

# Appunti di Controllo Digitale

Gianmaria De Tommasi  
email: [detommas@unina.it](mailto:detommas@unina.it)

10 dicembre 2010



---

## Premessa

---

GLi appunti contenuti in queste dispense costituiscono parte del materiale di supporto per il modulo di *Controllo Digitale*, modulo da 3 CFU tenuto nell'ambito del corso di Controlli Automatici II della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Napoli Federico II.

**Nell'intenzione dell'autore queste dispense non sostituiscono il materiale contenuto nel libro di testo e nei testi da consultare.** Questi appunti vanno piuttosto considerati come una sorta di programma del corso "esplosivo", in cui ogni argomento trattato viene non solo citato, ma anche brevemente commentato.

I collegamenti ipertestuali all'interno del testo rimandano ad alcuni esempi in Matlab<sup>®</sup>/Simulink<sup>®</sup>.

Gianmaria De Tommasi

Napoli, Autunno 2008



---

## Indice

---

<b>1</b>	<b>Sistemi LTI tempo-discreto</b>	<b>1</b>
1.1	Rappresentazioni I-S-U . . . . .	1
1.2	Risposta al gradino . . . . .	2
1.3	Rappresentazioni I-U . . . . .	3
1.4	Modi di evoluzione . . . . .	4
1.5	Stabilità dei sistemi LTI tempo-discreto . . . . .	6
1.6	Sistemi a dati campionati . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Trasformata <math>\mathcal{Z}</math></b>	<b>9</b>
2.1	Trasformata $\mathcal{Z}$ unilatera . . . . .	9
2.2	Proprietà della trasformata $\mathcal{Z}$ . . . . .	10
2.3	Trasformate notevoli . . . . .	11
2.4	Metodi di antitrasformazione . . . . .	11
2.5	Funzione di trasferimento . . . . .	12
2.5.1	Risposta al gradino di un sistema del primo ordine . . . . .	13
2.5.2	Filtri IIR e FIR . . . . .	14
2.5.3	Modelli approssimati FIR . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Risposta in frequenza</b>	<b>17</b>
3.1	Calcolo dell'uscita per un ingresso sinusoidale . . . . .	17
3.2	Risposta in frequenza: definizione e proprietà . . . . .	18
3.3	Diagrammi di Bode . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Sistemi a dati campionati</b>	<b>23</b>
4.1	Sistemi a dati campionati in presenza di ritardi . . . . .	23
4.2	Zeri e poli dei sistemi a dati campionati . . . . .	26
4.2.1	Autovalori del sistema a dati campionati . . . . .	26
4.2.2	Determinazione diretta della f.d.t. di un sistema a dati campionati . . . . .	28
4.2.3	Zeri di un sistema a dati campionati . . . . .	29

<b>5</b>	<b>Analisi dei sistemi di controllo digitale nel tempo continuo</b>	<b>31</b>
5.1	Caratterizzazione in frequenza di un campionatore ideale . . . . .	31
5.1.1	Aliasing . . . . .	33
5.2	Teorema del campionamento . . . . .	33
5.3	Caratterizzazione in frequenza di un ZOH . . . . .	36
5.4	Sintesi nel continuo e discretizzazione del controllore . . . . .	37
5.5	Scelta del periodo di campionamento . . . . .	38
<b>6</b>	<b>Metodi di discretizzazione</b>	<b>41</b>
6.1	Metodo FOH predittivo . . . . .	41
6.2	Metodo della trasformazione bilineare . . . . .	44
6.2.1	Eulero in avanti . . . . .	45
6.2.2	Eulero all'indietro . . . . .	45
6.2.3	Tustin . . . . .	46
6.2.4	Tustin con pre-warping . . . . .	47
6.3	Metodo dell'invarianza della risposta all'impulso . . . . .	49
6.4	Metodo della corrispondenza poli/zeri . . . . .	50
<b>A</b>	<b>Richiami di calcolo matriciale</b>	<b>51</b>
A.1	Autovalori e autovettori . . . . .	51
A.2	Forma diagonale . . . . .	52
A.3	Potenza di una matrice . . . . .	52

---

## Elenco delle figure

---

1.1	Realizzazione i-s-u del modello (1.7). . . . .	3
1.2	Modi di evoluzione <i>aperiodici</i> di un sistema tempo-discreto con autovalori reali singoli. . . . .	5
1.3	Modi di evoluzione <i>pseudoperiodici</i> di un sistema tempo-discreto con coppie di autovalori complessi singoli. . . . .	6
1.4	Sistema a dati campionati. . . . .	8
2.1	Risposta al gradino del sistema (2.6) al variare di $p_1$ , con $z_1 = 0.2$ e $\mu = 1$ . . . . .	13
2.2	Risposta al gradino del sistema (2.6) al variare di $z_1$ , con $p_1 = 0.5$ e $\mu = 1$ . . . . .	14
2.3	Schema realizzativo di un filtro IIR. . . . .	15
2.4	Schema realizzativo di un filtro FIR. . . . .	15
2.5	Risposta del sistema da approssimare e del FIR approssimato. . . . .	16
3.1	Diagrammi di Bode dell'Esempio 2. . . . .	20
3.2	Diagrammi di Bode dell'Esempio 3. . . . .	21
4.1	Segnale in ingresso al sistema a dati campionati $u(t)$ e segnale ritardato $u(t - \tau)$ in ingresso al sistema tempo-continuo (4.1). . . . .	24
4.2	Strisce di trasformazione degli autovalori sul piano complesso. . . . .	27
4.3	Risposta al gradino Esempio 5. . . . .	28
5.1	Esempio di costruzione di $F_s(j\omega)$ a partire da $F(j\omega)$ . . . . .	34
5.2	Zero Order Holder - ZOH. . . . .	36
5.3	Diagrammi della risposta armonica $T \cdot H_0(j\omega)$ per $T = 10$ ms. . . . .	37
6.1	Confronto nel dominio del tempo. Risposta al gradino di $R_c(s)$ , $R_{d_2}(z)$ e $R_{d_3}(z)$ . . . . .	47
6.2	Diagrammi di Bode di $R_c(s)$ , $R_{d_1}(z)$ , $R_{d_2}(z)$ e $R_{d_3}(z)$ . . . . .	48
6.3	Diagrammi di Bode di $R_c(s)$ e delle due realizzazioni tempo-discreto ottenuto che il metodo di <i>Tustin</i> e di <i>Tustin con prewarping</i> . . . . .	49





---

## Elenco delle tabelle

---

2.1 Segnali e corrispondenti trasformate $\mathcal{Z}$ . . . . .	11
4.1 Polinomi $A_n(z)$ . . . . .	30



# CAPITOLO 1

---

## Sistemi LTI tempo-discreto

---

IN questo capitolo verranno richiamate le nozioni principali relative all'analisi nel *tempo-discreto* dei sistemi dinamici lineari tempo-invarianti (LTI). Per una trattazione completa si faccia riferimento a [1] e [2].

**Notazione.** Fissato un periodo di campionamento  $T$ ,  $\{x(kT)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ <sup>1</sup> indicherà una sequenza discreta nel tempo di numeri reali.

Con  $x_k \in \mathbb{R}$  si indicherà, inoltre, il  $k$ -mo campione della sequenza, vale a dire

$$x_k = x(kT).$$

### 1.1 Rappresentazioni I-S-U

Si consideri un sistema dinamico LTI tempo-discreto con  $r$  ingressi ed  $m$  uscite. La sua rappresentazione *implicita* ingresso-stato-uscita (i-s-u) è data dal seguente sistema di equazioni alle differenze

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad x_0 = x(0) \quad (1.1a)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k \quad (1.1b)$$

dove

- $u_k, y_k, x_k$  rappresentano, rispettivamente, il  $k$ -mo campione del vettore d'ingresso, d'uscita e di stato.
- $x_0$  è lo stato iniziale.
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  è detta *matrice dinamica*.
- $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$  è detta *matrice degli ingressi*.
- $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  è detta *matrice delle uscite*.

---

<sup>1</sup> $\mathbb{N}_0$  indica l'insieme dei numeri naturali compreso lo zero.

- $D \in \mathbb{R}^{m \times r}$  è detta *matrice di legame diretto ingresso-uscita*. Se  $D = 0$  il sistema si dice *strettamente proprio*.
- $n$  è l'*ordine* del sistema, pari al numero di variabili di stato utilizzate nella rappresentazione i-s-u.

Si noti che avendo preso in considerazione sistemi tempo-invarianti, l'aver considerato  $t = 0$  come istante iniziale non lede la generalità della trattazione.

Risolvendo il sistema (1.1) per un dato stato iniziale  $x_0$  e per una data sequenza d'ingresso  $\{u(kT)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ , si ottiene la seguente rappresentazione *esplicita* i-s-u

$$x_k = \underbrace{\Phi(k)x_0}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\sum_{h=0}^{k-1} H(k-h)u_h}_{\text{risposta forzata}} \quad (1.2a)$$

$$y_k = \underbrace{\Psi(k)x_0}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\sum_{h=0}^k W(k-h)u_h}_{\text{risposta forzata}} \quad (1.2b)$$

con

$$\begin{aligned} \Phi(k) &= A^k, & \text{matrice di transizione} \\ H(j) &= A^{j-1}B, \\ \Psi(k) &= CA^k, \\ W(j) &= \begin{cases} CA^{j-1}B & \text{se } j \neq 0 \\ D & \text{se } j = 0 \end{cases} & \text{matrice delle risposte impulsive} \end{aligned}$$

quindi

$$x_k = \underbrace{A^k x_0}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\sum_{h=0}^{k-1} A^{k-h-1} B u_h}_{\text{risposta forzata}} \quad (1.3a)$$

$$y_k = \underbrace{CA^k x_0}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\sum_{h=0}^{k-1} CA^{k-h-1} B u_h + D u_k}_{\text{risposta forzata}} \quad (1.3b)$$

## 1.2 Risposta al gradino

La risposta del sistema (1.1) ad un ingresso a *gradino* di ampiezza  $\bar{u}$

$$u_k = \bar{u} \cdot 1_k = \begin{cases} \bar{u}, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

è data da

$$x_k = \underbrace{(I - A)^{-1} B \bar{u}}_{(*)} + A^k \underbrace{\left( x_0 + (A - I)^{-1} B \bar{u} \right)}_{(**)}, \quad k \geq 0 \quad (1.4a)$$

$$y_k = \underbrace{\left( C(I - A)^{-1} B + D \right) \bar{u}}_{(*)} + CA^k \underbrace{\left( x_0 + (A - I)^{-1} B \bar{u} \right)}_{(**)}, \quad k \geq 0 \quad (1.4b)$$

Se il sistema è *asintoticamente stabile* allora

- le (\*) prendono il nome di *risposta a regime* (rispettivamente nello stato e nell'uscita);
- le (\*\*) prendono il nome di *risposta transitoria* (rispettivamente nello stato e nell'uscita).

### 1.3 Rappresentazioni I-U

Il modello *implicito* ingresso-uscita (i-u) di un sistema dinamico LTI tempo-discreto *single-input-single-output* è dato dalla seguente equazione alle differenze

$$\sum_{i=0}^{\nu} a_i y_{k-i} = \sum_{j=0}^{\mu} b_j u_{k-j}, \quad (1.5)$$

con  $\nu \leq n$  e  $\mu \leq \nu$ . Senza ledere la generalità della trattazione, è sempre possibile considerare  $a_0 = 1$  e  $\mu = \nu$ , quindi la (1.5) diventa

$$y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \cdots + a_\nu y_{k-\nu} = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \cdots + b_\nu u_{k-\nu}, \quad (1.6)$$

da cui

$$y_k = b_0 u_k + (b_1 u_{k-1} - a_1 y_{k-1}) + (b_2 u_{k-2} - a_2 y_{k-2}) + \cdots + (b_\nu u_{k-\nu} - a_\nu y_{k-\nu}). \quad (1.7)$$

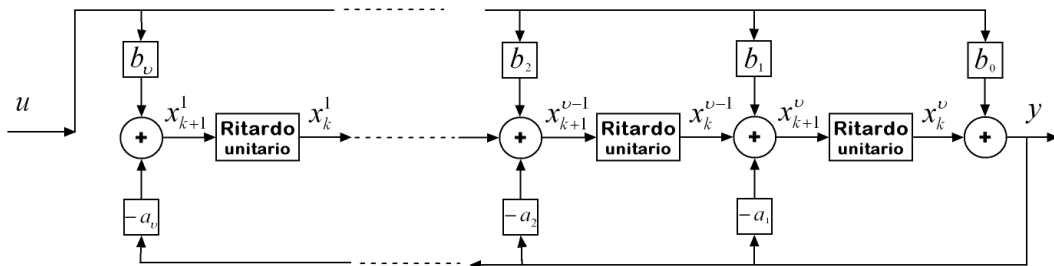


Figura 1.1: Realizzazione i-s-u del modello (1.7).

Facendo la seguente scelta per le variabili di stato

$$\begin{aligned}x_{k+1}^1 &= b_\nu u_k - a_\nu y_k \\x_{k+1}^2 &= x_k^1 + b_{\nu-1} u_k - a_{\nu-1} y_k \\&\dots\dots \\x_{k+1}^\nu &= x_k^{\nu-1} + b_1 u_k - a_1 y_k\end{aligned}$$

si ha

$$y_k = x_k^\nu + b_0 u_k,$$

alla quale corrisponde lo schema realizzativo riportato in Figura 1.1 e dalla quale è possibile ricavare la *forma canonica di osservazione*<sup>2</sup>

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_\nu \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{\nu-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -a_{\nu-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_\nu - b_0 a_\nu \\ b_{\nu-1} - b_0 a_{\nu-1} \\ b_{\nu-2} - b_0 a_{\nu-2} \\ \vdots \\ b_1 - b_0 a_1 \end{pmatrix},$$

$$C = ( 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1 ), \quad D = b_0.$$

Analogamente, partendo da un modello i-u è possibile ricavare anche la *forma canonica di controllo*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_\nu & -a_{\nu-1} & -a_{\nu-2} & \cdots & a_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C = ( b_\nu - b_0 a_\nu \quad b_{\nu-1} - b_0 a_{\nu-1} \quad \cdots \quad b_1 - b_0 a_1 ), \quad D = b_0.$$

## 1.4 Modi di evoluzione

Dato il sistema tempo-discreto (1.1), la risposta libera dello stato  $x_k^l$ , a partire dallo stato iniziale  $x_0$ , è data da (vedi (1.3a))

$$x_k^l = A^k x_0.$$

Ne segue che la risposta in evoluzione libera di ogni componente dello stato è una combinazione lineare di termini del tipo  $\lambda_i^k$ , dove  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sono gli autovalori della matrice dinamica  $A$  (vedi Osservazione 4 nell'Appendice A).

Tali termini prendono il nome di *modi naturali* di evoluzione del sistema (1.1).

In un primo momento si supponga  $A$  diagonalizzabile. Nel caso di autovalore reale  $\lambda_i$  si parla di *modo aperiodico*

$$\lambda_i^k = \text{sign}(\lambda_i)^k |\lambda_i|^k = \text{sign}(\lambda_i)^k e^{\ln |\lambda_i| k}.$$

<sup>2</sup>Per maggiori dettagli si faccia riferimento a [3, pag. 84]

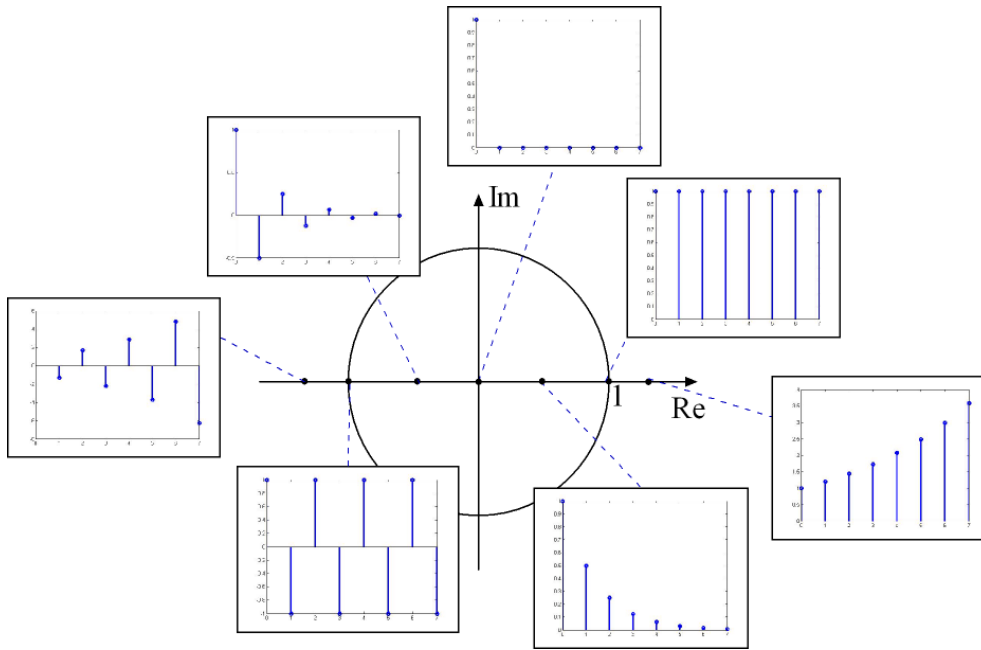


Figura 1.2: Modi di evoluzione *aperiodici* di un sistema tempo-discreto con autovalori reali singoli.

Nel caso di autovalori complessi e coniugati  $\lambda_{h\pm} = \alpha_h \pm j\omega_h = \rho_h e^{\pm j\theta_h}$ , con

$$\rho_h = \sqrt{\alpha_h^2 + \omega_h^2}, \quad \theta_h = \arctan \frac{\omega_h}{\alpha_h} = \arcsin \frac{\omega_h}{\rho_h}.$$

si parla di *modo pseudoperiodico*

$$\rho_h^k \sin(\theta_h k + \varphi_h),$$

con  $\varphi_h$  fase opportuna.

Se  $A$  non è diagonalizzabile, è sempre possibile ricondurla ad un forma di Jordan. In questo caso, se  $\lambda_i$  è un autovalore corrispondente ad un miniblocco di Jordan di dimensione maggiore di 1, i modi corrispondenti saranno del tipo

$$k^{\eta-1} \lambda_i^{k-\eta+1}.$$

Nelle figure 1.2 e 1.3 sono riportati gli andamenti nel tempo di modi aperiodici e pseudoperiodici corrispondenti ad autovalori singoli<sup>3</sup>.

**Osservazione 1** Si noti come, per sistemi LTI tempo-discreto, l'evoluzione libera presenta modi oscillatori, non solo quando sono presenti autovalori complessi e coniugati, ma anche nel caso di autovalori reali con parte reale è negativa.

■

<sup>3</sup>Per gli andamenti dei modi di sistemi con autovalori doppi si veda [2, Figura 7.5].

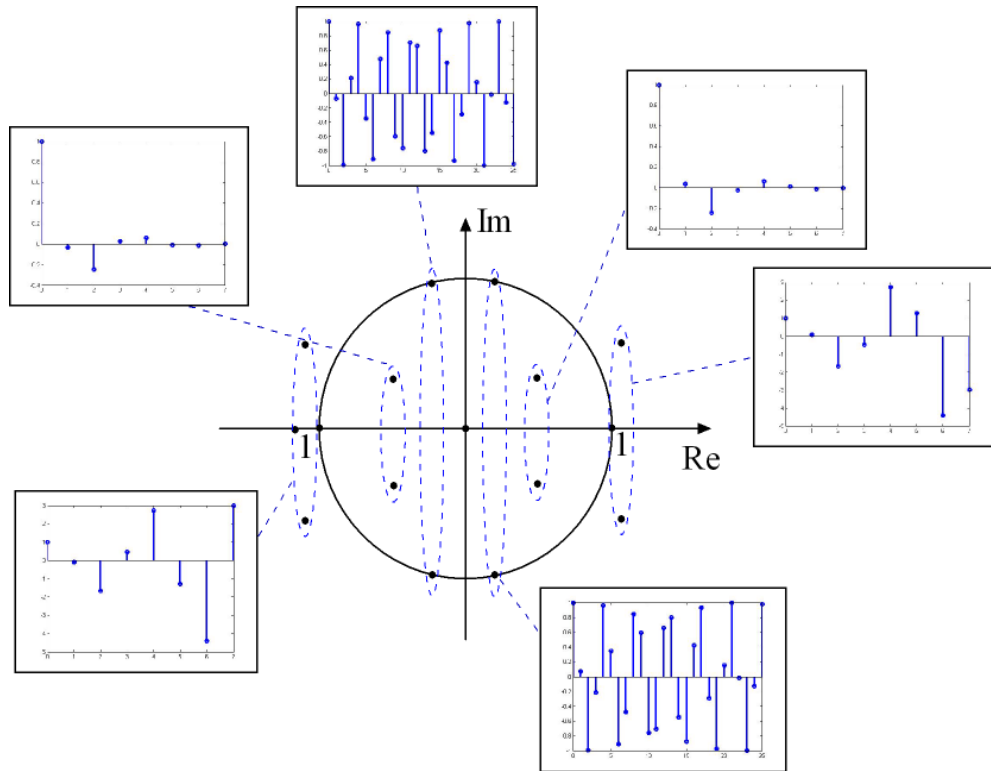


Figura 1.3: Modi di evoluzione *pseudoperiodici* di un sistema tempo-discreto con coppie di autovalori complessi singoli.

In conclusione l'evoluzione libera di un sistema LTI tempo-discreto a partire da uno stato iniziale  $x_0$  risulta

- convergente – se tutti gli autovalori sono in modulo minore di 1;
- divergente – se esiste almeno un autovalore in modulo maggiore di 1;
- non convergente – se esiste almeno un autovalore con modulo unitario.

## 1.5 Stabilità dei sistemi LTI tempo-discreto

In questa sezione vengono richiamati i principali risultati sulla stabilità dei sistemi LTI tempo-discreto.

**Teorema 1** *Il sistema (1.1) è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori della matrice  $A$  sono in modulo minori di 1.* ■

**Teorema 2** *Il sistema (1.1) è instabile se almeno uno degli autovalori della matrice  $A$  è in modulo maggiore di 1.* ■

**Teorema 3** *Il sistema (1.1) con tutti autovalori in modulo minori di uno, eccetto  $\bar{\lambda}$ , con  $|\bar{\lambda}| = 1$ , è instabile se esiste almeno un miniblocco di Jordan associato a  $\bar{\lambda}$  di dimensione maggiore di 1. Nel caso contrario il sistema è stabile.* ■



## 1.6 Sistemi a dati campionati

Si consideri il seguente sistema tempo-continuo

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.8)$$

e si supponga che questo sistema modelli l'impianto da controllare nello schema di Figura 1.4.

Ricordando che in un sistema di controllo digitale

- l'ingresso al processo è costante a tratti;
- l'uscita viene campionata negli istanti di tempo multipli del periodo di campionamento  $T$ ;

è possibile determinare una rappresentazione tempo discreta di  $\mathcal{S}$ . In particolare, integrando l'equazione di stato di (1.8) tra  $kT$  e  $kT + T$ , si ottiene

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)} Bu(\tau) d\tau.$$

È possibile, quindi, considerare il seguente sistema tempo-discreto che descrive in maniera rigorosa il sistema continuo (1.8), ma solo negli istanti di campionamento  $t_k = kT$

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k \quad (1.9a)$$

$$y_k = C x_k + D u_k \quad (1.9b)$$

dove

$$A_d = e^{AT}, \quad B_d = \int_0^T e^{A\tau} d\tau B.$$

Il sistema (1.9) prende il nome di *sistema a dati campionati*.

Se la matrice  $A$  di (1.8) risulta invertibile, allora

$$B_d = A^{-1}(e^{AT} - I)B.$$

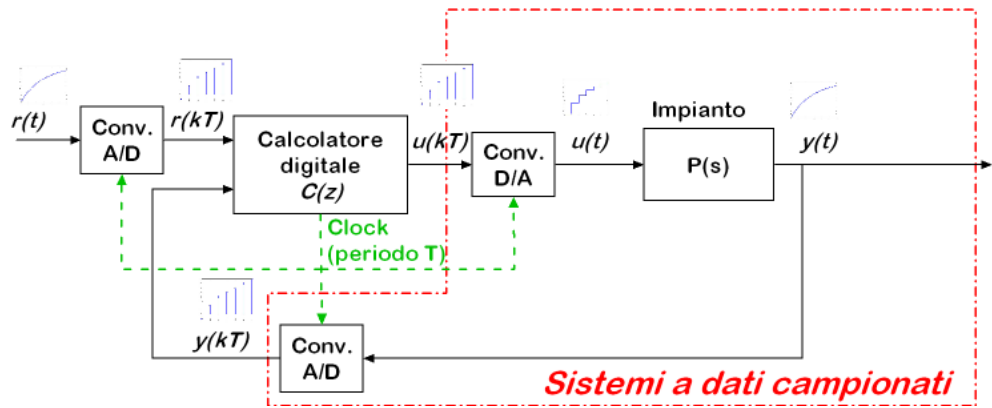


Figura 1.4: Sistema a dati campionati.

## CAPITOLO 2

---

### Trasformata $\mathcal{Z}$

---

IN questo capitolo vengono richiamate la definizione e le principali proprietà della trasformata  $\mathcal{Z}$  di una sequenza discreta  $x_k$ . La trasformata  $\mathcal{Z}$  rappresenta l'analogo della trasformata di Laplace per i sistemi continui.

In conclusione di capitolo verrà richiamata la definizione di *funzione di trasferimento* per un sistema LTI tempo-discreto.

### 2.1 Trasformata $\mathcal{Z}$ unilatera

La definizione di trasformata  $\mathcal{Z}$  di una sequenza è la seguente.

**Definizione 1 (Trasformata  $\mathcal{Z}$  unilatera)** *Sia data una sequenza  $\{x(kT)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  di valori reali. La trasformata  $\mathcal{Z}$  (unilatera) di  $\{x(kT)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  è la funzione di variabile complessa  $z$  definita come*

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(kT)] = \mathcal{Z}[x_k] = x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \dots + x_k z^{-k} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}.$$

■

La trasformata  $\mathcal{Z}$  è definita nella regione del piano complesso esterna ad un cerchio di raggio  $R$  centrato nell'origine.

In generale, data la trasformata  $X(z)$ , è possibile ricavare i campioni della sequenza mediante il seguente *integrale di inversione*

$$x_k = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z) z^{k-1} dz, \quad (2.1)$$

dove  $\Gamma$  è una curva chiusa compresa nel dominio di definizione di  $X(z)$  e contenente l'origine.

## 2.2 Proprietà della trasformata $\mathcal{Z}$

In questo paragrafo verranno elencate le principali proprietà della trasformata  $\mathcal{Z}$  di una sequenza.

**Linearità** Si considerino due sequenze  $x_k$  e  $y_k$ . Allora  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$  risulta

$$\mathcal{Z}[\alpha x_k + \beta y_k] = \alpha \mathcal{Z}[x_k] + \beta \mathcal{Z}[y_k] = \alpha X(z) + \beta Y(z)$$

**Anticipo**

$$\mathcal{Z}[x_{k+1}] = zX(z) - zx_0$$

**Ritardo** Se  $x_{-1} = 0$ , allora

$$\mathcal{Z}[x_{k-1}] = z^{-1}X(z) = \frac{X(z)}{z}$$

**Cambiamento di scala**

$$\mathcal{Z}[\alpha^k x_k] = X\left(\frac{z}{\alpha}\right)$$

**Derivazione in  $z$**

$$\mathcal{Z}(-kx_k) = z \frac{d}{dz} X(z)$$

**Convolluzione**

$$\mathcal{Z}[x_k * y_k] = \mathcal{Z}\left[\sum_{h=0}^k x_{k-h} y_h\right] = X(z)Y(z)$$

**Trasformata di sequenze periodiche** Sia  $\{x(kT)\}_{\mathbb{N}_0}$  una sequenza periodica di periodo  $pT$  e sia  $\{\tilde{x}(kT)\}_{\mathbb{N}_0}$  la sequenza di campioni relativi al primo periodo e nulla per  $k > p$

$$\tilde{x}_k = \begin{cases} x_k, & k = 0, 1, 2, \dots, p-1 \\ 0, & k \geq p \end{cases}$$

Se  $\tilde{X}(z) = \mathcal{Z}[\tilde{x}_k]$  allora

$$X(z) = \mathcal{Z}[x_k] = \frac{z^p}{z^p - 1} \tilde{X}(z) = \frac{1}{1 - z^{-p}} \tilde{X}(z). \quad (2.2)$$

La (2.2) si ricava semplicemente osservando che

$$x_k = \tilde{x}_k + \tilde{x}_{k-p} + \tilde{x}_{k-2p} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{x}_{k-ip},$$

e applicando la proprietà del ritardo

$$X(z) = \tilde{X}(z) + \tilde{X}(z)z^{-p} + \tilde{X}(z)z^{-2p} + \dots = \tilde{X}(z) \sum_{i=0}^{\infty} z^{-ip},$$

la quale converge per  $|z| > 1$  e permette di ottenere la (2.2).

$\mathbf{x}_k$	$\mathbf{X}(z)$
$\delta_{k-N}$	$z^{-N}$
$\mathbf{1}_{k-N}$	$z^{-N} \frac{z}{z-1}$
$k \cdot \mathbf{1}_k$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$\frac{k^{(n)}}{n!} \cdot \mathbf{1}_k$	$\frac{z}{(z-1)^{n+1}}$
$kT \cdot \mathbf{1}_k$	$T \frac{z}{(z-1)^2}$
$\lambda^k \cdot \mathbf{1}_k$	$\frac{z}{z-\lambda}$
$e^{\alpha k} \cdot \mathbf{1}_k$	$\frac{z}{z-e^\alpha}$
$\frac{k^{(n)}}{n!} \lambda^{k-n} \cdot \mathbf{1}_k$	$\frac{z}{(z-\lambda)^{n+1}}$
$\sin(\theta k) \cdot \mathbf{1}_k$	$z \frac{\sin \theta}{z^2 - 2z \cos \theta + 1}$
$\cos(\theta k) \cdot \mathbf{1}_k$	$z \frac{z - \cos \theta}{z^2 - 2z \cos \theta + 1}$
$(a\rho^k \cos(\theta k) + \frac{b+\alpha a}{\omega} \rho^k \sin(\theta k)) \cdot \mathbf{1}_k$	$z \frac{az+b}{(z-\alpha)^2 + \omega^2}$ , con $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$ e $\theta = \arctan \frac{\omega}{\alpha}$

Tabella 2.1: Segnali e corrispondenti trasformate  $\mathcal{Z}$ .

È importante ricordare anche i seguenti teoremi.

**Teorema 4 (Teorema del valore finale)** *Si consideri una sequenza  $\{x(kT)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  dotata di trasformata  $\mathcal{Z}$ , allora se  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k$  esiste, si ha*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z).$$

■

**Teorema 5 (Teorema del valore iniziale)** *Il valore iniziale di una sequenza  $\{x(kT)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  dotata di trasformata  $\mathcal{Z}$  è dato da*

$$x_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z).$$

■

## 2.3 Trasformate notevoli

In Tabella 2.1 sono riportate alcune trasformate di frequente utilizzo. Altre trasformate notevoli sono riportate in [3, Appendix B].

Si noti che con  $k^{(n)}$  si indica la seguente funzione

$$k^{(n)} = \underbrace{k(k-1) \dots (k-n+1)}_{n \text{ fattori}}.$$

## 2.4 Metodi di antitrasformazione

Mediante l'operazione di antitrasformata  $\mathcal{Z}$  si ottiene in modo univoco la sequenza  $\{x(kT)\}_{\mathbb{N}_0}$  dei campioni di una funzione  $x(t)$ . L'antitrasformata fornisce un'unica sequenza  $x_k$  ma non un'unica  $x(t)$ . L'operazione di antitrasformata,

infatti, non fornisce l'andamento di  $x(t)$  negli istanti di tempo compresi tra due campioni successivi. È banale verificare, infatti, che esistono infinite funzioni  $x(t)$  che campionate negli istanti  $kT$  forniscono la stessa sequenza  $x_k$ .

Data una funzione razionale fratta  $X(z)$

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n}, \quad (2.3)$$

non è necessario calcolare l'integrale (2.1) per antitrasformare  $X(z)$ , ma è possibile applicare i seguenti metodi

**metodo della lunga divisione** – questo metodo si basa sul fatto che  $X(z)$  è espressa come serie di potenze

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} = x_0 + x_1 z^{-1} + \dots + x_k z^{-k} + \dots$$

che può essere ottenuta semplicemente dividendo il polinomio al numeratore di (2.3) per il polinomio al denominatore.

**metodo della scomposizione in fratti semplici** – Questa tecnica è l'analogo nel discreto della tecnica della scomposizione in fratti semplici utilizzata con la trasformata di Laplace. La trasformata  $\mathcal{Z}$ , infatti, è anch'esso un operatore lineare, pertanto è possibile scomporre l'espressione di  $X(z)$  in termini elementari, dai quali si può ricavare l'antitrasformata tramite tabelle, e sommare i vari elementi così ottenuti. **Dato che molte trasformate notevoli hanno degli zeri nell'origine, cioè per  $z = 0$ , risulta spesso conveniente scomporre in fratti semplici la funzione  $\frac{X(z)}{z}$  piuttosto che  $X(z)$ .**

## 2.5 Funzione di trasferimento

Effettuando la trasformata  $\mathcal{Z}$  alle (1.1) si ottiene

$$X(z) = \underbrace{(zI - A)^{-1} B U(z)}_{\text{risposta forzata}} + \underbrace{z(zI - A)^{-1} x_0}_{\text{risposta libera}} \quad (2.4a)$$

$$Y(z) = \underbrace{(C(zI - A)^{-1} B + D) U(z)}_{\text{risposta forzata}} + \underbrace{zC(zI - A)^{-1} x_0}_{\text{risposta libera}} \quad (2.4b)$$

La matrice  $m \times r$

$$G(z) = C(zI - A)^{-1} B + D, \quad (2.5)$$

è detta *funzione di trasferimento*.

Nel caso di sistemi LTI tempo-discreto SISO, la (2.5) è una funzione razionale fratta, cioè

$$G(z) = \frac{N_G(z)}{D_G(z)},$$

con  $N_G(z)$ ,  $D_G(z)$  polinomi in  $z$ . Per sistemi SISO, le radici di  $N_G(z)$  vengono dette *zeri* di  $G(z)$ , mentre le radici di  $D_G(z)$  vengono dette *poli* di  $G(z)$ .

Si ricordi che la f.d.t. di un sistema SISO rappresenta la trasformata  $\mathcal{Z}$  della risposta all'impulso.

### 2.5.1 Risposta al gradino di un sistema del primo ordine

Come esempio<sup>1</sup> dello studio del comportamento di un sistema LTI tempo-discreto nel dominio della variabile complessa  $z$ , si consideri un sistema del primo ordine con funzione di trasferimento

$$G(z) = \mu \frac{1 - p_1}{1 - z_1} \cdot \frac{z - z_1}{z - p_1}, \quad \text{con } p_1, z_1 \neq 0 \quad (2.6)$$

Utilizzando il metodo della scomposizione in fratti semplici è immediato verificare che la risposta al gradino del sistema è

$$y_k = \left( \mu(1 - p_1^k) + \mu \frac{1 - p_1}{1 - z_1} p_1^k \right) \cdot 1_k.$$

L'andamento della risposta al variare di  $p_1$  è riportata in Figura 2.1, mentre in Figura 2.2 è riportato l'andamento della risposta al variare di  $z_1$  (da notare che la (2.6) descrive un sistema proprio).

Si ricordi che la costante di tempo del sistema è espressa in *numero di campioni*, ed è pari a

$$\tau = -\frac{1}{\ln |p_1|}.$$

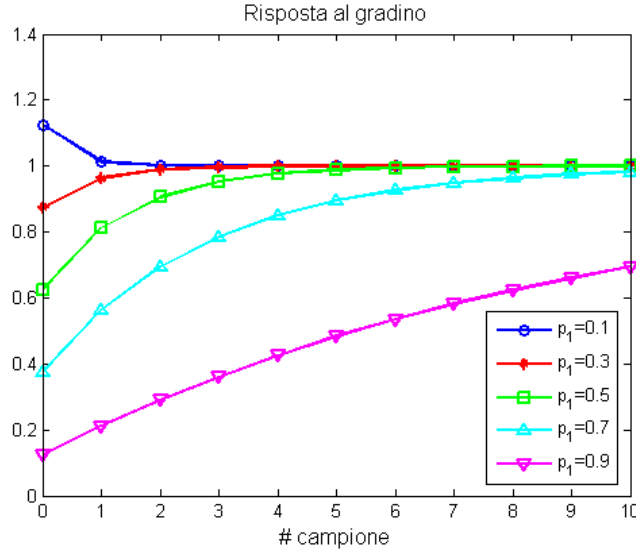


Figura 2.1: Risposta al gradino del sistema (2.6) al variare di  $p_1$ , con  $z_1 = 0.2$  e  $\mu = 1$ .

<sup>1</sup>Per una trattazione esaustiva della risposta al gradino per sistemi tempo-discreti si faccia riferimento a [2, Paragrafo 8.3]

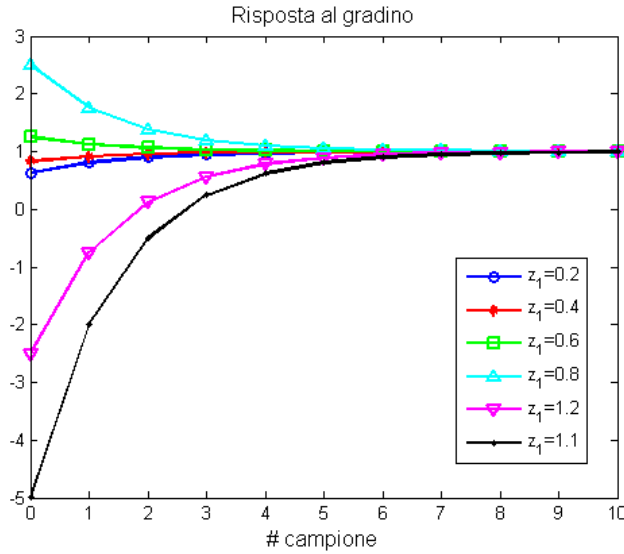


Figura 2.2: Risposta al gradino del sistema (2.6) al variare di  $z_1$ , con  $p_1 = 0.5$  e  $\mu = 1$ .

### 2.5.2 Filtri IIR e FIR

Un filtro IIR (*infinite impulsive response*) è un sistema LTI tempo-discreto la cui f.d.t. è del tipo

$$G_{IIR}(z) = \frac{\mu z^n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n},$$

antitrasformando la quale si ottiene il seguente modello i-u

$$y_k = \mu u_k - a_1 y_{k-1} - a_2 y_{k-2} - \dots - a_{n-1} y_{k-n+1} - a_n y_{k-n},$$

al quale corrisponde lo schema realizzativo riportato in Figura 2.3.

Un filtro FIR (*finite impulsive response*) è anch'esso un sistema LTI tempo-discreto la cui f.d.t. ha la seguente struttura

$$G_{FIR}(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n}{z^n},$$

passando nel dominio del tempo-discreto si ottiene

$$y_k = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \dots + b_{n-1} u_{k-n+1} + b_n u_{k-n},$$

che corrisponde allo schema di Figura 2.4.

### 2.5.3 Modelli approssimati FIR

A partire dalla conoscenza della risposta all'impulso o al gradino di un sistema incognito  $G(z)$ , è possibile ricavare un modello approssimato FIR di ordine opportuno.



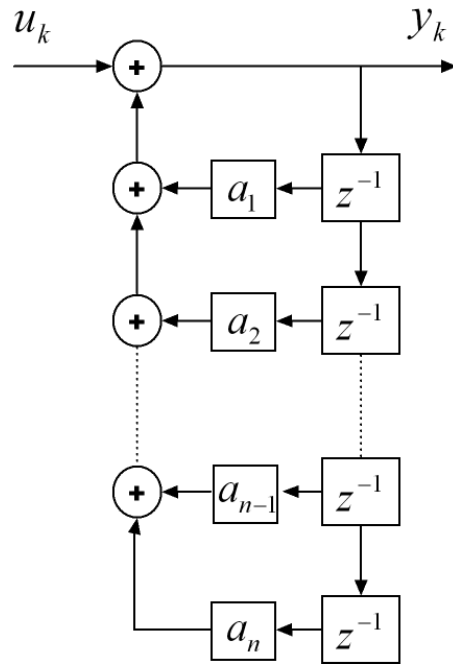


Figura 2.3: Schema realizzativo di un filtro IIR.

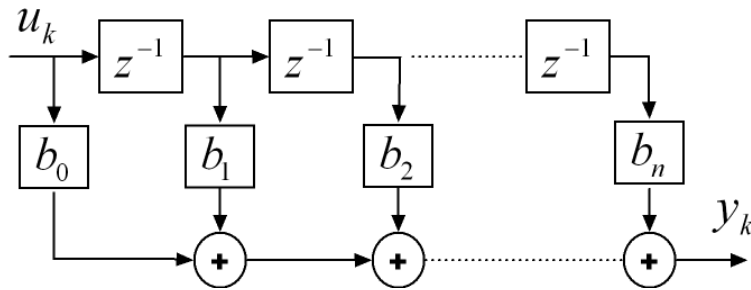


Figura 2.4: Schema realizzativo di un filtro FIR.

In particolare, tenendo conto che la risposta all'impulso  $w_k$  di un sistema asintoticamente stabile tende a zero per  $k \rightarrow \infty$ , se si suppone  $M$  sufficientemente elevato

$$w_k \cong 0, \quad k > M$$

allora è possibile approssimare la  $G(z)$  come segue

$$\tilde{G}(z) = \sum_{k=0}^M w_k z^{-k} = \frac{w_0 z^M + w_1 z^{M-1} + \dots + w_M}{z^M},$$

che corrisponde alla funzione di trasferimento di un sistema FIR (vedi il paragrafo 2.5.2).

La f.d.t. approssimata  $\tilde{G}(z)$  così ottenuta deve essere moltiplicata per una costante in modo che risulti  $\tilde{G}(1) = G(1)$ , così che il guadagno del modello sia uguale a quello del sistema da approssimare, nonostante l'approssimazione introdotta.

**Infine, si tenga presente che l'ordine  $M$  del modello approssimante può essere elevato, certamente superiore a quello del sistema di partenza (vedi esempio seguente). L'interesse per la procedura descritta risiede nella possibilità di ricavare facilmente un modello approssimato dalla sola conoscenza della risposta al gradino del sistema. Pertanto il metodo descritto in questo paragrafo non va assolutamente interpretato come una tecnica di riduzione dell'ordine di un sistema.**

**Esempio 1** *Si consideri il sistema del primo ordine descritto dalla (2.6). Applicando la tecnica di approssimazione descritta in questo paragrafo è possibile ottenere il seguente filtro FIR del settimo ordine*

$$\tilde{G}(z) = \frac{0.502z^7 + 0.251z^6 + 0.126z^5 + 0.063z^4 + 0.031z^3 + 0.016z^2 + 0.008z + 0.004}{z^7}.$$

In Figura 2.5 è mostrato il confronto delle risposte al gradino di  $G(z)$  e  $\tilde{G}(z)$ .

■

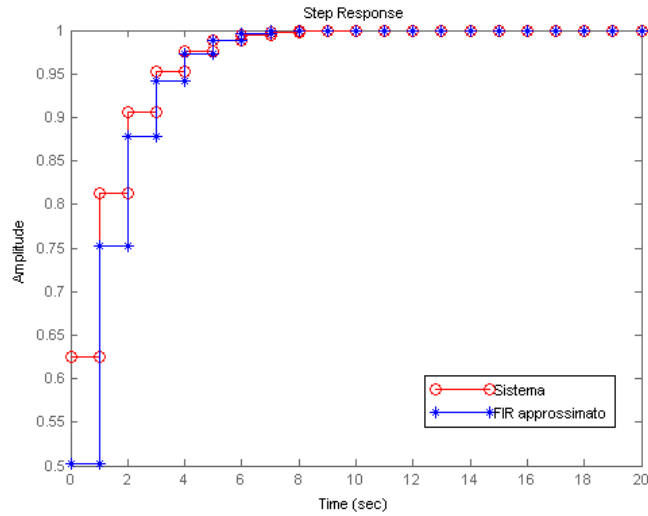


Figura 2.5: Risposta del sistema da approssimare e del FIR approssimato.

## CAPITOLO 3

---

### Risposta in frequenza

---

IN questo capitolo verrà introdotta la nozione di *risposta in frequenza* per un sistema LTI tempo-discreto. Analogamente al caso tempo-continuo, la risposta in frequenza consente di determinare il comportmaneto del sistema a fronte di ingressi sinusoidali o esprimibili come combinazione lineare di sinusoidi. Per maggiori dettagli si faccia riferimento a [2, Paragrafi 8.6,8.8], oppure a [3, Paragrafo 4.5].

### 3.1 Calcolo dell'uscita per un ingresso sinusoidale

Si consideri il sistema LTI tempo-discreto (1.1) e la f.d.t. associata

$$G(z) = C(zI - A)^{-1} + D.$$

Si supponga il sistema asintoticamente stabile e si consideri il seguente segnale d'ingresso sinusoidale

$$u(k) = U \sin(\omega T k) \cdot 1_k,$$

ricordando l'espressione della trasformata  $\mathcal{Z}$  della senoide, si ha

$$Y(z) = G(z) \frac{z \sin(\omega T) U}{(z - e^{j\omega T})(z - e^{-j\omega T})}.$$

L'uscita  $y_k$  può essere ottenuta antitrasformando l'espressione di  $Y(z)$  con il metodo della scomposizione in fratti semplici, ottenendo

$$y_k = \mathcal{Z}^{-1} \left[ z \left( \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{R_i}{z + p_i}}_{Y^t(z)} + \underbrace{\frac{Q}{z - e^{j\omega T}} + \frac{\bar{Q}}{z - e^{-j\omega T}}}_{Y^r(z)} \right) \right] = y_k^l + y_k^f,$$

dove<sup>1</sup>

$$Q = G(e^{j\omega T}) \frac{U}{2j}, \quad \bar{Q} = -G(e^{-j\omega T}) \frac{U}{2j} = -\bar{G}(e^{j\omega T}) \frac{U}{2j},$$

Nell'ipotesi di sistema asintoticamente stabile si ha che  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k^l = 0$ , quindi la risposta forzata si ottiene antitrasformando la seguente relazione

$$y_k^r = \mathcal{Z}^{-1} \left[ G(e^{j\omega T}) \frac{U}{2j} \frac{z}{z - e^{j\omega T}} - \bar{G}(e^{j\omega T}) \frac{U}{2j} \frac{z}{z - e^{-j\omega T}} \right],$$

ottenendo

$$\begin{aligned} y_k^r &= \frac{U}{2j} \left( G(e^{j\omega T}) e^{j\omega T k} - \bar{G}(e^{j\omega T}) e^{-j\omega T k} \right) \\ &= \frac{U}{2j} \left( \left[ \operatorname{Re}(G(e^{j\omega T})) + j \operatorname{Im}(G(e^{j\omega T})) \right] \left[ \cos(\omega T k) + j \sin(\omega T k) \right] + \right. \\ &\quad \left. \left[ j \operatorname{Im}(G(e^{j\omega T})) - \operatorname{Re}(G(e^{j\omega T})) \right] \left[ \cos(\omega T k) - j \sin(\omega T k) \right] \right) = \\ &= U |G(e^{j\omega T})| \left( \cos \angle G(e^{j\omega T}) \sin(\omega T k) + \sin \angle G(e^{j\omega T}) \cos(\omega T k) \right) = \\ &\quad |G(e^{j\omega T})| U \sin(\omega T k + \angle G(e^{j\omega T})). \end{aligned} \quad (3.1)$$

In definitiva l'uscita del sistema converge ad una sinusoide che ha la stessa pulsazione della sinusoide d'ingresso, ampiezza  $Y = |G(e^{j\omega T})|U$  e sfasamento  $\varphi = \angle G(e^{j\omega T})$ .

**Dalla (3.1) segue che, fissato un periodo di campionamento  $T$ , la risposta in regime sinusoidale di un sistema tempo-discreto è la stessa a tutte le pulsazioni  $\omega + \frac{l2\pi}{T}$ , con  $l \in \mathbb{N}$ .**

È possibile formulare il seguente teorema.

**Teorema 6** *Se si applica ad un sistema LTI tempo-discreto, asintoticamente stabile con f.d.t.  $G(z)$  l'ingresso sinusoidale*

$$u_k = U \sin(\theta_0 k),$$

*l'uscita a transitorio esaurito assume l'andamento*

$$\tilde{y}_k = |G(e^{j\theta_0})| U \sin(\theta_0 k + \angle G(e^{j\theta_0})),$$

*indipendentemente dallo stato iniziale.* ■

## 3.2 Risposta in frequenza: definizione e proprietà

La funzione complessa della variabile reale  $\theta$

$$G(e^{j\theta}) = C(e^{j\theta} I - A)^{-1} B + D,$$

definita per valori di  $\theta \in [0, \pi]$  tale che  $e^{j\theta}$  non sia un polo di  $G(z)$ , viene chiamata *risposta in frequenza* associata al sistema (1.1).

<sup>1</sup>Per una funzione razionale fratta  $G(z)$  a coefficienti reali vale  $G(e^{-j\theta}) = \bar{G}(e^{j\theta})$

Formalmente essa coincide con la restrizione della f.d.t.  $G(z)$  alla semicirconferenza definita dai punti del piano complesso a parte immaginaria positiva o nulla e modulo unitario, escluso al più un numero finito di punti corrispondenti agli eventuali poli di  $G(z)$  su questa semicirconferenza.

È facile verificare che  $G(e^{j\theta})$  è una funzione periodica di periodo  $2\pi$ . Inoltre, dato che risulta

$$G(e^{-j\theta}) = \bar{G}(e^{j\theta}),$$

la conoscenza della risposta in frequenza permette di calcolare  $G(e^{j\theta})$  anche per  $\theta \in (-\pi, 0)$ .

È possibile dimostrare i seguenti risultati

**Teorema 7** *Si consideri un segnale  $u_k$  periodico di periodo  $N$ , con  $N$  intero positivo, cioè*

$$u_{k+N} = u_k, \quad \forall k$$

*Il segnale  $u_k$  è rappresentabile in serie di Fourier discreta<sup>2</sup>*

$$u_k = \sum_N U_n e^{jn\theta_0 k}, \quad \theta_0 = \frac{2\pi}{N}$$

*Se si applica  $u_k$  come ingresso ad un sistema LTI tempo-discreto asintoticamente stabile con f.d.t.  $G(z)$ , l'uscita a regime non dipenderà dallo stato iniziale e sarà pari a*

$$\tilde{y}_k = \sum_N Y_n e^{jn\theta_0 k},$$

con

$$Y_n = G(e^{jn\theta_0})U_n.$$

■

**Teorema 8** *Si consideri un segnale  $u_k$  dotato di trasformata di Fourier discreta  $U(e^{j\theta}) = \mathcal{F}^*[u_k]$ , cioè*

$$u_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} U(e^{j\theta}) e^{j\theta k} d\theta,$$

*Se si applica  $u_k$  come ingresso ad un sistema LTI tempo-discreto asintoticamente stabile con f.d.t.  $G(z)$ , l'uscita a regime non dipenderà dallo stato iniziale e sarà pari a*

$$\tilde{y}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} Y(e^{j\theta}) e^{j\theta k} d\theta,$$

con

$$Y(e^{j\theta}) = G(e^{j\theta_0})U(e^{j\theta}).$$

■

<sup>2</sup>Per la definizione di sviluppo in serie di Fourier discreto e trasformata di Fourier discreta, si faccia a [2, Appendice C].

### 3.3 Diagrammi di Bode

La risposta in frequenza  $G(e^{j\theta})$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ , può essere rappresentata graficamente tramite i *diagrammi di Bode* di modulo e fase.

A differenza del caso dei sistemi a tempo-continuo, per rappresentazione non è facile determinare il singolo contributo dei poli e zeri, neppure in modo qualitativo. Per questo motivo non è possibile definire diagrammi approssimati, o asintotici. Pertanto, per il tracciamento dei diagrammi di Bode è richiesto l'uso di adeguati strumenti di calcolo anche in casi semplici.

**Esempio 2** *Si consideri il seguente sistema del primo ordine con guadagno unitario*

$$G(z) = \frac{1-p}{z-p},$$

*in Figura 3.1 sono riportati i diagrammi di Bode per  $p = 0.5, 0.7, 0.9$ .* ■

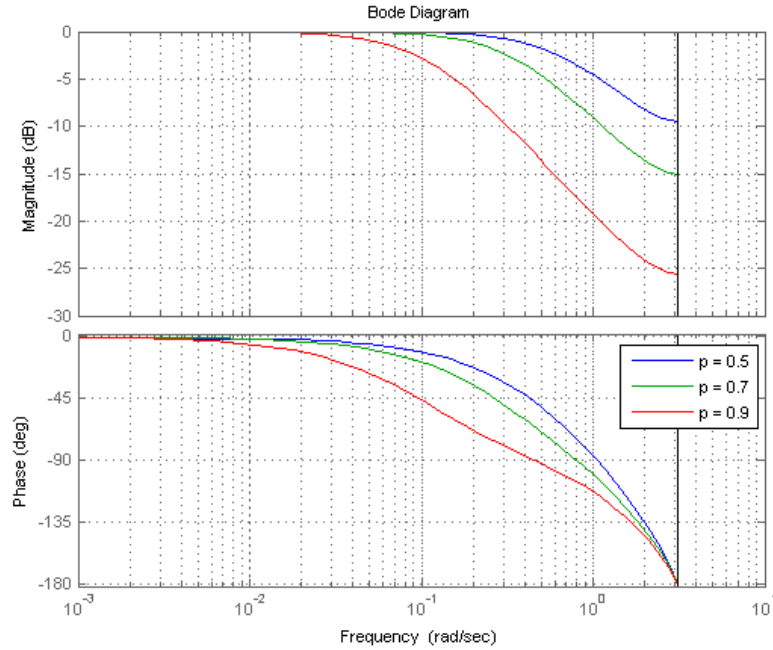


Figura 3.1: Diagrammi di Bode dell'Esempio 2.

**Esempio 3** *Si consideri la seguente f.d.t. tempo continua*

$$G(s) = \frac{1000(s+10)}{(s+100)(s+150)},$$

*e si considerino le seguenti realizzazioni tempo-discreto ottenute per diversi valori del periodo di campionamento  $T$*

$$G_1(Z) = \frac{0.7776z - 0.1158}{z^2 - 0.007291z + 3.727e-6}, \quad T = 0.05s$$

$$G_2(Z) = \frac{2.173z - 1.626}{z^2 - 0.1851z + 0.006738}, \quad T = 0.02s$$

$$G_3(Z) = \frac{3.123z - 2.796}{z^2 - 0.591z + 0.08208}, \quad T = 0.01s$$

In Figura 3.2 sono riportati gli adamenti dei diagrammi di Bode delle varie funzioni di trasferimento. ■

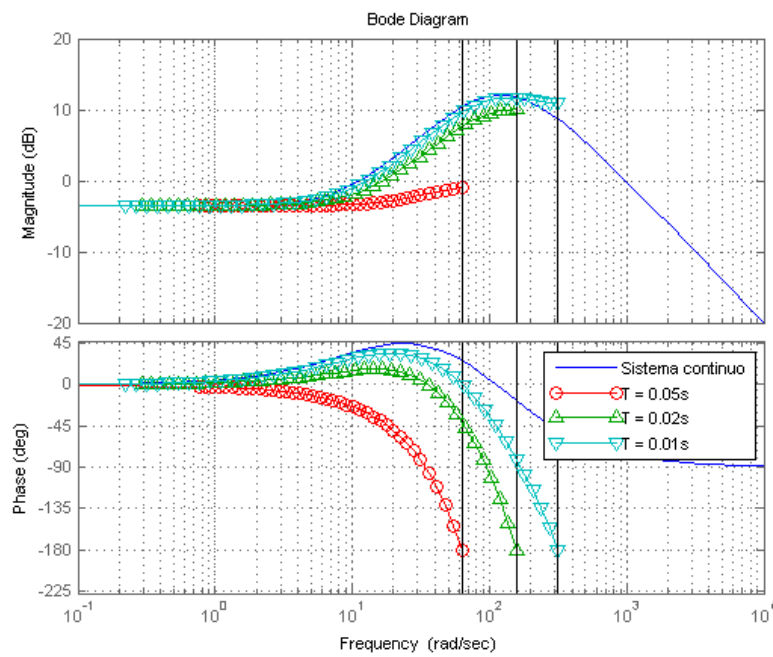


Figura 3.2: Diagrammi di Bode dell'Esempio 3.





IN questo capitolo si analizzano alcuni aspetti peculiari dei sistemi a dati campionati introdotti nel paragrafo 1.6. Per maggiori dettagli si faccia riferimento a [2, Paragrafi 18.2.2–18.2.5], oppure a [4, Chapter 2].

## 4.1 Sistemi a dati campionati in presenza di ritardi

Si consideri un sistema LTI tempo-continuo con ritardo sull'ingresso

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau) \quad (4.1a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t - \tau) \quad (4.1b)$$

Dal corso di Controlli Automatici è noto che la f.d.t. di un sistema di questo tipo è

$$G(s) = \tilde{G}(s)e^{-s\tau}, \quad (4.2)$$

dove

$$\tilde{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

Si noti che la (4.2) è una funzione trascendente, quindi il sistema con ritardo (4.1) è un sistema *infinito-dimensionale*.

Nello studio nel tempo-continuo di sistemi con ritardo come (4.1) può essere conveniente sostituire il ritardo con una sua approssimazione costruita come funzione razionale fratta in  $s$ . A questo scopo sono normalmente impiegati gli *approssimanti di Padé* (vedi pag. 217 della prima edizione di [2], oppure [5, Paragrafo 4.7]).

Supponiamo di voler ricavare il sistema a dati campionati relativo al sistema tempo-continuo con ritardo (4.1).

Inizialmente si supponga  $\tau \leq T$ , con  $T$  periodo di campionamento del sistema a dati campionati (vedi Figura 4.1).

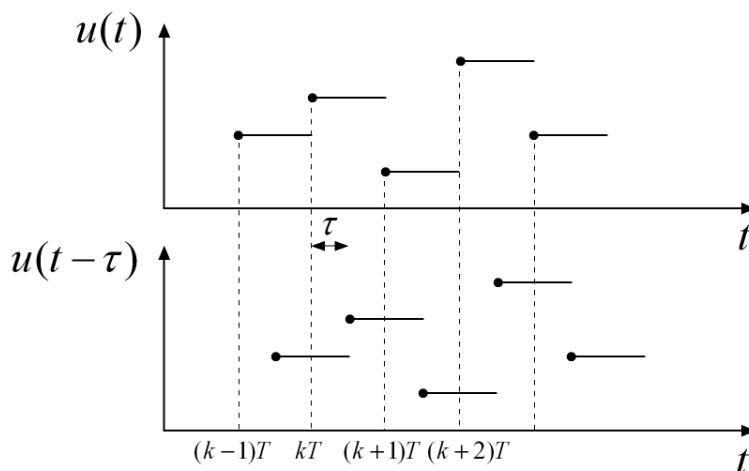


Figura 4.1: Segnale in ingresso al sistema a dati campionati  $u(t)$  e segnale ritardato  $u(t - \tau)$  in ingresso al sistema tempo-continuo (4.1).

Analogamente a quanto fatto nel paragrafo 1.6, integrando la (4.1a) tra  $kT$  e  $(k+1)T$  si ha

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\sigma)}Bu(\sigma - \tau)d\sigma.$$

Tenendo conto che l'integrale

$$\begin{aligned} & \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\sigma)}Bu(\sigma - \tau)d\sigma \\ &= \int_{kT}^{kT+\tau} e^{A((k+1)T-\sigma)}d\sigma Bu((k-1)T) + \int_{kT+\tau}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\sigma)}d\sigma Bu(kT), \end{aligned}$$

e ponendo

$$\begin{aligned} B_{d0} &= \int_{kT}^{kT+\tau} e^{A((k+1)T-\sigma)}d\sigma B = \int_{T-\tau}^T e^{A\eta}d\eta B, \\ B_{d1} &= \int_{kT+\tau}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\sigma)}d\sigma B = \int_0^{T-\tau} e^{A\eta}d\eta B, \end{aligned}$$

si ottiene il seguente modello nello spazio di stato

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{AT} & B_{d0} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{d1} \\ I \end{pmatrix} u_k \quad (4.3a)$$

$$y_k = (C \quad D) \begin{pmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{pmatrix} \quad (4.3b)$$

Campionando un sistema tempo-continuo con ritardo, quindi, è possibile ottenere un sistema a dati campionati con una rappresentazione nello spazio

di stato *finita*, semplicemente andando ad aggiungere come variabili di stato, i valori delle  $r$  grandezze d'ingresso al passo precedente.

**Questa maggiore semplicità nel manipolare i ritardi quando si considerano sistemi a dati campionati, dipende dalla presenza della tenuta di ordine zero all'ingresso del sistema tempo-continuo, la quale consente di rappresentare l'ingresso tra gli istanti  $kT$  e  $(k+1)T$  con un numero finito di valori.**

Consideriamo, ora, il caso in cui  $\tau = hT + \tau'$ , con  $\tau' \leq T$ . Ripetendo le considerazioni fatte per il caso  $\tau \leq T$ , si ha

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + B'_{d0}u((k-h-1)T) + B'_{d1}u((k-h)T),$$

con

$$B'_{d0} = \int_{T-\tau'}^T e^{A\eta}d\eta B, \quad B'_{d1} = \int_0^{T-\tau'} e^{A\eta}d\eta B,$$

dalla quale si ottiene il seguente rappresentazione tempo-discreto nello spazio di stato

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ u_{k-h} \\ u_{k-h+1} \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{AT} & B'_{d0} & B'_{d1} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ u_{k-h-1} \\ u_{k-h} \\ \vdots \\ u_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ I \end{pmatrix} u_k \quad (4.4a)$$

$$y_k = (C \quad D \quad 0 \quad \cdots \quad 0) \begin{pmatrix} x_k \\ u_{k-h-1} \\ u_{k-h} \\ \vdots \\ u_{k-1} \end{pmatrix} \quad (4.4b)$$

Nel caso particolare di  $\tau = hT$ , tenendo conto che  $B'_{d0} = 0$  e  $B'_{d1} = \int_0^T e^{A\eta}d\eta B$ , dalla (4.4a) segue che l'equivalente a dati campionati del sistema ritardato si ottiene semplicemente aggiungendo  $h$  poli nell'origine all'equivalente a dati campionati del sistema senza ritardo.

**In conclusione di paragrafo si vuole ricordare che in un sistema di controllo digitale è possibile modellare con un ritardo (maggiore o minore del periodo di campionamento  $T$ ) lo sfasamento temporale<sup>1</sup> che intercorre tra l'acquisizione del segnale con il campionatore, e la determinazione della variabile di controllo tramite l'organo di tenuta.**

**Esempio 4 (Doppio integratore con ritardo)** *Si consideri il seguente sistema tempo-continuo*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t-\tau) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Sfasamento temporale dovuto ai tempi di conversione A/D, D/A ed al tempo di calcolo dell'algoritmo di controllo.

Sia  $T$  il periodo di campionamento e si determini il sistema a dati campionati. È facile dimostrare che

$$e^{AT} = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Se  $\tau < T$ , si ha

$$B_{d0} = \int_{T-\tau}^T e^{A\eta} d\eta B = \begin{pmatrix} \tau(T - \frac{\tau}{2}) \\ \tau \end{pmatrix},$$

$$B_{d1} = \int_0^{T-\tau} e^{A\eta} d\eta B = \begin{pmatrix} \frac{(T-\tau)^2}{2} \\ T - \tau \end{pmatrix}.$$

Quindi il sistema a dati campionati è un sistema del terzo ordine

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= \begin{pmatrix} 1 & T & \tau(T - \frac{\tau}{2}) \\ 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{x}_k + \begin{pmatrix} \frac{(T-\tau)^2}{2} \\ T - \tau \\ 1 \end{pmatrix} u_k \\ y_k &= (1 \ 0 \ 0) \tilde{x}_k \end{aligned}$$

dove

$$\tilde{x}_k^T = (x_k^T \ u_{k-1})^T.$$

■

## 4.2 Zerri e poli dei sistemi a dati campionati

### 4.2.1 Autovalori del sistema a dati campionati

Ricordando che la relazione tra la matrice dinamica  $A$  di un sistema tempo-continuo e la matrice dinamica  $A_d$  del suo equivalente a dati campionati è

$$A_d = e^{AT}, \quad T \text{ periodo di campionamento}$$

si verifica facilmente che l' $i$ -mo autovalore del sistema tempo-continuo  $s_i$  corrisponde all'autovalore tempo discreto

$$z_i = e^{s_i T}.$$

Gli autovalori del sistema a dati campionati, quindi, si ottengono applicando agli autovalori del sistema tempo-continuo la cosiddetta *trasformazione di campionamento*

$$z = e^{sT}. \quad (4.7)$$

**È importante notare che la trasformazione (4.7) è univoca ma non biunivoca.** Infatti, se si considerano due autovalori  $s_p$  e  $s_q$  di  $A$  tali che

$$s_q = s_p \pm j \frac{2\pi}{T} h, \quad h \in \mathbb{Z}$$

applicando la trasformazione (4.7) si ottiene

$$z_q = e^{s_q T} = e^{s_p T} e^{\pm j 2\pi h} = e^{s_p T} = z_p,$$

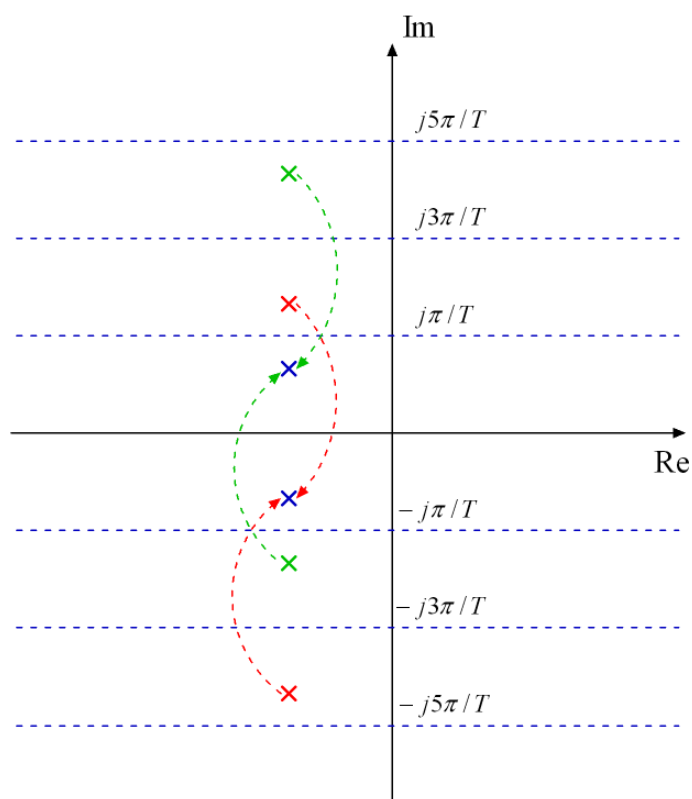


Figura 4.2: Strisce di trasformazione degli autovalori sul piano complesso.

cioè due autovalori diversi del sistema a tempo-continuo generano due autovalori coincidenti del sistema a dati campionati associato. Questo fenomeno può essere visto come una particolare manifestazione del fenomeno di aliasing associato al campionamento, così come mostrato in Figura 4.2.

Osservando la Figura 4.2, inoltre, si intuisce che per un valore sufficientemente piccolo di  $T$ , la fascia compresa tra  $-j\pi/T$  e  $j\pi/T$  contiene tutti gli autovalori di  $A$ , e quindi la trasformazione (4.7) può ritenersi biunivoca.

**Osservazione 2** Dalla (4.7) segue che all'aumentare della frequenza di campionamento (e quindi al diminuire di  $T$ ) si possono avere problemi numerici legati alla rappresentazione con aritmetica finita dei dispositivi digitali. In particolare, per  $T \rightarrow 0$ , tutti gli autovalori del sistema a dati campionati tenderebbero a 1, rendendo indistinguibili autovalori anche molto diversi (vedi [2, Esempio 18.1]).

■

**Esempio 5** Si consideri la seguente matrice dinamica  $A$  associata ad un sistema tempo-continuo del terzo ordine

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -30.936 & -7.718 \\ 32 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

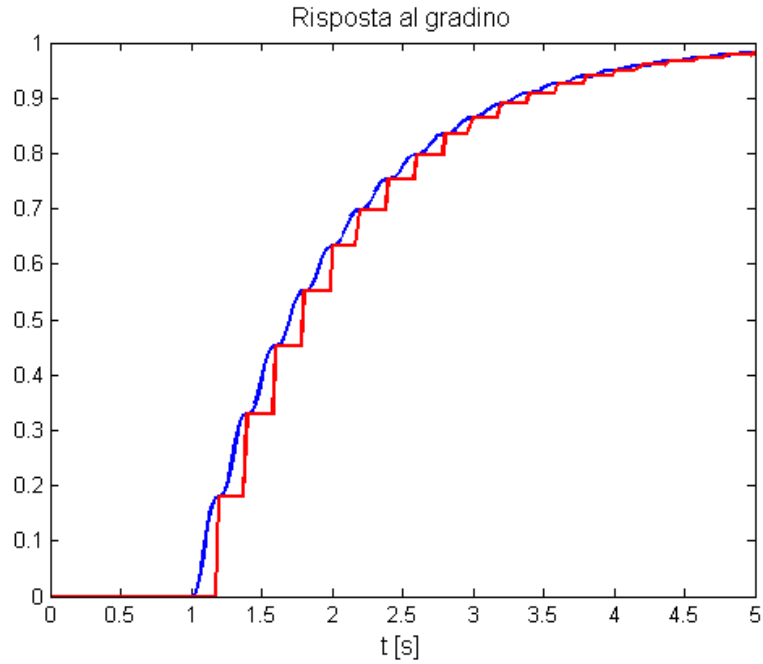


Figura 4.3: Risposta al gradino Esempio 5.

*i cui autovalori sono*

$$s_1 = -1, \quad s_{2,3} = -1 \pm j10\pi.$$

*Se scegliamo  $T = 0.2$  s, allora gli autovalori del sistema equivalente a dati campionati sono*

$$z_1 = z_2 = z_3 = 0.8187.$$

*In Figura 4.3 sono mostrati gli andamenti della risposta al gradino del sistema tempo-continuo e del sistema a dati campionati. ■*

#### 4.2.2 Determinazione diretta della f.d.t. di un sistema a dati campionati

Con la seguente procedura, data la f.d.t.  $G(s)$  di un sistema tempo-continuo, è possibile ricavare direttamente la f.d.t.  $G(z)$  del sistema a dati campionati.

1. determinare la risposta al gradino del sistema tempo-continuo nel dominio di Laplace  $Y(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$ ;
2. antitrasformando la  $Y(s)$  determinare i campioni dell'uscita  $y(kT)$  negli istanti di campionamento;
3. calcolare la trasformata  $Z Y(z) = Z[y(kT)]$ ;
4. ricavare la f.d.t. del sistema a dati campionati come  $G(z) = Y(z) \cdot \frac{z-1}{z}$ .

**Esempio 6** Si consideri la f.d.t. di un integratore tempo-continuo

$$G(s) = \frac{1}{s}.$$

Applicando la procedura descritta sopra si ha

$$Y(s) = \frac{1}{s^2},$$

da cui si ottiene

$$y(t) = t \cdot 1(t), \quad y_k = y(kT) = kT \cdot 1_k.$$

Trasformando la sequenza  $y_k$

$$Y(z) = \sum_0^{\infty} kTz^{-k} = \frac{Tz}{(z-1)^2},$$

ed è quindi possibile ricavare la f.d.t. del sistema a dati campionati come

$$G(z) = Y(z) \cdot \frac{z-1}{z} = \frac{T}{z-1}.$$

■

### 4.2.3 Zeri di un sistema a dati campionati

La determinazione del numero e della collocazione degli zeri di un sistema a dati campionati è un problema di non semplice soluzione. Pertanto in questo paragrafo si faranno solo alcune considerazioni di tipo qualitativo.

Inizialmente, si consideri il caso di un integratore multiplo

$$G(s) = \frac{1}{s^n}.$$

Utilizzando la procedura descritta nell'Esempio 6 è possibile ricavare la f.d.t. del sistema a dati campionati equivalente

$$G(z) = \frac{T^n}{n!} \frac{A_n(z)}{(z-1)^n},$$

dove  $A_n(z)$  è un polinomio di ordine  $n-1$ . In Tabella 4.1 sono riportati i polinomi  $A_n(z)$  con le rispettive radici, per alcuni valori di  $n$ .

È importante osservare che le radici di  $A_n(z)$  sono tutte reali e negative; inoltre alcuni zeri si trovano al di fuori del cerchio di raggio unitario. Infine vale  $A_n(1) = n!$ .

Si consideri, ora, il caso

$$G(s) = \rho \frac{\prod_{i=1}^m (s+b_i)}{\prod_{j=1}^n (s+a_j)} = \frac{\rho}{s^{n-m}} \frac{\prod_{i=1}^m (1+\frac{b_i}{s})}{\prod_{j=1}^n (1+\frac{a_j}{s})}, \quad (4.8)$$

con  $m < n$ .

$n$	$A_n(z)$	Radici
1	1	—
2	$z + 1$	-1
3	$z^2 + 4z + 1$	-0.268, -3.732
4	$z^3 + 11z^2 + 11z + 1$	-0.101, -1, -9.899
5	$z^4 + 26z^3 + 66z^2 + 26z + 1$	-0.043, -0.431, -2.323, -23.204

Tabella 4.1: Polinomi  $A_n(z)$ .

Per  $|s| \rightarrow \infty$  (e quindi per  $\omega \rightarrow \infty$ ), la (4.8) può essere approssimata da

$$\tilde{G}(s) = \frac{\rho}{s^{n-m}},$$

cioè da un integratore multiplo. L'equivalente a dati campionati di  $\tilde{G}(s)$  quindi è

$$\tilde{G}(z) = \frac{\rho T^{n-m}}{(n-m)!} \frac{A_{n-m}(z)}{(z-1)^{n-m}} = \frac{\rho T^{n-m}}{(n-m)!} \frac{A_{n-m}(z)(z-1)^m}{(z-1)^n}.$$

La  $\tilde{G}(z)$  può essere considerata come un'approssimante, per  $T \rightarrow 0$  della f.d.t. del sistema a dati campionati equivalente al sistema tempo-continuo (4.8). Pertanto è possibile fare le seguenti considerazioni

- gli  $m$  zeri di  $G(s)$  generano  $m$  zeri di  $G(z)$  che, per  $T \rightarrow 0$ , tendono al punto  $z = 1$ ;
- per  $T \rightarrow 0$  gli  $m$  zeri di  $G(z)$  generati dagli zeri di  $G(s)$  seguono anch'essi la trasformazione di campionamento (4.7);
- quando  $n - m > 1$  nascono  $n - m - 1$  zeri, detti *zeri del campionamento*, che per  $T \rightarrow 0$  tendono alle radici del polinomio  $A_{n-m}(z)$ ;
- per  $T$  sufficientemente piccolo tutte le singolarità di  $G(s)$ , zeri e poli, si trasformano in singolarità prossime a  $z = 1$ , creando problemi di carattere numerico e cancellazioni che possono rendere critico il progetto di un regolatore digitale;
- per  $T$  sufficientemente piccolo  $n - m - 1$  zeri tendono a mapparsi nelle radici del polinomio  $A_{n-m}(z)$ , quindi partendo da una  $G(s)$  a fase minima è possibile ottenere un sistema a dati campionati con singolarità all'esterno del cerchio di raggio unitario.



---

## Analisi dei sistemi di controllo digitale nel tempo continuo

---

Questo capitolo presenta lo studio nel dominio della frequenza dei dispositivi necessari alla realizzazione di sistemi di controllo digitale, vale a dire

- il convertitore A/D, il cui funzionamento verrà supposto equivalente a quello di un *campionatore ideale*;
- il convertitore D/A, che si supponerà costituito da un dispositivo di tenuta, o mantentore, di ordine 0 (ZOH).

In conclusione di capitolo verrà illustrato brevemente l'approccio di sintesi nel tempo-continuo e discretizzazione del controllore.

Per maggiori dettagli si faccia riferimento a [2, Capitolo 17], oppure a [6, Capitolo 7].

Nel seguito indicheremo con

- $f(t)$  un segnale tempo-continuo;
- $f_k = f(kT)$  il segnale campionato negli istanti multipli del periodo di campionamento  $T$ ;
- $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$  la pulsazione di campionamento associata al periodo di campionamento  $T$ .

### 5.1 Caratterizzazione in frequenza di un campionatore ideale

**Teorema 9** *Sia  $f(t)$  continuo negli istanti di campionamento. Dato il periodo di campionamento  $T$ , si consideri il segnale campionato  $f_k$ , allora risulta:*

$$F^*(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} F_s(j\omega), \quad (5.1)$$

con

$$F_s(j\omega) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} F(j(\omega + h\omega_s)), \quad (5.2)$$

dove  $F^*(e^{j\omega T})$  è la trasformata di Fourier discreta della sequenza di campioni  $f_k$ , e  $F(j\omega)$  è la trasformata di Fourier di  $f(t)$ .

### Dimostrazione.

Per definizione (vedi [2, Appendice C]) si ha

$$F^*(e^{j\omega T}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k e^{-jk\omega T}.$$

Se  $f(t)$  è continua negli istanti di campionamento allora è sfruttare la proprietà del campionamento dell'impulso di Dirac  $\delta(t)$  e scrivere

$$f(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - \tau)dt,$$

quindi

$$\begin{aligned} F^*(e^{j\omega T}) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\delta(t - kT)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)dt. \end{aligned} \quad (5.3)$$

La funzione  $c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$  rappresenta un treno di impulsi ed è, quindi, una funzione periodica di periodo  $T$ , i cui coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier sono tutti uguali a  $\frac{1}{T}$ . Pertanto

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} e^{jh\omega_s t}, \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T} \quad (5.4)$$

Sostituendo la (5.4) nella (5.3) si ottiene

$$\begin{aligned} F^*(e^{j\omega T}) &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} e^{jh\omega_s t} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j(\omega - h\omega_s)t} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} F(j(\omega - h\omega_s)), \end{aligned}$$

dalla quale si ottengono la (5.1) e la (5.2) semplicemente ponendo  $h' = -h$ . ■

È immediato dimostrare che

- $F_s(-j\omega) = \bar{F}_s(j\omega)$

$$\bullet F_s(j(\omega + h\omega_s)) = F_s(j\omega), \quad \forall \omega, \quad h \in \mathbb{Z}$$

Si può concludere che, per un segnale reale  $f(t)$ , l'andamento di  $F_s(j\omega)$  è noto per ogni  $\omega$  una volta che ne sono stati specificati i valori in  $[0, \omega_N]$ , dove

$$\omega_N = \frac{\omega_s}{2},$$

è detta *pulsazione di Nyquist*.

### 5.1.1 Aliasing

È possibile dare una rappresentazione grafica del legame che esiste tra lo spettro del segnale tempo continuo  $F(j\omega)$  e lo spettro del segnale campionato  $F^*(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} F_s(j\omega)$ .

Si consideri lo spettro d'ampiezza di  $F(j\omega)$  riportato in Figura 5.1(a). In particolare si supponga che lo spettro sia nullo per  $|\omega| > \omega_{max}$ .

Lo spettro di ampiezza di  $F_s(j\omega)$  nel caso di  $\omega_{max}$  minore della pulsazione di Nyquist  $\omega_N$  è riportato in Figura 5.1(b). In questo caso  $F_s(j\omega)$  si ottiene semplicemente traslando infinite volte della quantità  $h\omega_s$ , con  $h$  intero, lo spettro d'ampiezza di  $F(j\omega)$ . Ne segue che nell'intervallo  $[0, \omega_N]$   $F_s(j\omega)$  coincide con  $F(j\omega)$ .

Nel caso in cui, invece,  $\omega_{max}$  è maggiore di  $\omega_N$  (Figura 5.1(c)), allora lo spettro d'ampiezza di  $F_s(j\omega)$  si ottiene sommando per ogni  $\omega$  i valori delle varie repliche dello spettro di  $F(j\omega)$ . In questo caso i due spettri possono differire anche di molto nell'intervallo  $[0, \omega_N]$ . Questo fenomeno di sovrapposizione di spettri prende il nome di *aliasing* e quando è presente non è possibile dedurre dallo spettro del segnale campionato lo spettro del segnale tempo-continuo che lo ha prodotto.

## 5.2 Teorema del campionamento

**Teorema 10 (Teorema di Shannon)** *Un segnale  $f(t)$ , continuo negli istanti di campionamento  $kT$ , la cui trasformata di Fourier*

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt,$$

*è nulla fuori dall'intervallo  $(-\omega_0, \omega_0)$ , può essere ricostruito esattamente a partire dai suoi campioni se  $\omega_s \geq 2\omega_0$ , con  $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$*

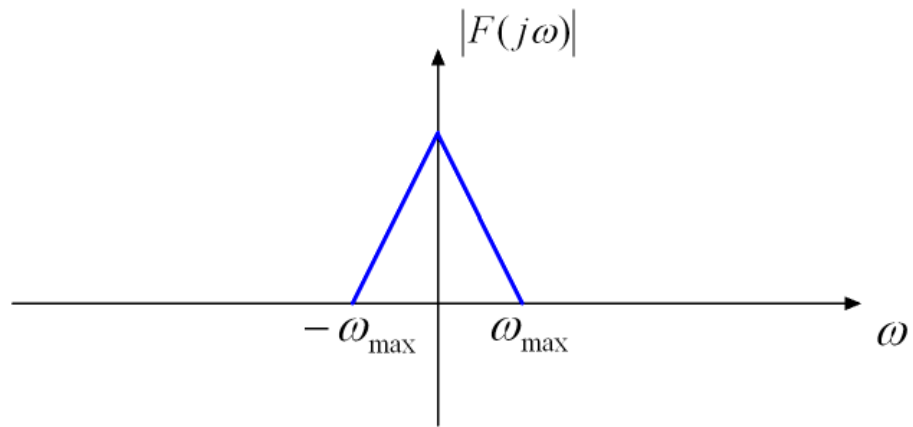
*Inoltre il segnale tempo-continuo  $f(t)$  può essere ottenuto mediante la seguente formula di interpolazione*

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k \frac{\sin\left(\frac{\omega_s(t-kT)}{2}\right)}{\frac{\omega_s(t-kT)}{2}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k \operatorname{sinc} \frac{\omega_s(t-kT)}{2}. \quad (5.5)$$

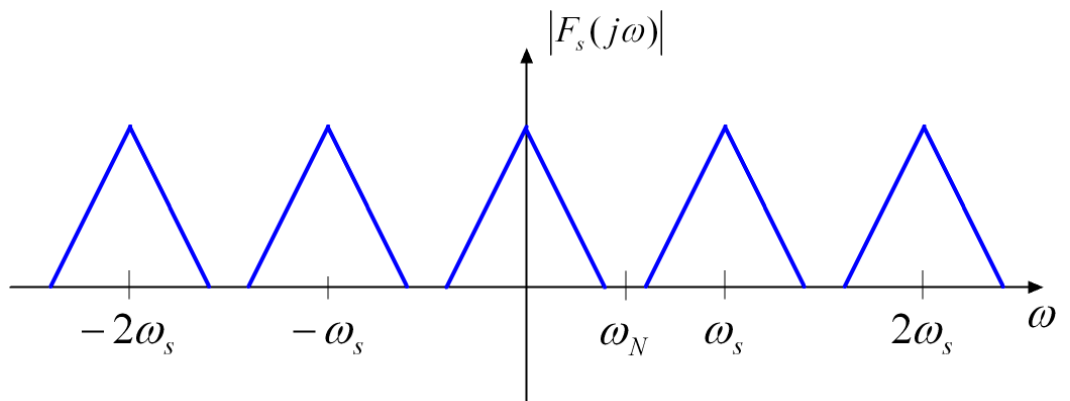
**Dimostrazione.**

Si indichi con

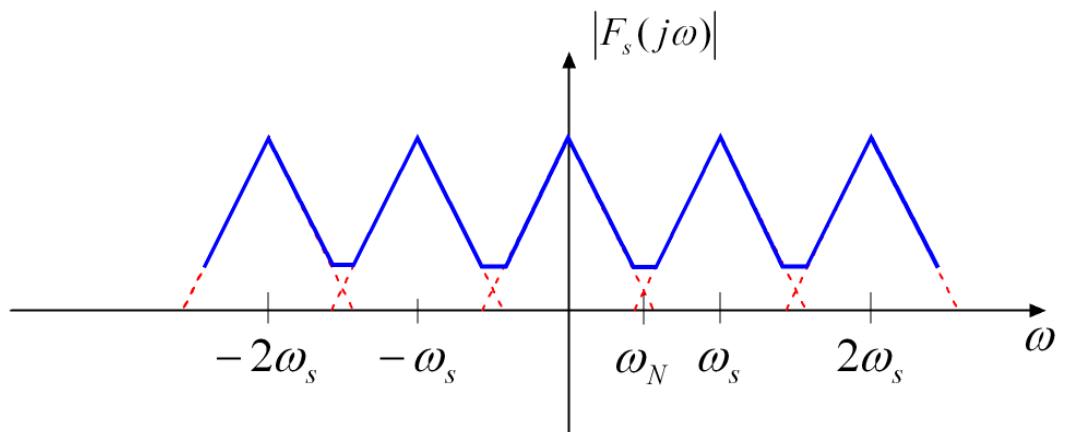
$$\tilde{F}_s(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(j(\omega - k\omega_s)),$$



(a) Modulo di  $F(j\omega)$ .



(b) Modulo di  $F_s(j\omega)$  con  $\omega_{max} < \omega_N$ .



(c) Modulo di  $F_s(j\omega)$  con  $\omega_{max} > \omega_N$ .

Figura 5.1: Esempio di costruzione di  $F_s(j\omega)$  a partire da  $F(j\omega)$ .

$\tilde{F}_s(j\omega)$  è una funzione complessa periodica di periodo  $\omega_s$ , pertanto è possibile farne uno sviluppo in serie di Fourier

$$\tilde{F}_s(j\omega) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} F_h e^{-jhT\omega},$$

dove

$$\begin{aligned} F_h &= \frac{1}{\omega_s} \int_0^{\omega_s} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(j(\omega - k\omega_s)) e^{jhT\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\omega_s} F(j(\omega - k\omega_s)) e^{jhT\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-k\omega_s}^{-(k-1)\omega_s} F(j\sigma) e^{jhT(\sigma+k\omega_s)} d\sigma \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-k\omega_s}^{-(k-1)\omega_s} F(j\sigma) e^{jhT\sigma} d\sigma. \end{aligned}$$

Essendo  $F(j\sigma) = 0$  all'esterno dell'intervallo  $(-\omega_0, \omega_0)$ , dato che per ipotesi  $\omega_0 \leq \frac{\omega_s}{2}$ , gli unici due contributi alla sommatoria sono quelli per  $k = 0$  e  $k = 1$ , quindi

$$F_h = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_s}^{\omega_s} F(j\sigma) e^{jhT\sigma} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\sigma) e^{jhT\sigma} d\sigma = f(hT) = f_h.$$

Perciù è possibile scrivere

$$\tilde{F}_s(j\omega) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} f_h e^{-jhT\omega}. \quad (5.6)$$

Sfruttando la (5.6), si calcoli  $f(t)$  antitrasformando  $F(j\omega)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Per ipotesi  $F(j\omega) = T\tilde{F}_s(j\omega)$  nell'intervallo  $(-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2})$ , mentre  $F(j\omega) = 0$  all'esterno dello stesso intervallo, quindi

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} \tilde{F}_s(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k e^{-jkT\omega} \right) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\omega_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} e^{j\omega(t-kT)} d\omega = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k \frac{1}{j\omega_s(t-kT)} \left( e^{j\frac{\omega_s}{2}(t-kT)} - e^{-j\frac{\omega_s}{2}(t-kT)} \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k \frac{\sin\left(\frac{\omega_s(t-kT)}{2}\right)}{\frac{\omega_s(t-kT)}{2}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k \operatorname{sinc} \frac{\omega_s(t-kT)}{2}. \end{aligned}$$

■

**Osservazione 3** Il ricostruttore proposto nel Teorema 10 è ideale, perchè per poter ricostruire il segnale  $f(t)$  ha bisogno di tutti gli infiniti campioni di  $f(t)$ , passati e futuri. Introducendo un ritardo nella ricostruzione, tanto maggiore quanto maggiore è la precisione desiderata, è comunque possibile utilizzare la (5.5) per ricostruire il segnale  $f(t)$  a partire dai suoi campioni. L'introduzione di questo ritardo, di fatto, fa sì che la (5.5) non venga mai utilizzata nell'ambito dei sistemi di controllo.  $\diamond$

### 5.3 Caratterizzazione in frequenza di un ZOH

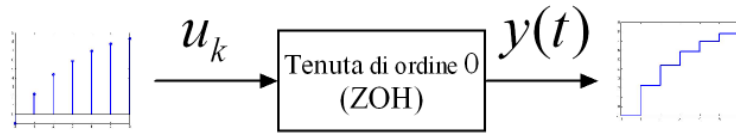


Figura 5.2: Zero Order Holder - ZOH.

Per caratterizzare il comportamento in frequenza di un mantentore di ordine 0 (*Zero Order Holder* - ZOH), quello che si è soliti fare è trovare una relazione tra la trasformata  $\mathcal{Z}$  della sequenza d'ingresso e la trasformata di Laplace del segnale d'uscita.

Inizialmente si supponga  $u_k = \delta_k$ , quindi  $U(z) = 1$ . In questo caso è immediato verificare che l'uscita dello ZOH è pari a

$$y(t) = h_0(t) = 1(t) - 1(t - T), \quad (5.7)$$

se  $T$  è il tempo di tenuta pari al periodo di campionamento. Trasformando la (5.7) secondo Laplace si ha

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}.$$

Per una generica sequenza d'ingresso  $u_k$ , sarà

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k z^{-k},$$

quindi

$$y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k h_0(t - kT). \quad (5.8)$$

Trasformando la (5.8) secondo Laplace si ottiene

$$Y(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k e^{-skT} H_0(s) = H_0(s) U^*(e^{sT}),$$

pertanto  $H_0(s)$  rappresenta il rapporto tra la trasformata di Laplace dell'uscita e la trasformata  $\mathcal{Z}$  dell'ingresso valutata in  $z = e^{sT}$ . In senso lato, quindi,

$H_0(s)$  può essere considerata la funzione di trasferimento dello ZOH. È possibile, inoltre, considerare la risposta armonica  $H_0(j\omega)$ , ottenendo

$$H_0(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = e^{-j\frac{\omega T}{2}} T \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} = T e^{-j\frac{\omega T}{2}} \operatorname{sinc} \frac{\omega T}{2}.$$

**Quindi la conversione digitale-analogico mediante ZOH introduce un ritardo pari a  $\frac{T}{2}$  e una distorsione in ampiezza.**

In Figura 5.3 sono riportati i diagrammi della risposta armonica di  $T \cdot H_0(j\omega)$  per un valore di  $T$  pari a 0.01. I punti di discontinuità della fase sono dovuti ai cambiamenti di segno del termine reale  $\sin \frac{\omega T}{2}$ .

Si noti che nell'intervallo  $[0, \omega_N]$ , con  $\omega_N = 100\pi$ , il modulo può ritenersi pressochè costante. Pertanto, nella banda  $[0, \omega_N]$ , l'effetto principale di campionatore più ZOH è quello di introdurre un ritardo pari a  $\frac{T}{2}$ .

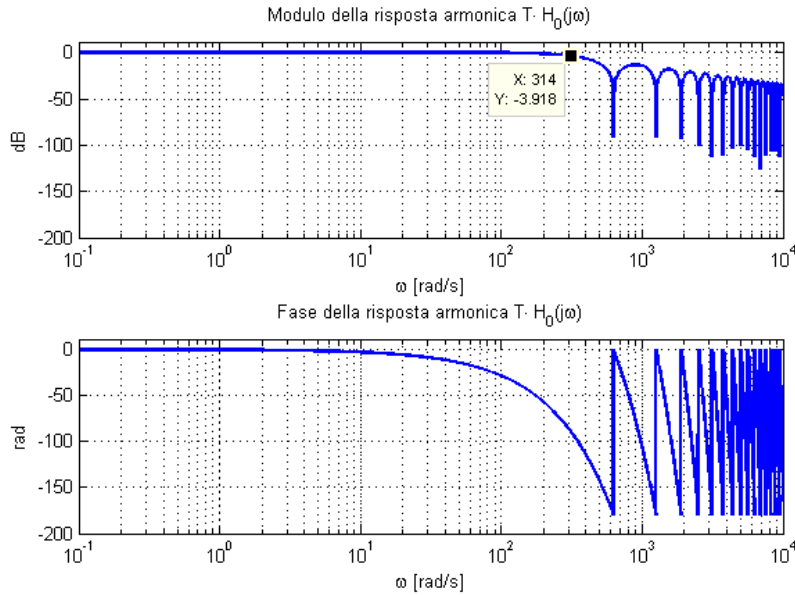


Figura 5.3: Diagrammi della risposta armonica  $T \cdot H_0(j\omega)$  per  $T = 10$  ms.

## 5.4 Sintesi nel continuo e discretizzazione del controllore

Partendo dai risultati presentati nelle sezioni precedenti, nell'ipotesi che il segnale d'errore  $e(t)$  sia un segnale a banda limitata, è possibile dimostrare che, scegliendo opportunamente il periodo di campionamento  $T$ , nell'intervallo  $[0, \omega_N]$  vale la seguente eguaglianza

$$R_c(j\omega) = e^{-j\frac{\omega T}{2}} R_d(e^{j\omega T}),$$

dove  $R_d(e^{j\omega T})$  e  $R_c(j\omega)$  indicano la risposta armonica del controllore tempo-discreto e del suo equivalente nel tempo-continuo<sup>1</sup>.

Il termine di ritardo  $e^{-j\frac{\omega T}{2}}$  è dovuto alla presenza del mantentore di ordine zero e contribuisce alla risposta armonica solamente in termini di sfasamento. In particolare il suo contributo alla pulsazione critica  $\omega_c$  è pari a

$$\varphi_0 = -\omega_c \frac{T}{2} \frac{180}{\pi} = -\frac{\omega_c}{\omega_s} 180^\circ,$$

ed è tanto più grande quanto più la pulsazione critica  $\omega_c$  è vicina alla pulsazione di campionamento  $\omega_s$ .

Un approccio molto utilizzato per la sintesi di sistemi di controllo digitale consiste nel

- scegliere il periodo di campionamento  $T$  in maniera tale che risulti  $\omega_c < \omega_N = \frac{\omega_s}{2}$ ;
- progettare il regolatore analogico  $R_c(s)$  in modo da assicurare un'adeguata eccedenza nel margine di fase rispetto alle specifiche originarie, in maniera tale da compensare l'effetto introdotto dallo ZOH;
- discretizzare il regolatore  $R_c(s)$  per ottenere il regolatore tempo-discreto  $R_d(z)$ .

Per ottenere  $R_d(z)$  si potrebbe utilizzare la trasformazione inversa di campionamento

$$s = \frac{1}{T} \ln z,$$

ma in questo modo non si otterrebbe un regolatore tempo-discreto a dimensione finita, perchè non avrebbe una f.d.t. razionale fratta.

Pertanto quello che viene fatto nella pratica è ottenere un approssimazione tempo-discreta del regolatore  $R_c(s)$  mediante una delle tecniche di discretizzazione che verranno presentate nel Capitolo 6.

## 5.5 Scelta del periodo di campionamento

La scelta del periodo di campionamento  $T$ , e quindi della pulsazione  $\omega_s$ , va effettuata tenendo conto di varie esigenze. In particolare

**Costo dei dispositivi** - All'aumentare della frequenza di campionamento, cresce il costo sia dei convertitori A/D e D/A, sia dei processori sui quali viene implementata la legge di controllo.

**Problemi di tipo numerico** - Al diminuire del periodo di campionamento  $T$  possono nascere problemi legati alla rappresentazione dei numeri in aritmetica finita all'interno degli organi di elaborazione (*underflow*). Quindi, oltre ai motivi legati al costo dei dispositivi, esistono altri fattori che limitano verso l'alto il valore della frequenza di campionamento.

<sup>1</sup>Si ricordi che la risposta armonica  $R_c(j\omega)$  è definita come rapporto tra gli spettri di ingresso  $E(j\omega)$  e uscita  $U(j\omega)$  al regolatore.

<sup>2</sup>Scegliendo  $\omega_s > 6\omega_c$  la distorsione d'ampiezza introdotta dallo ZOH può essere completamente trascurata.



**Banda del sistema di controllo** - La pulsazione di campionamento  $\omega_s$  scelta anche tenendo conto della dinamica desiderata del sistema a ciclo chiuso. Se il sistema a ciclo chiuso ha un comportamento di tipo passa-basso con banda passante  $\omega_B \cong \omega_c$ , per il Teorema di Shannon deve essere  $\omega_c < \omega_N$ , quindi  $\omega_s > 2\omega_c$ .

**Filtro anti-aliasing** Siccome i segnali reali non hanno banda limitata, è necessario effettuare in filtraggio anti-aliasing della grandezza d'uscita  $y(t)$ . I filtri anti-aliasing reali sono filtri passa-basso che introducono uno sfasamento. Per evitare che questo sfasamento produca inaccettabili diminuzioni del margine di fase, pregiudicando le prestazioni del sistema di controllo, è opportuno che la pulsazione di taglio del filtro anti-aliasing  $\omega_f$  sia  $\omega_f \gg \omega_c$ . Quindi  $\omega_s > 2\omega_f \gg 2\omega_c$ .

Alla luce delle considerazioni fatte, una scelta tipica per la pulsazione di campionamento è la seguente

$$\alpha\omega_c \leq \omega_s \leq 10\alpha\omega_c,$$

scelta che va comunque adattata caso per caso anche alla luce di altre considerazioni specifiche.



# CAPITOLO 6

---

## Metodi di discretizzazione

---

IN questo capitolo vengono presentate alcune tecniche di discretizzazione. L'utilizzo di tali tecniche consente di ottenere un regolatore tempo-discreto  $R_d(z)$  a partire da un regolatore tempo-continuo  $R_c(s)$  progettato seguendo l'approccio delineato nel paragrafo 5.4.

Per approfondimenti si faccia riferimento a [2, Paragrafi 17.7 e 18.3] e [4, Chapter 8]

### 6.1 Metodo FOH predittivo

Si supponga di poter utilizzare un organo di tenuta di ordine 1 (*First-Order Holder*, FOH) per ricostruire, a partire dalla sequenza  $u_k$ , il segnale in ingresso ad un sistema LTI tempo-continuo. In particolare si supponga di utilizzare un ricostruttore FOH *predittivo*, cioè un dispositivo che consenta di realizzare la seguente approssimazione

$$u(t) = u(kT) + \frac{u((k+1)T) - u(kT)}{T} \cdot (t - kT), \quad kT \leq t \leq (k+1)T \quad (6.1)$$

Si osservi che, a rigore, un ricostruttore FOH predittivo è *anticausale*.

Integrando tra  $kT$  e  $(k+1)T$  l'equazione di stato di un sistema LTI tempo-continuo (1.8), tenendo conto dell'approssimazione dell'ingresso data dalla (6.1),

si ottiene

$$\begin{aligned}
x((k+1)T) &= e^{AT}x(kT) \\
&+ \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\sigma)} B \left[ u(kT) + \frac{u((k+1)T) - u(kT)}{T} \cdot (\sigma - kT) \right] d\sigma \\
&= e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\sigma)} d\sigma B u(kT) \\
&+ \frac{1}{T} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\sigma)} (\sigma - kT) d\sigma B \left[ u((k+1)T) - u(kT) \right] \\
&= A_d x(kT) + B_{d0} u(kT) + \frac{1}{T} B_{d1} \left[ u((k+1)T) - u(kT) \right],
\end{aligned}$$

dove

$$A_d = e^{AT}, \quad B_{d0} = \int_0^T e^{A\eta} d\eta B, \quad B_{d1} = \int_0^T e^{A\eta} (T - \eta) d\eta B.$$

Il calcolo delle matrici  $A_d$ ,  $B_{d0}$  e  $B_{d1}$  può essere fatto in maniera semplice osservando che

$$\begin{aligned}
\Phi(t) = e^{At} &\Rightarrow \frac{d}{dt} \Phi(t) = \Phi(t)A, \\
\Gamma_0(t) = \int_0^t e^{A\eta} d\eta B &\Rightarrow \frac{d}{dt} \Gamma_0(t) = \Phi(t)B, \\
\Gamma_1(t) = \int_0^t e^{A\eta} (t - \eta) d\eta &\Rightarrow \frac{d}{dt} \Gamma_1(t) = \Gamma_0(t).
\end{aligned}$$

Quindi  $A_d$ ,  $B_{d0}$  e  $B_{d1}$  possono essere ottenute come prima riga della soluzione dell'equazione differenziale matriciale

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Phi(t) & \Gamma_0(t) & \Gamma_1(t) \\ 0 & I & It \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi(t) & \Gamma_0(t) & \Gamma_1(t) \\ 0 & I & It \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

valutata in  $T$ , cioè

$$\begin{pmatrix} A_d & B_{d0} & B_{d1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp \left[ \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T \right].$$

A partire dalla relazione

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_{d0} u_k + \frac{1}{T} B_{d1} (u_{k+1} - u_k),$$

ponendo

$$\xi_k = x_k - \frac{1}{T} B_{d1} u_k$$

è possibile determinare la seguente rappresentazione I-S-U del sistema tempo-discreto

$$\xi_{k+1} = A_d \xi_k + \left( B_{d0} + \frac{1}{T} (A_d - I) B_{d1} \right) u_k \quad (6.2a)$$

$$y_k = C \xi_k + \left( \frac{1}{T} C B_{d1} + D \right) u_k \quad (6.2b)$$

Dalla (6.2b) si può notare che utilizzando l'approssimazione con metodo FOH predittivo si ottiene sempre un sistema non strettamente proprio anche quando partendo da un sistema tempo-continuo con  $D = 0$ .

**Esempio 7** Si consideri il sistema tempo-continuo

$$R_c(s) = \frac{1}{s^2}, \quad (6.3)$$

che ammette la seguente rappresentazione I-S-U

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= (0 \quad 1) x(t) \end{aligned}$$

L'esponenziale della matrice

$$\Delta = \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & T & 0 \\ T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

può essere facilmente calcolato tenendo conto che

$$\Delta^k = 0, \quad k \geq 4$$

e che

$$\Delta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & T^2 \\ 0 & 0 & T^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In definitiva si ha

$$e^{\Delta T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & T & \frac{T^2}{2} \\ T & 1 & \frac{T^2}{2} & \frac{T^3}{6} \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dalla quale è possibile ottenere le matrici

$$A_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{d0} = \begin{pmatrix} T \\ \frac{T^2}{2} \end{pmatrix}, \quad B_{d1} = \begin{pmatrix} \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^3}{6} \end{pmatrix}.$$

Pertanto è possibile ottenere la seguente rappresentazione I-S-U dell'approssimazione di tempo-discreto di (6.3) ottenuta mediante il metodo FOH predittivo

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix} \xi_k + \begin{pmatrix} T + \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} \end{pmatrix} u_k \\ y_k &= (0 \quad 1) \xi_k + \frac{T^2}{6} u_k \end{aligned}$$

Per  $T = 1$  si ottiene la seguente f.d.t. tempo-discreto<sup>1</sup>

$$R_d(z) = \frac{\frac{z^2}{6} + \frac{2}{3}z + \frac{1}{6}}{z^2 - 2z + 1}.$$

■

<sup>1</sup>È possibile verificare questo risultato utilizzando il comando Matlab `c2d(tf(1,[1 0 0]),1,'foh')`.

## 6.2 Metodo della trasformazione bilineare

Il regolatore tempo-continuo al quale si perviene adottando l'approccio alla sintesi riportato nel paragrafo 5.4 è un sistema dinamico LTI e SISO e pertanto è descritto dalle seguenti equazioni

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Be(t) \quad (6.4a)$$

$$u(t) = Cx(t) + De(t) \quad (6.4b)$$

Sia  $T$  il periodo di campionamento del sistema di controllo digitale, integrando la (6.4a) tra due istanti di campionamento  $kT$  e  $(k+1)T$  si ottiene

$$x_{k+1} - x_k = A \int_{kT}^{(k+1)T} x(t)dt + B \int_{kT}^{(k+1)T} e(t)dt. \quad (6.5)$$

Conoscendo i valori delle grandezze in gioco agli istanti  $kT$  e  $(k+1)T$ , gli integrali in (6.5) possono essere approssimati utilizzando la combinazione convessa

$$\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)dt \cong [(1-\alpha)f_k + \alpha f_{k+1}]T, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (6.6)$$

Utilizzando l'approssimazione (6.6) in (6.5) si ha<sup>2</sup>

$$x_{k+1} - x_k = A[(1-\alpha)x_k + \alpha x_{k+1}]T + B[(1-\alpha)e_k + \alpha e_{k+1}]T. \quad (6.7)$$

Valutando la (6.4b) negli istanti di campionamento si ha

$$u_k = Cx_k + De_k. \quad (6.8)$$

Facendo la  $\mathcal{Z}$ -trasformata della (6.7) si ottiene

$$X(z) = \left[ \frac{1}{T} \cdot \frac{z-1}{\alpha z + 1 - \alpha} I - A \right]^{-1} BE(z). \quad (6.9)$$

Trasformando anche la (6.8) e sfruttando la (6.9) si ottiene la seguente **legame approssimato** tra la  $\mathcal{Z}$ -trasformata del segnale d'ingresso al controllore e la  $\mathcal{Z}$ -trasformata dell'uscita

$$U(z) = \left\{ C \left[ \frac{1}{T} \cdot \frac{z-1}{\alpha z + 1 - \alpha} I - A \right]^{-1} B + D \right\} E(z). \quad (6.10)$$

Ricordando l'espressione della f.d.t. di un sistema LTI tempo-continuo, segue che la (6.10) può essere vista come la f.d.t. del regolatore tempo-continuo  $R_c(s)$  valutata in

$$s = \frac{1}{T} \cdot \frac{z-1}{\alpha z + 1 - \alpha}.$$

Quindi una possibile approssimazione tempo-discreto di  $R_c(s)$  è data da

$$R_d(z) = R_c \left( \frac{1}{T} \cdot \frac{z-1}{\alpha z + 1 - \alpha} \right).$$

Diverse approssimazioni sono possibili in base al valore di  $\alpha$ . Le approssimazioni utilizzate nella pratica sono

<sup>2</sup>A rigore la (6.7) non vale con il segno di uguaglianza, avendo utilizzato un'approssimazione degli integrali.

**Eulero in avanti** ( $\alpha = 0$ )

$$s = \frac{z-1}{T}$$

**Eulero all'indietro** ( $\alpha = 1$ )

$$s = \frac{z-1}{Tz}$$

**Tustin** ( $\alpha = 0.5$ )

$$s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}$$

Nei paragrafi successivi verranno brevemente discusse alcune delle proprietà di ognuno di questi metodi di discretizzazione.

### 6.2.1 Eulero in avanti

La trasformazione di *Eulero in avanti* mappa il semipiano  $\Re(s) < 0$  nel semipiano  $\Re(z) < 1$ , infatti

$$\Re(s) < 0 \Leftrightarrow \Re\left(\frac{z-1}{T}\right) < 0 \Leftrightarrow \Re(z) < 1$$

Pertanto effettuando questo tipo di trasformazione è possibile ottenere  $R_d(z)$  instabile a partire da  $R_c(s)$  stabile.

### 6.2.2 Eulero all'indietro

La trasformazione di *Eulero all'indietro* mappa il semipiano  $\Re(s) < 0$  nella circonferenza di raggio 0.5 e centro in  $(0.5, 0)$ , infatti

$$\begin{aligned} \Re(s) < 0 &\Leftrightarrow \Re\left(\frac{z-1}{zT}\right) < 0 \\ &\Leftrightarrow \Re\left(\left((\Re(z)-1) + j\Im(z)\right)\left(\Re(z) - j\Im(z)\right)\right) < 0 \\ &\Leftrightarrow \Re(z)^2 + \Im(z)^2 - \Re(z) < 0 \end{aligned}$$

Quindi quando si il metodo di *Eulero all'indietro* per discretizzare il controllore si ha che

- tutti i controllori stabili  $R_c(s)$  vengono trasformati in controllori stabili  $R_d(z)$ ;
- esiste la possibilità che controllori  $R_c(s)$  instabili vengono trasformati in controllori  $R_d(z)$  stabili;

### 6.2.3 Tustin

La trasformazione di *Tustin* mappa il semipiano  $\Re(s) < 0$  nella circonferenza di raggio unitario e centro nell'origine dato che

$$\begin{aligned}\Re(s) < 0 &\Leftrightarrow \Re\left(\frac{2(z-1)}{T(z+1)}\right) < 0 \\ \Leftrightarrow \Re\left(\left((\Re(z)-1) + j\Im(z)\right)\left((\Re(z)+1) - j\Im(z)\right)\right) < 0 \\ &\Leftrightarrow \Re(z)^2 + \Im(z)^2 < 1\end{aligned}$$

Con *Tustin* quindi

- si *conserva* la stabilità del controllore;
- i poli ad alta frequenza di  $R_d(z)$  tendono a -1, infatti

$$z = \frac{1 + s\frac{T}{2}}{1 - s\frac{T}{2}},$$

quindi in presenza di poli ad alta frequenza nel controllore, il segnale di controllo  $u_k$  potrebbe presentare oscillazioni.

È possibile dimostrare anche che con *Tustin* si introduce una *compressione in frequenza*.

**Esempio 8** *Si consideri seguente la f.d.t. tempo-continuo*

$$R_c(s) = \frac{0.2s + 1}{\frac{s^2}{500^2} + \frac{0.3}{500}s + 1}.$$

Se  $T = 2\text{ ms}$  si ottiene

**Eulero in avanti**

$$R_{d_1}(z) = \frac{100z - 90}{z^2 - 1.7z + 1.7}$$

**Eulero all'indietro**

$$R_{d_2}(z) = \frac{110z^2 - 100z}{2.3z^2 - 2.3z + 1}$$

**Tustin**

$$R_{d_3}(z) = \frac{37.5z^2 + 3.6z - 33.9}{z^2 - 1.1z + 0.8}$$

È facile verificare che, pur partendo da un regolatore asintoticamente stabile, con la trasformazione di Eulero in avanti si ottiene un regolatore instabile. In Figura 6.1 è riportato l'andamento della risposta al gradino per  $R_c(s)$ ,  $R_{d_2}(z)$  e  $R_{d_3}(z)$ . La Figura 6.2, invece, riporta i diagrammi di Bode della f.d.t. tempo-continuo e delle varie discretizzazioni. Si noti che tutti i metodi di discretizzazione derivanti dalla trasformazione bilineare distorcono l'asse delle frequenze e che, in particolare, l'adozione del metodo di Tustin comporta la compressione dell'asse delle frequenze. ■



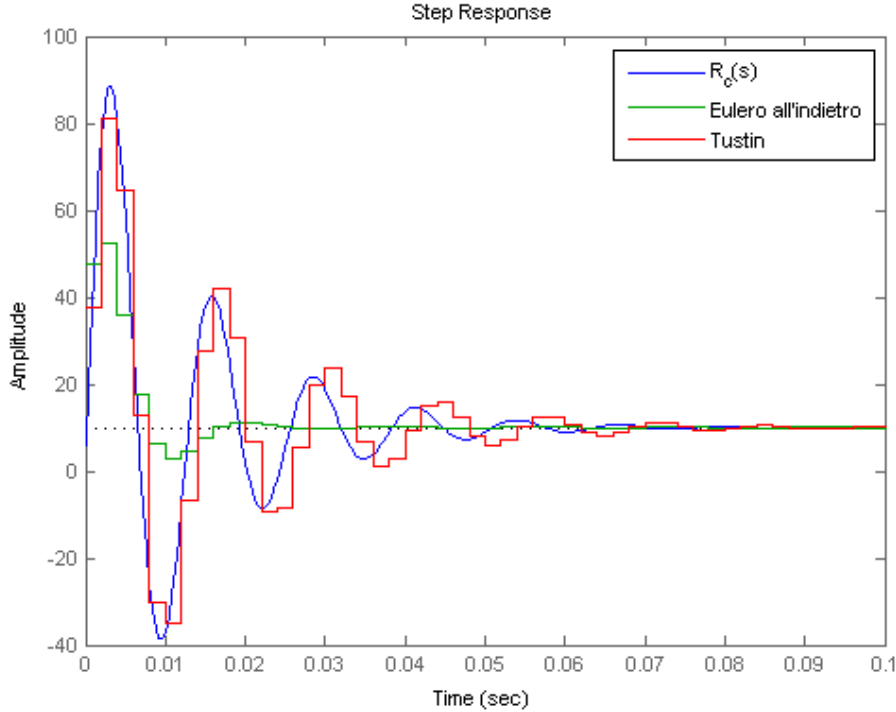


Figura 6.1: Confronto nel dominio del tempo. Risposta al gradino di  $R_c(s)$ ,  $R_{d_2}(z)$  e  $R_{d_3}(z)$ .

### 6.2.4 Tustin con pre-warping

La distorsione in frequenza che si ottiene quando si discretizza una f.d.t. tempo-continuo con il metodo della trasformazione bilineare, potrebbe causare problemi quando si è interessati a realizzare filtri che lavorino a frequenze ben precise<sup>3</sup>. Ad esempio, nel caso di filtri a spillo, la distorsione dovuta alla discretizzazione comporterebbe una variazione della frequenza di risonanza (antirisonanza).

Per ovviare a questo problema è possibile utilizzare un pre-compensazione in frequenza in maniera tale che, ad una determinata pulsazione  $\bar{\omega}$ , risulti

$$R_d(e^{j\bar{\omega}T}) = R_c(j\bar{\omega}). \quad (6.11)$$

In particolare, si consideri l'approssimazione ottenuta con il metodo di *Tustin*

$$R_d(z) = R_c\left(\frac{2(z-1)}{T(z+1)}\right),$$

<sup>3</sup>Nell'esempio di Figura 6.2 la frequenza del picco di risonanza varia a seconda del metodo di discretizzazione utilizzato.

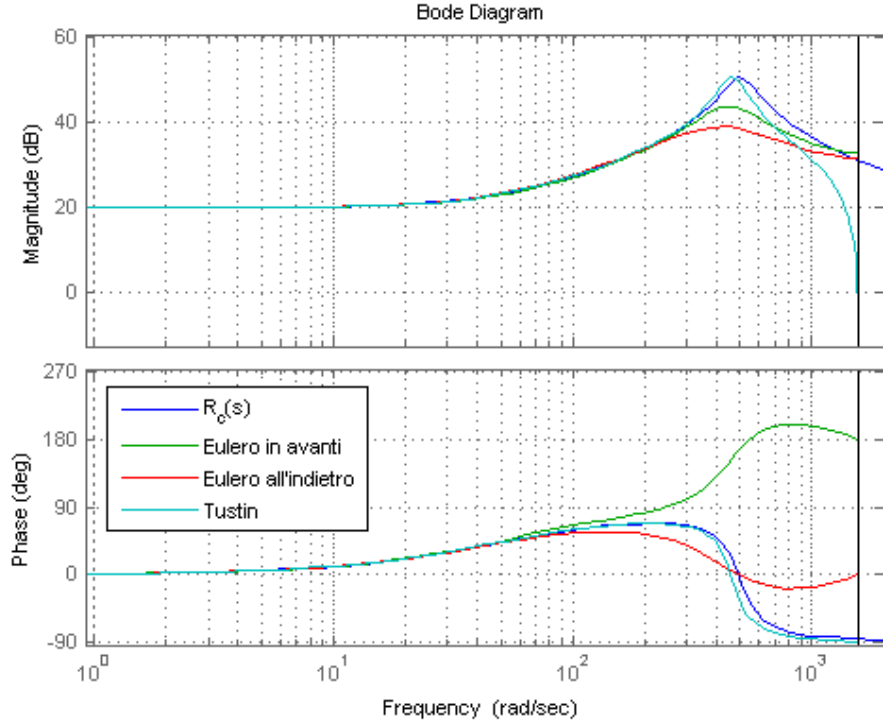


Figura 6.2: Diagrammi di Bode di  $R_c(s)$ ,  $R_{d_1}(z)$ ,  $R_{d_2}(z)$  e  $R_{d_3}(z)$ .

da cui si ottiene la seguente espressione della risposta in frequenza del regolatore discretizzato

$$R_d(e^{j\omega T}) = R_c\left(\frac{2}{T} \cdot \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1}\right) = R_c\left(j \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}\right) \quad (6.12)$$

Tenendo conto della (6.12), se si vuole soddisfare la (6.11) per un determinato valore di  $\omega = \bar{\omega}$ , è sufficiente utilizzare il seguente metodo di discretizzazione

$$R_d(e^{j\omega T}) = R_c\left(\frac{\bar{\omega}}{\tan \frac{\bar{\omega} T}{2}} \cdot \frac{z - 1}{z + 1}\right).$$

La trasformazione

$$s = \frac{\bar{\omega}}{\tan \frac{\bar{\omega} T}{2}} \cdot \frac{z - 1}{z + 1},$$

prende il nome di trasformazione di *Tustin con prewarping*. In Figura 6.3 è riportato l'andamento dei diagrammi di Bode di due regolatori tempo-discreto ottenuti con il metodo di *Tustin* e di *Tustin con prewarping*. La pulsazione  $\bar{\omega}$  è stata scelta pari alla pulsazione del picco di risonanza della  $R_c(j\omega)$ .

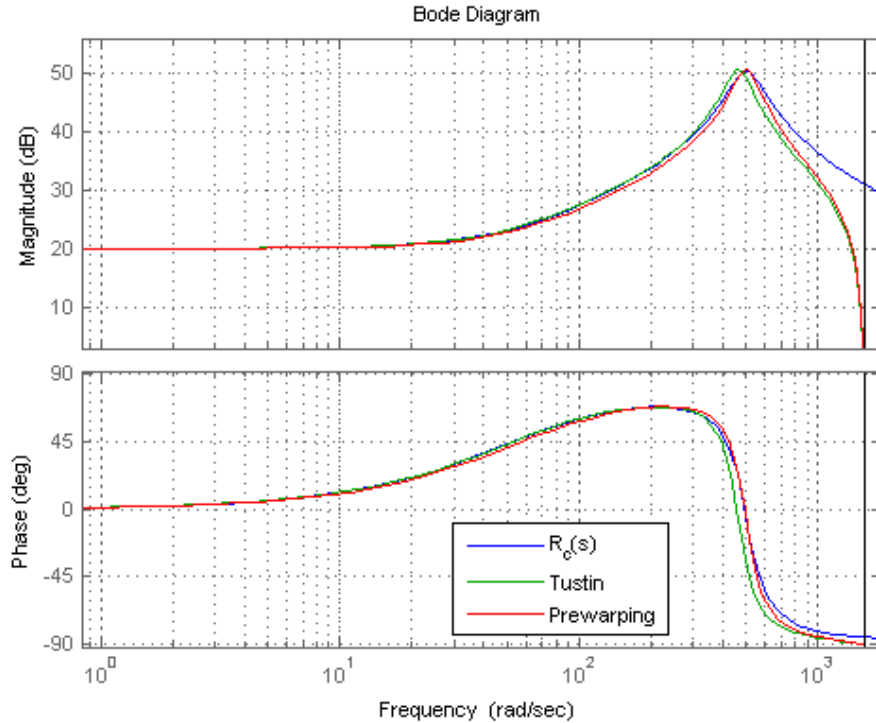


Figura 6.3: Diagrammi di Bode di  $R_c(s)$  e delle due realizzazioni tempo-discreto ottenuto che il metodo di *Tustin* e di *Tustin con prewarping*.

### 6.3 Metodo dell'invarianza della risposta all'impulso

Questo metodo di discretizzazione consente di mantenere invariata la risposta all'impulso della versione tempo-discreto  $R_d(z)$  del regolatore tempo-continuo  $R_c(s)$ . Tenendo conto della definizione di f.d.t. per sistemi SISO, la  $R_d(z)$  si ottiene come

$$R_d(z) = \mathcal{Z} \left[ \mathcal{L}^{-1} \left[ R_c(s) \right] \right].$$

Vale a dire  $R_d(z)$  si ottiene come trasformata  $\mathcal{Z}$  della risposta all'impulso di  $R_c(s)$  campionata negli istanti multipli del periodo di campionamento  $T$ .

Con un metodo analogo è possibile ottenere una discretizzazione che preservi la risposta al gradino.

**Esempio 9** *Si consideri la seguente f.d.t.*

$$R_c(s) = \frac{10}{s(s+1)},$$

è immediato verificare che la risposta all'impulso nel dominio è

$$y(t) = 10(1 - e^{-t}) \cdot 1(t). \quad (6.13)$$

Campionando la (6.13) in  $t = kT$  si ottiene

$$y_k = 10(1 - e^{-kT}) \cdot 1_k. \quad (6.14)$$

Infine, trasformando la (6.14), si ottiene la seguente realizzazione tempo-discreto di  $R_c(s)$

$$R_d(z) = \mathcal{Z}[y_k] = \frac{10z}{z-1} - \frac{10z}{(z-e^{-T})} = \frac{10z(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}.$$

■

## 6.4 Metodo della corrispondenza poli/zeri

Questo metodo, anche detto *pole-zero mapping*, prevede la trasformazione diretta di poli e zeri di  $R_c(s)$  secondo la trasformazione di campionamento (4.7). In particolare la realizzazione tempo-discreto  $R_d(z)$  si ottiene nel modo seguente

1. si effettua la trasformati dei singoli poli e zeri mediante la trasformazione di campionamento (4.7)
2. si introducono tanti zeri in  $z = -1$  quanti sono i poli di  $R_c(s)$  in eccesso agli zeri al finito;
3. si compensa il guadagno statico.

In alcune implementazioni di questo metodo di discretizzazione, il passo 2 non viene realizzato<sup>4</sup>.

**Esempio 10** *Data la seguente f.d.t.*

$$R_c(s) = \frac{10(s+5)}{(1+10s)(s+1)},$$

è facile verificare che la realizzazione tempo-discreto ottenuta mediante il metodo della corrispondenza poli/zeri è

$$R_d(z) = \frac{50(1-e^{-T})(1-e^{-0.1T})}{2(1-e^{-5T})} \frac{(z+1)(z-e^{-5T})}{(z-e^{-T})(z-e^{-0.1T})}.$$

■

<sup>4</sup>Questo avviene, ad esempio, quando si utilizza il metodo 'matched' con la funzione `c2d` di Matlab.

# APPENDICE A

---

## Richiami di calcolo matriciale

---

IN questa appendice vengono richiamate brevemente alcune nozioni di calcolo matriciale. Per una trattazione più esaustiva si faccia riferimento all'appendice A in [2].

### A.1 Autovalori e autovettori

Data una matrice quadrata  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , il *polinomio caratteristico* associato è

$$\varphi(\lambda) = |\lambda I - A|,$$

dove  $|\cdot|$  indica il determinante di una matrice quadrata. Gli *autovalori* di una matrice quadrata  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sono le radici  $n$  radici dell'*equazione caratteristica*

$$\varphi(\lambda) = 0.$$

Si noti che, essendo i coefficienti di  $\varphi(\lambda)$  reali, gli autovalori di  $A$  sono reali oppure complessi e coniugati.

Data una matrice quadrata  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e un suo autovalore  $\lambda_i$ , un *autovettore*  $v_i \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  associato a  $\lambda_i$  è un vettore che soddisfa la seguente equazione

$$Av_i = \lambda_i v_i. \tag{A.1}$$

Dalla (A.1) si può concludere che applicando la trasformazione lineare definita dalla matrice  $A$  autovettore  $v_i$  si ottiene un vettore lungo la stessa direzione di  $v_i$ , il cui modulo risulta

- maggiore del modulo di  $v_i$ , se  $|\lambda_i| > 1$ ;
- minore del modulo di  $v_i$ , se  $|\lambda_i| < 1$ ;
- uguale al modulo di  $v_i$ , se  $|\lambda_i| = 1$ .

## A.2 Forma diagonale

Si supponga che gli autovalori di  $A$  siano distinti. Si indichi con  $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matrice diagonale che ha sulla diagonale principale gli autovalori di  $A$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

e con  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matrice

$$V = (v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n),$$

dove  $v_i$  è un autovettore associato all'autovalore  $\lambda_i$ . Dalla (A.1) segue che

$$AV = V\Lambda.$$

È possibile dimostrare che, nell'ipotesi di autovalori distinti, la matrice  $V$  è invertibile, quindi

$$\Lambda = V^{-1}AV.$$

Ne segue che la matrice  $A$  è simile<sup>1</sup> alla matrice diagonale  $\Lambda$ . In questo caso  $A$  si dice *diagonalizzabile*.

Se si rimuove l'ipotesi di autovalori distinti, si può dimostrare che  $A$  è simile ad una matrice diagonale a blocchi detta *forma di Jordan*. (vedi [2, pp.500–501]).

## A.3 Potenza di una matrice

Data una matrice quadrata  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , la matrice potenza è definita come

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdots A}_{k \text{ volte}}.$$

Se  $A$  è diagonalizzabile, allora

$$\begin{aligned} A^k &= (V\Lambda V^{-1})^k = \underbrace{(V\Lambda V^{-1}) \cdot (V\Lambda V^{-1}) \cdots (V\Lambda V^{-1})}_{k \text{ volte}} = V\Lambda^k V^{-1} \\ &= V \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} V^{-1}. \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

**Osservazione 4** Dalla (A.2) segue che ogni elemento della matrice  $A^k$  è una combinazione lineare di esponenziali le cui basi sono coincidenti con gli autovalori di  $A$ . ■

Un risultato analogo vale quando  $A$  può essere messa in forma di Jordan.

<sup>1</sup>Due matrici si dicono simili se hanno lo stesso polinomio caratteristico.

---

## Bibliografia

---

- [1] A. Balestrino and G. Celentano, *Teoria dei sistemi. Quaderno. Vol. 3: I sistemi dinamici a stato vettore*. Liguori–Napoli, 1982.
- [2] P. Bolzern, R. Scattolini, and N. Schiavoni, *Fondamenti di controlli automatici*, seconda ed. McGraw-Hill, 2004.
- [3] G.F. Franklin, J.D. Powell, and M. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems*, 3rd ed. Addison–Wesley, 1998.
- [4] K. J. Aström and B. Wittenmark, *Computer-Controlled Systems – Theory and Design*, 3rd ed. Prentice Hall, 1997.
- [5] G. Marro, *Controlli Automatici*, quinta ed. Zanichelli, 2004.
- [6] C. Bonivento, C. Melchiorri, and R. Zanansi, *Sistemi di Controllo Digitale*. Progetto Leonardo - Bologna, 1995.