)r/R$ assume valori elevati.

Si consideri, infine, l'influenza del numero finito di pale, quando cioè la scia dell'elica è costituita da schiere vorticosi che si succedono con un certo intervallo. In queste condizioni le velocità

radiali in corrispondenza delle estremità delle pale e delle regioni dei bordi della scia non sono più trascurabili. Prandtl ha valutato approssimativamente che l'effetto del flusso radiale modifica la distribuzione ottimale della circolazione (16.87), che diventa

$$\frac{N\Gamma\Omega}{2\pi V_\infty v'} = \frac{X^2}{1+X^2} F, \quad \text{con } F = \frac{2}{\pi} \arccos e^{-f} \quad e \quad f = \frac{N}{2} \left(1 - \frac{r}{R}\right) \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda} \quad (16.98)$$

Valori forniti dalla (16.98) sono mostrati in Fig. 16.25.

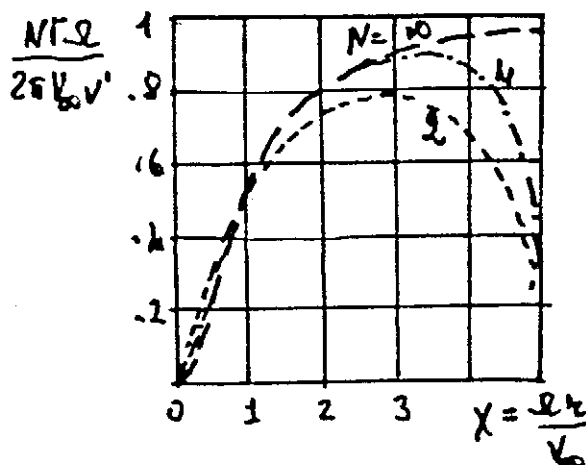


Figura 16.25: Influenza del numero di pale sul rendimento

Il significato del fattore F è il seguente: il fluido compreso tra due schiere vorticosi consecutive subisce un incremento di velocità assiale $aV_\infty F$ minore dell'incremento aV_∞ corrispondente al caso in cui la vorticità sulla scia è continua, cioè quando il numero delle pale è infinito.

Pertanto le teorie sviluppate per $N \rightarrow \infty$ possono essere direttamente estese al caso di numero finito di pale introducendo il fattore F ; così ad esempio per la spinta dell'elemento di pala si ha

$$dT = 4\pi r \rho V_\infty^2 (1+a) a F dr$$

La riduzione del rendimento dovuta al numero finito di pale può essere valutata assimilando l'elica con un numero N di pale ad un'elica con un numero infinito di pale che produce la stessa spinta ma con un diametro minore. È stato calcolato che il rapporto R_e/R tra il raggio equivalente da considerare al raggio dell'elica è dato da

$$\frac{R_e}{R} = 1 - \frac{1.386}{N} \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

Dalla relazione (16.40) per il rendimento ideale in funzione della potenza assorbita, se si impone che l'elica con un numero N di pale abbia il rendimento di un'elica con un numero infinito di pale che assorbe la stessa potenza muovendosi con la stessa velocità di traslazione, ma con un raggio minore R_e , si avrà

$$\frac{1 - \eta'_i}{\eta_i'^3} = \frac{1 - \eta_i}{\eta_i^3} \left[\frac{1}{1 - \frac{1.386}{N} \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}} \right]^2 \quad (16.99)$$

dove η'_i è il rendimento reale ed η_i il valore ricavato per $N = \infty$. Assumendo un rendimento ideale $\eta_i = 0.9$ si calcolano con la (16.99) valori del rendimento effettivo η'_i indicati nella Tab. 16.2.

Si ha che la perdita del rendimento è piccola (dell'ordine del 2.5% per un'elica bipala), per bassi valori del rapporto di funzionamento; per contro tale perdita aumenta al crescere di λ ed al diminuire del rendimento ideale η_i ($N = \infty$).

$\lambda = 0.2$		$\lambda = 0.4$	
N	η'_i	N	η'_i
2	0.877	2	0.848
4	0.889	4	0.878
∞	0.9	∞	0.9

Tabella 16.2: Rendimento effettivo al variare del numero delle pale

16.14 Effetti della comprimibilità in campo subsonico

Si possono infine valutare gli effetti della comprimibilità sul rendimento ideale di un'elica prima che questa venga ad operare in campo transonico. Indicando con V_1 la velocità totale nella sezione infinitamente a valle, riferendosi solo alle perdite assiali, si ha che

$$\eta_i = \frac{TV_\infty}{P} = \frac{\dot{m}(V_1 - V_\infty)V_\infty}{\frac{1}{2}\dot{m}(V_1^2 - V_\infty^2)} = \frac{2}{1 + \frac{V_1}{V_\infty}}$$

Per determinare il valore della velocità V_1 , si estende la teoria impulsiva semplice al caso di un flusso comprimibile. Il disco attuatore diventa una superficie di discontinuità non solo per la pressione ma anche per la velocità assiale. Inoltre nell'ipotesi di flusso adiabatico il salto di energia è solo associato all'incremento di velocità assiale e poiché continua ad essere nella sezione infinitamente a valle $p_1 = p_\infty$, sarà anche $\rho_1 = \rho_\infty$. La spinta e la potenza assorbita possono essere espresse sia in termini della velocità nelle sezioni finali

$$T = \dot{m}(V_1 - V_\infty) = \rho_\infty V_\infty S_\infty (V_1 - V_\infty)$$

$$P = \frac{1}{2}\dot{m}(V_1^2 - V_\infty^2)$$

che delle grandezze assunte nelle sezioni immediatamente a monte ed a valle del disco attuatore

$$T = (p'' - p')S - \dot{m}(V' - V'')$$

$$P = \frac{1}{2}\dot{m}(V_1 + V_\infty)(V_1 - V_\infty) = \frac{V_1 + V_\infty}{2} [(p'' - p')S - \dot{m}(V' - V'')]$$

Noti i valori della potenza assorbita e delle proprietà del fluido nella sezione S_∞ , è possibile valutare le 8 grandezze $V', V'', p', p'', V_1, \rho', \rho''$ ed \dot{m}/S con le equazioni

$$\frac{\dot{m}}{S} = \rho'V'$$

$$\frac{\dot{m}}{S} = \rho''V''$$

$$\frac{P}{S} = \frac{1}{2}\frac{\dot{m}}{S}(V_1^2 - V_\infty^2)$$

$$\frac{2P/S}{V_1 + V_\infty} = p'' - p' - \frac{\dot{m}}{S}(V' - V'')$$

$$H_0 = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p'}{\rho'} + \frac{V'^2}{2}$$

$$H_1 = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p''}{\rho''} + \frac{V''^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_\infty}{\rho_\infty} + \frac{V_1^2}{2}$$

$$\frac{p'}{\rho'^\gamma} = \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma}$$

$$\frac{p''}{\rho''^\gamma} = \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma}$$

Il numero delle equazioni può essere ridotto a quattro esprimendo le velocità V' e V'' in termini di \dot{m}/S e di ρ' e ρ'' e le pressioni p' e p'' in funzione di ρ' , ρ'' , p_∞ e ρ_∞ . Si ha, per le incognite \dot{m}/S , ρ' , ρ'' e V_1 il sistema di equazioni implicite

$$\begin{aligned} \frac{P}{S} &= \frac{1}{2} \frac{\dot{m}}{S} (V_1^2 - V_\infty^2) \\ H_0 &= \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} (\rho')^{\gamma-1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{m}}{S} \right)^2 \left(\frac{1}{\rho'} \right)^2 \\ H_1 &= \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} (\rho'')^{\gamma-1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{m}}{S} \right)^2 \left(\frac{1}{\rho''} \right)^2 \\ \frac{2P/S}{V_1 + V_\infty} &= \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} [(\rho'')^\gamma - (\rho')^\gamma] - \left(\frac{\dot{m}}{S} \right)^2 \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho''} \right) \end{aligned}$$

Le soluzioni numeriche di tale sistema mostrano che il valore della velocità V_1 è praticamente coincidente con il valore che si ottiene per flussi incomprimibili, sicché è scarsa l'influenza della comprimibilità in regime subsonico sul rendimento ideale di un'elica.

16.15 Mutua influenza tra elica e velivolo, da [100]

Nel loro funzionamento isolato elica e il velivolo hanno un comportamento alquanto diverso da quello che presentano quando sono accoppiati. Infatti

- il campo aerodinamico relativo al velivolo ed alla condizione di volo determina la corrente che investe l'elica (in genere tutt'altro che modimensionale ed assiale) ed incide sulla componente "utile" della velocità perpendicolare al piano del disco;
- allo stesso modo *upwash* e scia dell'elica hanno un'influenza, più o meno forte, sulle azioni prodotte dalle superfici aerodinamiche;
- la posizione dell'asse della spinta prodotta dall'elica determina la variazioni dei momenti aerodinamici (principalmente quello di beccheggio).

È chiaro che il campo aerodinamico effettivo risultante dalla mutua influenza tra eliche e velivolo è in genere piuttosto complesso: ma di questa mutua interferenza è comunque indispensabile tenere conto. È preferibile allora procedere trattando separatamente gli effetti, diretti ed indiretti, dell'elica sul velivolo, e poi gli effetti del velivolo sull'elica.

16.15.1 Effetti diretti dell'elica sul velivolo

Gli effetti diretti sono quelli legati alla spinta e alla posizione della sua retta d'azione rispetto al baricentro del velivolo.

Il momento di beccheggio

Il momento di beccheggio è determinato sia dall'entità della trazione sia dalla sua direzione. Se l'asse di rotazione dell'elica passa per il baricentro del velivolo, la sua trazione non provoca momenti tendenti a modificare l'assetto del velivolo stesso. Se invece, esso è localizzato sopra o sotto il baricentro si determinano, quando il motore è in funzione, momenti picchianti o cabranti rispettivamente. In teoria la posizione ideale dell'asse della spinta può sembrare quella passante per il baricentro (non si avrebbe alcuna influenza sull'assetto longitudinale del velivolo); talvolta l'asse di spinta viene fatto passare leggermente al di sotto del baricentro per un bilanciamento complessivo del momento di beccheggio.

In certi casi la posizione al di sopra del baricentro, con decentramenti anche notevoli, è obbligata come nel caso degli idrovolanti: i momenti picchianti che si manifestano disturbano notevolmente il comportamenti dell'aereo costringendo il pilota a brusche e non istintive correzioni.

E comunque, nei casi in cui la variazione del momento di beccheggio derivante dall'azione dell'elica non sia compensata, il pilota è obbligato ad agire sulle superfici di governo per ripristinare il corretto assetto longitudinale del velivolo.

La coppia di reazione

La coppia di reazione si manifesta sul velivolo come reazione alla coppia fornita dal motore all'elica, per effetto della quale l'aereo tende a ruotare intorno al proprio asse longitudinale in senso opposto a quello di rotazione dell'elica. I suoi effetti non sono tollerabili né in volo né a terra, e pertanto vanno neutralizzati per quanto possibile.

In volo è pensabile intervenire con le superfici di governo (alettoni e timone) in quanto le azioni aerodinamiche delle semiali sono sufficientemente elevate.

Questo tipo di intervento non è invece praticamente realizzabile a terra in quanto la velocità è bassa (e quindi le azioni aerodinamiche sono poco efficaci) mentre in aggiunta la potenza del motore può essere quella massima. Durante il decollo, nella fase di rullaggio, le ruote del carrello sono sottoposte a carichi notevolmente differenti che determinano una diversa resistenza di attrito col terreno: ciò causa una pericolosa instabilità della traiettoria per effetto della tendenza del velivolo ad imbarcare⁶. La cosa ha implicazioni e limitazioni importanti per la condotta del velivolo durante il decollo.

Nel caso di velivoli plurimotore si può equilibrare la coppia di reazione adottando per i motori posti su una semiala senso di rotazione opposto rispetto a quello dei motori posti sull'altra: (se i motori erogano la stessa potenza) le coppie di reazione hanno risultante nullo. Questa soluzione, concettualmente semplice, spesso non trova in genere applicazione in quanto mal si concilia con problemi economici di manutenzione, dovendosi prevedere parti di ricambio di due motori invece di uno solo.

Quindi per velivoli con più motori corotanti, ed anche per i velivoli monomotore, si può introdurre una asimmetria nella distribuzione della portanza lungo l'apertura alare al fine di spostare il centro di pressione fuori dal piano di simmetria: non essendo la portanza allineata alla forza peso, si genera una coppia che equilibra, in tutto od in parte, la coppia di reazione. L'asimmetria del carico si ottiene, in genere, calettando le semiali alla fusoliera con angoli diversi o conferendo alle due semiali diversa apertura.

La correzione può essere introdotta per bilanciare un preciso, unico valore della coppia applicata alle eliche, e quindi in tutte le altre condizioni di volo occorrono interventi ulteriori. In pratica si corregge soltanto la metà della coppia massima, allo scopo di evitare un'eccessiva tendenza a rollare durante il volo con motore a regime ridotto.

Si noti pure che, qualunque sia l'entità della correzione, la dissimmetria della portanza produce anche una dissimmetria nella resistenza, dando luogo ad un momento imbarcante che tende a far ruotare il velivolo dalla parte della semiala la cui portanza è maggiore. Nel caso di velivolo monomotore tale momento può essere corretto -ovviamente in una condizione di volo di riferimento- spostando opportunamente l'asse dell'elica parallelamente al piano di simmetria dalla parte della semiala più resistente.

L'effetto giroscopico

L'effetto giroscopico si determina in quanto l'elica è una massa rotante e quindi si comporta come un giroscopio. La conseguenza di tale effetto è la nascita di una coppia giroscopica che si manifesta tutte le volte che il velivolo compie una manovra intorno ad uno degli assi fondamentali.

È evidente che il pilota durante il volo deve tenere conto di tale coppia e mettere in atto azioni per bilanciarlo, a meno che il velivolo non sia dotato di un numero pari di eliche e controrotanti, caso in cui anche gli effetti giroscopici -in crociera- si equilibrano.

⁶Il fenomeno è più marcato nel caso degli idrovolanti perché il valore della resistenza idrodinamica aumenta rapidamente col dislocamento e la sua differenza tra i due galleggianti è notevole.

16.15.2 Effetti indiretti dell'elica sul velivolo

Distorsioni del campo di moto: effetto della scia dell'elica

I principali effetti indiretti sono legati all'induzione di un'elica sulle superfici, aerodinamiche e non. Le parti del velivolo investite dalla scia dell'elica sono soggette ad una variazione delle rispettive azioni aerodinamiche, con effetti talvolta notevoli sul comportamento del velivolo.

- L'elica traente collocata sull'ala produce sui profili investiti dalla sua scia un'induzione (*upwash* e *downwash*) di segno opposto tra la destra e la sinistra del suo asse, influenzando quindi il flusso sull'ala (carico, strato limite, effetti di comprimibilità) in dipendenza dalla condizione di volo (assetto, velocità, quota, carico sull'elica)⁷.
- *Corkscrew Effect*. Il monomotore vede la scia dell'elica che si avvolge a spirale intorno alla fusoliera *spiral propwash*, Fig 16.26: questo flusso investe la deriva, producendo una forza laterale e quindi un momento di imbardata (da compensare eventualmente mediante il timone). Questo effetto viene comunque equilibrato in una certa condizione di riferimento mediante opportune asimmetrie dell'architettura del velivolo.

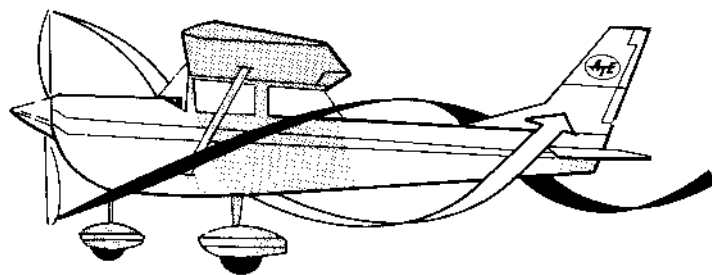


Figura 16.26: *Corkscrew Effect*

L'elica in flusso non assiale: *P-Factor*

È importante l'effetto aerodinamico di una componente verticale della corrente che investe il disco. L'elica non è più in flusso assiale, ma comunque la sua prestazione ne risente poco, almeno per piccoli valori dell'angolo tra l'asse dell'elica e e il flusso che l'investe.

L'effetto più significativo è il cosiddetto *P-Factor*: si tratta del momento di imbardata che nasce dall'eccentricità della spinta, il cui punto di applicazione si sposta lateralmente a causa della differenza della velocità effettiva sugli elementi di pala tra semidisco destro e sinistro, Figg. 16.27 e 16.28. Il *P-Factor* risulta importante quando la potenza erogata dal motore è vicina a quella massima e la velocità di volo è bassa (e dunque l'angolo di attacco è elevato): tipicamente si tratta delle condizioni di decollo e di salita.

Se l'elica ruota in senso orario la sua parte destra scende, quella sinistra sale. In condizioni cabrate la velocità dell'aria avrà una componente diretta verso la parte superiore del disco: la velocità effettiva (e in un certo senso l'angolo di attacco) aumenta sulla parte destra, mentre il contrario accade per la parte sinistra. La forza che si raccoglie su tutto il disco la si può ritenere leggermente minore, ma sulla parte destra agisce una spinta maggiore rispetto alla parte sinistra: il punto di applicazione della forza risultante si sposta a destra, e ci si ritrova con una coppia di imbardata verso sinistra.

In genere l'effetto del *P-Factor* sembra essere meno decisivo del *Corkscrew Effect*.

⁷Il caso del P-180 AVANTI: è stata adottata l'elica spingente per garantire flusso laminare su tutta l'ala (la transizione su un profilo che si trovi nella scia di un'elica avviene praticamente sul bordo di attacco).

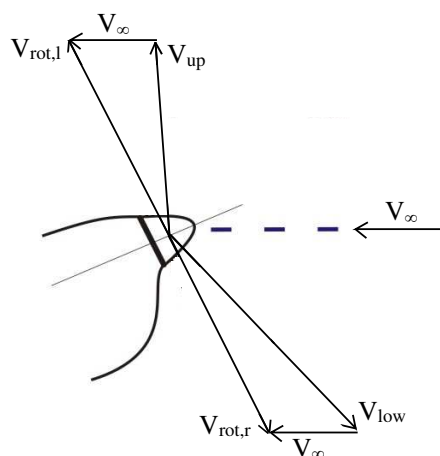


Figura 16.27: Moto differenziale della pala in flusso non assiale

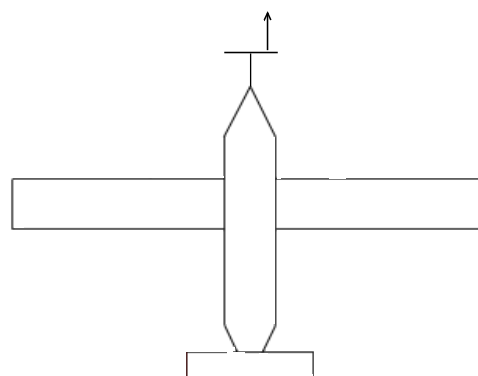


Figura 16.28: Disassamento della forza aerodinamica in flusso non assiale

16.15.3 Conclusione

L'interferenza mutua tra elica (o eliche) e velivolo ha un impatto notevole sulla progettazione, la certificazione e la condotta di un velivolo.

L'analisi accurata degli effetti dell'interferenza è piuttosto complicata, ma una previsione teorico/sperimentale va fatta per essere sicuri di non avere criticità in nessuna condizione. Un elemento di difficoltà è il fatto che l'interferenza che si valuta (e si corregge) in una condizione (crociera, ad esempio) cambia, a volte significativamente, in condizioni diverse

Si aggiunge qui la considerazione, valida anche per la propulsione a getto, che per certe categorie di velivoli occorre sovradimensionare alcuni elementi per tener conto della possibilità di situazioni anomale (una situazione di *one-engine out*, ad esempio, costringe a surdimensionare l'impennaggio verticale). Si noti pure che il *P-Factor* interviene anche nella definizione di "motore critico" in un'architettura plurimotore.

Per correggere tutti gli effetti, quelli diretti e quelli indiretti, il pilota non ha altra possibilità che affidarsi alle superfici di governo (principalmente il timone, e poi gli alettoni).

Capitolo 17

Prese d'aria

17.1 Generalità

Una presa d'aria è una macchina atta a convogliare verso il motore una sufficiente quantità di aria riducendone adeguatamente la velocità e consentendo, nel contempo, di trasformare l'energia cinetica in energia interna ad un buon livello di sfruttabilità. Per esempio, l'aria entrante nella camera di combustione di un motore ramjet ($M_0 > 3$) deve essere decelerata, per consentire le reazioni di combustione, ad un numero di Mach non superiore a 0.2; perché un turboreattore abbia prestazioni soddisfacenti, il flusso che si presenta all'ingresso del compressore dovrebbe avere un numero di Mach approssimativamente minore di 0.4 ed essere abbastanza uniforme. Il funzionamento della presa d'aria può influenzare moltissimo il rendimento del motore cui viene applicata. Si può senz'altro dire che il progetto di una presa d'aria è di fondamentale importanza per ottenere buone prestazioni da un velivolo sia esso subsonico che supersonico.

Se la velocità della corrente indisturbata a monte della presa è supersonica, il processo di diffusione è complicato dalla presenza di onde d'urto. È noto che una diffusione del flusso non è semplicemente l'inverso di una espansione. Assegnato il valore della velocità di uscita dalla presa, il funzionamento migliore (nell'ipotesi di flusso adiabatico) si avrebbe se il fluido evolvesse secondo una trasformazione isentropica. Purtroppo il funzionamento di una presa d'aria si discosta dal funzionamento isentropico in misura molto più sensibile rispetto a quanto accade per il moto in un ugello: è considerevolmente più difficile ottenere una compressione efficiente che non una espansione efficiente, e questo perché un flusso in compressione è soggetto ad un gradiente avverso di pressione, e dunque gli effetti viscosi vengono esaltati; un'altra difficoltà per ottenere una compressione efficiente sta nella interazione tra le onde d'urto e lo strato limite.

La conversione dell'energia cinetica associata ad una corrente subsonica in energia interna, con aumento di pressione statica, è chiamata "diffusione subsonica", mentre la decelerazione di una corrente supersonica fino ad una velocità approssimativamente uguale a quella del suono è chiamata "diffusione supersonica". Se il velivolo vola a velocità supersoniche ed è propulso da un ramjet o da un turboreattore, la diffusione completa del flusso è ottenuta in due fasi: una diffusione supersonica fino a $M \cong 1$ e una diffusione subsonica da $M \cong 1$ a $M < 1$.

Le prese d'aria possono essere classificate in due gruppi principali: prese subsoniche e prese supersoniche. Esse possono essere ulteriormente suddivise in prese a compressione esterna, in cui la compressione avviene prima che il flusso entri nella presa, e prese a compressione interna, in cui la compressione avviene all'interno della presa.

È importantissimo - fondamentale - conoscere la modellistica quasi 1-D dei condotti a sezione variabile (con le questioni annesse: urti, espansioni, effetti viscosi, interazioni). Per questi aspetti occorre far riferimento, se necessario, ad altre parti del testo o ad apposite monografie.

17.2 Caratterizzazione delle prestazioni: parametri di *performance*

Le prestazioni di una presa d'aria possono essere caratterizzate secondo differenti criteri. Tre dei più comuni sono discussi di seguito, con riferimento al processo di diffusione schematizzato nel

piano $(h - s)$, Fig. 17.1.

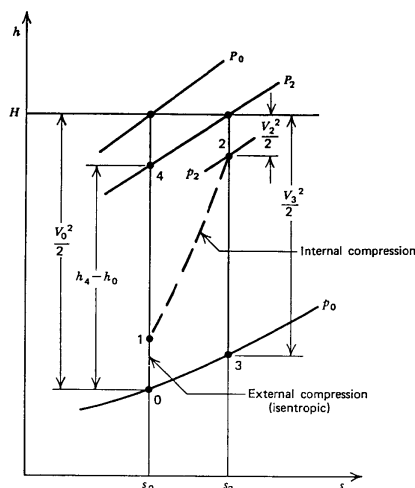


Figura 17.1: Processo di diffusione nel piano $(h - s)$, [102]

Se V_0 è la velocità del velivolo rispetto all'aria in quiete, a pressione p_0 , si può considerare la presa d'aria come un condotto a sezione variabile investito da una corrente d'aria a velocità V_0 e pressione p_0 . Il suffisso "0" indicherà quindi un punto sufficientemente lontano dalla sezione d'ingresso della presa, mentre con i suffissi "1" e "2" si indicheranno rispettivamente le condizioni nella sezione di ingresso e di uscita della presa. Detta V_2 la velocità della corrente all'uscita della presa d'aria, sarà teoricamente possibile recuperare l'energia $(V_0^2 - V_2^2)/2$.

Uno dei parametri più importanti per caratterizzare le prestazioni di una presa d'aria è il "rapporto tra le pressioni di ristagno" $\eta_p = P_2/P_0$, essendo P_2 e P_0 la pressione di ristagno all'uscita del diffusore e a monte della presa. L'"efficienza di energia cinetica" $\eta_{ke} = \frac{V_3^2/2}{V_0^2/2} = \frac{H-h_3}{H-h_0}$ è definita come il rapporto tra l'energia cinetica $V_3^2/2$ che si otterrebbe espandendo isentropicamente il flusso dallo stato 2 alla pressione statica p_0 e l'energia cinetica della corrente indisturbata $V_0^2/2$. Un terzo parametro utilizzato è l'"efficienza di diffusione adiabatica" $\eta_d = \frac{h_4-h_0}{V_0^2/2} = \frac{h_4-h_0}{H-h_0}$: il punto 4 corrisponde ad uno stato termodinamico fittizio ottenuto comprimendo il flusso isentropicamente da p_0 a P_2 . D'ora in avanti, comunque, si utilizzerà, come parametro di efficienza della presa d'aria, il rapporto tra le pressioni di ristagno η_p .

Una caratteristica strettamente legata all'efficienza è la qualità della compressione indicata dalla distribuzione delle pressioni sull'area di uscita. Si può definire il parametro di distorsione del flusso come $D = \frac{P_{2max} - P_{2min}}{P_{2medio}}$ che è influenzato fortemente dall'angolo d'attacco α , Fig. 17.2.

RESISTENZA ADDITIVA

Un altro parametro caratteristico è la resistenza totale in condizioni di progetto che, nel caso supersonico, è dovuta anche alla resistenza d'onda oltre a quella d'attrito associata alla presa.

Si definisce area di cattura A_0 il rapporto tra la portata entrante nella presa e il flusso di massa asintotico

$$A_0 = \dot{m}/\rho_0 V_0$$

Quando l'area di cattura A_0 è diversa dall'area di ingresso A_1 le linee di corrente all'esterno della presa sono come schematicamente illustrato in Fig. 17.3. In tali condizioni una parte del flusso asintotico non entra nella presa, ma è deviato oltre il bordo della stessa (dove viene accelerato): tale fenomeno è detto "spillamento" della presa. Le forze di pressione agenti lungo la superficie A_a danno luogo ad una componente di forza addizionale nella direzione assiale; questa componente è chiamata resistenza additiva e la si indica con D_a :

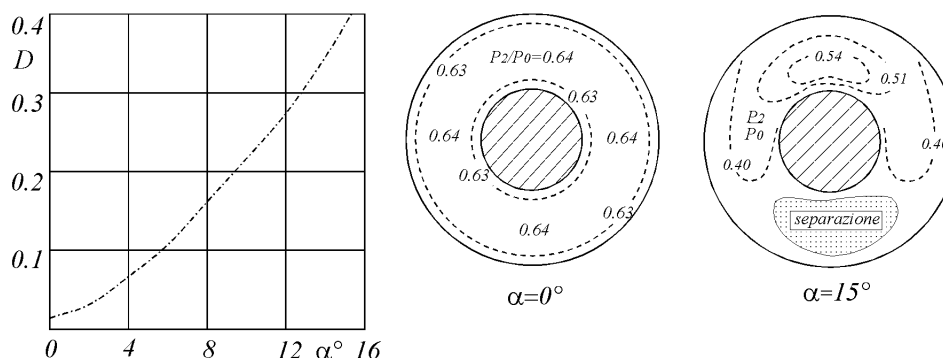


Figura 17.2: Uniformità del flusso all'ingresso della presa

$$D_a = - \int_{A_a} p \hat{i} \cdot \hat{n} dA \quad (17.1)$$

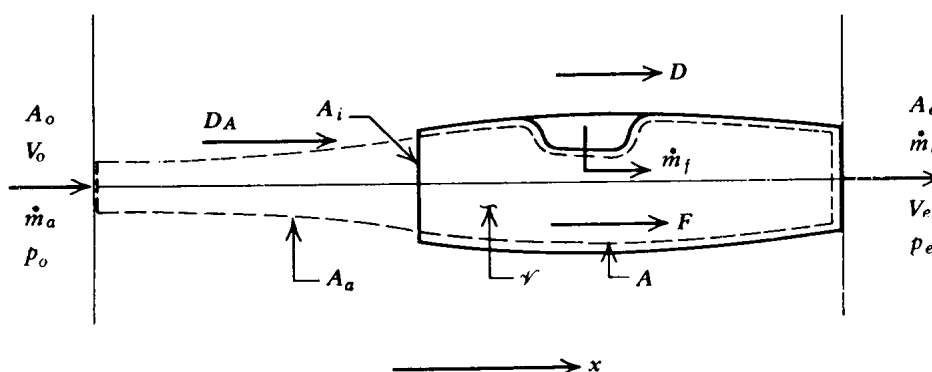


Figura 17.3: Schematizzazione di un motore a getto, [102]

Da un semplice bilancio di quantità di moto si ricava che

$$p_0 A_0 - p_1 A_1 + D_a = \dot{m} V_1 - \dot{m} V_0 \quad (17.2)$$

per cui la resistenza additiva è data da

$$D_a = p_1 A_1 - p_0 A_0 + \rho_1 V_1^2 A_1 - \rho_0 V_0^2 A_0 \quad (17.3)$$

È da notare che questo aumento di resistenza risulta notevole soprattutto nel caso di presa supersonica in condizioni operative come quella schematicamente illustrata in Fig. 17.4, e cioè nelle quali un urto "frontale" a monte della presa regola la portata d'aria entrante nel diffusore. Con semplici passaggi si ricava che

$$D_a = p_0 A_1 \left[\frac{p_1}{p_0} (1 + \gamma M_1^2) - \frac{A_0}{A_1} (1 + \gamma M_0^2) \right] \quad (17.4)$$

$$C_{D_a} = \frac{D_a}{\frac{1}{2} \rho_0 V_0^2 A_1} = \frac{2}{\gamma M_0^2} \left[\frac{p_1}{p_0} (1 + \gamma M_1^2) - \frac{A_0}{A_1} (1 + \gamma M_0^2) \right] \quad (17.5)$$

Dalla (17.5) è possibile dunque valutare D_a in termini del rapporto A_0/A_1 , note le condizioni a monte ed assegnato A_1 . È riportato in Fig. 17.5 l'andamento della resistenza di una presa d'aria supersonica in funzione del rapporto delle aree A_0/A_1 ad $\alpha = 0$ e numero di Mach costante. Si noti il forte aumento della resistenza additiva con lo spillamento.

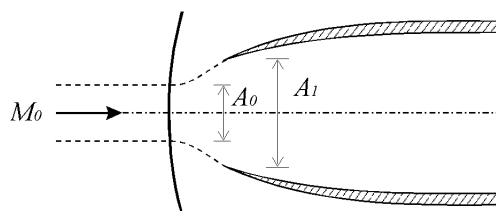
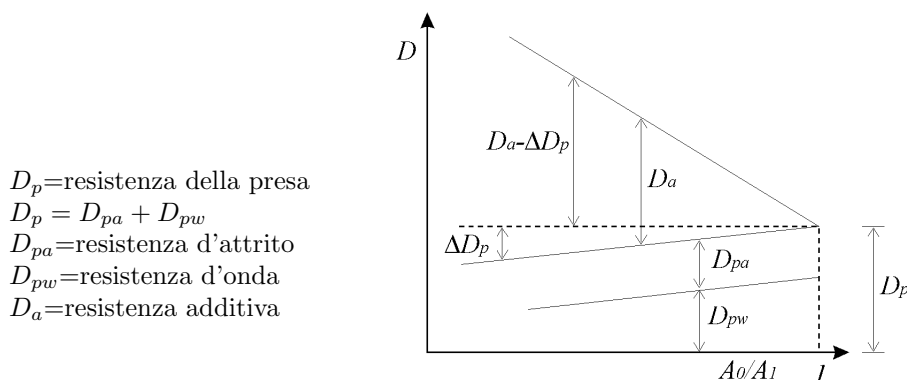


Figura 17.4: Configurazione con urto frontale

Nei prossimi paragrafi verranno esaminati separatamente i diversi tipi di prese d'aria, mettendo in evidenza le corrispondenti prestazioni ed i relativi criteri di progetto.

Figura 17.5: Andamento della resistenza di una presa d'aria in funzione di A_0/A_1

17.3 Prese d'aria subsoniche

I sistemi propulsivi per velivoli che volano a velocità subsoniche sono dotati di prese d'aria subsoniche. La velocità del flusso catturato dalla presa è ovunque subsonica. In generale, la compressione del flusso avviene in due fasi: una prima compressione esterna della corrente dallo stato indisturbato '0' alla sezione d'ingresso '1' ed una seconda compressione, interna, tra le sezioni '1' e '2', Fig. 17.6 e 17.7. Le prese d'aria subsoniche possono essere raggruppate in due tipi di base, schematicamente rappresentate nelle Fig. 17.6 e 17.7:

- 1) prese subsoniche a compressione esterna
- 2) prese subsoniche a compressione interna

Con riferimento al bordo d'ingresso è da chiarire che la Fig. 17.6 e quella seguente sono da intendersi come "schemi" di prese d'aria subsoniche, in quanto queste ultime non sono mai realizzate con il bordo d'attacco aguzzo, tuttavia potrebbero essere lo schema di un possibile funzionamento di prese d'aria supersoniche che lavorano in condizioni *off-design*.

La Fig. 17.6 illustra schematicamente una presa del primo tipo; per semplicità essa è assunta a sezione circolare. Essa appare come un condotto a sezione costante con un opportuno bordo d'ingresso. Poiché internamente il condotto ha sezione costante, in condizioni di progetto tutta la diffusione del flusso avviene a monte della presa: tutta la trasformazione di energia cinetica in energia interna con aumento di pressione statica avviene esternamente alla presa, senza la presenza di superfici solide. Poiché in condizioni di progetto l'area di cattura A_0 è minore di A_1 , ci sarà spillamento. A causa dell'accelerazione locale che subisce il flusso sul bordo esterno della cappottatura, lo spillamento produce un aumento della resistenza esterna alla presa. È importante che il

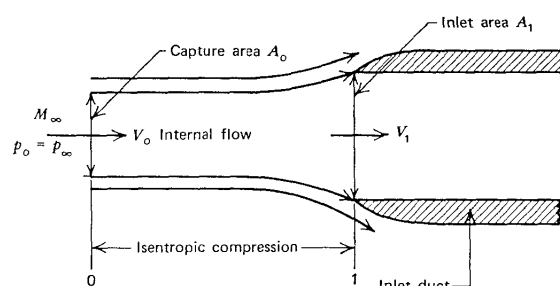


Figura 17.6: Schema di funzionamento di una presa subsonica a compressione esterna, [102]

numero di Mach asintotico M_0 sia, in ogni condizione di funzionamento, opportunamente minore dell'unità in modo da evitare la formazione di onde d'urto sul bordo esterno della cappottatura con conseguente notevole aumento della resistenza esterna. Di conseguenza, tale tipo di diffusore non è utilizzabile per applicazioni che riguardano l'alto subsonico.

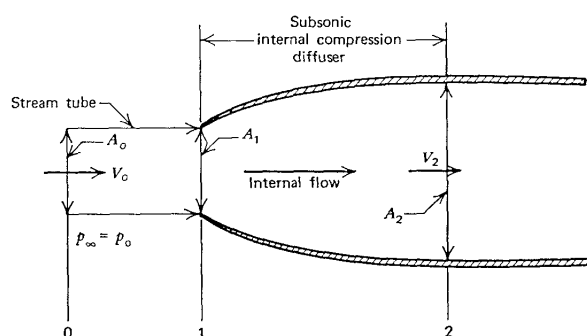


Figura 17.7: Schema di funzionamento di una presa subsonica a compressione interna, [102]

In Fig. 17.7 è mostrato lo schema di una presa d'aria subsonica a compressione interna. La diffusione si compie nel condotto compreso tra la sezione di ingresso della presa ed il compressore.

In un flusso stazionario, unidimensionale ed isentropico la variazione di area dA/A , la variazione di pressione dp/p ed il numero di Mach sono collegati dalla relazione

$$\frac{dA}{A} = \frac{(1 - M^2) dp}{\gamma M^2 p} \quad (17.6)$$

Per comprimere un flusso subsonico, deve essere $A_2/A_1 > 1$: le linee di corrente quindi divergono.

Le prese d'aria a compressione interna sono state ovviamente oggetto di studi approfonditi ma, a causa della mancanza di una adeguata teoria, il loro progetto è ancora ampiamente empirico. Inoltre c'è da dire che, tuttora, non esiste una procedura analitica soddisfacente per il disegno di una presa d'aria subsonica a compressione esterna. Esattamente come per i profili alari, il riferimento base per la progettazione di una presa d'aria è costituito dalle prese NACA, studiate in modo approfondito dal punto di vista teorico, ma le cui prestazioni sono state anche oggetto di ampia verifica sperimentale. Esse dunque, nel loro complesso, costituiscono un utile data-base di partenza per la progettazione di un nuovo diffusore.

Con considerazioni comunque valide nel caso di flussi interni, appare chiaro che per minimizzare l'effetto della viscosità sull'efficienza della presa (evitando separazioni del flusso e formazione di zone a bassa pressione di ristagno) il gradiente di pressione dp/dx deve essere abbastanza piccolo; quindi la variazione di area nella direzione del flusso deve essere graduale. Tuttavia, se il gradiente di pressione è troppo piccolo, la lunghezza del diffusore che occorre per ottenere una determinata riduzione del numero di Mach diventerà troppo grande, e ciò comporta sia una diminuzione di efficienza a causa degli sforzi dissipativi, sia un notevole aumento di peso e di ingombro del diffusore.

Per un diffusore a compressione interna conico il massimo semiangolo del divergente per prevenire fenomeni di separazione è compreso tra 5° e 7° per un flusso essenzialmente incomprimibile, e diminuisce approssimativamente come $(1 - M_0^2)$ per numeri di Mach più elevati. Inoltre, a causa delle restrizioni imposte dallo spazio disponibile e dal peso del diffusore, è raramente possibile adottare piccoli angoli di divergenza. Conseguentemente il disegno di un diffusore a compressione interna è ottenuto mediante un compromesso tra necessità di recupero di pressione e lunghezza disponibile per il diffusore; anzi talvolta sono proprio gli aspetti logistici (spazio disponibile, alloggiamento del motore, ecc.) a guidare il progetto di una presa d'aria. Le soluzioni adottate nella pratica sono tali da non poter assolutamente verificare l'ipotesi (forte) di flusso quasi 1-D; molto spesso il disegno della presa viene eseguito congiuntamente con la scelta del motore da accoppiare.

17.4 Prese d'aria supersoniche: generalità

Il fatto che il numero di Mach di volo sia elevato consente, con un opportuno disegno della presa d'aria, un notevole risparmio sul lavoro richiesto al compressore; per numeri di Mach molto alti è teoricamente possibile l'eliminazione del compressore stesso.

Le prese d'aria supersoniche possono essere bidimensionali (piane o assialsimmetriche) oppure tridimensionali, la geometria inoltre può essere fissa o variabile. I diffusori a geometria fissa si fanno preferire per la semplicità della costruzione e sicurezza del funzionamento; per contro sono caratterizzati da un campo di funzionamento ad alta efficienza piuttosto ristretto e non sempre stabile. A loro volta i diffusori a geometria variabile comportano difficoltà costruttive che, in taluni casi, non giustificano pienamente il miglioramento delle prestazioni.

Il problema di minimizzare la diminuzione di pressione di ristagno durante la compressione è fondamentalmente legato alla presenza degli urti; mediamente si verifica che tale diminuzione, in condizioni di progetto, può essere contenuta al minimo intorno al 20-25%. Occorre inoltre che in condizioni di funzionamento diverse da quelle di progetto la caduta della pressione di ristagno non assuma valori molto più marcati.

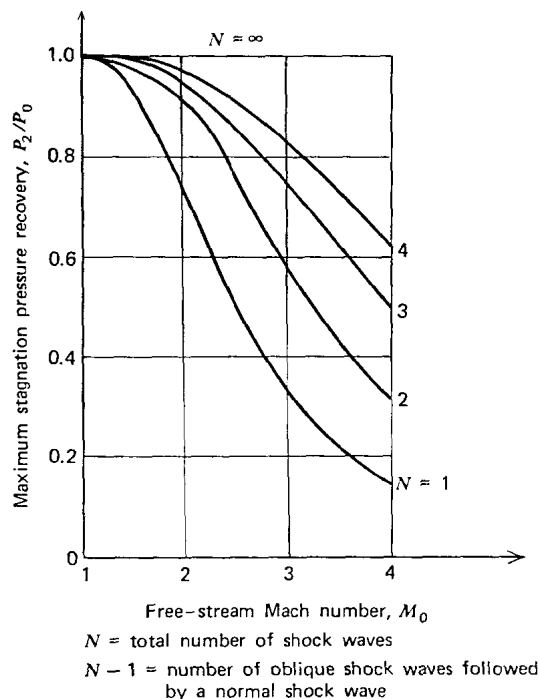


Figura 17.8: Efficienza di una presa supersonica con più urti in funzione di M_0 , [102]

L'efficienza della compressione dipende innanzitutto dal tipo di diffusione che si realizza, caratterizzabile, nel modello adiabatico non viscoso, dal numero di urti; si riporta in Fig. 17.8

l'andamento di η_p in funzione del numero di Mach per vari numeri di urti. In ordinate è riportato il "massimo recupero di pressione di ristagno" in quanto quando il numero di urti è superiore ad uno esistono infinite possibilità di realizzare lo stesso rapporto di compressione, ad ognuna delle quali corrisponde un diverso diffusore, ciascuno caratterizzato da un proprio andamento dell'efficienza in funzione di M_0 ; si pone allora un problema di ottimizzazione, cui si accennerà in seguito.

Come si è già detto, lo strato limite gioca un ruolo fondamentale sia in senso diretto che tramite l'interazione con le onde d'urto; pertanto in generale l'efficienza di una presa d'aria non è calcolabile facilmente e con esattezza con metodi teorici. Solo le perdite per urto "attaccato" sono determinabili con precisione.

17.5 Presa d'aria supersonica a Pitot.

È il tipo più semplice di presa e formato da un condotto divergente all'ingresso del quale, in condizioni di progetto ($M_p > 1$), si attacca un urto normale che produce la prima più significativa diffusione del flusso. Detto M_p^* il numero di Mach a valle dell'urto attaccato alla sezione di ingresso A_1 , esso è anche il numero di Mach di progetto subsonico ovvero quel valore del numero di Mach asintotico che può realizzare un flusso ovunque subsonico senza spillamento. In condizioni di progetto subsonico o supersonico quindi tale presa è essenzialmente una presa a compressione interna mentre per numeri di Mach diversi da quello di progetto si realizzano le successive configurazioni riportate schematicamente nelle figure 17.9 e 17.10, per una assegnata richiesta di aria da parte del motore.

Se si trascurano gli effetti dello strato limite il progetto del Pitot è semplice: fissata la portata d'aria richiesta dal motore ed il numero di Mach di progetto si ricava l'area della sezione d'ingresso e M_p^* . Si può determinare poi facilmente l'area di uscita per un funzionamento isentropico del condotto con $M \cong 0.4$ all'uscita in accordo con la richiesta del motore.

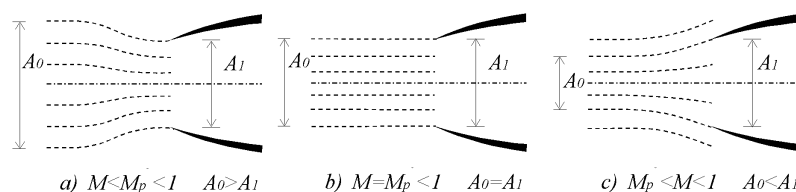


Figura 17.9: Condizioni di funzionamento per $M < 1$

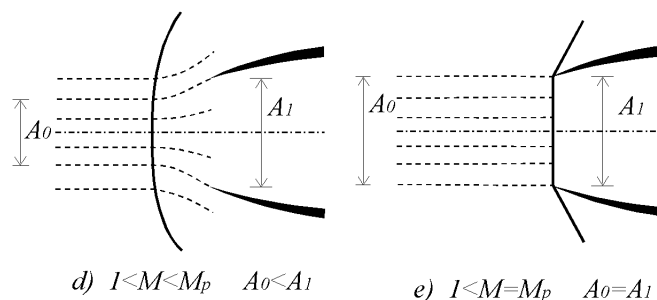


Figura 17.10: Condizioni di funzionamento per $M > 1$

Come è evidente dalla Fig. 17.8, l'efficienza di una presa d'aria a Pitot diminuisce sensibilmente col numero di Mach, ed appare evidente la limitazione del Pitot ad operare ad alti numeri di Mach: in pratica il numero di Mach di progetto non deve superare 1.6.

La regolazione della presa d'aria a Pitot si effettua molto facilmente variando il numero di giri del compressore; ad esempio un aumento del numero di giri comporta l'aumento della pressione a valle della presa, con lo spostamento dell'urto dalla sezione di ingresso e con il conseguente

spillamento. A numeri di Mach diversi da quello di progetto l'efficienza della presa non subisce sostanziali variazioni, mentre sorge, come si è già detto, la resistenza additiva.

Riassumendo, la presa d'aria a Pitot fornisce buone prestazioni nel basso supersonico ($M_p < 1.6$), è di facile costruzione e di facile regolazione.

17.6 Presa d'aria convergente-divergente

IL PROBLEMA DELL'AVVIAMENTO

Con una presa d'aria convergente-divergente, Fig. 17.11, è possibile teoricamente, ad un determinato numero di Mach di volo, comprimere il flusso alle condizioni richieste con funzionamento isentropico. Sfortunatamente è praticamente impossibile ottenere con tale dispositivo una diffusione senza onde d'urto per evitare le instabilità nel funzionamento che saranno descritte nel seguito; inoltre l'effetto dello strato limite è molto più consistente rispetto al caso che il condotto funzioni in espansione, e questo a causa del forte gradiente avverso di pressione. In ogni caso, se anche fosse possibile disegnare un condotto convergente-divergente in modo da ottenere una diffusione isentropica in condizioni di progetto, le sue scarse prestazioni in condizioni operative *off-design* la renderebbero impraticabile.

Per questo tipo di presa il problema principale, decisivo in fase di progetto, è quello di realizzare e mantenere il flusso desiderato, relativo alla condizione di progetto.

La procedura detta di "avviamento" consiste nel portare la presa d'aria alle condizioni di funzionamento di progetto. Il problema deriva dal fatto che nella fase di accelerazione dell'aeromobile, quando il numero di Mach di volo M_0 supera l'unità, si forma un urto staccato, che si avvicina alla presa al crescere di M_0 : ora le condizioni del flusso a valle dell'urto normale sono tali da richiedere una sezione sonica (gola) maggiore di quella relativa al funzionamento (isentropico ovunque) di progetto, quindi maggiore della gola effettiva della presa; la condizione di progetto quindi non si raggiungerà quando M_0 raggiunge il valore di progetto. Occorre appunto la procedura di avviamento che sarà descritta nel seguito.

Riguardo poi al mantenimento della condizione di funzionamento, la (forse) nota instabilità di un urto in un condotto convergente fa comprendere come è necessario evitare condizioni operative che fanno perdere la condizione di progetto.

La sequenza di configurazioni che competono al flusso durante l'avviamento della presa è illustrata schematicamente in Fig. 17.11 per una fissata geometria del diffusore e per "opportune" condizioni a valle le quali, come è noto, sono regolate dal funzionamento del motore: una completa conoscenza del moto quasi 1-D adiabatico ed isentropico permetterà di valutare cosa accade in una qualunque condizione diversa (ad es., motore spento oppure con massima aspirazione).

Per bassi valori di M_0 , l'intero flusso è subsonico, come illustrato in Fig. 17.11.a. L'area di cattura, indicata con A_0 , dipende dal flusso di massa richiesto dal motore e può essere maggiore, uguale o minore dell'area di ingresso A_1 . Incrementando M_0 o il flusso di massa richiesto dal motore, si perviene alle condizioni di Fig. 17.11.b dove $M_0 < 1$ ma il numero di Mach in gola M_t è uguale ad 1. Le linee di corrente davanti alla presa non sono fortemente influenzate dalle condizioni a valle della gola, ma dipendono soltanto da M_0 e dal rapporto A_1/A_t , essendo A_t l'area di gola. Quando $M_0 = 1$ l'area di cattura A_0 eguaglia A_t , come illustrato in Fig. 17.11.c. In tali condizioni, se A_1/A_t è molto grande, potrebbe insorgere una forte resistenza (additiva) a causa dello spillamento di aria sui bordi della presa.

Ulteriori incrementi del numero di Mach di volo ($M_0 > 1$) causano la formazione di un'onda d'urto a monte della presa, come illustrato in Fig. 17.11.d. Sono presenti sia resistenza d'onda che resistenza dovuta allo spillamento. Quando M_0 raggiunge valori sufficientemente alti, in ogni caso (molto) maggiori del numero di Mach di progetto, un'onda d'urto normale è situata all'ingresso della presa, come illustrato in Fig. 17.11.e. Un piccolo incremento di M_0 causa l'ingresso dell'urto normale nella presa: essendo peraltro instabile la posizione dell'urto nel convergente, esso procede attraverso la gola del diffusore e si posiziona nel divergente, come illustrato in Fig. 17.11.f. A questo punto la presa è "avviata" e il flusso in gola è supersonico. Per raggiungere le condizioni di progetto si può operare in due modi: o si aumenta la pressione di uscita del diffusore (come si

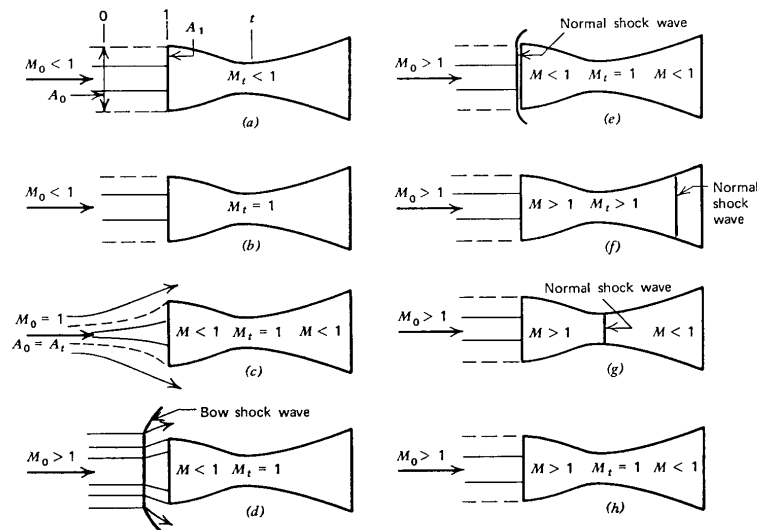


Figura 17.11: Effetto dell'incremento del numero di Mach sulla configurazione del flusso per un diffusore convergente-divergente, [102]

fa per l'avviamento delle gallerie supersoniche) e ciò causa lo spostamento dell'onda d'urto verso la gola, con conseguente diminuzione dell'intensità dell'onda stessa, oppure per guidare l'onda d'urto verso la gola si può diminuire il numero di Mach M_0 causando una diminuzione del numero di Mach in gola; vi sarà quindi un valore di M_0 corrispondente al flusso (isentropico) con gola sonora ($M_t = 1$, funzionamento caratteristico). Se la pressione di uscita è quella giusta tutto il divergente sarà subsonico e l'intero flusso attraverso il diffusore sarà isentropico, come mostrato in Fig. 17.11.h. Il massimo recupero di pressione di ristagno si ottiene quando l'onda d'urto normale è posizionata esattamente nella gola del diffusore, tuttavia tale posizione dell'urto è instabile, per cui il numero di Mach di progetto sarà leggermente superiore al valore di M_0 relativo al funzionamento caratteristico. Il punto di progetto, quindi, sarà scelto in modo che l'urto normale sarà situato leggermente a valle della gola, come mostrato in Fig. 17.11.g. Se la pressione di uscita del diffusore dovesse aumentare sufficientemente, oppure se diminuisse M_0 , l'onda d'urto potrebbe essere espulsa dal diffusore e sarebbe necessario ripetere la procedura di avviamento. È bene notare che, in corrispondenza del numero di Mach di progetto in fase di accelerazione, la presa d'aria funziona con urto normale staccato. La procedura che consente di avviare la presa accelerando fino ad un numero di Mach tale da inghiottire l'urto è nota come *overspeeding*.

È utile precisare che il comportamento del sistema, con opportune condizioni all'uscita della presa, dipende da M_0 e dal rapporto A_t/A_1 : al variare di questi due parametri, e con l'ausilio del modello di moto quasi 1-D non viscoso e adiabatico, è possibile determinare analiticamente nel modo seguente le condizioni per l'avviamento della presa. Per chiarire il funzionamento di questa macchina è opportuno introdurre due diversi comportamenti, di seguito descritti.

Con riferimento alla Fig. 17.11.e si può determinare, per ogni fissato $M_0 > 1$, il valore di A_t/A_1 che realizza, in fase di avviamento, la condizione di urto attaccato al bordo della presa: infatti si può determinare (soluzione dell'urto normale) il valore del numero di Mach immediatamente a valle dell'urto, e conseguentemente il valore di A_t/A_1 necessario per accelerare tale flusso subsonico a $M = 1$ in gola. La Fig. 17.12 presenta proprio il rapporto A_t/A_1 in funzione di M_0 per $\gamma = 1.40$ ed in condizioni di urto attaccato al bordo della presa. I punti nella regione al di sotto di tale curva corrispondono a condizioni di urto staccato, i punti nella regione al di sopra della curva corrispondono a condizioni di urto inghiottito. Dalla figura si vede che, per esempio, per $A_t/A_1 = 0.70$ l'onda d'urto è attaccata al bordo della presa per $M_0 \cong 3.3$. La Fig. 17.13 presenta invece A_t/A_1 in funzione di M_0 per $\gamma = 1.40$ e nel caso di flusso isentropico a monte ed attraverso il diffusore, e con $M_t = 1.0$; le scale sono le stesse della figura precedente. I punti al di sotto di tale curva corrispondono a condizioni nelle quali l'area di gola è troppo piccola per consentire il passaggio di tutto il flusso catturabile a quel particolare numero di Mach: il relativo

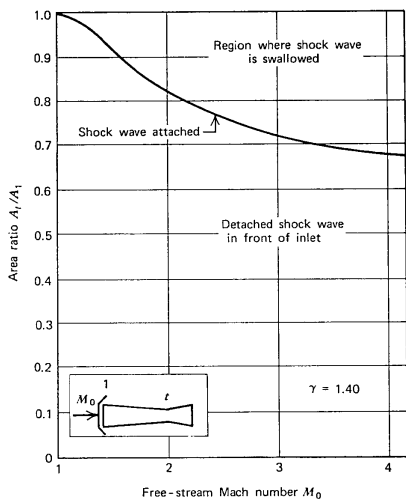


Figura 17.12: Rapporto A_t/A_1 per urto attaccato all'ingresso della presa, [102]

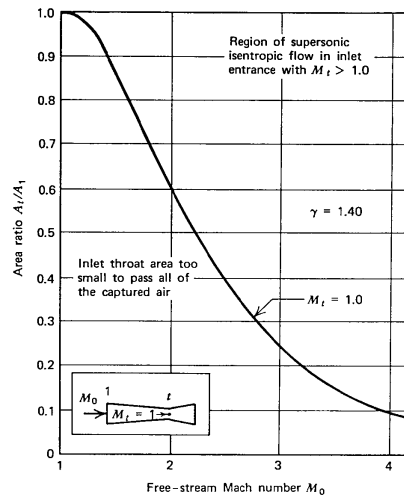


Figura 17.13: Rapporto A_t/A_1 per un flusso isentropico con $M_t = 1.0$, [102]

funzionamento è quindi con urto staccato. Per condizioni relative a punti al di sopra della curva il flusso dovrebbe essere supersonico sia nel convergente che in gola e un urto normale dovrebbe essere presente nel divergente (la posizione dell'urto dipende poi dalla pressione di uscita, che è regolata dal funzionamento del motore): questa situazione però non si realizza finché la presa non è avviata.

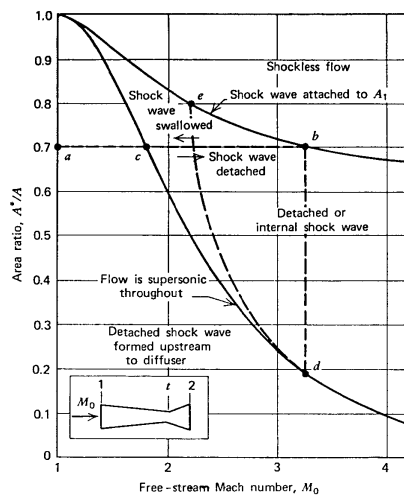


Figura 17.14: Rapporto A^*/A per urto normale staccato, attaccato e inghiottito in funzione di M_0 per diffusore convergente-divergente, [102]

È ora semplice comprendere la procedura di avviamento di una presa d'aria di questo tipo: occorre raggiungere prima condizioni operative corrispondenti a punti sulla (o al di sopra della) curva di Fig. 17.12, per poi portarsi nelle condizioni operative della curva di Fig. 17.13. Entrambe le curve sono presentate insieme in Fig. 17.14, insieme con diverse possibili traiettorie di avviamento (nella Fig. 17.14 è riportato anche il caso di presa d'aria a geometria variabile trattato nel seguito).

Con riferimento alla Fig. 17.14 si consideri una presa con $A_t/A_1 = 0.7$. Durante la fase di avviamento solo la curva superiore è fisicamente significativa. La linea orizzontale ab rappresenta le condizioni operative quando M_0 aumenta; l'urto è staccato. Raggiunto il punto b l'onda d'urto è inghiottita e la curva inferiore diventa fisicamente significativa. Diminuendo M_0 , il punto corri-

spondente si muove da b verso c . Nella regione tra b e c l'onda d'urto è posizionata nel divergente. Raggiunto il punto c l'onda d'urto si trova nella gola dove $M_t = 1$ e conseguentemente ha intensità evanescente. Questo punto corrisponde alla configurazione di Fig. 17.11.h. È da notare che se M_0 diminuisce al di sotto del valore del punto c (o più in generale ci si viene a trovare, con presa avviata, al di sotto della curva inferiore) un'onda d'urto normale si propagherà dalla gola del diffusore attraverso la presa e si posizionerà automaticamente a monte della presa rendendo necessaria la ripetizione della procedura di avviamento. Si ha quindi un effetto di isteresi nel tratto tra b e c , con condizioni di funzionamento diverse in andata ed in ritorno a seconda della "storia": l'onda d'urto non viene inghiottita se non quando il numero di Mach, aumentando, raggiunge il valore corrispondente al punto b , ma non viene espulsa fino a quando il numero di Mach non diminuisce al valore corrispondente al punto c .

Al punto c di Fig. 17.14 è $M_0 = 1.8$. Conseguentemente una presa con $A_t/A_1 = 0.7$, disegnata per $M_0 = 1.8$, dovrebbe essere accelerata fino a $M_0 \cong 3.3$ per poter essere avviata. Per far questo, il sistema propulsivo dovrebbe essere capace di accelerare il velivolo fino a $M_0 \cong 3.3$ con una presa non avviata, situazione questa totalmente non realistica. Questo metodo di avviamento per *overspeeding* è dunque realizzabile praticamente solo per valori di M_p debolmente supersonici.

La curva superiore di Fig. 17.14 ha un asintoto per $A_t/A_1 = 0.6$, e corrispondentemente sulla curva inferiore si ha $M_0 = 2.0$: se il numero di Mach di progetto fosse 2.0 la presa dovrebbe essere accelerata ad un numero di Mach infinitamente elevato per essere avviata. Pertanto per numeri di Mach di progetto superiori a 2.0 tale tipo di presa non potrebbe funzionare neanche teoricamente.

DIFFUSORE CONVERGENTE-DIVERGENTE A GEOMETRIA VARIABILE

Un modo per eliminare il problema che presenta la tecnica di *overspeeding* è quello di adoperare una presa a geometria variabile. Si consideri una presa progettata per operare a $M_0 = 3.3$. Se il rapporto A_t/A_1 è quello del punto b di Fig. 17.14 allora la presa sarà avviata a $M_0 = 3.3$. Se a questo punto si riduce l'area di gola il punto rappresentativo delle condizioni di funzionamento si sposterà verticalmente verso il basso da b verso d . Quando $A_t/A_1 \cong 0.2$ il flusso sarà isentropico. Se però il valore iniziale di A_t/A_1 è più alto di quello corrispondente al punto b , per esempio quello che compete al punto e , allora la presa sarà avviata ad un numero di Mach molto più basso. Se all'aumentare della velocità di volo si riduce simultaneamente l'area di gola, il punto rappresentativo della presa si sposterà lungo la curva ed .

Apparentemente quindi l'avviamento di una presa a geometria variabile è, dal punto di vista aerodinamico, una procedura semplice. Il maggior inconveniente per la realizzazione di una presa convergente-divergente a geometria variabile è la complessità meccanica. In Fig. 17.15 sono illustrati i metodi adottati in pratica.

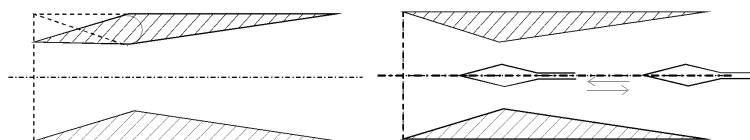


Figura 17.15: Sistemi adottati per la realizzazione del convergente-divergente a geometria variabile

DIFFUSORE CONVERGENTE-DIVERGENTE CON SPILLAMENTO

Per ovviare agli inconvenienti derivanti dall'adozione della variazione meccanica della geometria (riduzione dell'affidabilità, bassa sensibilità del sistema, aumento di peso e di ingombro) si possono utilizzare le prese d'aria con "spillamento" che regolano la portata d'aria passante in gola spillando una parte di quella entrante, con uno dei sistemi riportati schematicamente qui di seguito Fig. 17.16.

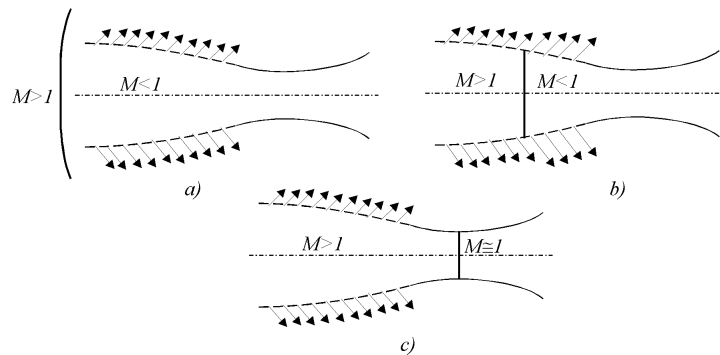


Figura 17.16: Sistemi di spillamento

Nel sistema illustrato ad esempio nella Fig. 17.16.b si ha un notevole guadagno di efficienza in quanto l'urto avviene ad un numero di Mach inferiore a quello che si ha all'ingresso. Analogo discorso vale per la Fig. 17.16.c ove l'urto, a parità di M_0 , è più debole che nel caso di presa impermeabile. Anche lo spillamento presenta degli inconvenienti: il più importante è quello del notevole peggioramento della resistenza aerodinamica esterna dovuto agli urti prodotti dall'aria spillata allorché fuoriesce dalla cappottatura.

17.7 Prese d'aria a compressione mista

K. Oswatitsh osservò che il salto di pressione di ristagno attraverso un'onda d'urto normale può essere ridotto decelerando preventivamente la corrente indisturbata mediante uno o più onde d'urto oblique, seguite da un onda d'urto normale debole. Utilizzando questo principio si ottiene una efficiente compressione esterna dell'aria prima dell'ingresso del flusso nel diffusore subsonico a compressione interna.

La Fig. 17.17 illustra schematicamente le caratteristiche di una presa d'aria assialsimmetrica supersonica con urto conico che utilizza la compressione esterna prima descritta. Un corpo centrale, o spina conica, è posizionato all'interno di un efficiente diffusore a compressione interna. La punta conica della spina fuoriesce dalla sezione della presa in direzione della corrente libera.

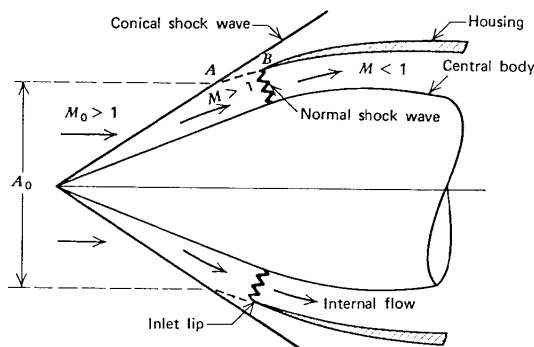


Figura 17.17: Illustrazione schematica di una presa supersonica con urto conico, [102]

Quando un flusso supersonico attacca il cono si forma un'onda d'urto conica. Dopo l'urto conico il flusso così compresso entra nel diffusore a compressione interna attraverso l'apertura anulare che si forma tra la superficie del corpo centrale e il bordo del diffusore subsonico. Teoricamente, un'onda d'urto normale si forma al bordo del diffusore subsonico e il flusso entra nel diffusore con velocità subsonica; avendo il corpo centrale conico deflesso il flusso supersonico, l'onda d'urto normale è perpendicolare alla direzione (media) delle linee di corrente all'ingresso del diffusore subsonico. La

diffusione supersonica che si compie esternamente (prima che l'aria entri nel diffusore subsonico) sia attraverso l'urto che nel campo conico a valle, è abbastanza forte: quindi l'area di passaggio anulare del flusso è più piccola dell'area di cattura A_0 .

La posizione dell'onda d'urto normale rispetto alla presa ha una grande influenza sulle prestazioni della presa. Ci sono tre distinte condizioni operative sotto cui la presa può operare.

Quando l'onda d'urto normale è posizionata al bordo della presa, come illustrato in Fig. 17.18.a la condizione di funzionamento è detta "critica". Quando la pressione di uscita del diffusore subsonico è troppo bassa per mantenere l'onda d'urto al bordo della presa, il flusso all'interno del diffusore è parzialmente supersonico, e l'onda d'urto si posiziona nella parte finale del diffusore, come illustrato in Fig. 17.18.b. Questo tipo di funzionamento è chiamato "supercritico". Se la pressione di uscita del diffusore subsonico supera la pressione statica che può essere consentita dal motore a valle del diffusore, l'onda d'urto normale è espulsa dal diffusore e si muove a monte verso il vertice del corpo centrale conico, come illustrato in Fig. 17.18.c; dietro l'onda d'urto normale il flusso è subsonico e, poiché l'onda d'urto è distaccata dal bordo della presa, c'è uno spillamento che causa incremento della resistenza esterna. Tale condizione di funzionamento è detta "subcritica".

In generale, la posizione dell'urto normale rispetto alla presa e all'entità dello spillamento dipende dal numero di Mach di volo, dal rapporto aria-combustibile, dall'efficienza della combustione e dall'area della sezione di uscita dell'ugello del motore.

La perdita di sfruttabilità dell'energia del flusso, con riferimento ad una presa ad urto conico, può essere suddivisa in due categorie: la prima è collegata alla compressione realizzata mediante onde d'urto, la seconda è causata dagli sforzi tangenziali e da fenomeni di separazione nel diffusore subsonico a compressione interna. È auspicabile che l'onda d'urto normale sia debole, così da ridurre la tendenza del flusso a separare, tendenza già esaltata dal fatto che il flusso è soggetto, all'interno del diffusore, ad un gradiente avverso di pressione.

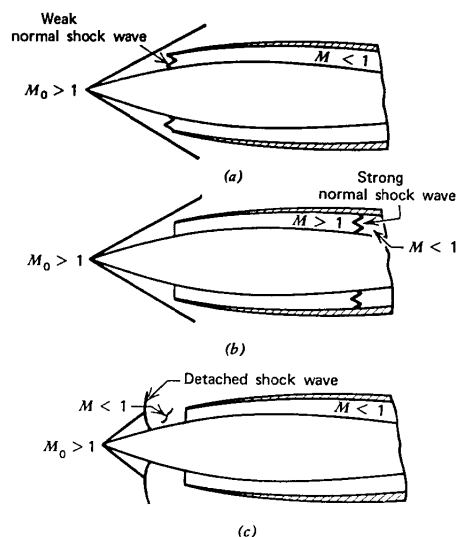


Figura 17.18: Condizioni operative per un diffusore supersonico a compressione esterna, [102]. a) Condizione critica. b) Condizione supercritica. c) Condizione subcritica.

La Fig. 17.19 illustra schematicamente una presa a compressione mista, essendo una porzione del flusso interno alla presa supersonico. A causa di ciò, nella zona anulare tra il corpo centrale e le pareti della presa, si formano una serie di urti obliqui che terminano con un urto normale. L'urto normale si posiziona automaticamente in un punto del divergente e tale posizione dipende dalla pressione di uscita della presa regolata dalla presenza del motore.

Scegliendo il punto di progetto in modo che l'urto normale sia a valle della sezione di area minima, la porzione supersonica del diffusore non è influenzata dalle fluttuazioni di pressione all'uscita della presa, sempre che tali fluttuazioni non siano così ampie da forzare lo spostamento dell'urto nella parte convergente del condotto. Se ciò dovesse accadere, l'onda d'urto verrebbe

espulsa e il diffusore opererebbe in condizioni subcritiche.

Il problema di avviamento discusso per la presa supersonica convergente-divergente deve essere considerato anche per tale tipo di presa; esso comunque è molto meno severo poiché il numero di Mach all'ingresso della presa è più basso di quello della corrente asintotica a causa della formazione dell'urto conico. Inoltre, la spina centrale può essere traslata nella direzione assiale variando simultaneamente sia l'area di ingresso che l'area minima. Poiché è certamente possibile, in funzione della posizione della spina centrale, disporre delle opportune aree di passaggio del fluido, la presa può essere avviata senza difficoltà. In condizioni *off-design*, per esempio quando il numero di Mach è diverso da quello di progetto oppure quando l'angolo d'attacco non è zero, la spina può essere traslata in modo che l'urto conico sia sempre posizionato al bordo della presa. Tuttavia le prese d'aria a spina conica devono assicurare prestazioni soddisfacenti in un certo intervallo di angoli d'attacco: tipicamente, si ha una diminuzione di η_p di circa il 20% per un angolo d'attacco di 5° .

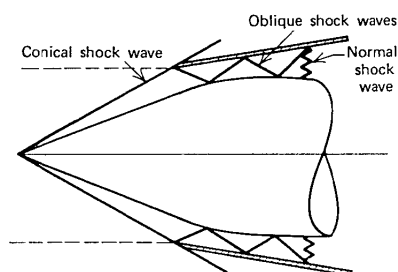


Figura 17.19: Presa d'aria supersonica a compressione mista, [102]

Un altro fattore da considerare è la resistenza esterna della presa, cfr. (17.2). Una presa a spina introduce una componente di resistenza nota come resistenza additiva e dovuta alle forze di pressione agenti sul tubo di flusso AB illustrato in Fig. 17.17; tali forze si traducono in una forza netta che agisce in direzione opposta alla direzione del moto. Posizionando l'onda d'urto conica al bordo della presa, la resistenza additiva viene eliminata. Più grande è la distanza tra l'urto conico e il bordo della presa, più grande è la resistenza additiva.

In generale quanto maggiore è il recupero di pressione di ristagno tanto maggiore è la resistenza esterna, e viceversa: gli alti angoli di incidenza con cui si trovano ad operare le cappottature esterne della presa inducono separazione. Tuttavia, mediante un attento disegno aerodinamico, la resistenza esterna può essere portata a valori tollerabili.

Forti recuperi di pressione di ristagno sono ottenibili se invece di un unico urto obliquo se ne utilizzano diversi in successione. Fig. 17.20. mediante un opportuno disegno della spina centrale.

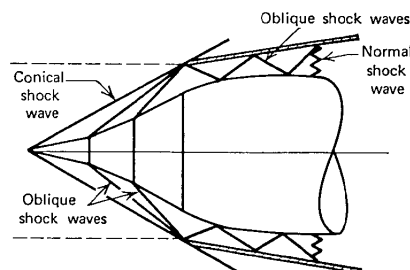


Figura 17.20: Presa d'aria supersonica con più urti obliqui, [102]

Poiché l'efficienza η_p è collegata all'intensità di tutti gli urti che realizzano la compressione, in tal caso essa sarà funzione di tutti i valori M_i e ϵ_i , rispettivamente numero di Mach a monte e angolo d'urto i -esimo. Si può dimostrare che la condizione di ottimo per l'efficienza η_p della presa si ottiene quando $M_i \sin \epsilon_i = \text{cost}$.

Nel caso estremo la configurazione della spina centrale è quella di una superficie curva che realizza un numero infinito di onde d'urto infinitamente deboli, cioè onde di Mach. In teoria, con tale tipo di superficie sarebbe possibile una decelerazione del flusso supersonico alla velocità del

suono senza onde d'urto, cioè una compressione isentropica. Una spina con questa configurazione è chiamata spina isentropica. Sfortunatamente la spina isentropica funziona correttamente solo ad un determinato numero di Mach di volo ed è molto sensibile alle variazioni di angolo d'attacco. Inoltre ad alti valori del numero di Mach di volo il flusso è deviato in maniera sensibile prima di entrare nel diffusore subsonico a compressione interna, e questo fa aumentare la resistenza additiva a valori non accettabili: inoltre potrebbe essere inficiata l'uniformità del flusso nel diffusore subsonico.

Per velivoli con numero di Mach di volo intorno a 2.0 è sufficiente una presa con un unico urto conico; numeri di Mach più elevati richiedono due o più urti obliqui per ottenere un'efficienza accettabile. Incrementando il numero di urti obliqui però la presa è più sensibile a variazioni del numero di Mach e dell'angolo d'attacco. Si può vedere che due urti obliqui sono sufficienti per $M_0 = 3.0$ (Fig. 17.8, che mostra l'efficienza η_p in funzione di M_0 per diversi tipi di prese d'aria).

Infine è utile accennare al fatto che le prese d'aria supersoniche a compressione mista possono essere bidimensionali piane oltre che assialsimmetriche. In questo caso, Fig. 17.21, la compressione esterna è realizzata mediante uno o più urti obliqui, il primo dei quali generato dalla presenza di un cuneo di opportuna apertura. Anche in questo caso la compressione si completa mediante un urto normale seguito da un divergente subsonico. La differenza sostanziale è che nel caso bidimensionale piano all'esterno non vi è la compressione supersonica isentropica tipica invece del campo conico e le linee di corrente sono parallele alla parete del cuneo.

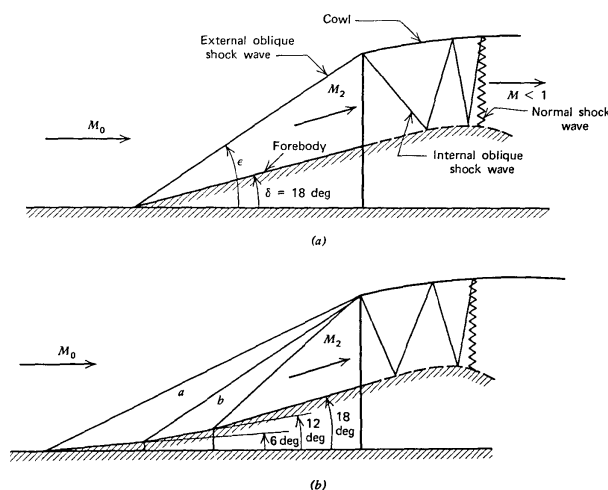


Figura 17.21: Presa d'aria supersonica bidimensionale piana a compressione mista, [102]

17.8 Lo strato limite nelle prese d'aria

Lo strato limite altera notevolmente le condizioni di funzionamento di una presa: l'angolo effettivo del cuneo centrale di una presa a compressione esterna aumenta, e si restringe il condotto diffusore che adduce l'aria al motore. Si può modellare l'effetto viscoso ricorrendo al concetto del corpo equivalente, inspessendo cioè in ogni punto le superfici bagnate di una quantità uguale allo spessore di spostamento δ^* : dell'effetto viscoso si potrebbe, come si può, tenere adeguatamente conto per una ed una sola condizione di funzionamento, ossia per un certo valore del numero di Mach, ad una data quota, per un dato angolo di attacco. Si comprende subito però che al variare di uno di questi od altri parametri varia δ^* , e occorrerebbe una diversa correzione delle superfici.

La Fig. 17.22 dà un'idea di altri effetti dello strato limite, ben più importanti di quelli che provocano una piccola variazione della geometria ed un aumento di resistenza di attrito. Si tratta cioè delle interazioni tra urti e strato limite, cfr. (8.6), nella zona di gola, con conseguente separazione o scollamento della vena in regime subsonico (cfr. Fig. 8.17). E questo certamente l'effetto più vistoso ed importante causato dallo strato limite e nel contempo più difficilmente interpretabile, prevedibile e quindi controllabile. C'è da notare che, pur se con minor intensità, tali effetti possono manifestarsi anche nella zona di compressione esterna alla presa, cioè sul corpo centrale, contri-

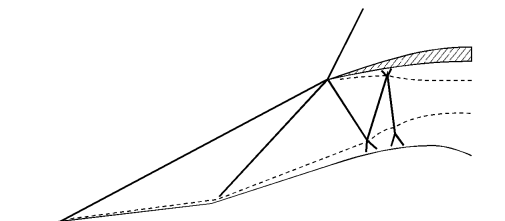


Figura 17.22: Influenza dello strato limite sul campo di moto

buendo tuttavia notevolmente ad alterare tutti i parametri caratteristici del diffusore calcolati per condizioni di funzionamento ideale.

CONTROLLO DELLO STRATO LIMITE

La tecnica comunemente usata per controllare o eliminare, al limite, lo strato dissipativo, è quella di aspirarlo e di “incanalarlo” opportunamente a monte della zona di gola, Fig. 17.23. Dei due sistemi mostrati il secondo è quello che, rispetto ad altri, ha dato i migliori risultati, come è del resto intuibile dato che viene “mangiato” tutto lo strato limite.

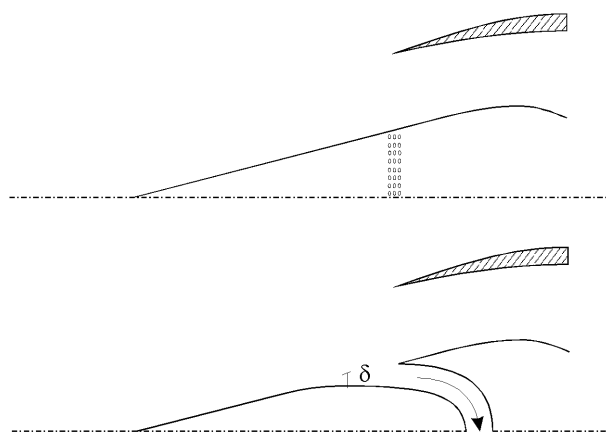


Figura 17.23: Sistemi di controllo dello strato limite

17.9 Accoppiamento tra presa e motore

Generalmente la resistenza aerodinamica dovuta alle prese d'aria assorbe, in condizioni di ottima efficienza, poco meno del 50% della spinta utile fornita dal motore. Ora l'efficienza, ossia il recupero di pressione, dipende moltissimo dall'adattamento della presa al motore, il cui buon funzionamento è anch'esso subordinato all'accoppiamento che si può rendere ottimo, quando la geometria della presa è fissa, solo per un solo valore del numero di Mach di volo e per un solo assetto.

Si definiscono pertanto “condizioni di accoppiamento di progetto” il numero di Mach di volo e la quota per cui la richiesta di portata d'aria del turboreattore è pari alla massima portata che può fluire attraverso la presa senza che si abbia diminuzione del recupero di pressione della presa stessa. In condizioni diverse da queste la richiesta di aria è diversa da quella che attraverserebbe la presa con il miglior recupero di pressione e senza provocare l'insorgere di resistenze addizionali: questo fa sì che la spinta fornita dal propulsore sia inferiore a quella che si otterrebbe se l'accoppiamento fosse ottimo. Non è perciò possibile calcolare le prestazioni di un turboreattore al variare dei parametri esterni (numero di Mach di volo e quota) stabilendo a priori l'efficienza del diffusore.

Pertanto le case costruttrici di turboreattori, per rendere paragonabili le prestazioni di turboreattori diversi, si sono accordate per assumere per la presa dinamica, nella presentazione dei loro motori, un recupero di pressione convenzionale, detto *Industrial Standard*, dato dalla formula

$$\frac{P_2}{P_0} = 1 - 0.1(M_0^2 - 1)^{1.5} \quad (17.7)$$

Le prestazioni così calcolate sono puramente convenzionali.

La portata d'aria \dot{m} per un turboreattore è generalmente data specificando la variazione del rapporto \dot{m}/δ ($\delta = P_2/p_{sl}$ ove *sl* indica la condizione a livello del mare) in funzione della temperatura di ristagno T_{RIS} dell'aria entrante, per un dato regime di giri del compressore. La curva è schematicamente riportata in Fig. 17.24.

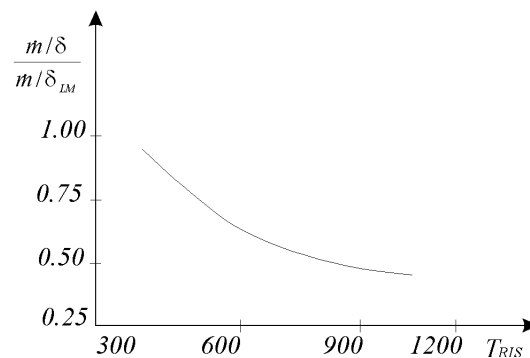


Figura 17.24: Caratteristica di un turboreattore nel piano $(T_{RIS}, \dot{m}/\delta)$

Ora le caratteristiche della presa sono date comunemente in funzione di A_0 , cioè dell'area di cattura: pertanto occorre trasformare la curva di Fig. 17.24 mostrando la dipendenza da A_0 e dal numero di Mach di volo, in modo da poterla raffrontare all'analogica curva riguardante la presa. A tal fine si tratta di porre analiticamente \dot{m}/δ in funzione di M_0 e A_0 , mentre M_0 è legato a T_{RIS} dalla relazione

$$T_{RIS} = T_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2\right) \quad (17.8)$$

ove T_0 dipende dalla quota. Sono riportati di seguito le relazioni e i passaggi a riguardo.

$$\dot{m} = \rho_0 V_0 A_0 = \frac{p_0}{RT_0} M_0 \sqrt{\gamma RT_0} A_0 \quad ; \quad \delta = \frac{P_2}{p_{sl}} = \frac{P_2}{P_0} \frac{P_0}{p_0} \frac{p_0}{p_{sl}} \quad (17.9)$$

$$\begin{aligned} \dot{m}/\delta &= \frac{p_0}{RT_0} M_0 \sqrt{\gamma RT_0} A_0 \frac{P_0}{P_2} \frac{p_0}{P_0} \frac{p_{sl}}{p_0} = p_{sl} \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \frac{M_0 A_0}{\sqrt{T_0}} \frac{1}{\eta_p} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = \\ &= \frac{K_1}{\sqrt{T_0}} M_0 A_0 \frac{1}{\eta_p} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad ; \quad K_1 = p_{sl} \sqrt{\frac{\gamma}{R}} = \text{cost.} \end{aligned} \quad (17.10)$$

L'andamento qualitativo delle curve A_0 in funzione di M_0 è mostrato in Fig. 17.25: esse variano in funzione del numero di giri del compressore. Per il regime supersonico però è sufficiente tracciare dette curve al numero di giri massimo, in quanto per esso l'unica possibilità di variazione di spinta è ottenuta mediante l'aumento o la diminuzione della temperatura del post-bruciatore. Ancora da notare che i calcoli precedenti valgono per "aria tipo", per cui occorre ammettere una certa variabilità della temperatura ambiente se si vuole avere una idea più esatta del comportamento della presa d'aria.

Avendo rappresentato nel modo anzidetto le caratteristiche del motore, è possibile impostare nello stesso piano (A_0, M_0) la caratteristica di funzionamento della presa d'aria. Supponendo di considerare una presa a compressione esterna, tipo diffusore a semplice cono, ed in riferimento alla Fig. 17.26, si vede che nel caso A il motore richiede una portata superiore a quella che gli

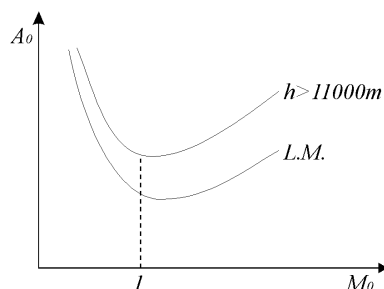


Figura 17.25: Caratteristica del turboreattore nel piano (M_0, A_0)

può essere fornita in condizioni ottime dalla presa, per cui questa funzionerà sempre in condizioni supercritiche con $\eta_p < \eta_{pmax}$. Nel caso B il diffusore fornisce una portata superiore di quella richiesta per cui funzionerà in condizioni subcritiche: lo spillamento d'aria che si viene a generare regolerà automaticamente la portata. In queste condizioni, oltre al fatto che aumenta notevolmente la resistenza aerodinamica nelle sue componenti "additiva" ed "esterna alla cappottatura", può subentrare un importante fenomeno di instabilità.

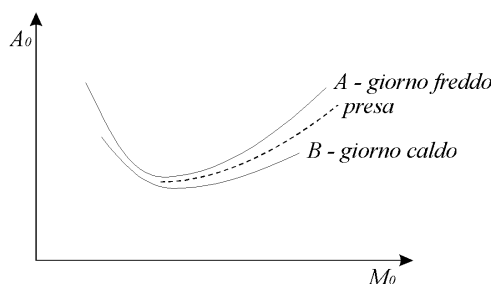


Figura 17.26: Accoppiamento presa-motore

17.10 Instabilità per *buzzing*

Il *buzzing*, studiato sperimentalmente ed interpretato da Ferri e Nucci, è un fenomeno di carattere vibratorio che si presenta all'ingresso di una presa d'aria a compressione esterna funzionante in regime subcritico, Fig. 17.27 (a), tipicamente con $M = 1.6 - 1.9$. Esso è dovuto ad oscillazioni longitudinali del flusso d'aria all'ingresso della presa e si manifesta come raffigurato negli schizzi di Fig. 17.27: (a)-(b)-(c)-(a) è la sequenza di un ciclo completo.

In certe situazioni la condizione di funzionamento (subcritica) di equilibrio (a) diventa instabile, e una qualche fluttuazione del campo di moto causa un improvviso *choking* della presa. L'urto è allora espulso verso la punta del corpo centrale, raggiungendo la posizione limite (b), con conseguente spillamento di portata e aumento di resistenza. La mancanza di alimentazione della presa determina un istantaneamente riattacco dell'urto obliquo, mentre l'urto normale si pone come in (c): il conseguente eccesso di portata fa allora espellere l'urto normale, determinando l'insorgere del *buzzing*.

La variazione periodica della pressione all'interno della presa induce vibrazioni meccaniche, la cui presenza è manifestata dal caratteristico brusio simile a quello prodotto in volo dalle vespe (*to buzz* nella terminologia anglosassone). L'intermittenza del flusso nella camera di combustione causa una combustione poco efficiente e, al limite, può provocare l'estinzione della fiamma. Questo e gli altri inconvenienti, che portano ad una maggiore resistenza, inducono ad eliminare il *buzzing* la cui genesi, secondo Ferri e Nucci, è legata all'entrata nella presa delle superfici vorticosi generate dall'interazione tra due urti o dall'interazione onda d'urto-strato limite, Figg. 17.27 e 17.28.

Una superficie vorticosi si mantiene di intensità abbastanza costante per una parte notevole della lunghezza della presa, in quanto i fenomeni di mescolamento di natura viscosa non hanno

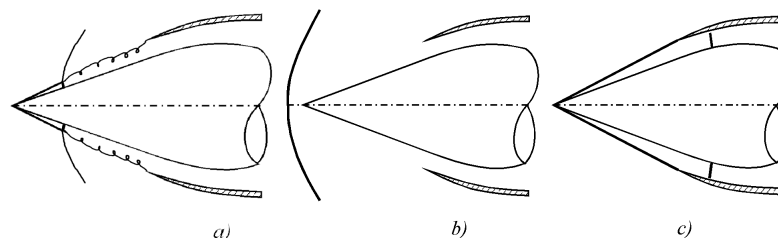


Figura 17.27: Schematizzazione del *buzzing*

il tempo di manifestarsi (data la relativa piccola lunghezza dei condotti della presa): la corrente pertanto rimane disuniforme. La diffusione subsonica di questa corrente, formata da due strati a differente pressione di ristagno e ad uguale pressione statica, non avviene in maniera stabile, poiché la superficie di discontinuità induce separazione con *choking* (strozzamento) della corrente e formazione di inversione del flusso nella parte a più basso valore di pressione di ristagno. È questo ultimo fenomeno la causa di innesco dell'oscillazione della corrente.

Nel caso che la superficie vorticosa nasca dall'interazione tra urto e strato limite è chiaro che, controllando lo strato limite, si elimina questa causa di *buzzing*. Per quanto riguarda l'altra causa, essa può essere resa inefficace facendo in modo che la superficie vorticosa capiti sempre fuori della cappottatura per un'opportuna scelta dell'angolo di apertura del corpo centrale e della posizione della cappottatura, in base a dati sperimentali.

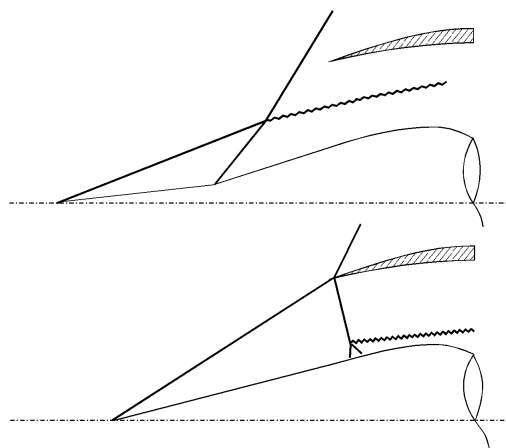


Figura 17.28: Superfici vorticosi che entrano nella presa

17.11 Esercizi

ESERCIZIO 1

Un diffusore subsonico, Fig. 17.7, opera in condizioni isentropiche, in aria, con un'area di ingresso pari a 0.15m^2 . Le condizioni all'ingresso della presa sono:

$$V_1 = 240\text{m/s}, T_1 = 300\text{K}, p_1 = 0.7010^5\text{N/m}^2$$

La velocità all'uscita del diffusore è di 120m/s . Calcolare:

- a) la portata massica

- b) la temperatura di ristagno all'uscita del diffusore
- c) la pressione di ristagno all'uscita del diffusore
- d) la pressione statica all'uscita del diffusore
- e) l'area di uscita del diffusore

Parte VII

APPENDICI

Appendice A

Integrali notevoli

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x-\xi} d\xi = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (\text{A.1})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi}{x-\xi} d\xi = x \ln \frac{1+x}{1-x} - 2 \quad (\text{A.2})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^2}{x-\xi} d\xi = x \left(x \ln \frac{1+x}{1-x} - 2 \right) \quad (\text{A.3})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^3}{x-\xi} d\xi = x^2 \left(x \ln \frac{1+x}{1-x} - 2 \right) - \frac{2}{3} \quad (\text{A.4})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^n}{x-\xi} d\xi = x \int_{-1}^1 \frac{\xi^{n-1}}{x-\xi} d\xi - \frac{1 - (-1)^n}{n} \quad (\text{A.5})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = -\pi \quad (\text{A.7})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^2}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = -\pi x \quad (\text{A.8})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^3}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = -\pi \left(x^2 + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{A.9})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^4}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = -\pi x \left(x^2 + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{A.10})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^5}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = -\pi \left(x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8} \right) \quad (\text{A.11})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^6}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = -\pi x \left(x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8} \right) \quad (\text{A.12})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^n}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = x \int_{-1}^1 \frac{\xi^{n-1}}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi - \frac{\pi}{2} [1 - (-1)^n] \frac{1(3)\cdots(n-2)}{2(4)\cdots(n-1)} \quad (\text{A.13})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{x-\xi} d\xi = \pi x \quad (\text{A.14})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi \sqrt{1-\xi^2}}{x-\xi} d\xi = \pi \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) \quad (\text{A.15})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^2 \sqrt{1-\xi^2}}{x-\xi} d\xi = \pi x \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) \quad (\text{A.16})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^3 \sqrt{1-\xi^2}}{x-\xi} d\xi = \pi \left(x^4 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} \right) \quad (\text{A.17})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+\xi}}{\sqrt{1-\xi}(x-\xi)} d\xi = -\pi \quad (\text{A.18})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\ln \frac{1+x}{1-x}}{x-\xi} d\xi = \frac{1}{2} \left(\ln^2 \frac{1+x}{1-x} - \pi^2 \right) \quad (\text{A.19})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi \ln \frac{1+x}{1-x}}{x-\xi} d\xi = \frac{1}{2} x \left(\ln^2 \frac{1+x}{1-x} - \pi^2 \right) \quad (\text{A.20})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^2 \ln \frac{1+x}{1-x}}{x-\xi} d\xi = \frac{1}{2} x^2 \left(\ln^2 \frac{1+x}{1-x} - \pi^2 \right) - 2 \quad (\text{A.21})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^3 \ln \frac{1+x}{1-x}}{x-\xi} d\xi = \frac{1}{2} x^3 \left(\ln^2 \frac{1+x}{1-x} - \pi^2 \right) - 2x \quad (\text{A.22})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^4 \ln \frac{1+x}{1-x}}{x-\xi} d\xi = \frac{1}{2} x^4 \left(\ln^2 \frac{1+x}{1-x} - \pi^2 \right) - 2x^2 - \frac{4}{3} \quad (\text{A.23})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^n \ln \frac{1+x}{1-x}}{x-\xi} d\xi = \int_{-1}^1 \frac{\xi^{n-1} \ln \frac{1+x}{1-x}}{x-\xi} d\xi - \frac{2}{n} \left[1 - (-1)^{n-1} \right] \sum_{\nu=0}^{n/2-1} \frac{1}{n-1-2\nu} \quad (\text{A.24})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1+\xi}(x-\xi)} d\xi = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1+x}}{\sqrt{2} - \sqrt{1+x}} \quad (\text{A.25})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+\xi}}{x-\xi} d\xi = \sqrt{1+\xi} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1+x}}{\sqrt{2} - \sqrt{1+x}} - 2\sqrt{2} \quad (\text{A.26})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\ln \frac{1+\xi}{1-\xi}}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = -\frac{\pi^2}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{A.27})$$

$$\int_{-1}^1 \xi \frac{\ln \frac{1+\xi}{1-\xi}}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = -\pi^2 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{A.28})$$

$$\int_{-1}^1 \xi^2 \frac{\ln \frac{1+\xi}{1-\xi}}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = -\pi \left(2 + \pi \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) \quad (\text{A.29})$$

$$\int_{-1}^1 \xi^3 \frac{\ln \frac{1+\xi}{1-\xi}}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = -\pi x \left(2 + \pi \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) \quad (\text{A.30})$$

$$\int_{-1}^1 \xi^4 \frac{\ln \frac{1+\xi}{1-\xi}}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = -\pi \left(\frac{5}{3} + 2x^2 + \pi \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) \quad (\text{A.31})$$

Appendice B

Le Identità di Green

Si vogliono introdurre in questo paragrafo alcune proprietà fondamentali delle funzioni, armoniche e non, che ammettono un potenziale. Per questo argomento si potrà fare riferimento a [116].

Tali proprietà possono essere ottenute a partire dal Teorema della Divergenza che, per un vettore \mathbf{V} definito in un dominio \mathcal{V} chiuso, di contorno S , si può scrivere come, Fig. B.1,

$$\iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{V} \, d\mathcal{V} = \iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} \, dS$$

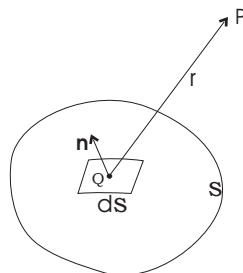


Figura B.1: Calcolo dell'induzione di una singolarità in un punto del campo

LA PRIMA IDENTITÀ

Se si applica il teorema della divergenza alla grandezza $A\nabla\Phi$, essendo A e Φ due funzioni scalari, definite e continue in \mathcal{V} , insieme alle derivate prime per A e alle derivate prime e seconde per Φ , si ha la Prima Identità di Green:

$$\int_{\mathcal{V}} A\nabla^2\Phi \, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \nabla A \cdot \nabla\Phi \, d\mathcal{V} = \int_S A \frac{\partial\Phi}{\partial n} \, dS \quad (\text{B.1})$$

Restrizione della Prima Identità a funzioni armoniche

Se si assume che la funzione Φ , potenziale di un campo vettoriale $\mathbf{V} = \nabla\Phi$, sia armonica, risultano verificate alcune importanti proprietà, di seguito elencate.

- Una condizione necessaria perché un potenziale sia armonico si ottiene assumendo $A = 1$:

$$\int_S \frac{\partial\Phi}{\partial n} \, dS = 0$$

Interpretando Φ come potenziale di velocità, si vede che perché il problema (5.1) sia ben posto è necessario che sia

$$\int_S h(S) \, dS = 0 \quad (\text{B.2})$$

- Assumendo $A = \Phi$ si ha

$$\int_{\mathcal{V}} (\nabla\Phi)^2 d\mathcal{V} = \int_S \Phi \frac{\partial\Phi}{\partial n} dS \quad (\text{B.3})$$

Se $\Phi = 0$ su S il secondo membro di questa relazione si annulla, e quindi $\nabla\Phi = 0$ in \mathcal{V} : il potenziale Φ pertanto è costante in \mathcal{V} , ed in particolare è nullo, essendo nullo su S .

Anche quando $\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$ su S il secondo membro della relazione precedente si annulla: in questo caso Φ è costante, ma non necessariamente nullo, in \mathcal{V} .

- Se si applicano le considerazioni precedenti alla differenza tra due funzioni armoniche Φ_1 e Φ_2 che assumono lo stesso valore su S si ha che una funzione armonica è univocamente determinata dal suo valore su S .

LA SECONDA IDENTITÀ

Si suppone che anche la funzione A sia derivabile due volte in \mathcal{V} ; applicando la Prima Identità alle grandezze $\Phi\nabla A$ e $A\nabla\Phi$ e sottraendo si ha la Seconda Identità di Green:

$$\int_{\mathcal{V}} (\Phi\nabla^2 A - A\nabla^2\Phi) d\mathcal{V} = \int_S \left(\Phi \frac{\partial A}{\partial n} - A \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right) dS \quad (\text{B.4})$$

Se A e Φ sono armoniche si ha

$$\int_S \left(\Phi \frac{\partial A}{\partial n} - A \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (\text{B.5})$$

LA TERZA IDENTITÀ

Sia P un punto arbitrario di \mathcal{V} , e sia r la distanza tra P e un altro punto Q variabile in \mathcal{V} , essendo $\mathbf{r} = (Q - P)$, Fig. B.2. La Terza Identità di Green si ricava assumendo $A = 1/r$ (che è una funzione armonica) e applicando la Seconda Identità al dominio $\mathcal{V}' = \mathcal{V} - \mathcal{V}''$, con frontiera $S' = S \cup S''$, essendo \mathcal{V}'' una (piccola) sfera di centro P e raggio ν , con superficie S'' , ed avente la relativa normale \mathbf{n}'' orientata verso l'interno, Fig. B.2:

$$-\int_{\mathcal{V}'} \frac{1}{r} \nabla^2\Phi d\mathcal{V} = \int_{S'} \left[\Phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right] dS$$

Questa relazione può essere scritta come

$$-\int_{\mathcal{V}'} \frac{1}{r} \nabla^2\Phi d\mathcal{V} = \int_S \left[\Phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right] dS + \int_{S''} \left[\Phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right] dS \quad (\text{B.6})$$

Si tenga presente che quando $Q \in S''$ è $r = \nu$, e quindi

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n''} = -\frac{\partial}{\partial \nu} \quad \left(= \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

mentre inoltre su S'' è $dS = \nu^2 d\Omega$, essendo $d\Omega$ l'angolo solido sotteso dall'elemento di superficie dS ; si ha pertanto

$$\int_{S''} \left[\Phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right] dS = \int_{\Omega''} \left[\Phi \left(\frac{1}{\nu} \right)^2 + \frac{1}{\nu} \frac{\partial\Phi}{\partial \nu} \right] \nu^2 d\Omega = 4\pi\bar{\Phi} + \int_{\Omega} \nu \frac{\partial\Phi}{\partial \nu} d\Omega$$

essendo $\bar{\Phi}$ il valore di Φ in un opportuno punto della superficie della sfera di centro P . Quando si passa al limite per $\nu \rightarrow 0$, $\bar{\Phi} \rightarrow \Phi(P)$, mentre l'ultimo integrale si annulla e l'integrale di volume della (B.6) tende all'integrale su \mathcal{V} : la (B.6) si scrive allora

$$\Phi(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla^2\Phi}{r} d\mathcal{V} + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial\Phi}{\partial n} \frac{1}{r} dS - \frac{1}{4\pi} \int_S \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (\text{B.7})$$

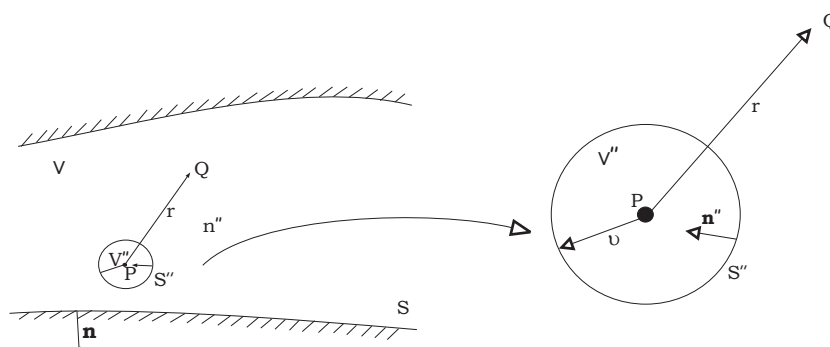


Figura B.2: Schema per la Terza Identità di Green

È questa la Terza Identità di Green, in virtù della quale un potenziale Φ può essere definito, in un qualunque punto P del suo dominio di definizione \mathcal{V} , in funzione del valore che assume sulla frontiera e del suo laplaciano all'interno del dominio (si noti peraltro che è necessario calcolare comunque un integrale di volume).

Se il potenziale Φ è armonico in \mathcal{V} , il suo valore in un qualunque punto di \mathcal{V} può essere espresso in funzione del valore di Φ sulla frontiera S :

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial \Phi}{\partial n} \frac{1}{r} dS - \frac{1}{4\pi} \int_S \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (\text{B.8})$$

Perché un potenziale sia armonico in \mathcal{V} occorre pertanto che sia verificata la (B.8); viceversa, se una funzione potenziale verifica la (B.8), essa è armonica.

Appendice C

Informazioni di aerodinamica teorica

C.1 Alcune soluzioni particolari

Si elencano alcune soluzioni esatte in campo non viscoso che è necessario conoscere.

- Il flusso uniforme ad angolo di attacco α
- In campo incomprimibile
 - Le singolarità semplici (sorgente e vortice) e la doppietta
 - Il cilindro - caso non portante e caso portante
 - Le trasformazioni conformi (Joukowski e Karman-Trefftz)
 - L'ellisse portante
- In campo comprimibile
 - L'espansione di Prandtl e Mayer, l'onda d'urto, l'interazione tra onde d'urto
 - Il flusso supersonico attorno ad un profilo a losanga od a diamante

C.2 Singolarità tridimensionali: sorgente, doppietta

Si vogliono qui richiamare definizioni e proprietà di sorgente e doppietta tridimensionali. Si consideri l'equazione di Laplace per il potenziale di velocità Φ in coordinate sferiche (r, θ, Ψ) :

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \Psi} \right) \right] = 0 \quad (\text{C.1})$$

Una soluzione dell'equazione (C.1) è il potenziale di velocità

$$\Phi = -\frac{c}{r} \quad (\text{C.2})$$

dove c è una costante e r è la distanza dall'origine del sistema di riferimento. Dalla (C.2) è immediato ottenere la velocità del campo di moto indotto

$$\mathbf{V} = \nabla \Phi = \frac{c}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (\text{C.3})$$

ovvero, in termini di componenti

$$V_r = \frac{c}{r^2} \quad V_\theta = 0 \quad V_\Psi = 0$$

Tale campo è caratterizzato da linee di corrente puramente radiali, generate a partire dall'origine del riferimento. Per determinare la costante c occorre valutare la portata volumetrica attraverso una sfera di superficie S , raggio r e avente centro nell'origine. La portata sarà allora

$$\sigma = \int_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{C.4})$$

Poiché sulla superficie della sfera la velocità è costante e pari a $V_r = c/r^2$, si ha

$$\sigma = \frac{c}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi c \quad (\text{C.5})$$

Il potenziale e la velocità indotti possono allora scriversi come

$$\Phi = -\frac{\sigma}{4\pi r} \quad (\text{C.6})$$

$$\mathbf{V} = \nabla\Phi = -\frac{\sigma}{4\pi} \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\sigma \mathbf{e}_r}{4\pi r^2} = \frac{\sigma}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (\text{C.7})$$

La singolarità qui descritta è detta sorgente tridimensionale, o sorgente puntiforme; più precisamente si parla di sorgente per portata positiva (flusso uscente), di pozzo nel caso di portata negativa (flusso entrante).

Nel caso in cui la sorgente sia posta in un punto diverso dall'origine, individuato dal vettore \mathbf{r}_0 , il potenziale e la velocità indotta dalla sorgente saranno

$$\Phi = \frac{-\sigma}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (\text{C.8})$$

$$\mathbf{V} = \frac{\sigma}{4\pi} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (\text{C.9})$$

che, in forma cartesiana, diventano rispettivamente

$$\Phi(x, y, z) = \frac{-\sigma}{4\pi \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \quad (\text{C.10})$$

e

$$u(x, y, z) = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\sigma(x-x_0)}{4\pi [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{C.11})$$

$$v(x, y, z) = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\sigma(y-y_0)}{4\pi [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{C.12})$$

$$w(x, y, z) = \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\sigma(z-z_0)}{4\pi [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{C.13})$$

Un'altra soluzione elementare dell'equazione di Laplace è la doppietta, il cui potenziale è

$$\Phi = \frac{\mu}{4\pi} \mathbf{n} \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right) \quad (\text{C.14})$$

Confrontando questa espressione con quella relativa alla sorgente, si può notare che $\Phi_{doppietta} = -\left(\frac{\partial}{\partial n}\right) \Phi_{sorgente}$, per elementi di intensità unitaria: ciò suggerisce che l'elemento doppietta può essere derivato dall'elemento sorgente. Considerando un pozzo posto nell'origine del riferimento e una sorgente posta in un punto individuato dal vettore \mathbf{l} , il potenziale in un generico punto P , indotto da due elementi, è

$$\Phi = \frac{\sigma}{4\pi} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{l}|} \right)$$

Per $l \rightarrow 0$ e $\sigma \rightarrow \infty$, in modo tale da avere $l\sigma \rightarrow \mu$, con μ finito, si ottiene

$$\Phi = \frac{-\mu \cos \theta}{4\pi r^2}$$

in cui θ è l'angolo tra il vettore unitario \mathbf{e}_1 diretto dal pozzo alla sorgente, ed il vettore \mathbf{r} che individua il punto P . La retta congiungente il pozzo con la sorgente è detta *asse della doppietta*. A questo punto è possibile definire un *vettore intensità di doppietta* $\boldsymbol{\mu} = \mu \mathbf{e}_1$ e scrivere

$$\Phi = \frac{-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3}$$

La velocità indotta dalla doppietta è

$$\mathbf{V} = \nabla \Phi = \frac{\mu \cos \theta}{2\pi r^3} \mathbf{e}_r + \frac{\mu \sin \theta}{4\pi r^3} \mathbf{e}_\theta + 0 \mathbf{e}_\Psi \quad (\text{C.15})$$

e una rappresentazione schematica delle linee di corrente è mostrata in figura C.1: si può notare che il flusso è assialsimmetrico.

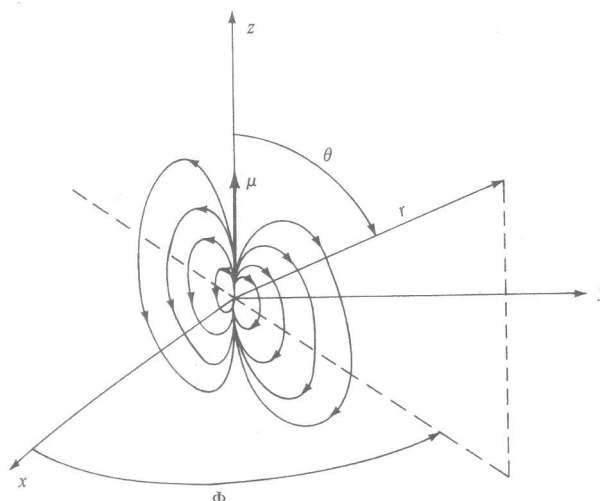


Figura C.1: Linee di corrente nel piano ($z-r$) per una doppietta tridimensionale.

C.3 Singolarità uniformemente distribuite

Nell'Aerodinamica dei moti incomprimibili si definiscono singolarità alcune soluzioni semplici dell'equazione di Laplace nelle due diverse forme (2.27) e C.1; si parla anche di singolarità idrodinamiche. Le proprietà di queste soluzioni (sorgente, vortice e doppietta concentrate in un punto), in campo 2-D e 3-D (definizione, potenziale, funzione di corrente, linee di corrente, proprietà fondamentali) sono da intendersi note per il seguito di questo capitolo.

In ambito 2-D (ma la cosa è estendibile anche al 3-D), se Σ è l'intensità di una singolarità concentrata, si parla di singolarità distribuita $\sigma(s)$ su una linea riferendosi ad una grandezza che abbia le dimensioni di Σ rapportate ad una lunghezza:

$$\sigma = \frac{d\Sigma}{ds} \quad \Leftrightarrow \quad \Sigma = \int_l \sigma ds$$

In caso 3-D, analogamente, una singolarità è da intendersi distribuita su un'area:

$$\sigma = \frac{d\Sigma}{dS} \quad \Leftrightarrow \quad \Sigma = \iint_S \sigma dS$$

IL CASO DI SORGENTE E VORTICE

Si calcolano ora le componenti u, w -nel riferimento locale- della velocità indotta in un punto generico $P(\xi, \eta)$ del piano da una singolarità di tipo sorgente uniformemente distribuita su un segmento di lunghezza l , Fig. C.2. Detta σ l'intensità della distribuzione, le componenti du, dw della velocità indotta dalla singolarità distribuita su un elemento di lunghezza infinitesima dt , sono espresse, partendo dal valore del potenziale infinitesimo

$$d\Phi = \frac{1}{2\pi} \sigma \ln(r) dt$$

(essendo $r^2 = (\xi - t)^2 + \eta^2$), nel modo seguente:

$$du = \frac{\partial(d\Phi)}{\partial\xi} = \frac{\sigma}{2\pi} \frac{\partial}{\partial\xi} [\ln(r)] dt = \frac{\sigma}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial\xi} dt = \frac{\sigma}{2\pi} \frac{\xi - t}{(\xi - t)^2 + \eta^2} dt \quad (C.16)$$

$$dw = \frac{\partial(d\Phi)}{\partial\eta} = \frac{\sigma}{2\pi} \frac{\partial}{\partial\eta} [\ln(r)] dt = \frac{\sigma}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial\eta} dt = \frac{\sigma}{2\pi} \frac{\eta}{(\xi - t)^2 + \eta^2} dt \quad (C.17)$$

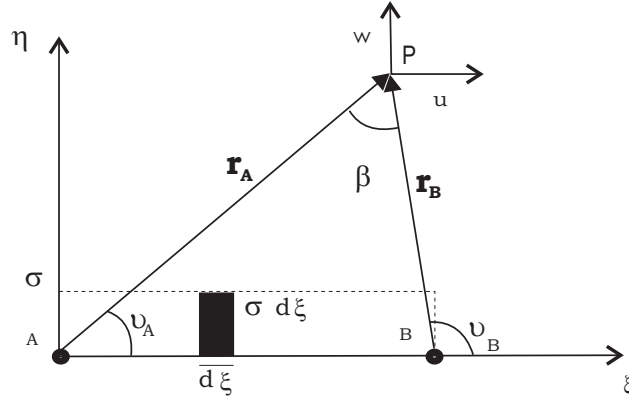


Figura C.2: Calcolo dell'induzione di una singolarità (tipo sorgente) distribuita

Tenendo presente che σ è costante con t , si ha

$$u(P) = \int_0^1 du = \frac{\sigma}{2\pi} \left| -\ln \left[(\xi - t)^2 + \eta^2 \right]^{1/2} \right|_0^1 = -\frac{\sigma}{2\pi} \ln \frac{r_B}{r_A} \quad (C.18)$$

$$w(P) = \int_0^1 dw = \frac{\sigma}{2\pi} \left| \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi - t} \right|_0^1 = \sigma \frac{\nu_B - \nu_A}{2\pi} = \frac{\sigma\beta}{2\pi} \quad (C.19)$$

Analizzando le relazioni precedenti, si osserva quanto segue.

1. Negli estremi A e B del segmento l'induzione è singolare.
2. Nel centro del segmento è $u = 0$, come peraltro ci si deve attendere da considerazioni di simmetria.
3. Per quanto riguarda la componente verticale w si riscontra l'esistenza di una discontinuità di intensità σ attraversando il segmento in un qualunque suo punto esclusi gli estremi: infatti
 - per $\eta \Rightarrow 0^+$ $\beta \Rightarrow +\pi$ ($\nu_a \Rightarrow 0, \nu_b \Rightarrow +\pi$), $w = +\sigma/2$
 - per $\eta \Rightarrow 0^-$ $\beta \Rightarrow -\pi$ ($\nu_a \Rightarrow 0, \nu_b \Rightarrow -\pi$), $w = -\sigma/2$
 e quindi $\Delta w = w^+ - w^- = \sigma$.

È semplice mostrare che nei punti estremi il valore della discontinuità si dimezza. È immediato infine estendere i risultati ottenuti in questo paragrafo ad una distribuzione di vortici, data l'ortogonalità mutua dell'induzione.

IL CASO DELLA DOPPIETTA

Il potenziale di una doppietta concentrata di intensità M e di asse η , Fig. C.3, è (con le notazioni ed i segni che si sono assunti nella costruzione del dipolo la sorgente è posta in basso)

$$\Phi = \frac{M}{2\pi} \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2}$$

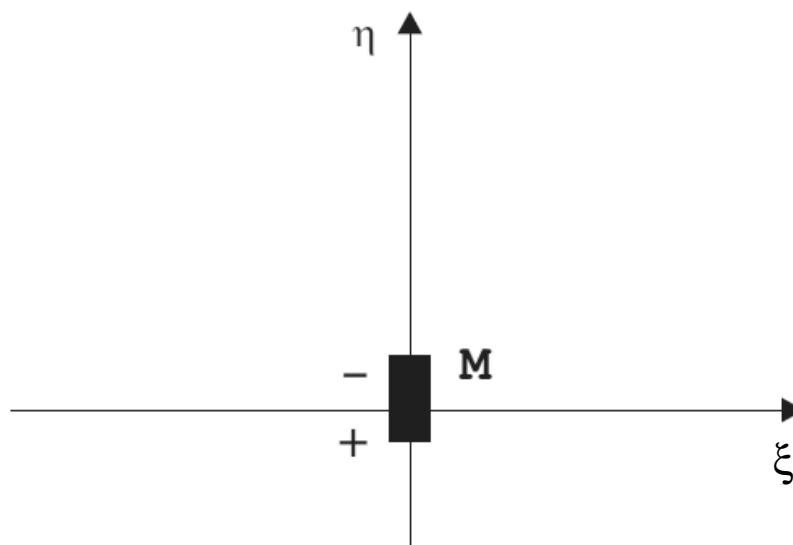


Figura C.3: Calcolo dell'induzione di una singolarità (tipo doppietta) distribuita

Per una doppietta di intensità $\mu(t)$ distribuita su un segmento di lunghezza l il potenziale nel punto $P(\xi, \eta)$ sarà dato quindi dalla relazione

$$\Phi(P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\mu(t)\eta}{(\xi - t)^2 + \eta^2} dt$$

e si nota immediatamente che questa espressione è formalmente identica a quella della componente normale indotta da una distribuzione di sorgenti: pertanto attraverso una distribuzione di doppiette esiste una discontinuità del potenziale $\Delta\Phi$ la cui intensità è proprio il valore locale della distribuzione μ . Questo risultato ($\Delta\Phi = \mu$) è di fondamentale importanza per certi metodi a pannelli basati sulle distribuzioni di doppiette.

Per ricavare le espressioni delle velocità indotte per distribuzioni uniformi di doppiette si può seguire la stessa procedura adottata per la distribuzione di sorgenti nel paragrafo precedente; l'unica differenza è che gli integrali indefiniti da calcolare sono un poco più complicati.

C.4 Equivalenza tra distribuzioni di vortici e distribuzioni di doppiette

È possibile dimostrare l'equivalenza tra i campi di moto indotti da una distribuzione di vortici e da una opportuna distribuzione di doppiette; quest'equivalenza è valida in campo tridimensionale così come in campo bidimensionale, e porta a risultati operativi molto importanti nei metodi di calcolo aerodinamico.

Più precisamente, in campo 2-D una distribuzione di vortici è equivalente ad -genera cioè lo stesso campo di moto di- una distribuzione di doppiette di ordine superiore.

In campo 3-D, facendo riferimento ad una distribuzione superficiale di doppiette di intensità μ , vale quanto segue:

- per μ costante, la distribuzione di doppiette è equivalente ad un anello vorticoso di intensità $\Gamma = \mu$ avente l'asse coincidente col bordo della superficie, Fig. C.4;
- per μ variabile, essa è equivalente alla sovrapposizione di una distribuzione di vortici di intensità $\nabla\mu$ e dell'anello vorticoso del caso precedente, di intensità variabile e coincidente, punto per punto del bordo, con il valore della distribuzione di doppiette.

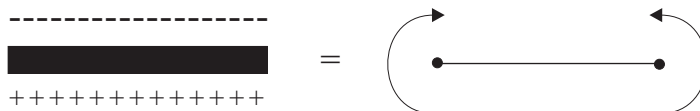


Figura C.4: Equivalenza tra distribuzioni di vortici e di doppiette

C.5 Singolarità linearmente variabili

È possibile decomporre una qualunque distribuzione di singolarità di intensità linearmente variabile nella somma di due distribuzioni, una costante ed una a farfalla (oppure a triangolo), Fig. C.5:

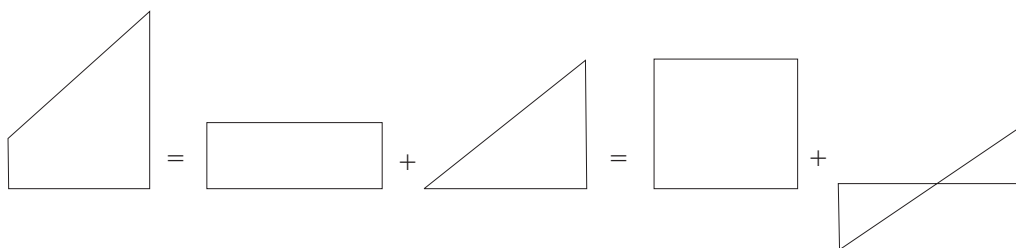


Figura C.5: Composizione di distribuzioni equivalenti ad una distribuzione lineare

Essendo già state trattate distribuzioni uniformi, è sufficiente limitarsi a valutare l'induzione di una distribuzione a farfalla (oppure a triangolo), in modo sostanzialmente analogo.

C.6 Le singolarità supersoniche tridimensionali concentrate

Le singolarità supersoniche sono soluzioni semplici dell'equazione di Prandtl-Glauert 2.26 che qui si riscrive

$$(M_\infty^2 - 1)\Phi_{xx} - \Phi_{yy} - \Phi_{zz} = 0 \quad (\text{C.20})$$

quando $M_\infty > 1$. Per la loro trattazione conviene fare riferimento alle singolarità incompressibili, come sarà evidente tra breve. Ci si limiterà al caso di singolarità concentrate; con considerazioni analoghe a quelle svolte precedentemente si potrà estendere il discorso alle singolarità distribuite.

Si ponga preliminarmente

$$\beta^2 = M_\infty^2 - 1, \quad \begin{cases} \xi = x \\ \eta = i\beta y \\ \zeta = i\beta z \end{cases} \quad \text{essendo} \quad i = \sqrt{-1} \quad (\text{C.21})$$

Nello spazio trasformato (ξ, η, ζ) la (C.20) diventa allora l'equazione di Laplace, cioè l'equazione del potenziale incompressibile:

$$\Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\eta\eta} + \Phi_{\zeta\zeta} = 0 \quad (\text{C.22})$$

Si procede ora trasportando nello spazio fisico le soluzioni elementari (singolarità) della (C.22): si ottengono così le singolarità supersoniche, che godono di certe proprietà simili a quelle delle singolarità subsoniche, ma non sono definite in tutto lo spazio per la presenza del termine immaginario.

Le singolarità ora introdotte sono fondamentali per la soluzione del campo supersonico linearizzato con metodi a pannelli, in analogia con quanto si fa per il campo incomprimibile, o comunque subsonico.

Per semplicità ci si può riferire al caso $\beta^2 = 1$, ossia $M_\infty^2 = 2$, e quindi $M_\infty \approx 1.41$ (il passaggio al campo effettivo può essere fatto con metodi di similitudine, così come si fa per passare dal campo a $M_\infty = 0$ ad un campo comprimibile subsonico). Ci si riferirà al campo 3D.

Con procedure analoghe a quelle dei paragrafi precedenti sarebbe poi possibile poi trattare il caso delle singolarità supersoniche distribuite.

La sorgente supersonica

Il potenziale Φ' indotto nello spazio (ξ, η, ζ) da una sorgente puntiforme di intensità unitaria posta nell'origine è

$$\Phi'_s = -\frac{1}{4\pi h'}, \quad h' = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

Applicando la trasformazione (C.21) si ottiene il potenziale Φ della sorgente supersonica, soluzione elementare della (C.20),

$$\Phi_s = -\frac{1}{4\pi h}, \quad h = \sqrt{x^2 - \beta^2(y^2 + z^2)} \quad (\text{C.23})$$

definito in quel dominio dello spazio fisico per il quale

$$x^2 - \beta^2(y^2 + z^2) = x^2 - (M_\infty^2 - 1)(y^2 + z^2) > 0$$

Il dominio di esistenza di questo potenziale (e degli altri potenziali analoghi) è l'insieme dello spazio unione del cono e dell'anticono di Mach; la superficie del cono e dell'anticono è singolare, per il potenziale e per altre grandezze.

In coordinate cilindriche (x, r, θ) è $h^2 = x^2 - \beta^2 r^2$; il campo è quindi evidentemente assialsimmetrico.

La doppietta supersonica

È noto che, data la linearità della (C.20), anche le derivate della soluzione (C.23) saranno sue soluzioni. Si definiscono allora le seguenti doppiette supersoniche:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_s}{\partial x} &= \frac{1}{4\pi} \frac{x}{h^3} && \text{doppietta di asse } x \\ \frac{\partial \Phi_s}{\partial y} &= \frac{1}{4\pi} \beta^2 \frac{y}{h^3} && \text{doppietta di asse } y \\ \frac{\partial \Phi_s}{\partial z} &= \frac{1}{4\pi} \beta^2 \frac{z}{h^3} && \text{doppietta di asse } z \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

C.7 Il coefficiente di pressione

Si definisce coefficiente di pressione in un punto di un campo di moto la grandezza

$$Cp = (p - p_\infty) / \left(\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \right) \quad (C.25)$$

Nel caso di moto incomprimibile, utilizzando il teorema di Bernoulli si ha

$$Cp = 1 - (V/V_\infty)^2 \quad (C.26)$$

mentre per un flusso comprimibile una possibile espressione è

$$Cp = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left\{ \left[\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right\} \quad (C.27)$$

È evidente che il massimo di Cp si realizza in corrispondenza di un punto di ristagno: in un flusso incomprimibile Cp_{max} vale 1, mentre nel caso comprimibile $Cp_{max} > 1$.

Sembra utile fare presente che non è evidentemente possibile ottenere l'espressione del Cp valida nel caso incomprimibile ponendo $M_\infty = 0$ nella (C.27): occorre procedere allo sviluppo della (C.27) mediante la formula del binomio di Newton e passare al limite.

È possibile mostrare che nell'ambito della teoria delle piccole perturbazioni il coefficiente di pressione assume espressioni più semplici da valutare. Nel caso di un flusso a potenziale è

$$Cp \simeq -2u/V_\infty = -2\phi_x/V_\infty \quad (C.28)$$

essendo u la componente longitudinale della perturbazione della velocità e ϕ il relativo potenziale [$\mathbf{V} = (V_\infty + u)\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$]. La (C.28) ha un campo di applicabilità molto esteso. Essa è valida in caso incomprimibile così come per il flusso comprimibile linearizzato (retto dall'equazione di Prandtl-Glauert), e vale inoltre anche per il campo transonico nell'ipotesi di piccoli disturbi (retto dalla *Small Perturbation Transonic Equation, SPTE*). Per campi supersonici attorno a corpi di rivoluzione affusolati invece l'espressione corretta per il coefficiente di pressione è

$$Cp \simeq -2 \left[\frac{V_x}{V_\infty} + \frac{1}{2} \frac{V_r^2 + V_\omega^2}{V_\infty} \right]$$

C.8 Il calcolo della resistenza su un profilo alare

Tra il 1930 ed il 1940 la NACA misurò la portanza e la resistenza di un grande numero di profili alari in galleria del vento. Il modello dell'ala si estendeva lungo tutta la larghezza della galleria, con le estremità alari che aderivano perfettamente alle pareti, in modo da cercare di ottenere un flusso 2-D sull'ala, e riuscendo così a misurare le caratteristiche aerodinamiche di profilo.

La NACA tuttavia non usò bilance convenzionali per misurare la portanza e la resistenza: la portanza fu ottenuta dalla distribuzione di pressione sulle pareti del tunnel (sopra e sotto l'ala) e la resistenza dalle misure della velocità a valle dell'ala.

Questo modo di fare, che a prima vista può sembrare strano, può essere compreso attraverso un'analisi dell'equazione del bilancio della quantità di moto scritta in forma integrale, ed è una tecnica molto usata in aerodinamica.

Si consideri un corpo bidimensionale, Fig. C.6. Il volume di controllo è descritto dalle linee tratteggiate in figura (la larghezza in direzione z è unitaria), ed in particolare da:

1. le linee di corrente superiore ed inferiore (ab e hi rispettivamente)
2. la linea perpendicolare alla velocità del flusso avanti e dietro, e lontano dal corpo (ai e bh rispettivamente)

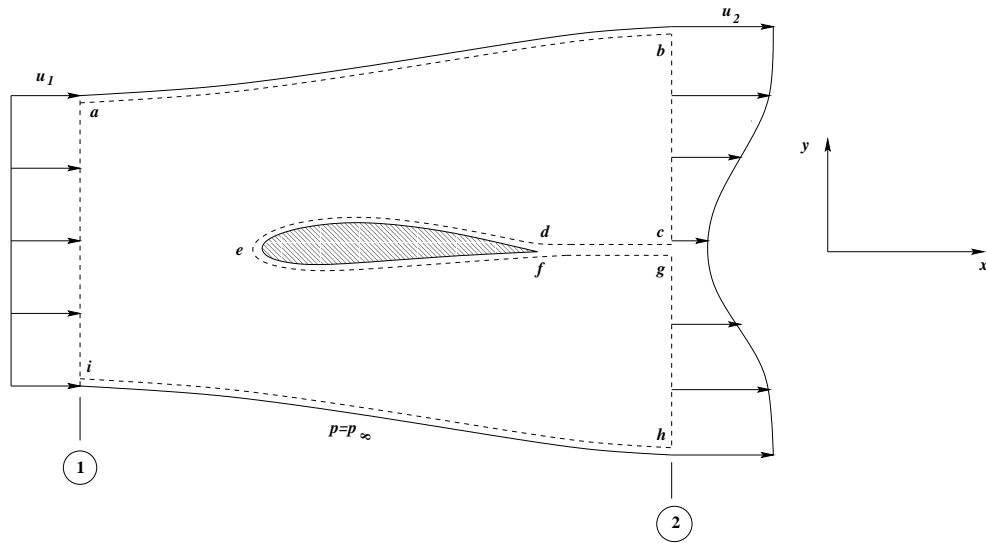


Figura C.6: Volume di controllo per calcolare la resistenza, da [15]

3. un taglio che circonda e avvolge la superficie del corpo

L'intero volume di controllo V è delimitato dalla superficie $S = abhi \cup cd \cup def \cup fg$. Le sezioni 1 e 2 sono le stazioni di ingresso e di uscita, rispettivamente.

Se si assume che il contorno $abhi$ sia abbastanza lontano dal corpo la pressione è ivi ovunque la stessa, ed è uguale alla pressione all'infinito a monte p_∞ . Inoltre la velocità u_1 di ingresso è uniforme lungo ai , mentre quella di uscita, u_2 , non è uniforme lungo bh perché la presenza del corpo ha creato una scia a partire dal bordo di uscita. Comunque, si assume che u_1 e u_2 sono in direzione x , con u_1 costante e $u_2 = f(y)$.

Siano ora $\underline{\tau} = -p\underline{U} + \underline{\tau}_d$ l'espressione del tensore degli sforzi in un fluido e

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \underline{V} dV + \iint_S \rho \underline{V} \underline{V} \cdot \underline{n} dS = \iint_S \underline{\tau} \cdot \underline{n} dS \quad (\text{C.29})$$

la forma integrale del bilancio di quantità di moto, in assenza di forze di massa. Per una generica grandezza A si può porre

$$\iint_S A dS = \iint_{abhi} A dS + \iint_{cd} A dS + \iint_{def} A dS + \iint_{fg} A dS \quad (\text{C.30})$$

Essendo i tagli cd e fg adiacenti, i flussi di massa che li attraversano sono uguali ed opposti e quindi

$$\iint_{cd} A dS + \iint_{fg} A dS = 0$$

Detto poi

$$-\underline{R}' = \iint_{def} \underline{\tau} \cdot \underline{n} dS$$

con $-\underline{R}' \equiv$ azione che il corpo esercita sul fluido, (e $R' \equiv$ azione del fluido sul corpo) ed essendo sulla superficie $abhi$ $\underline{\tau} = -p\underline{U}$, dalla (C.29) segue allora

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \underline{V} dV + \iint_S \rho \underline{V} \underline{V} \cdot \underline{n} dS = \iint_{abhi} -p\underline{U} \cdot \underline{n} dS - \underline{R}' \quad (\text{C.31})$$

e quindi

$$\underline{R}' = - \iint_S \rho \underline{V} \underline{V} \cdot \underline{n} dS - \iint_{abhi} p \underline{n} dS - \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \underline{V} dV \quad (\text{C.32})$$

La proiezione di \underline{R}' sull'asse delle x fornisce la resistenza aerodinamica D'

$$D' = - \iint_S (\rho \underline{V} \cdot \underline{n}) u dS - \iint_{abhi} (p \underline{n})_x dS - \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \underline{V} dV \quad (\text{C.33})$$

essendo $(p \underline{n})_x dS$ la componente lungo x della forza di pressione esercitata sull'area dS . Nel caso presente è $p = p_\infty = \text{cost}$, il flusso è stazionario, e quindi

$$\iint_S (p \underline{n})_x dS = 0, \quad \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \underline{V} dV = 0$$

e pertanto

$$D' = - \iint_S (\rho \underline{V} \cdot \underline{n}) u dS \quad (\text{C.34})$$

Ora le sezioni ab, hi e def sono linee di corrente del flusso: quindi in questo tratto $\underline{V} \cdot \underline{n} = 0$; restano solo i contributi delle sezioni ai e bh , orientate in direzione y e per la quale $dS = dy$ (per unità di apertura). Risulta quindi

$$\iint_S (\rho \underline{V} \cdot \underline{n}) u dS = - \int_i^a \rho_1 u_1^2 dy + \int_h^b \rho_2 u_2^2 dy \quad (\text{C.35})$$

ed i segni sono dovuti ai versi di \underline{V} e \underline{n} , opposti nella stazione di ingresso ai e concordi in quella di uscita bh . Applicando l'equazione della continuità al volume di controllo è

$$\int_i^a \rho_1 u_1 dy = \int_h^b \rho_2 u_2 dy \quad (\text{C.36})$$

Moltiplicando per u_1 la (C.36) si ha

$$\int_i^a \rho_1 u_1^2 dy = \int_h^b \rho_2 u_2 u_1 dy \quad (\text{C.37})$$

e sostituendo la (C.35) nella (C.34) si ottiene

$$\iint_S (\rho \underline{V} \cdot \underline{n}) u dS = - \int_h^b \rho_2 u_2 u_1 dy + \int_h^b \rho_2 u_2^2 dy = - \int_h^b \rho_2 (u_2 - u_1) u_2 dy \quad (\text{C.38})$$

Infine sostituendo la (C.38) nella (C.34) si ha

$$D' = \int_h^b \rho_2 (u_2 - u_1) u_2 dy \quad (\text{C.39})$$

Questa relazione esprime la resistenza di un corpo in termini della velocità asintotica u_1 e delle grandezze di campo ρ_2 e u_2 , in una sezione verticale a valle del corpo: la loro misurazione consente di valutare, attraverso la (C.39), la resistenza aerodinamica D' .

C.9 Esercizi

ESERCIZIO 1. Progettare un sistema per un'efficace descrizione di campi di moto, indicandone specifiche e metodi. Svilupparlo in relazione alle soluzioni 2-D finora conosciute, anche utilizzando pacchetti *software* esistenti, ed applicarlo almeno ai campi indotti da singolarità concentrate e loro combinazioni, oltre che al cilindro in campo portante e non.

ESERCIZIO 2. Nell'ambito dei moti non viscosi determinare in modo esatto l'influenza del numero di Mach di volo sulla polare supersonica di un profilo supersonico.

ESERCIZIO 3. Per distribuzioni uniformi di intensità unitaria su un segmento di lunghezza l di sorgenti, vortici e doppiette valutare l'andamento delle componenti u e w per i punti appartenenti alla retta che contiene il segmento.

ESERCIZIO 4. Determinare le linee di corrente dei campi indotti da una singolarità di tipo sorgente, vortice e doppietta uniformemente distribuita su un segmento.

ESERCIZIO 5. Dimostrare l'equivalenza tra una doppietta uniformemente distribuita su un segmento di lunghezza l e due vortici concentrati, di segno opposto, posizionati agli estremi del segmento, Fig. C.4,

ESERCIZIO 6. Dimostrare l'equivalenza tra la distribuzione di vortici $\gamma(x), x_s \leq x \leq x_f$, e la distribuzione di doppiette (con asse perpendicolare all'asse x)

$$\mu(x) = \int_{x_s}^x \gamma(t) dt \quad (x_s \leq x)$$

prestando attenzione al campo di definizione della distribuzione di doppiette. Mostrare il legame esistente tra il risultato di quest'esercizio e quello dell'esercizio precedente. Illustrare quali possono essere le implicazioni di quest'equivalenza, evidenziando e chiarendo la distinzione tra caso bidimensionale e caso tridimensionale.

ESERCIZIO 7. Calcolare l'induzione di una distribuzione a farfalla su un segmento secondo lo schema precedentemente adottato per la distribuzione uniforme; studiare quindi il relativo campo di moto.

ESERCIZIO 8. Studiare le caratteristiche delle singolarità supersoniche, descrivendone quindi il relativo campo di moto.

ESERCIZIO 9. Applicare i metodi di trasformazione conforme (Joukowski e Karman - Trefftz) per disegnare geometrie di profili alari, analizzandone criticamente le differenze. Studiare quindi il campo di moto attorno ai profili disegnati.

ESERCIZIO 10. Predisporre un quadro sinottico dei tipi di flusso che si possono realizzare, in campo potenziale bidimensionale, attorno ai punti angolosi o a cuspidi presenti su un corpo. Applicare quindi tutte le considerazioni che è stato necessario svolgere al caso del flusso attorno alle diverse forme di bordo di uscita dei corpi aerodinamici e non finora trattati, in campo portante e non portante.

Appendice D

Misurazione della velocità. Il tubo di Pitot

D.1 Il tubo di Pitot

Le espressioni di portanza e resistenza

$$L = C_L \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 S_W \quad D = C_D \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 S_W \quad (\text{D.1})$$

chiaramente mostrano che le forze aerodinamiche agenti su un velivolo sono essenzialmente funzione della geometria e dell'assetto (C_L, C_D), della superficie alare di riferimento S_W e in modo non meno importante dalla pressione dinamica definita, in flusso comprimibile, da

$$q = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \quad (\text{D.2})$$

È quindi evidente come, sia nel progetto che durante il volo stesso, sia importante conoscere il valore esatto della pressione dinamica per determinare in modo univoco le prestazioni dell'aeromobile. L'espressione di q ci indica che essa è funzione dello stato termodinamico dell'atmosfera alla quota di volo (q_∞) per cui la sua determinazione è legata all'utilizzo di un modello dell'atmosfera terrestre. In campo aeronautico il modello universalmente adottato è il cosiddetto ISA (International Standard Atmosphere).

Lo strumento che installato su un velivolo o in una galleria del vento consente la misurazione della pressione dinamica è il tubo di Pitot. Un disegno schematico di questo strumento è riportato in Fig. D.1. Nella figura sono indicate la presa di pressione totale (o di ristagno) 1 e le prese di pressione statica 2. Le sonde statiche e totali sono in comunicazione mediante un tubo contenente un liquido. Ricordando che la pressione si mantiene costante attraverso lo spessore dello strato limite è chiaro che la pressione all'apertura della sonda 1 è pari alla pressione di ristagno mentre le sonde 2 sono a contatto con un fluido a pressione che sebbene differente da quella corrente asintotica, tende a p_∞ all'aumentare della lunghezza del tubo. Le pressioni all'estremità delle sonde si trasmettono inalterate nel fluido in quiete all'interno dei tubi per cui la colonna di liquido è soggetta ad una differenza di pressione $p_1 - p_2$ che in base ai principi fondamentali dell'idrodinamica provoca un dislivello h del liquido:

$$p_1 - p_2 = \rho_l g h \approx p_t - p_\infty, \quad (\text{D.3})$$

dove con ρ_l si è indicata la densità del liquido e con g l'accelerazione gravitazionale.

Nell'ipotesi che il flusso all'esterno del Pitot sia incomprimibile è possibile applicare il teorema di Bernoulli incomprimibile ottenendo

$$p_t - p_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 = q \approx \rho_l g h. \quad (\text{D.4})$$

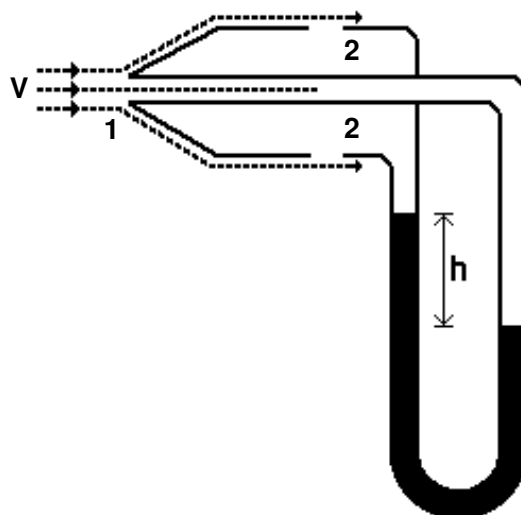


Figura D.1: Il tubo di Pitot.

e mediante un'opportuna calibrazione del Pitot è possibile misurare la pressione dinamica conoscendo il dislivello h del liquido.

È importante notare che il tubo di Pitot misura differenze di pressioni relative a punti del campo di moto sul tubo stesso e che la corretta determinazione della pressione atmosferica è basata sull'ipotesi che le pressioni misurate coincidano con la pressione statica e di ristagno della corrente asintotica. Esistono due tipi di errori che, al contrario, influenzano la misurazione della pressione dinamica: l'errore dello strumento e l'errore di posizionamento dello strumento.

Per errore dello strumento si intendono gli errori di misura di pressione dinamica che vengono rilevati se lo strumento è l'unico corpo presente nel campo di moto (si immagini ad esempio un tubo di Pitot all'interno della camera di prova di una galleria del vento). Come già detto, una causa di errore è per esempio dovuta alla differenza tra pressione statica rilevata ad effettiva pressione statica della corrente asintotica. Questi errori possono essere determinati una volta per tutte durante la taratura e calibrazione da parte dell'azienda costruttrice dello strumento.

Per errore di posizionamento si intendono invece gli errori dovuti all'inevitabile influenza del campo di moto del velivolo sul quale è installato il Pitot. Questi errori possono essere anche elevati; infatti se lo strumento è per esempio installato sull'ala, le prese di pressione statiche e totali si troveranno in un campo di moto fortemente perturbato e le pressioni statiche locali possono essere molto differenti dalla pressione statica asintotica. Un'ulteriore complicazione nell'analisi di questo errore è dovuta al fatto che esso varierà al variare dell'assetto del velivolo in quanto cambia il campo di moto indotto dal velivolo. La determinazione dell'errore di posizionamento è fatta dalla casa costruttrice del velivolo e richiede estensive campagne di simulazioni aerodinamiche al computer, in galleria del vento ed infine con prove di volo (facendo volare il prototipo al fianco di un velivolo con Pitot già calibrato).

Un ultimo significativo aspetto da analizzare è l'effetto del numero di Mach. È chiaro che al suo aumentare l'ipotesi di flusso incomprimibile viene a cadere, il teorema di Bernoulli nella sua forma semplice utilizzata nella (D.4) non è più valido e le relazioni da utilizzare diventano quelle dei flussi isoentropici. La definizione di pressione dinamica data dalla (D.2) non è più valida: in un flusso comprimibile la pressione dinamica è data dalla differenza tra pressione di ristagno e pressione statica; la pressione dinamica della corrente asintotica non coincide più con il termine $\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2$ utilizzato nell'espressioni delle forze aerodinamiche (D.1).

Indicando con M_∞ il numero di Mach della corrente asintotica e con γ il rapporto dei calori

specifici dell'aria, la pressione dinamica in regime comprimibile si ottiene nel seguente modo:

$$\frac{p_t}{p_\infty} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}; \quad (\text{D.5})$$

$$\frac{p_t - p_\infty}{p_\infty} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \Rightarrow p_t - p_\infty = p_\infty \left[\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right] \quad (\text{D.6})$$

IL TUBO DI PITOT IN REGIME SUPERSONICO

La calibrazione del tubo di Pitot in regime supersonico è leggermente più complessa a causa della presenza di onde d'urto nel campo di moto intorno allo strumento. Infatti per $M_\infty > 1$ il flusso è caratterizzato dalla presenza di un'onda d'urto staccata a monte del Pitot. Risulta una buona approssimazione schematizzare la superficie di discontinuità come onda d'urto normale. È chiaro quindi che la presa di pressione totale continua a misurare una pressione di ristagno che però è quella della corrente a valle dell'onda d'urto, minore della pressione di ristagno della corrente asintotica (cfr. Fig. D.2).

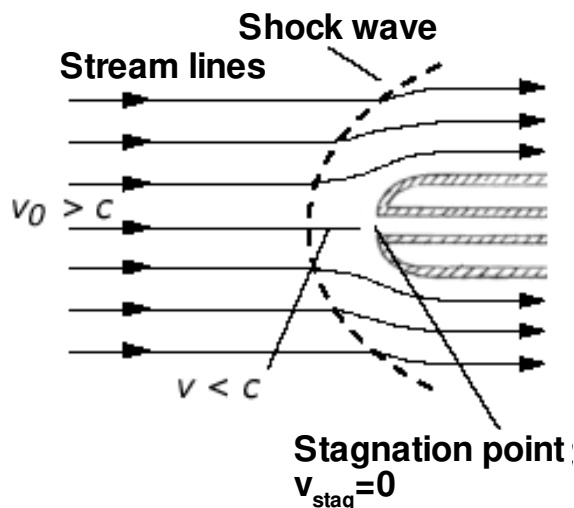


Figura D.2: Il tubo di Pitot in regime supersonico.

La pressione di ristagno della corrente a valle dell'onda d'urto che è la pressione misurata dalla presa totale 1 è legata alla pressione di ristagno della corrente asintotica mediante le relazioni di Rankine-Hugoniot per onde d'urto normali; in particolare si ottiene

$$\frac{p_{t\infty}}{p_{t1}} = \left\{ \left[\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1)M_\infty^2} \right]^\gamma \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_\infty^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \right\}^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (\text{D.7})$$

D.2 Velocità vera, indicata, calibrata ed equivalente

Il tubo di Pitot consente la determinazione della velocità di volo dell'aeromobile su cui è installato. Come descritto nel paragrafo precedente questo strumento misura direttamente la pressione dinamica data dalla differenza di pressione

$$\Delta p = p_t - p_\infty. \quad (\text{D.8})$$

Utilizzando le relazioni del flusso isoentropico ed il modello di atmosfera ISA è possibile quindi risalire al valore della velocità della corrente asintotica ed effettuare la calibrazione dello strumento.

La calibrazione dello strumento per un aeromobile che ovviamente vola ad infinite quote comporta dei problemi pratici in quanto a ciascuna quota la calibrazione dovrebbe essere necessariamente diversa. Quindi per semplificare lo studio delle prestazioni di un aeromobile e per regolamentare nel manuale di volo le azioni del pilota, sono state introdotte le seguenti definizioni di velocità del velivolo:

V_I **velocità indicata** (Indicated Air Speed, IAS). È la velocità indicata dallo strumento, corretta dall'errore dello strumento ed ottenuta supponendo quota di volo al livello del mare.

V_C **velocità calibrata** (Calibrated Air Speed, CAS). È la velocità indicata corretta per l'errore di posizionamento del tubo di Pitot: $V_C = V_I + \Delta V_p$.

V_∞ **velocità vera** (True Air Speed, TAS). È l'effettiva velocità di volo del velivolo.

V_e **velocità equivalente** (Equivalent Air Speed, EAS). È la velocità vera che, supposto il flusso stazionario incomprimibile, il velivolo dovrebbe avere al livello del mare per ottenere la stessa pressione dinamica misurata dallo strumento: $V_e = V_C - \Delta V_c$ (N.B. $V_e < V_C$).

In volo, l'anemometro indica al pilota una velocità ottenuta dalla calibrazione dello strumento al livello del mare, essa è proprio la velocità indicata. La velocità calibrata tiene invece conto dell'errore di posizionamento del Pitot sul velivolo. La relazione esistente tra velocità calibrata e velocità vera può essere ottenuta a partire dalla relazione (D.6) valida per flussi isoentropici. Indicando con P_{sl}, T_{sl} rispettivamente la pressione statica e la temperatura standard al livello del mare e con R la costante del gas aria si ottiene la seguente relazione per la velocità calibrata (ottenuta applicando la (D.6) e supponendo quota zero):

$$\Delta p = P_{sl} \left\{ \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{V_c^2}{\gamma R T_{sl}} \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right\}. \quad (D.9)$$

Uguagliando la (D.9) e la (D.6) si ottiene il numero di Mach vero di volo in funzione della velocità calibrata e del rapporto $\delta = p_\infty/P_{sl}$:

$$M_\infty^2 = \frac{1}{2} \left\{ \left\{ \frac{1}{\delta} \left[\left(1 + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{V_c^2}{\gamma R T_{sl}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] + 1 \right\}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right\}. \quad (D.10)$$

Il pilota non è interessato alla conoscenza della velocità vera di volo (che d'altra parte non coincide nemmeno con la velocità rispetto al suolo) ma piuttosto alla pressione dinamica che determina l'effettiva forza aerodinamica sul velivolo (dimensionale), la velocità calibrata non è altro che un modo semplice di quantificare la pressione dinamica. Importante per il pilota è invece il numero di Mach vero che determina il regime di moto e la tecnica di pilotaggio appropriata (subsonico, supersonico, limite di buffet). Le prestazioni del velivolo sono quindi descritte nel manuale di volo in funzione della velocità calibrata e del numero di Mach vero.

La relazione esistente tra velocità vera e velocità equivalente è molto semplice da determinare. Se si indica con $\sigma = \rho_\infty/\rho_{sl}$ il rapporto tra densità dell'aria in quota ed al livello del mare utilizzando il teorema di Bernoulli incomprimibile si ottiene

$$\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 = \frac{1}{2} \rho_{sl} V_e^2 \Rightarrow V_\infty = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} V_e. \quad (D.11)$$

Date le elevate velocità degli attuali velivoli commerciali e militari, oramai la velocità equivalente viene raramente utilizzata per definire le prestazioni di velivoli da trasporto in quanto il suo significato è legato alla definizione incomprimibile della pressione dinamica. Essa viene utilizzata per i velivoli lenti dell'aviazione generale.

Appendice E

Stima della polare di avanprogetto di un aeromobile

Le caratteristiche aerodinamiche fondamentali di un aeromobile sono definite dalle curve polari, cioè dalla funzione parametrica

$$C_L = C_L(C_D). \quad (\text{E.1})$$

Infatti la loro conoscenza è fondamentale per determinare prestazioni generali del velivolo quali lunghezze di decollo e atterraggio, autonomia, etc. Di polari ne esistono infinite, dipendendo esse da tutti i parametri che individuano sia il regime di moto che la configurazione dell'aeromobile. Tra i parametri fondamentali sono da ricordare i seguenti:

- M_∞ , numero di Mach di volo: dipende oltre che dalla velocità anche dalla quota di volo;
- Re_∞ , numero di Reynolds, definito utilizzando le grandezze asintotiche di volo ed una lunghezza di riferimento del velivolo, ad esempio la corda media aerodinamica;
- AR , allungamento alare: la polare dipende, più in generale da tutta la geometria esterna;
- configurazione, cioè carrello abbassato o retratto, angolo di deflessione dei flaps e del timone verticale;
- numero di propulsori funzionanti e coefficiente di spinta (l'aerodinamica del velivolo è profondamente influenzata dalla scia dei propulsori).

È noto che il coefficiente di resistenza indotto dalla portanza per ali non svergolate è dato dalla relazione

$$C_{D_i} = \frac{C_L^2}{\pi A R e}, \quad (\text{E.2})$$

dove e è il fattore di Oswald. Generalmente e viene definito come un indicatore dello scostamento del carico alare da quello ellittico in quanto $e = 1$ si ottiene la ben nota relazione del coefficiente di resistenza indotta della portanza è in larga misura (75 – 85%) quella calcolabile in un flusso ideale intorno all'ala isolata, occorre considerare l'aumento della resistenza di profilo con l'assetto conseguente all'ispessimento dello strato limite non solo sull'ala, ma anche sugli altri componenti (fusoliera, piani di coda, etc..).

Se alla (E.2) si somma quindi il contributo della resistenza del profilo esistente anche in condizioni di portanza minima o nulla, si ottiene l'espressione parabolica della polare del velivolo

$$C_D = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi A R e}, \quad (\text{E.3})$$

dove con C_{D_0} si è indicato il coefficiente di resistenza a portanza nulla.

Il coefficiente di resistenza è basato sulla superficie alare. Il confronto della (E.3) con i dati sperimentali è buono per valori di C_L non elevati, cioè per assetti lontani dallo stallo.

Le principali approssimazioni insite nella schematizzazione della (E.3) consistono nell'ipotizzare il coefficiente di resistenza minimo ($C_{D_{min}}$) per l'assetto di portanza nulla (cioè $C_{D_{min}} = C_{D_0}$) e nel non tenere conto dell'effettivo comportamento dei coefficienti aerodinamici in prossimità dello stallo. Nella realtà il progettista cerca, come è ovvio, di minimizzare la resistenza nell'intorno del coefficiente di crociera. D'altra parte il comportamento dei coefficienti aerodinamici nell'intorno dello stallo è certamente non parabolico (allo stallo la funzione $C_L(C_D)$ ha addirittura un massimo). Quindi la (E.3) è in grado di descrivere con sufficiente approssimazione il comportamento aerodinamico del velivolo nell'intorno delle condizioni di crociera o al decollo, ma non all'atterraggio in cui il coefficiente di portanza è molto prossimo a quello di stallo oppure, per i caccia militari o i velivolo acrobatici, nelle manovre con elevato fattore di carico.

Soprattutto per i velivoli da trasporto, il fattore di Oswald e ed il $C_{D_{min}}$ sono indicativi del livello tecnologico dell'aeromobile, come è evidente dall'analisi della tabella E.1 in cui i valori migliori sono riportati per i velivoli commerciali a getto o turboelica che richiedono di gran lunga i maggiori costi di ricerca e sviluppo per il loro progetto.

Tipo di velivolo	$C_{D_{min}}$	e
Jet di linea a crociera transonica	0.014 - 0.020	0.75 - 0.85
Plurimotore turboelica di linea	0.018 - 0.024	0.80 - 0.85
Aviazione generale (bimotore)	0.022 - 0.028	0.75 - 0.85
Aviazione generale (monomotore, carrello retrattile)	0.020 - 0.030	0.75 - 0.80
Aviazione generale (monomotore, carrello fisso)	0.025 - 0.040	0.65 - 0.75

Tabella E.1: Valori tipici del coefficiente di resistenza minimo e del fattore di Oswald per alcune classi di velivoli.

Gli effetti delle condizioni di volo o della configurazione sulla polare sono rilevanti. In particolare l'effetto del numero di Mach della corrente asintotica è generalmente trascurabile per bassi valori ($M_\infty < 0.5$) mentre dà luogo a significative variazioni della polare quando condizioni di volo diventano transoniche: infatti, seppure inizialmente solo alle incidenze più alte, si riscontra un aumento del C_D causato dall'aggravio conseguente all'apparizione di una componente di resistenza d'onda. Il numero di Reynolds, mentre non ha impatto fondamentale per assetti di basso C_L (almeno nell'intervallo di valori significativi), caratterizza maggiormente il comportamento alle alte incidenze ed allo stallo (che viene infatti ritardato al crescere del numero di Reynolds). Inoltre non meno trascurabile è l'effetto del propulsore tanto più che in genere per velivoli plurimotori il dimensionamento viene effettuato nelle condizioni critiche di "one engine out" o addirittura "two engine out" per cui le polari in queste condizioni sono tra le più importanti.

La determinazione delle polari di un velivolo completo è tutt'ora complessa e difficile, non può prescindere dalle prove sperimentali, in particolar modo alle alte incidenze, malgrado le difficoltà della galleria del vento di simulare le effettive condizioni di Re_∞ e M_∞ . È evidente però che durante la fase di avanzoprogetto è fondamentale avere uno strumento rapido per la loro stima al fine di dimensionare i parametri fondamentali, aerodinamici e non, del velivolo. Ogni azienda aeronautica ha quindi sviluppato metodi semi-empirici basati sull'analisi statistica dei dati sperimentali (so-

prattutto i propri) che vengono gelosamente conservati e migliorati sulla base di test e prove di volo e che costituiscono in un certo senso la sintesi del loro “know-how” tecnologico in aerodinamica.

In questa sede si presenta un semplice metodo adatto alla stima delle polari di avanprogetto in configurazione di crociera o assetti medio-bassi di un’ampia classe di velivoli nel caso in cui siano noti alcuni dati geometrici e parametri fondamentali. In particolare la stima del coefficiente di resistenza minimo è basata su un lavoro sviluppato e reso pubblico dalla NASA. Lo studente può utilizzare questo metodo per determinare e confrontare le polari di velivoli esistenti o per il progetto di massima del “proprio” aeromobile.

L’ipotesi di base è l’assunzione della validità della relazione (E.3); le due incognite da determinare sono quindi il fattore di Oswald e e il coefficiente di resistenza minimo $C_{D_{min}}$. Il numero di informazioni geometriche necessario è minimo e la maggior parte dei dati è, per i velivoli esistenti, di facile reperibilità, a parte alcuni informazioni di dettaglio dell’ala.

DETERMINAZIONE DEL FATTORE DI OSWALD

Nel passato sono stati sviluppati metodi semi-empirici per il calcolo di e ; oggi, con l’avvento dei personal computer, è possibile ottenere una buona e rapida stima utilizzando metodi “deterministici” se la geometria dell’ala è nota in dettaglio. Infatti, ipotizzando significativi solo gli effetti dovuti allo scostamento dal carico ellittico, si consiglia l’uso di un metodo basato sulla teoria della linea portante di Prandtl, per esempio il metodo di Multhopp che viene dettagliatamente descritto in altra parte del corso.

Se la geometria dell’ala non è nota è possibile utilizzare i dati riportati in tabella E.1 scegliendo i valori negli intervalli riportati sulla base del livello tecnologico del velivolo.

DETERMINAZIONE DEL COEFFICIENTE DI RESISTENZA MINIMO

Nel seguito si farà riferimento al coefficiente di resistenza minimo con il simbolo $C_{D_{min}}$, lo si riterrà inoltre equivalente al coefficiente di resistenza a portanza nulla; come già detto è un’approssimazione, ma di quest’errore si può eventualmente tenere conto traslando opportunamente l’asse della parabola che rappresenta la polare. L’ipotesi fondamentale su cui si basa il metodo NASA consiste nell’assumere

$$C_{D_{min}} = \sum_{k=1}^N C_{D_k} \quad (E.4)$$

dove con C_{D_k} si è indicato il coefficiente di resistenza di profilo del k -esimo elemento tra gli N componenti del velivolo completo (ala, fusoliera, piano di coda orizzontale, gondola motore, etc.): si considera quindi il coefficiente di resistenza minimo come la somma dei coefficienti di resistenza dei singoli componenti. È importante notare che nella (E.4) tutti i coefficienti C_{D_k} sono stati determinati utilizzando la stessa superficie di riferimento, in genere quella alare (S_W).

Un’altra ipotesi consiste nell’assumere che i k -esimi componenti siano corpi affusolati per cui (può esserne una definizione) la resistenza del profilo, che si divide in attrito e forma in campo incomprimibile, è dominata dall’attrito. È così possibile utilizzare come base per il calcolo del C_{D_k} un coefficiente di attrito medio del componente (C_{f_k}) che ha come riferimento la superficie su cui il coefficiente dovrebbe essere integrato per ottenere la resistenza, la così detta area bagnata del componente (S_{wet}), che, come efficacemente descritto dal suo aggettivo è la superficie esterna del componente direttamente a contatto con l’aria. Quindi l’espressione del coefficiente di resistenza del singolo componente è data da

$$C_{D_k} = \left(C_{f_k} \cdot \frac{S_{wet_k}}{S_W} \right) \cdot FF_k \cdot IF_k \quad (E.5)$$

dove con FF_k e IF_k sono stati indicati rispettivamente i così detti fattori di forma e di interferenza del componente che, come vedremo, tengono conto della resistenza di forma e dell’interferenza

aerodinamica con le altre parti del velivolo (nel prosieguo si ometterà per brevità il suffisso k). Un ultimo limite del metodo è di non poter determinare, in maniera semplice in regime transonico, l'aggravio introdotto dalla resistenza d'onda.

CALCOLO DEL COEFFICIENTE D'ATTRITO

L'evidenza sperimentale mostra che il coefficiente di attrito medio tende asintoticamente, all'aumentare della snellezza del corpo, a quello di una lastra piana in equivalenti condizioni di Re_∞ e M_∞ . Quindi per stimare il C_{fk} si può utilizzare una delle tante formule disponibili in letteratura per il calcolo del C_f medio di una lastra piana. Nel caso di flusso totalmente turbolento la NASA suggerisce le seguenti formule:

$$C_f = t \cdot f^2 \frac{0.430}{[\log_{10}(Re_L \cdot t^{1.67} \cdot f)]^{2.56}}$$

$$t = \left(1 + r \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2\right)^{-1}, \quad r = 0.89, \quad \gamma = 1.4; \quad (E.6)$$

$$f = 1 + 0.03916 \cdot M_\infty^2 \cdot t,$$

Nella (E.6) i termini t ed f tengono conto degli effetti della comprimibilità mentre Re_L è il numero di Reynolds per il k -esimo componente che si suggerisce di scegliere come il minimo tra i due valori

$$Re_{L_1} = Re_\infty \cdot \frac{L}{L_\infty} \quad (E.7)$$

$$Re_{L_2} = K_1 \cdot \left(\frac{L}{K}\right)^{1.0489}, \quad K_1 = 37.587 + 4.615 \cdot M_\infty + 2.949 \cdot M_\infty^2 + 4.132 \cdot M_\infty^3$$

dove L è la lunghezza di riferimento del componente, L_∞ è la lunghezza di riferimento utilizzata nella determinazione di Re_∞ , mentre k (anch'essa una lunghezza) è la rugosità ammissibile del componente, tipicamente con valori di $0.000045m$ per un jet commerciale o di $0.0009m$ nell'aviazione generale e militare.

Nel caso di flusso totalmente laminare è possibile utilizzare la relazione di Blasius per il calcolo del coefficiente di attrito medio su una lastra piana in flusso laminare:

$$C_f = \frac{1.328}{\sqrt{Re_L}} (1 + 0.1256 M_\infty^2)^{-0.12}. \quad (E.8)$$

La determinazione esatta dell'area bagnata del componente non è banale data la complessità delle superfici esterne usate in aeronautica. Nel nostro caso, cioè per un metodo rapido di avanprogetto, è possibile utilizzare delle approssimazioni grossolane ma efficaci.

Nel caso dell'ala e di tutte le altre superfici portanti (piani di coda), si consiglia di utilizzare la semplice relazione

$$S_{wet} = 2 \cdot S_{ref} \quad (E.9)$$

dove S_{ref} è la superficie di riferimento del componente; con questa relazione si commette in genere un errore del 2 - 3%.

Per la fusoliera e le gondole motori, cioè per corpi essenzialmente assialsimmetrici si usa invece la relazione

$$S_{wet} = 0.75 \cdot \pi \sqrt{h \cdot d} \cdot L \quad (E.10)$$

con h e d le due dimensioni trasversali del componente.

Se note, si possono sottrarre dalla (E.9) o dalla (E.10) eventuali superfici immerse in altri componenti, per esempio si può eliminare la superficie dell'ala nascosta nella fusoliera.

CALCOLO DEL FATTORE DI FORMA

Il fattore di forma FF tiene conto degli incrementi di resistenza dovuti all'altissima velocità del flusso (cioè dello scostamento del comportamento di lastra piana dal flusso non viscoso) e delle eventuali zone di flusso separato presenti soprattutto nelle parti posteriori dei corpi.

Per la fusoliera si consiglia l'utilizzo della formula

$$FF = 1 + 60 \cdot \frac{1}{FR^3} + 0.0025 \cdot FR, \quad \text{con} \quad FR = \frac{L}{\sqrt{h \cdot d}}; \quad (\text{E.11})$$

dove FR è la snellezza della fusoliera.

Nel caso di gondola motore o installazione sub-alare tipo serbatoio esterno vale la

$$FR = 1 + 0.35 \frac{1}{FR} \quad (\text{E.12})$$

Per l'ala e le altre superfici portanti FF dipende dal tipo di profilo utilizzato e dallo spessore percentuale medio τ . Per profili della sesta serie NACA è

$$FF = 1 + 1.44 \cdot \tau + 2 \cdot \tau^2. \quad (\text{E.13})$$

e per quelli della quarta serie

$$FF = 1 + 1.68 \cdot \tau + 3 \cdot \tau^2. \quad (\text{E.14})$$

Per profili biconvessi vale la

$$FF = 1 + 1.20 \cdot \tau + 100 \cdot \tau^4. \quad (\text{E.15})$$

ed infine per profili supercritici transonici è

$$FF = 1 + K_L c_{ld} + 1.44 \cdot \tau + 2 \cdot \tau^2. \quad (\text{E.16})$$

Il fattore $K_L c_{ld}$ nella (E.16) è una relazione empirica che modifica il fattore di forma dei profili della sesta serie per considerare le maggiori espansioni che si generano intorno a profili supercritici; c_{ld} è la curvatura del profilo (valori tipici sono 0.02, 0.03). Per valori subcritici di M_∞ si ha $K_L = 0.3$, per numeri di Mach supercritici invece $K_L = 0.5$. È evidente la difficoltà di considerare gli effetti della comprimibilità se non si conoscono il modo dettagliato le prestazioni del profilo alare.

CALCOLO DEL FATTORE DI INTERFERENZA

Essendo il campo di moto reale intorno ad un velivolo fortemente non lineare, certamente non è applicabile un principio di sovrapposibilità degli effetti ed in particolare della resistenza come sembrerebbe da un'analisi della (E.4). Il mutuo effetto del campo di moto indotto da un componente sulle resistenze delle altre parti dell'aeromobile viene tenuto in conto dal presente metodo per mezzo del fattore di interferenza IF .

Per la fusoliera IF considera la sola interferenza dell'ala ed è dato da

$$IF = R_{W-B}(Re_L, M_\infty) \quad (\text{E.17})$$

dove R_{W-B} è diagrammato in Fig. E.1 in funzione del numero di Reynolds della fusoliera e parametrato con il numero di Mach asintotico.

Nel caso di altri componenti di tipo assialsimmetrico, se non sono noti valori sperimentali più precisi, si consiglia di usare così come specificato i valori

- $IF = 1.0$ per gondole motore o serbatoi esterni posizionati in zone non influenzate dal campo indotto dall'ala;
- $IF = 1.25$ per serbatoi esterni posizionati alle estremità alari;
- $IF = 1.3$ per gondole motore o serbatoi esterni posizionati in zone moderatamente influenzate dal campo indotto dall'ala;
- $IF = 1.5$ per gondole motore o serbatoi esterni posizionati molto vicini all'ala.

Il fattore di interferenza per l'ala è dato da

$$IF = R_{LS}(\Lambda, M_\infty) \cdot R_{W-B}(Re_L, M_\infty) \quad (E.18)$$

dove R_{W-B} è il parametro già illustrato e diagrammato in Fig. E.1 mentre R_{LS} tiene conto dell'effetto della freccia dell'ala misurata nel punto di massimo spessore percentuale del profilo ed è diagrammato al variare di M_∞ in Fig. E.2 nel caso in cui il profilo alare sia convenzionale. Se vengono utilizzati profili supercritici si usa invece un valore di R_{LS} pari a 1.

Per i piani di coda si consiglia l'uso della relazione

$$IF = R_{LS}(\Lambda, M_\infty) \cdot Hf \quad (E.19)$$

dove Hf è il fattore di cerniera ed è pari a 1.0 per un piano completamente mobile, mentre è 1.1 per un elemento costituito da una parte fissa ed una mobile.

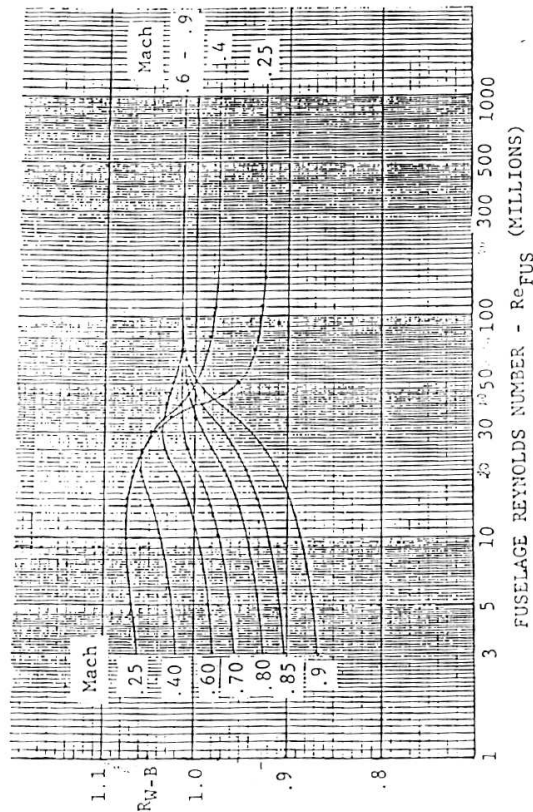


Figura E.1: Fattore di correlazione ala-fusoliera.

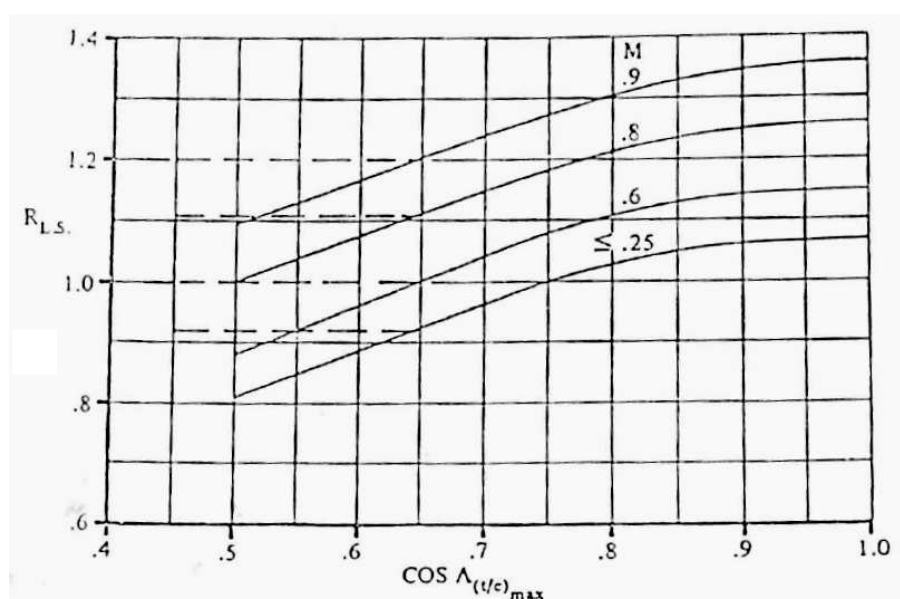


Figura E.2: Fattore di correlazione di superficie portante.

RESISTENZA DI BASE

Per i corpi affusolati, che presentano una coda tronca è necessario considerare una resistenza aggiuntiva, detta resistenza di base, provocata dalla forte e spessa scia che si forma a valle. Ancora una volta un'analisi delle indagini sperimentali ha mostrato un comportamento diverso al variare del numero di Mach di volo.

In condizioni subsoniche la resistenza di base cresce gradualmente fino a $M_\infty = 1$ ed il termine aggiuntivo da aggiungere al C_{Dk} del componente è dato da

$$C_{D_{BASE}} = (0.1 + 1222 \cdot M_\infty^8) \cdot \frac{S_{BASE}}{S_W}, \quad (E.20)$$

dove S_{BASE} è la superficie della base tronca.

In flussi moderatamente supersonici il coefficiente si mantiene praticamente costante fino a $M_\infty = 1.8$, e vale

$$C_{D_{BASE}} = 0.2222 \cdot \frac{S_{BASE}}{S_W}. \quad (E.21)$$

mentre per numeri di Mach superiori diminuisce come

$$C_{D_{BASE}} = \frac{1.42}{(3.15 + M_\infty^2)} \frac{S_{BASE}}{S_W} \quad (E.22)$$

RESISTENZE AGGIUNTIVE

Durante la fase di avvanprogetto occorre inoltre stimare gli incrementi di resistenza causati da irregolarità delle superfici, piccole protuberanze, antenne, tubi di pitot, generatori di vortici, etc.. Questa resistenza aggiuntiva può essere stimata come una frazione percentuale del coefficiente di resistenza minimo stimato con il metodo appena illustrato; essa varia dal 5 al 20% e dipende ovviamente dal tipo di velivolo e dal suo livello tecnologico.

Bibliografia

- [1] LOSITO, V., 1983, *Fondamenti di Aeronautica Generale*, Tipo-Litografia dell'Accademia Aeronautica - Pozzuoli
- [2] XFOIL, 2015, web.mit.edu/drela/Public/web/xfoil/
- [3] FLUENT, 2005, *FLUENT REFERENCE MANUAL*
- [4] MONTI, R., SAVINO, R., 2003, *Aerodinamica, parte prima e seconda*, Liguori editore
- [5] SLOOF, J.W., 1985, *Numerical Methods in Aircraft Aerodynamics*, Vol. II
- [6] MEOLA C., DI BLASI C., 1984, *Metodi alle Differenze in Fluidodinamica*, CUEN, Napoli
- [7] SCHLICHTING H., 1968, *Boundary Layer Theory*, Mc Graw-Hill, New York, 1968
- [8] ANDERSON D.A, TANNEHILL J.C., PLETCHER R.H., 1984, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Hemisphere Publication Corporation
- [9] LIEPMANN H.W., ROSKO A. 1957, *Elements of Gasdynamics*, John Wiley e Sons
- [10] FLETCHER C.A.J., 1987, *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, Springer Verlag
- [11] ABBOT I.H. AND VON DOENHOFF, A.E., 1958, *Theory of Wing Sections*, Dover Publ., Inc., New York
- [12] SELIG, M.S., DONOVAN, J.F. AND FRASER, D.B., 1989, *Airfoils at Low Speeds*, Soartech, H. A. Stokely, Publ.
- [13] WILLIAMS, B.R., 1981, *An Exact Test Case for the Plane Potential Flow About Two Adjacent Lifting Airfoils*, ARC R&M No. 3717, 1981.
- [14] AA.VV., Un qualunque libro di Calcolo Numerico o di Analisi Numerica
- [15] ANDERSON J.D., 1991, *Fundamentals of Aerodynamics*, II Ed., Mcgraw Hill, New York
- [16] DURAND W.F., EDITOR (1963), *Aerodynamic Theory*, Dover Publications New-York
- [17] ROBINSON A., LARMANN J.A, 1956, *Wing Theory*, Cambridge Aero. Series
- [18] SEDOV L.I., 1965, *Two Dimensional Problems in Hydrodynamics and Aerodynamics*, Interscience Publ., John Wiley e Sons
- [19] THEODORSEN T., GARRICK I.E., 1933, *General Potential Theory of Arbitrary Wing Sections*, NACA Rep. n.452
- [20] VAN INGEN J.L., 1970, *Advanced Computer Technology in Aerodynamics: a Program for Aerofoil Section Design Utilizing Computer Graphics*, Agard LS-37-70
- [21] LIGHTHILL M.J., 1951, *A New Approach to Thin Aerofoil Theory*, Aero. Quart.
- [22] VAN DYKE M.D., 1964, *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, Academic Press

- [23] THWAITES B., 1960, *Incompressible Aerodynamics*, Fluid Motion Memoires-Oxford, Claredon Press
- [24] RIEGELS F.W., 1958, *Aerodynamische Profile*, R.Oldenbourg-München.
- [25] GERMAIN P., 1945, *Sur le Calcul Numerique de Certains Operateurs Linéaires*, Comptes Rendes Aca. Sci., Paris, vol. 220
- [26] WATSON E.J., 1945), *Formulae for the Computation of Functions Employed for Calculating the Velocity Distribution about a Given Aerofoil*, A.R.C. R.& M. n. 2176
- [27] WEBER J., 1953, *The Calculation of the Pressure Distribution over the Surface of Two-Dimensional and Swept Wings With Symmetrical Aerofoil Sections*, A.R.C. R.& M. n. 2918
- [28] PRANDTL L., TIETJENS O.G., 1934, *Applied Hydro and Aeromechanics*, Mc Graw-Hill
- [29] JONES R.T., 1950, *Leading Edge Singularities in Thin Aerfoil Theory*, J.Aero. Sci.
- [30] JAMES R.M., 1972, *On the Remarkable Accuracy of the Vortex Lattice Method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering
- [31] DE YOUNG J., 1955, *Theoretical Symmetric Span Loading at Subsonic Speed for Wings Having Arbitrary Planform*, NACA Report n. 921
- [32] WEISSINGER, J., 1945 *The Lift Distribution of Swept-back Wings*, NACA TM 1120
- [33] MUNK, M. M., 1921, *The Minimum Induced Drag of Aerofoils*, NACA Rep.121
- [34] FEDIAEVSKI, C., VOITKOUNSKI, I., FADDEV, Y., 1974, *Mecanique des fluides*, Editions MIR-MOSCOU
- [35] POPE, A., HANEY, W.R., 1949 *Spanwise Lift Distribution for Swept Back Wings*, J. Aero. Sci., Vol. 16, No. 8, Aug. 1949, pp. 505-506.
- [36] KATZ, J. AND PLOTKIN, A., 1991, *Low Speed Aerodynamics: From Wing Theory to Panel Methods*, McGraw-Hill Inc.
- [37] MORAN, J., 1984, *An Introduction to Theoretical and Computational Aerodynamics*, J. Wiley & Sons
- [38] JOHNSON, F.T., 1980, *A General Panel Method for the Analysis and Design of Arbitrary Configurations in Incompressible Flows*, NASA CR 3079
- [39] HESS, J.L, SMITH, A.M.O., 1962, *Calculations of Non-Lifting Potential Flow about Arbitrary Three-Dimensional Bodies*, Report No. E.S. 40622, Douglas Aircraft Co.
- [40] SMITH, A.M.O., PIERCE, J., 1958, *Exact solution of the Neumann Problem. Calculation of Non-Circulatory Plane and Axially Symmetric Flows about or within Arbitrary Boundaries*, Report No. E.S. 26988, Douglas Aircraft Co.
- [41] DVORAK, F. A., WOODWARD, F. A., 1974, *A Viscous/Potential Flow Interaction Method for Multi - Element Infinite Swept Wing*, NASA CR 2476
- [42] MASKEW, B., WOODWARD, F.A., 1976, *Symmetrical Singularity Model for Lifting Potential Flow Analysis*, J. Aircraft, **13**, No. 9
- [43] MORINO, L., 1974, *A General Theory of Unsteady Compressible Potential Aerodinamics*, NASA CR 2464
- [44] BRISTOW, D.R., 1980, *Development of Panel Methods for Subsonic Analysis and Design*, NASA CR 3234

-
- [45] BRISTOW, D.R., GROSE, G.G., 1978, *Modifications of the Douglas-Neumann Program to Improve the Efficiency of Predicting Component Interference and High Lift Characteristics*, NASA CR 3020
- [46] HESS, J.L., 1975, *The Use of Higher-Order Surface Singularity Distributions to Obtain Improved Potential Flow Solutions for Two-Dimensional Lifting Airfoils*, Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng., 5, North Holland Publ. Co., Amsterdam
- [47] SMETANA, F.O. ET AL., 1975, *Light Aircraft Lift, Drag and Moment Prediction - A Review and Analysis*, NASA CR 2523
- [48] VON KARMAN, T., 1941, *Compressible Effects in Aerodynamics*, J.Aero. Sci., Vol. 8, 1941
- [49] TSIEN, H., 1939, *Two-Dimensional Subsonic Flow of Compressible Fluids*, J. Aero. Sci., Vol. 6 n.10, Aug. 1939
- [50] CARLOMAGNO, G.M., 2001, *Fluidodinamica*, Liguori editore
- [51] VINCENTI, W.G., WAGONER, C.B., 1951, *Transonic flow past a wedge profile with detached bow wave. Details of Analysis*, NACA T.N. 2588
- [52] LIEPMANN H.W., BRYSON, 1950, , J. Aero. Sci. vol. 17 n. 12
- [53] LIEPMANN H.W., BRYSON, 1950, NACA T.N. 2560
- [54] LOCK, R.C., 1985, *Prediction of the Drag of Wings at Subsonic Speeds by Viscous/Inviscid Interaction Techniques*, AGARD Report 723
- [55] VON KARMAN, T., MOORE, N., 1932, Trans. American Soc. of Mech. Eng., 19
- [56] MALIK, R., 1989, *Stability Theory for Laminar Flow Design*, Progress in Astronautic and Aeronautics, Vol. 123
- [57] FLORYAN, J., 1991, *On the Görtler Instability of Boundary Layers*, Prog. Aerospace Sci., Vol. 28, pp. 235-271
- [58] POLL, D.I.A., 1978, *Some Aspects of the Flow Near a Swept Attachment Line with Particular Reference to Boundary Layer Transition*, College of Aeronautics Report 7805, Cranfield
- [59] MICHEL, R., ARNAL, D., COUSTEIX, E., JUILLEN, J.C., 1984, *Experimental and Theoretical Studies of Boundary Layer Transition on a Swept Infinite Wing*, IUTAM Symp. on Laminar-Turbulent Transition, Novosibirsk, Ed. V.V. Kozlov, Springer Verlag
- [60] TOBAK, M., PEAKE, D.J., 1979, *Topology of Two-Dimensional and Three-Dimensional Separated Flow*, AIAA P. 79-1480
- [61] LIGHTHILL, M.J., 1963, *Attachment and Separation in Three-Dimensional Flow in Laminar Boundary Layers*, Section III-2, 6, L. Rosenhead, Ed. Clarendon Press-Oxford
- [62] LEGENDRE, R., 1956, *Separation de L' Ecoulement Laminaire Tridimensionnel*, La Recherche Aeronautique, n. 54, pag. 3-8
- [63] MASKELL, E.C., 1955, *Flow Separation in Three-Dimensions*, RAE Aero. Rep. 2565
- [64] WANG, K.C., 1974, *Boundary Layer over a Blunt Body at High Incidence with an Open Type of Separation*, Proc. R. Soc. London, Sez. A, vol. 340, pp. 33-35
- [65] COIRO, D., DE NICOLA, C., 1989, *Low Reynolds Number Flows: the Role of the Transition*, l' Aerotecnica Missili e Spazio, Vol. 68
- [66] HEAD M.R., 1958, *Entrainment in Turbulent Boundary Layer*, A.R.C.R.&M. 3125

-
- [67] GREEN J.E., WEEKS P.J., BROOMAN J.W.F., 1977, *Prediction of Turbulent Boundary Layer and Wakes in Compressible Flow by a Lag Entrainment Method*, A.R.C.&M. 3971
- [68] EAST L.F., SMITH P.D., MERRYMAN P.J., 1977, *Prediction of Turbulent Boundary Layer by the Lag Entrainment Method*, R.A.E. T.R. 77046
- [69] HORTON, H.P., 1967, *A Semi-Empirical Theory for the Growth and Bursting of Laminar Separation Bubbles*, A.R.C. C.P. 1073
- [70] AA.VV., 1972, *Fluid Dynamics of Aircraft Stalling*, AGARD CP 102
- [71] MAYER, J.P., 1948, *A Limit Pressure Coefficient and an Estimation of Limit Force on Airfoils at Supersonic Speed*, NACA RM L8F23
- [72] SMITH, A.M.O., 1974, *Remarks on Fluid Mechanics of the Stall*, AGARD LS 74
- [73] POLHAMUS, E.C., 1966, *A Concept of the Vortex Lift of Sharp-Edge Delta Wings Based on a Leading-Edge-Suction Analogy*, NASA TN D-3767, 1966
- [74] DE NICOLA C., GRAZIOSI L., DONELLI R.S., 2009, *Prediction of Transition on Wings in a RANS Approach*, AIMETA 2009 Associazione Italiana di Meccanica Teorica e Applicata Atti del XIX Congresso Ancona, 14-17 settembre 2009
- [75] PAPANONE L., TOGNACCINI R., 2003, *Computational Fluid Dynamics-based drag prediction and decomposition*, DOI:10.2514/2.7300. pp.1647-1657. In AIAA J., ISSN:0001-1452 vol. 41
- [76] MELE B., TOGNACCINI R., 2014, *Aerodynamic force by Lamb vector integrals in compressible flow*, DOI:10.1063/1.4875015. In Phisycs of Fluids - ISSN:1070-6631
- [77] ESDU (ENGINEERING SCIENCES DATA UNIT), 1990:
84026 - *Aerofoil Maximum Lift Coefficient for Mach Number up to .4*
85033 - *Increment in Aerofoil Maximum Lift Coefficient Due to the Deployment of Various High-Lift Devices*
89034 - *The Maximum Lift Coefficient of Plain Wings at Subsonic Speed*
- [78] D. COIRO, C. DE NICOLA, V. LOSITO, 1988, *An Efficient Multi - Methods Computer Code for the Prediction of the Inviscid and Viscous Flow over Multi - Component Airfoil*, AIAA P. 88-3562
- [79] CEBECI T., 1992, *Calculation of Multielement Airfoils and Wing at High-Lift*, AGARD CP 515, Oct. 1992
- [80] CEBECI T., JAU J., D. VITIELLO D., 1992, *An Interactive Boundary-Layer Approach to Multielement Airfoils at High-Lift*, AIAA P. 92-0404, 1992
- [81] JACOB K., STEINBACH D., 1974, *A Method for Prediction of Lift for Multi-Element Airfoil Systems with Separation*, AGARD CP 143
- [82] VALAREZO W.O., CHIN V.D., 1994, *Method for the Prediction of Wing Maximum Lift*, J. Aircraft, Vol. 31, No 1
- [83] ZUMWALT G.W., NAIK S.N., 1977, *An Analytical Method for Highly Separated Flow Past Multi-Element Airfoils at Low Speed*, NASA CR 145249
- [84] ZUMWALT G.W., ELANGOVAN R., 1982, *Computation of Low Speed Flow Past Multi-Element Airfoils with Large Flow Separation*, ICAS 82-622
- [85] GROSS L.W., 1978, *The Prediction of Two-Dimensional Airfoil Stall Progression*, AIAA P. 78-155 (McDonnell Co.)

-
- [86] HENDERSON M.L., 1978, *A Solution to the 2-D Separated Wake Modeling Problem and Its Use to Predict Clmax of Arbitrary Airfoil Sections*, AIAA P. 78-156 (The Boeing Co.)
- [87] BRISTOW D.R., 1976, *A New Singularity Method for Multi-Element Airfoil Analysis and Design*, AIAA P. 76-20
- [88] MASKEW B., DVORAK F.A., 1978, *The Prediction of Clmax Using a Separated Flow Model*, J. American Helicopter, April, pp. 1-8
- [89] AMENDOLA A., DE NICOLA C., LOSITO V., VITIELLO D., 1984, *Un Metodo di Tipo Misto per Flussi Separati*, VII Congresso Naz. AIMETA, Trieste, Sez. IV, pagg. 25-37
- [90] HORTON H.P., 1969, *A Semi Empirical Theory for the Growth and Bursting of Laminar Separation Bubbles*, British ARC CP1073
- [91] FLOWER, 2008, *DLR FLOWER CODE USER MANUAL*
- [92] DE NICOLA, C, CIRINO, V., 2002, *E/BL Coupling to Predict Steady and Unsteady Transonic Flows Past an Airfoil with and without Shock Control*, Notes on Num. Fluid Mech. and Multidisciplinary Design, Vol. 80, Springer-Verlag
- [93] HINGST, TANJI, 1983, *Experimental Investigation of a Two-Dimensional Shock/Turbulent Boundary Layer Interaction with Bleed*, AIAA P. 83-0135
- [94] ABRAHAMSON, BROWER, 1988, *An Empirical Boundary Condition for Numerical Simulation of Porous Plate Bleed Flows*, AIAA P. 88-0306
- [95] DARGEL, G., 1992, *Existing Shock Control Law for FD-Procedures*, Comunicazione privata nell'ambito di EUROSHOCK I
- [96] ASHILL, P.R., FULKER, J.L., SHIRES, A., 1992, *A Novel Technique for Controlling Shock Strength of Laminar-Flow Aerofoil Sections*, Proc. First European Forum on Laminar Flow Technology, March, Hamburg, Paper 92-01-022
- [97] HOERNER, S.F., 1975, *Fluid Dynamic Lift*, Horst, L. Hoerner, S.F. Edts.
- [98] TORENBECK, E., 1980, *Synthesis of subsonic airplane design*, Delft University Press
- [Autori Vari] AA. VV., 2005, *EASA/FAA Part 25 Large Aeroplanes Airworthiness Requirements*, EASA Press
- [100] FAUSER, 2012, <http://dida.fausser.edu/aero/quarta/eliche/frame.htm>
- [101] LOCK, J., 1924, *ARC R.M.953*
- [102] ZUCROW M. J., HOFFMAN J. D., 1976, *Gas Dynamics*, Volume 1, John Wiley & Sons.
- [103] LANGMUIR, I., BLODGETT, K.B., 1946, *A Mathematical Investigation of Water Droplet Trajectories*, Army Air Force TR 5418
- [104] GENT, R.W., 1984, *Calculation of Water Droplet Trajectories About an Aerofoil in Steady, Two-Dimensional, Compressible Flow*, Royal Aircraft Establishment (RAE) TR 84060
- [105] VOLKERS D.F., ET AL., 1984, *Flow and Ice Accretion Simulation Around Multiple Airfoils*, ICAS-94-2.8.4
- [106] MACKLIN, W.C., 1962, *The Density and Structure of Ice Formed by Accretion*, Q. J. Royal Meteorological Society, Vol. 88, No 375
- [107] MESSINGER, B.L., 1953, *"Equilibrium Temperature of the Unheated Icing Surface as a Function of Air Speed"*, Journal of Aeronautical Sciences, Vol. 20, pp. 29-42

- [108] AA. VV., 1997, *Ice Accretion Simulation*, AGARD AR-344
- [109] MINGIONE, G., BAROCCO, M., 2005, *Il volo in condizioni favorevoli alla formazione di ghiaccio*, IBN Editore
- [110] AA. VV., 1986, *Rotorcraft Icing - Status and Review*, AGARD AR-223
- [111] AA. VV., 1989, *Flight in Adverse Environmental Conditions*, AGARD CP-470
- [112] AA. VV., 1991, *Effects of Adverse Weather on Aerodynamics*, AGARD CP-496
- [113] AA. VV., 1991, *Low Temperature Environment Operations of Turboengines*, AGARD CP-480
- [114] AA. VV., 1992, *Ice Protection*, JAR/FAR 25.1419, incluse le Appendice C e le ACJ e le AMJ 25.1419 del 1992
- [115] MACARTHUR, C.D., 1993, *Numerical Simulation of Airfoil Ice Accretion*, AIAA P. 83-0112
- [116] KELLOG, O.D., 1929, *Foundations of Potential Theory*, Dover Publ., New York
- [117] KROO, I. 2001, *Drag Due to Lift: Concepts for Prediction and Reduction*, Annu. Rev. Fluid Mech. 33, pp. 587-617
- [118] HOSSAIN, A., RAHMANB, A., HOSSEN, J., IQBAL, A.K.M.P., ZAHIRUL, M.I., 2011, *Prediction of Aerodynamic Characteristics of an Aircraft Model with and Without Winglets*, Aerospace Science and Technology 15, pp. 595-605
- [119] BUSCHER, A., RADESPIEL, R., STREIT, T., 2006, *Modelling and Design of Wing Tip Devices at Various Flight Conditions*, Aerospace Science and Technology 10, pp. 668-678