

# Controllo Digitale

Gianmaria De Tommasi<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Università degli Studi di Napoli Federico II  
detommas@unina.it

Ottobre 2012

**Corsi AnsaldoBreda**

# Outline

## 1 Introduzione

- Motivazioni
- Schema di riferimento di un sistema di controllo digitale
- Segnali tempo continuo e segnali tempo discreto
- Metodologie di progetto di sistemi di controllo digitali

## 2 Sistemi LTI tempo-discreto

- Modi di evoluzione
- Stabilità
- Sistemi a dati campionati

## 3 Trasformata $Z$

## 4 Funzione di trasferimento

## 5 Zeri e poli dei sistemi a dati campionati

## 6 Analisi dei sistemi di controllo digitale nel tempo-continuo

## 7 Progetto di controllori digitali per discretizzazione

## 8 Progetto di controllori digitali nel dominio della $z$

- Corrispondenze piano  $s$  - piano  $z$
- Specifiche nel dominio della  $z$

## Premessa - Perché “Controllo Digitale”?

- La quasi totalità dei sistemi di controllo moderni è realizzata mediante l'utilizzo di microcessori.

## Premessa - Perché “Controllo Digitale”?

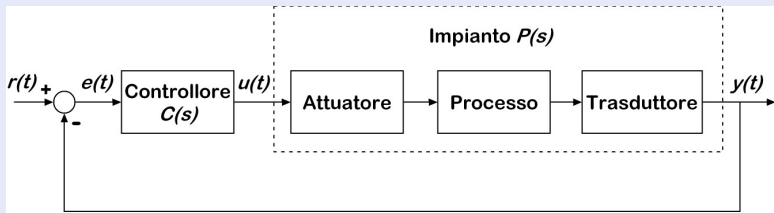
- La quasi totalità dei sistemi di controllo moderni è realizzata mediante l'utilizzo di microcessori.
- L'impiego di sistemi digitali (HW e SW) consente di
  - ottenere maggiore flessibilità (modifica dell'algoritmo di controllo = modifica software);
  - ottenere maggiore affidabilità;
  - implementare algoritmi di controllo sofisticati, altrimenti non realizzabili con altre tecnologie;
  - integrare gli algoritmi di controllo dinamico con logiche decisionali (controllo adattativo, controllo non-lineare, controllo predittivo (MPC), ecc.).

## Esempi di sistemi di controllo digitale

- pilota automatico di un aereo;
- sospensioni attive di un'automobile;
- sistema di controllo della trazione di un'automobile;
- cambio automatico di un'automobile;
- sistemi di controllo dei robot;
- sistema di posizionamento della testina degli HD;
- sistemi di puntamento automatico;
- ...

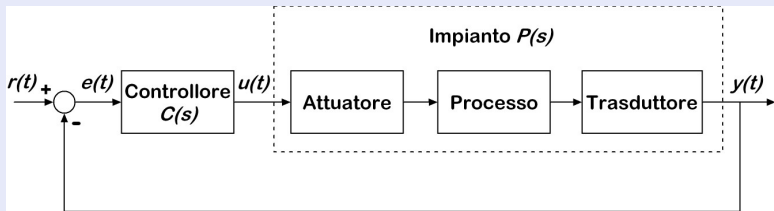
# Cosa sapete (dovreste sapere?)

## Controllo analogico (corso di Controlli Automatici)



## Cosa sapete (dovreste sapere?)

### Controllo analogico (corso di Controlli Automatici)



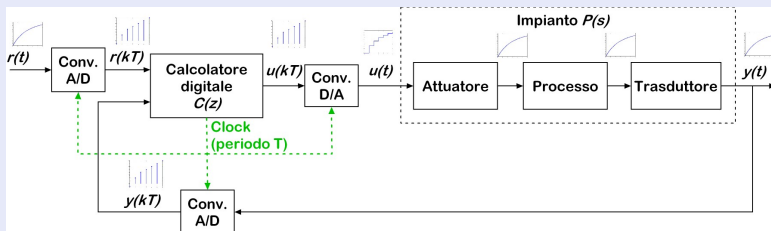
### Come si implementa $C(s)$ ?

**Passato** Tecnologia elettronica analogica (amplificatori operazionali), tecnologia idraulica, tecnologia pneumatica;

**Presente** Tecnologia digitale (sistemi a microprocessore)

# Cosa (dovreste imparare) imparerete

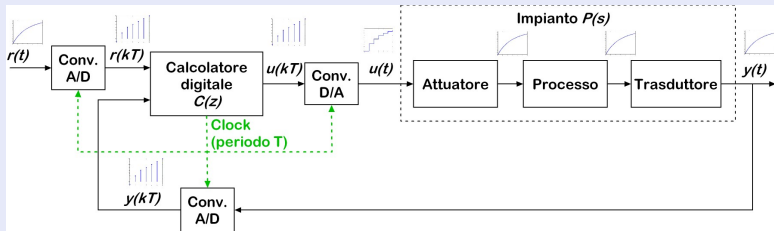
## Schema di riferimento di un sistema di controllo digitale





## Cosa (dovreste imparare) imparerete

### Schema di riferimento di un sistema di controllo digitale



### Come si implementa $C(z)$ ?

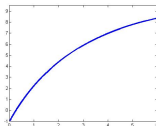
$C(z)$  è un algoritmo (somme, prodotti, ...) che può essere implementato in un qualsiasi linguaggio di programmazione (Assembler, C, LabView, ...).

## Segnali tempo continuo

Per i **segnali tempo continuo** la variabile tempo  $t$  varia con continuità in un intervallo dell'asse reale.

## Segnali tempo continuo

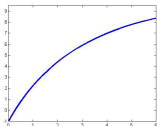
Per i **segnali tempo continuo** la variabile tempo  $t$  varia con continuità in un intervallo dell'asse reale.



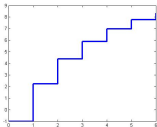
**segnali analogici** se l'ampiezza può variare con continuità in un intervallo di  $\mathbb{R}$ ;

# Segnali tempo continuo

Per i **segnali tempo continuo** la variabile tempo  $t$  varia con continuità in un intervallo dell'asse reale.



**segnali analogici** se l'ampiezza può variare con continuità in un intervallo di  $\mathbb{R}$ ;



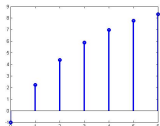
**segnali quantizzati** se l'ampiezza può assumere solo un insieme finito di valori.

## Segnali tempo discreto

Per i **segnali tempo discreto** la variabile tempo può assumere solo un insieme (anche infinito) di valori discreti.

## Segnali tempo discreto

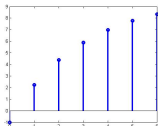
Per i **segnali tempo discreto** la variabile tempo può assumere solo un insieme (anche infinito) di valori discreti.



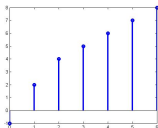
**segnali a dati campionati** se l'ampiezza può variare con continuità in un intervallo di  $\mathbb{R}$ ;

## Segnali tempo discreto

Per i **segnali tempo discreto** la variabile tempo può assumere solo un insieme (anche infinito) di valori discreti.



**segnali a dati campionati** se l'ampiezza può variare con continuità in un intervallo di  $\mathbb{R}$ ;



**segnali digitali** se l'ampiezza è quantizzata. I segnali digitali sono rappresentati con un numero finito di cifre binarie.

## Periodo di campionamento

- Nei sistemi di controllo digitali gli istanti di tempo discreto sono tipicamente multipli di un periodo di campionamento  $T$ ,  $t = kT$  con  $k \in \mathbb{N}$ .



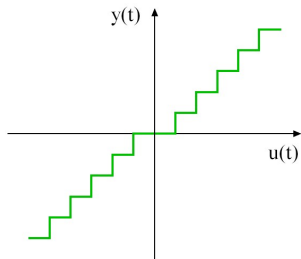
## Periodo di campionamento

- Nei sistemi di controllo digitali gli istanti di tempo discreto sono tipicamente multipli di un periodo di campionamento  $T$ ,  $t = kT$  con  $k \in \mathbb{N}$ .
- In questo caso le operazioni di conversione A/D e D/A, e la stessa esecuzione dell'algoritmo di controllo sono sincronizzate da un clock – **Esecuzione periodica**.

## Periodo di campionamento

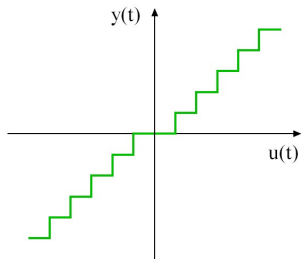
- Nei sistemi di controllo digitali gli istanti di tempo discreto sono tipicamente multipli di un periodo di campionamento  $T$ ,  $t = kT$  con  $k \in \mathbb{N}$ .
- In questo caso le operazioni di conversione A/D e D/A, e la stessa esecuzione dell'algoritmo di controllo sono sincronizzate da un clock – **Esecuzione periodica**.
- Altre possibilità:
  - le conversioni A/D e D/A vengono comandate in maniera asincrona, non appena l'algoritmo di controllo ha terminato l'esecuzione – **Esecuzione ciclica** (esempio: Controllori a Logica Programmabile – PLC);
  - le conversioni e l'esecuzione dell'algoritmo di controllo vengono comandate dal verificarsi di un particolare evento – **Esecuzione ad eventi** (esempio: attivazione di una procedura di emergenza).

# Quantizzazione



- A rigore l'operazione di quantizzazione introduce una **non linearità** nel sistema.

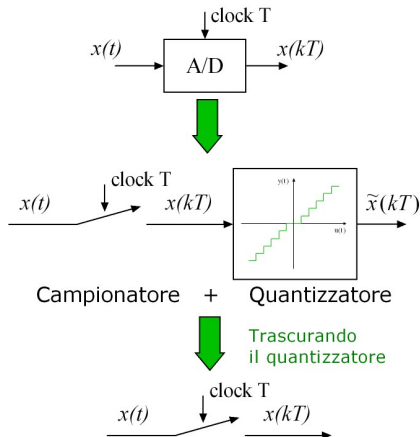
# Quantizzazione



- A rigore l'operazione di quantizzazione introduce una **non linearità** nel sistema.
- Quando il numero di cifre della rappresentazione binaria è sufficientemente elevato, è possibile trascurare l'effetto della quantizzazione (**ipotesi ritenuta valida in questo corso**).

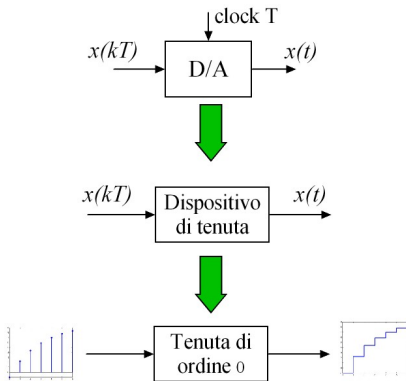
## Convertitori A/D

Questo dispositivo effettua il campionamento del segnale analogico in ingresso e restituisce un segnale digitale in uscita.



## Convertitori D/A

Questo dispositivo ricostruisce un segnale analogico a partire dalla sequenza dei suoi campioni.



# Metodologie di progetto

- Progetto di controllori digitali per discretizzazione
- Progetto di controllori digitali nel dominio della  $z$

## Notazione

Fissato un periodo di campionamento  $T$ ,  $\{x(kT)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  indicherà una sequenza discreta nel tempo di numeri reali.

Con  $x_k \in \mathbb{R}$  si indicherà, inoltre, il  $k$ -mo campione della sequenza, vale a dire

$$x_k = x(kT)$$



## Rappresentazione implicita i-s-u

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad x_0 = x(0) \quad (1a)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k \quad (1b)$$

## Rappresentazione esplicita i-s-u - 1

Risolvendo le (1) per un dato stato iniziale  $x_0$  e per una data sequenza d'ingresso  $\{u(kT)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ , si ottiene la seguente rappresentazione *esplicita* i-s-u

$$x_k = \underbrace{\Phi(k)x_0}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\sum_{h=0}^{k-1} H(k-h)u_h}_{\text{risposta forzata}} \quad (2a)$$

$$y_k = \underbrace{\Psi(k)x_0}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\sum_{h=0}^k W(k-h)u_h}_{\text{risposta forzata}} \quad (2b)$$

con

$$\Phi(k) = A^k, \quad \text{matrice di transizione}$$

$$H(j) = A^{j-1}B,$$

$$\Psi(k) = CA^k,$$

$$W(j) = \begin{cases} CA^{j-1}B & \text{se } j \neq 0 \\ D & \text{se } j = 0 \end{cases} \quad \text{matrice delle risposte impulsive}$$

## Rappresentazione esplicita i-s-u - 2

$$x_k = \underbrace{A^k x_0}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\sum_{h=0}^{k-1} A^{k-h-1} B u_h}_{\text{risposta forzata}} \quad (3a)$$

$$y_k = \underbrace{CA^k x_0}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\sum_{h=0}^{k-1} CA^{k-h-1} B u_h + D u_k}_{\text{risposta forzata}} \quad (3b)$$

# Risposta al gradino

La risposta al segnale

$$u_k = \bar{u} \cdot 1_k = \begin{cases} \bar{u}, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

è

$$x_k = \underbrace{(I - A)^{-1} B \bar{u}}_{(*)} + \underbrace{A^k (x_0 + (A - I)^{-1} B \bar{u})}_{(**)}, \quad k \geq 0 \quad (4a)$$

$$y_k = \underbrace{(C(I - A)^{-1} B + D) \bar{u}}_{(*)} + \underbrace{C A^k (x_0 + (A - I)^{-1} B \bar{u})}_{(**)}, \quad k \geq 0 \quad (4b)$$

Se il sistema è *asintoticamente stabile* allora

- le (\*) prendono il nome di *risposta a regime* (rispettivamente nello stato e nell'uscita);
- le (\*\*) prendono il nome di *risposta transitoria* (rispettivamente nello stato e nell'uscita).

## Rappresentazione i-u - 1

Il modello *implicito* ingresso-uscita di un sistema dinamico LTI tempo-discreto *single-input-single-output* è dato dalla seguente equazione alle differenze

$$\sum_{i=0}^{\nu} a_i y_{k-i} = \sum_{j=0}^{\mu} b_j u_{k-j}, \quad (5)$$

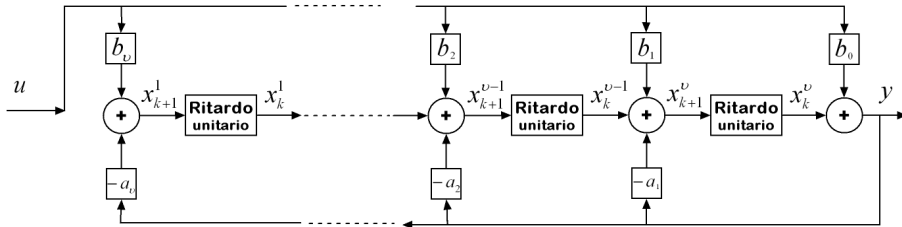
con  $\nu \leq n$  e  $\mu \leq \nu$ . Senza ledere la generalità della trattazione, è sempre possibile considerare  $a_0 = 1$  e  $\mu = \nu$ , quindi la (5) diventa

$$y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \cdots + a_\nu y_{k-\nu} = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \cdots + b_\nu u_{k-\nu}, \quad (6)$$

da cui

$$y_k = b_0 u_k + (b_1 u_{k-1} - a_1 y_{k-1}) + (b_2 u_{k-2} - a_2 y_{k-2}) + \cdots + (b_\nu u_{k-\nu} - a_\nu y_{k-\nu}). \quad (7)$$

## Sistemi LTI tempo-discreto



## Modi di evoluzione

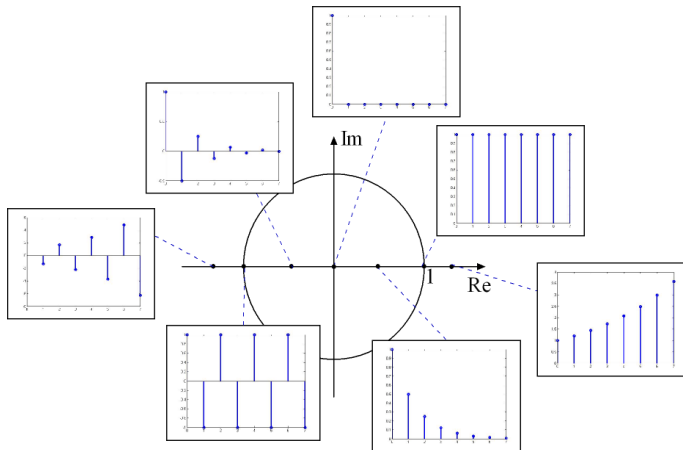
Dato il sistema (1), la risposta libera a partire dallo stato iniziale  $x_0$  è

$$x_k^l = A^k x_0 .$$

Ne segue che la **risposta in evoluzione libera** di ogni componente dello stato è una **combinazione lineare di termini del tipo  $\lambda_i^k$** , dove  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sono gli autovalori della matrice dinamica  $A$ .

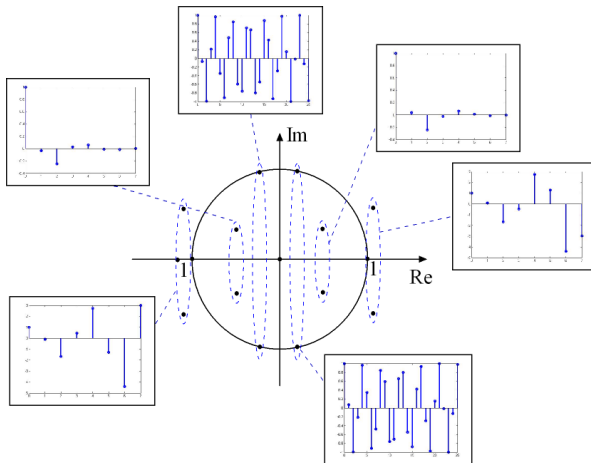
Tali termini prendono il nome di ***modi naturali*** di evoluzione del sistema (1).

# Modi aperiodici





# Modi pseudoperiodici



## Teorema

*Il sistema (1) è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori della matrice  $A$  sono in modulo minori di 1.*

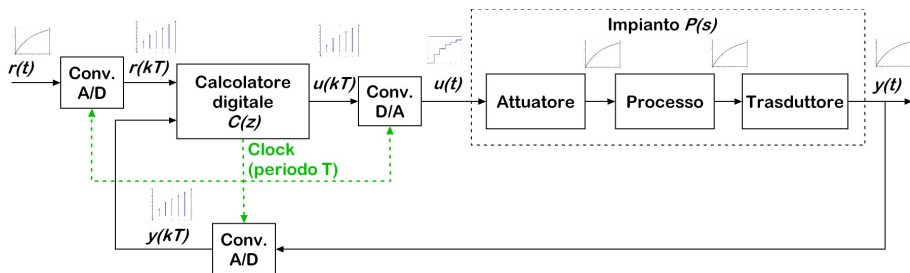
## Teorema

*Il sistema (1) è instabile se almeno uno degli autovalori della matrice  $A$  è in modulo maggiore di 1.*

## Teorema

*Il sistema (1) con tutti autovalori in modulo minori di uno, eccetto  $\bar{\lambda}$ , con  $|\bar{\lambda}| = 1$ , è instabile se esiste almeno un miniblocco di Jordan associato a  $\bar{\lambda}$  di dimensione maggiore di 1. Nel caso contrario il sistema è stabile.*

# Sistema a dati campionati - 1



# Sistema a dati campionati - 1

## Sistema tempo-continuo

$$S : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (8)$$

## Sistema a dati campionati

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k \quad (9a)$$

$$y_k = C x_k + D u_k \quad (9b)$$

dove

$$A_d = e^{AT}, \quad B_d = \int_0^T e^{A\tau} d\tau B.$$

Se la matrice  $A$  di (8) è invertibile, allora

$$B_d = A^{-1}(e^{AT} - I)B.$$

## Definizione (Trasformata $\mathcal{Z}$ unilatera)

Sia data una sequenza  $\{x(kT)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  di valori reali. La trasformata  $\mathcal{Z}$  (unilatera) di  $\{x(kT)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  è la funzione di variabile complessa  $z$  definita come

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(kT)] = \mathcal{Z}[x_k] = x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \dots + x_k z^{-k} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} .$$

## Trasformata $\mathcal{Z}$ - Proprietà - 1

**Linearità** Si considerino due sequenze  $x_k$  e  $y_k$ . Allora  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$  risulta

$$\mathcal{Z}[\alpha x_k + \beta y_k] = \alpha \mathcal{Z}[x_k] + \beta \mathcal{Z}[y_k] = \alpha X(z) + \beta Y(z)$$

### Anticipo

$$\mathcal{Z}[x_{k+1}] = zX(z) - zx_0$$

**Ritardo** Se  $x_{-1} = 0$ , allora

$$\mathcal{Z}[x_{k-1}] = z^{-1}X(z) = \frac{X(z)}{z}$$

### Cambiamento di scala

$$\mathcal{Z}[\alpha^k x_k] = X\left(\frac{z}{\alpha}\right)$$

## Trasformata $\mathcal{Z}$ - Proprietà - 2

### Derivazione in $z$

$$\mathcal{Z}(-kx_k) = z \frac{d}{dz} X(z)$$

### Convoluzione

$$\mathcal{Z}[x_k * y_k] = \mathcal{Z} \left[ \sum_{h=0}^k x_{k-h} y_h \right] = X(z) Y(z)$$

## Trasformata $\mathcal{Z}$ - Proprietà - 3

### Teorema (Teorema del valore finale)

Si consideri una sequenza  $\{x(kT)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  dotata di trasformata  $\mathcal{Z}$ , allora se  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k$  esiste, si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z).$$

### Teorema (Teorema del valore iniziale)

Il valore iniziale di una sequenza  $\{x(kT)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  dotata di trasformata  $\mathcal{Z}$  è dato da

$$x_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z).$$



# Trasformate notevoli

$x_k$	$X(z)$
$\delta_{k-N}$	$z^{-N}$
$1_{k-N}$	$z^{-N} \frac{z}{z-1}$
$k \cdot 1_k$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$\frac{k^{(n)}}{n!} \cdot 1_k$	$\frac{z}{(z-1)^{n+1}}$
$kT \cdot 1_k$	$T \frac{z}{(z-1)^2}$
$\lambda^k \cdot 1_k$	$\frac{z}{z-\lambda}$
$e^{\alpha k} \cdot 1_k$	$\frac{z}{z-e^{\alpha}}$
$\frac{k^{(n)}}{n!} \lambda^{k-n} \cdot 1_k$	$\frac{z}{(z-\lambda)^{n+1}}$
$\sin(\theta k) \cdot 1_k$	$Z \frac{\sin \theta}{z^2 - 2z \cos \theta + 1}$
$\cos(\theta k) \cdot 1_k$	$Z \frac{z - \cos \theta}{z^2 - 2z \cos \theta + 1}$
$(a\rho^k \cos(\theta k) + \frac{b+\alpha a}{\omega} \rho^k \sin(\theta k)) \cdot 1_k$	$Z \frac{az+b}{(z-\alpha)^2 + \omega^2}$ , con $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$ e $\theta = \arctan \frac{\omega}{\alpha}$

Applicando la trasformata  $\mathcal{Z}$  alle (1) si ottiene

$$X(z) = \underbrace{(zI - A)^{-1}BU(z)}_{\text{risposta forzata}} + \underbrace{z(zI - A)^{-1}x_0}_{\text{risposta libera}} \quad (10a)$$

$$Y(z) = \underbrace{(C(zI - A)^{-1}B + D)U(z)}_{\text{risposta forzata}} + \underbrace{zC(zI - A)^{-1}x_0}_{\text{risposta libera}} \quad (10b)$$

La matrice  $m \times r$

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D, \quad (11)$$

è detta *funzione di trasferimento*.

## Risposta di un sistema del primo ordine

$$G(z) = \mu \frac{1 - p_1}{1 - z_1} \cdot \frac{z - z_1}{z - p_1}, \quad \text{con } p_1, z_1 \neq 0 \quad (12)$$

Utilizzando il metodo della scomposizione in fratti semplici è immediato verificare che la risposta al gradino del sistema è

$$y_k = \left( \mu(1 - p_1^k) + \mu \frac{1 - p_1}{1 - z_1} p_1^k \right) \cdot 1_k.$$

## Risposta di un sistema del primo ordine

$$G(z) = \mu \frac{1 - \rho_1}{1 - z_1} \cdot \frac{z - z_1}{z - \rho_1}, \quad \text{con } \rho_1, z_1 \neq 0 \quad (12)$$

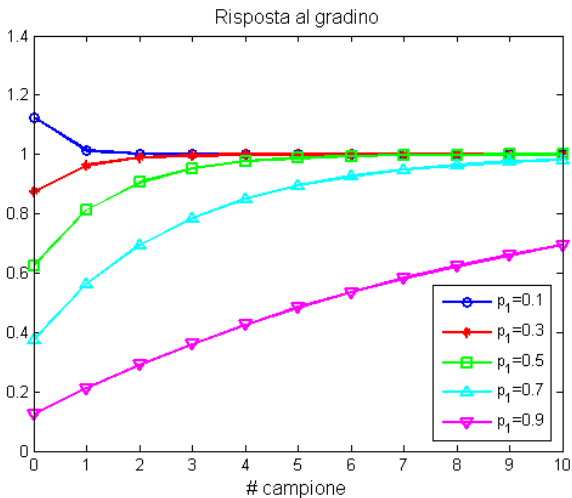
Utilizzando il metodo della scomposizione in fratti semplici è immediato verificare che la risposta al gradino del sistema è

$$y_k = \left( \mu(1 - \rho_1^k) + \mu \frac{1 - \rho_1}{1 - z_1} \rho_1^k \right) \cdot 1_k.$$

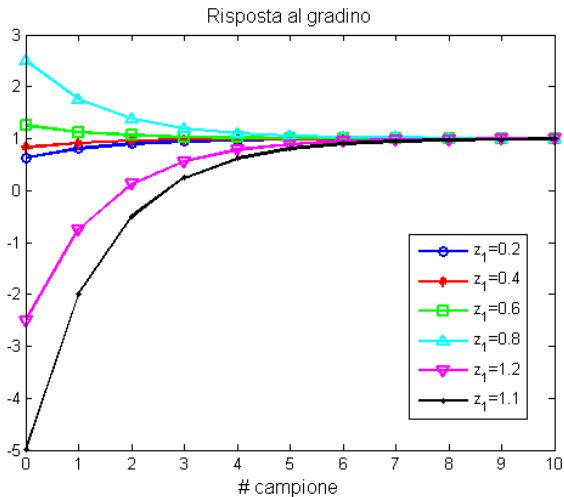
Si ricordi che la costante di tempo del sistema è espressa in *numero di campioni*, ed è pari a

$$\tau = -\frac{1}{\ln |\rho_1|}.$$

# Risposta al variare di $p_1$



# Risposta al variare di $z_1$



## Trasformazione di campionamento

la relazione tra la matrice dinamica  $A$  di un sistema tempo-continuo e la matrice dinamica  $A_d$  del suo equivalente a dati campionati è

$$A_d = e^{AT}, \quad T \text{ periodo di campionamento}$$

si verifica facilmente che l' $i$ -mo autovalore del sistema tempo-continuo  $s_i$  corrisponde all'autovalore tempo discreto

$$z_i = e^{s_i T}.$$

Gli autovalori del sistema a dati campionati, quindi, si ottengono applicando agli autovalori del sistema tempo-continuo la cosiddetta *trasformazione di campionamento*

$$z = e^{sT}. \quad (13)$$

## Aliasing - 1

**È importante notare che la trasformazione (13) è univoca ma non biunivoca.** Infatti, se si considerano due autovalori  $s_p$  e  $s_q$  di  $A$  tali che

$$s_q = s_p \pm j \frac{2\pi}{T} h, \quad h \in \mathbb{Z}$$

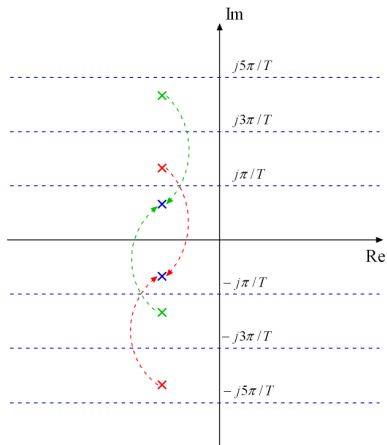
applicando la trasformazione (13) si ottiene

$$z_q = e^{s_q T} = e^{s_p T} e^{\pm j 2\pi h} = e^{s_p T} = z_p,$$

cioè due autovalori diversi del sistema a tempo-continuo generano due autovalori coincidenti del sistema a dati campionati associato. Questo fenomeno può essere visto come una particolare manifestazione del fenomeno di aliasing associato al campionamento.



## Aliasing - 2



## Zeri di un sistema a dati campionati

- gli  $m$  zeri tempo-continui *generano*  $m$  zeri di  $G(z)$  che, per  $T \rightarrow 0$ , tendono al punto  $z = 1$

## Zeri di un sistema a dati campionati

- gli  $m$  zeri tempo-continui *generano*  $m$  zeri di  $G(z)$  che, per  $T \rightarrow 0$ , tendono al punto  $z = 1$
- per  $T \rightarrow 0$  gli  $m$  zeri di  $G(z)$  *generati* dagli zeri tempo-continui seguono anch'essi la trasformazione di campionamento

## Zeri di un sistema a dati campionati

- gli  $m$  zeri tempo-continui *generano*  $m$  zeri di  $G(z)$  che, per  $T \rightarrow 0$ , tendono al punto  $z = 1$
- per  $T \rightarrow 0$  gli  $m$  zeri di  $G(z)$  *generati* dagli zeri tempo-continui seguono anch'essi la trasformazione di campionamento
- quando  $n - m > 1$  nascono  $n - m - 1$  zeri, detti *zeri del campionamento*

## Zeri di un sistema a dati campionati

- gli  $m$  zeri tempo-continui *generano*  $m$  zeri di  $G(z)$  che, per  $T \rightarrow 0$ , tendono al punto  $z = 1$
- per  $T \rightarrow 0$  gli  $m$  zeri di  $G(z)$  *generati* dagli zeri tempo-continui seguono anch'essi la trasformazione di campionamento
- quando  $n - m > 1$  nascono  $n - m - 1$  zeri, detti *zeri del campionamento*
- per  $T$  sufficientemente piccolo tutte le singolarità tempo-continue, zeri e poli, si trasformano in singolarità prossime a  $z = 1$ , creando problemi di carattere numerico e cancellazioni che possono rendere critico il progetto di un regolatore digitale

## Zeri di un sistema a dati campionati

- gli  $m$  zeri tempo-continui *generano*  $m$  zeri di  $G(z)$  che, per  $T \rightarrow 0$ , tendono al punto  $z = 1$
- per  $T \rightarrow 0$  gli  $m$  zeri di  $G(z)$  *generati* dagli zeri tempo-continui seguono anch'essi la trasformazione di campionamento
- quando  $n - m > 1$  nascono  $n - m - 1$  zeri, detti *zeri del campionamento*
- per  $T$  sufficientemente piccolo tutte le singolarità tempo-continue, zeri e poli, si trasformano in singolarità prossime a  $z = 1$ , creando problemi di carattere numerico e cancellazioni che possono rendere critico il progetto di un regolatore digitale
- per  $T$  sufficientemente piccolo  $n - m - 1$  zeri tendono a mapparsi anche in zeri in modulo maggiore di 1. Quindi partendo da un sistema tempo-continuo a fase minima è possibile ottenere un sistema a dati campionati con singolarità all'esterno del cerchio di raggio unitario

## Caratterizzazione in frequenza di un campionatore ideale

### Teorema

*Sia  $f(t)$  continuo negli istanti di campionamento. Dato il periodo di campionamento  $T$ , si consideri il segnale campionato  $f_k$ , allora risulta:*

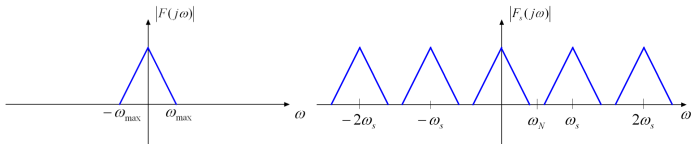
$$F^*(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} F_s(j\omega), \quad (14)$$

con

$$F_s(j\omega) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} F(j(\omega + h\omega_s)), \quad (15)$$

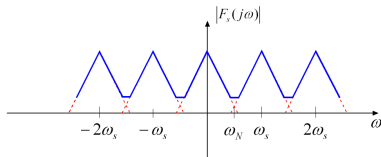
dove  $F^*(e^{j\omega T})$  è la trasformata di Fourier discreta della sequenza di campioni  $f_k$ , e  $F(j\omega)$  è la trasformata di Fourier di  $f(t)$ .

## Aliasing - 3



(a) Modulo di  $F(j\omega)$ .

(b) Modulo di  $F_s(j\omega)$  con  $\omega_{max} < \omega_N$ .

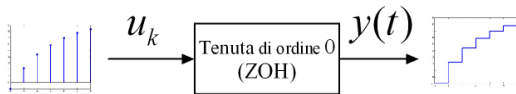


(c) Modulo di  $F_s(j\omega)$  con  $\omega_{max} > \omega_N$ .

**Figure:** Esempio di costruzione di  $F_s(j\omega)$  a partire da  $F(j\omega)$ .



## Caratterizzazione in frequenza di uno ZOH - 1



Si supponga  $u_k = \delta_k$  (quindi  $U(z) = 1$ ). In questo caso è immediato verificare che l'uscita dello ZOH è pari a

$$y(t) = h_0(t) = 1(t) - 1(t - T), \quad (16)$$

se  $T$  è il tempo di tenuta pari al periodo di campionamento. Trasformando la (16) secondo Laplace si ha

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}.$$

## Caratterizzazione in frequenza di uno ZOH - 2

Per una generica sequenza d'ingresso  $u_k$ , sarà

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k z^{-k},$$

quindi

$$y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k h_0(t - kT). \quad (17)$$

Trasformando la (17) secondo Laplace si ottiene

$$Y(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k e^{-skT} H_0(s) = H_0(s) U^*(e^{sT}),$$

pertanto  $H_0(s)$  rappresenta il rapporto tra la trasformata di Laplace dell'uscita e la trasformata  $\mathcal{Z}$  dell'ingresso valutata in  $z = e^{sT}$ . In senso lato, quindi,  $H_0(s)$  può essere considerata la funzione di trasferimento dello ZOH.

## Caratterizzazione in frequenza di uno ZOH - 3

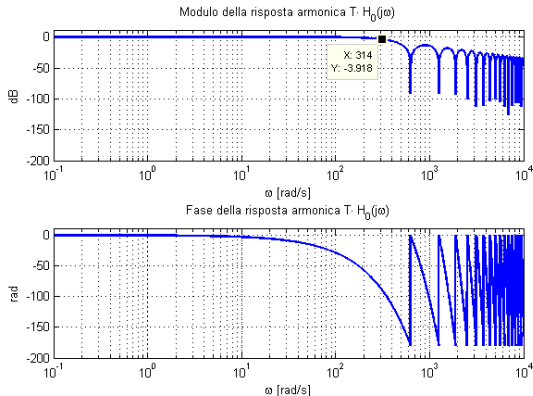
È possibile, inoltre, considerare la *risposta armonica*  $H_0(j\omega)$ , ottenendo

$$H_0(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = e^{-j\frac{\omega T}{2}} T \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} = T e^{-j\frac{\omega T}{2}} \operatorname{sinc} \frac{\omega T}{2}.$$

**Quindi la conversione digitale-analogico mediante ZOH introduce un ritardo pari a  $\frac{T}{2}$  e una distorsione in ampiezza.**

# Caratterizzazione in frequenza di uno ZOH - 4

Si noti che nell'intervallo  $[0, \omega_N]$ , con  $\omega_N = 100\pi$ , il modulo può ritenersi pressocchè costante. Pertanto, nella banda  $[0, \omega_N]$ , l'effetto principale di campionatore più ZOH è quello di introdurre un ritardo pari a  $\frac{T}{2}$ .



## Sintesi nel continuo e discretizzazione del controllore

Sotto opportune ipotesi è possibile dimostrare che, scegliendo opportunamente il periodo di campionamento  $T$ , nell'intervallo  $[0, \omega_N]$  vale la seguente eguaglianza

$$R_c(j\omega) = e^{-j\frac{\omega T}{2}} R_d(e^{j\omega T}),$$

dove  $R_d(e^{j\omega T})$  e  $R_c(j\omega)$  indicano la risposta armonica del controllore tempo-discreto e del suo equivalente nel tempo-continuo.

## Sfasamento dovuto allo ZOH

Il termine di ritardo  $e^{-j\frac{\omega T}{2}}$  è dovuto alla presenza del mantentore di ordine zero e contribuisce alla risposta armonica solamente in termini di sfasamento. In particolare il suo contributo alla pulsazione critica  $\omega_c$  è pari a

$$\varphi_0 = -\omega_c \frac{T}{2} \frac{180}{\pi} = -\frac{\omega_c}{\omega_s} 180^\circ,$$

ed è tanto più grande quanto più la pulsazione critica  $\omega_c$  è vicina alla pulsazione di campionamento  $\omega_s$ .

## Sintesi nel dominio del tempo continuo e discretizzazione

- Scegliere il periodo di campionamento  $T$  in maniera tale che risulti

$$\omega_c < \omega_N = \frac{\omega_s}{2}$$

In particolare, scegliendo  $\omega_s > 6\omega_c$  la distorsione d'ampiezza introdotta dallo ZOH può essere completamente trascurata

## Sintesi nel dominio del tempo continuo e discretizzazione

- Scegliere il periodo di campionamento  $T$  in maniera tale che risulti

$$\omega_c < \omega_N = \frac{\omega_s}{2}$$

In particolare, scegliendo  $\omega_s > 6\omega_c$  la distorsione d'ampiezza introdotta dallo ZOH può essere completamente trascurata

- Progettare il regolatore analogico  $R_c(s)$  in modo da assicurare un'adeguata eccedenza nel margine di fase rispetto alle specifiche originarie, in maniera tale da compensare l'effetto introdotto dallo ZOH



## Sintesi nel dominio del tempo continuo e discretizzazione

- Scegliere il periodo di campionamento  $T$  in maniera tale che risulti

$$\omega_c < \omega_N = \frac{\omega_s}{2}$$

In particolare, scegliendo  $\omega_s > 6\omega_c$  la distorsione d'ampiezza introdotta dallo ZOH può essere completamente trascurata

- Progettare il regolatore analogico  $R_c(s)$  in modo da assicurare un'adeguata eccedenza nel margine di fase rispetto alle specifiche originarie, in maniera tale da compensare l'effetto introdotto dallo ZOH
- Discretizzare il regolatore  $R_c(s)$  per ottenere il regolatore tempo-discreto  $R_d(z)$

## Metodi di discretizzazione

Una possibile approssimazione tempo-discreto di  $R_c(s)$  è data da

$$R_d(z) = R_c \left( \frac{1}{T} \cdot \frac{z - 1}{\alpha z + 1 - \alpha} \right).$$

## Metodi di discretizzazione

Una possibile approssimazione tempo-discreto di  $R_c(s)$  è data da

$$R_d(z) = R_c \left( \frac{1}{T} \cdot \frac{z-1}{\alpha z + 1 - \alpha} \right).$$

Le approssimazioni utilizzate nella pratica sono

**Eulero in avanti** ( $\alpha = 0$ )

$$s = \frac{z-1}{T}$$

**Eulero all'indietro** ( $\alpha = 1$ )

$$s = \frac{z-1}{Tz}$$

**Tustin** ( $\alpha = 0.5$ )

$$s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}$$

## Comando Matlab

### Matlab commands

`sys_d = c2d(sys_c, T_s, method)` - produces a continuous-time model `sys_c` that is equivalent to the discrete-time LTI model `sys_d`. `method` is a string that selects the conversion method (example `'Tustin'`).

## Scelta del periodo di campionamento - 1

**Costo dei dispositivi** - All'aumentare della frequenza di campionamento, cresce il costo sia dei convertitori A/D e D/A, sia dei processori sui quali viene implementata la legge di controllo.

## Scelta del periodo di campionamento - 1

**Costo dei dispositivi** - All'aumentare della frequenza di campionamento, cresce il costo sia dei convertitori A/D e D/A, sia dei processori sui quali viene implementata la legge di controllo.

**Problemi di tipo numerico** - Al diminuire del periodo di campionamento  $T$  possono nascere problemi legati alla rappresentazione dei numeri in aritmetica finita all'interno degli organi di elaborazione (*underflow*). Quindi, oltre ai motivi legati al costo dei dispositivi, esistono altri fattori che limitano verso l'alto il valore della frequenza di campionamento.

## Scelta del periodo di campionamento - 2

**Banda del sistema di controllo** - La pulsazione di campionamento  $\omega_s$  scelta anche tenendo conto della dinamica desiderata del sistema a ciclo chiuso. Se il sistema a ciclo chiuso ha un comportamento di tipo passa-basso con banda passante  $\omega_B \cong \omega_c$ , per il Teorema di Shannon deve essere  $\omega_c < \omega_N$ , quindi  $\omega_s > 2\omega_c$ .

## Scelta del periodo di campionamento - 2

**Banda del sistema di controllo** - La pulsazione di campionamento  $\omega_s$  scelta anche tenendo conto della dinamica desiderata del sistema a ciclo chiuso. Se il sistema a ciclo chiuso ha un comportamento di tipo passa-basso con banda passante  $\omega_B \cong \omega_c$ , per il Teorema di Shannon deve essere  $\omega_c < \omega_N$ , quindi  $\omega_s > 2\omega_c$ .

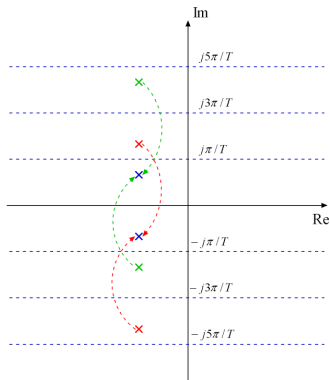
**Filtro anti-aliasing** Siccome i segnali reali non hanno banda limitata, è necessario effettuare in filtraggio anti-aliasing della grandezza d'uscita  $y(t)$ . I filtri anti-aliasing reali sono filtri passa-basso che introducono uno sfasamento. Per evitare che questo sfasamento produca inaccettabili diminuzioni del margine di fase, pregiudicando le prestazioni del sistema di controllo, è opportuno che la pulsazione di taglio del filtro anti-aliasing  $\omega_f$  sia  $\omega_f \gg \omega_c$ . Quindi  $\omega_s > 2\omega_f \gg 2\omega_c$ .



# Mapping dei luoghi attraverso la trasformazione di campionamento

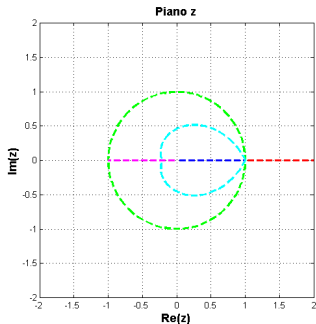
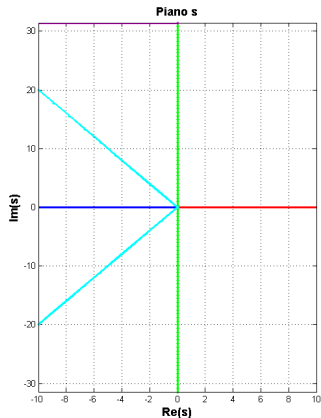
## Trasformazione di campionamento

$$z = e^{sT} \Rightarrow \hat{z} = e^{\hat{s}} = e^{\hat{s} + j\frac{2\pi}{T}n}, \quad n \in \mathbb{N}$$



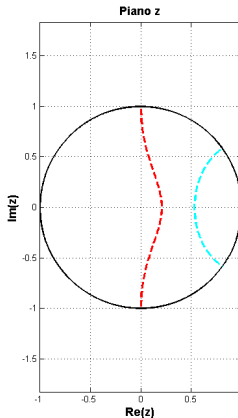
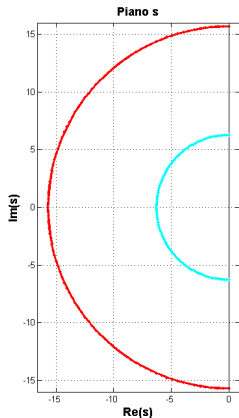
# Mapping dei luoghi attraverso la trasformazione di campionamento - 1

$$T = 100 \text{ ms}$$



# Mapping dei luoghi attraverso la trasformazione di campionamento - 2

$$T = 100 \text{ ms}$$



# Analisi Statica - 1

## Errore a regime per ingresso a gradino

Ingresso a gradino:  $R(z) = \frac{Az}{z-1}$

$$e_{\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} e_k = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)S(z) \frac{Az}{z-1} = A \lim_{z \rightarrow 1} S(z)$$

$$e_{\infty} = \begin{cases} \frac{A}{1+\mu}, & g = 0 \\ 0, & g > 0 \end{cases}$$

## Analisi Statica - 2

### Errore a regime per ingresso a rampa

Ingresso a rampa:  $R(z) = \frac{ATz}{(z-1)^2}$

$$e_{\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} e_k = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)S(z) \frac{ATz}{(z-1)^2} = AT \lim_{z \rightarrow 1} S(z) \cdot \frac{1}{z-1}$$

$$e_{\infty} = \begin{cases} \infty, & g = 0 \\ \frac{AT}{1+\mu}, & g = 1 \\ 0, & g > 1 \end{cases}$$

## Requisiti e specifiche

- Stabilità

## Requisiti e specifiche

- Stabilità
- Precisione statica (per ingressi e disturbi canonici)

## Requisiti e specifiche

- Stabilità
- Precisione statica (per ingressi e disturbi canonici)
- Precisione dinamica
  - requisiti sulle funzioni di sensitività
  - requisiti sulla posizione dei poli a ciclo chiuso






## Requisiti e specifiche

- Stabilità
- Precisione statica (per ingressi e disturbi canonici)
- Precisione dinamica
  - requisiti sulle funzioni di sensitività
  - requisiti sulla posizione dei poli a ciclo chiuso
- Attenuazione dei disturbi
- Attenuazione del rumore di misura
- Moderazione del segnale di controllo

## Requisiti e specifiche

- Stabilità
- Precisione statica (per ingressi e disturbi canonici)
- Precisione dinamica
  - requisiti sulle funzioni di sensitività
  - requisiti sulla posizione dei poli a ciclo chiuso
- Attenuazione dei disturbi
- Attenuazione del rumore di misura
- Moderazione del segnale di controllo
- Assenza di oscillazioni nascoste

## Bibliografia

-  P. Bolzern, R. Scattolini, and N. Schiavoni  
*Fondamenti di controlli automatici*  
McGraw-Hill, 2004
-  G.F. Franklin, J.D. Powell, and M. Workman  
*Digital Control of Dynamic Systems*  
Addison–Wesley, 1998
-  K. J. Aström and B. Wittenmark  
*Computer-Controlled Systems – Theory and Design*  
Prentice Hall, 1997