

Controllo Digitale Metodi di Discretizzazione

Gianmaria De Tommasi

A.A. 2008/09

Sommario

Sintesi nel
continuo

Metodi di dis-
cretizzazione

- ① Sintesi nel continuo e discretizzazione del controllore
- ② Metodi di discretizzazione

Controllore tempo-discreto e suo equivalente tempo-continuo

Sommario

Sintesi nel
continuo

Metodi di dis-
cretizzazione

Nell'ipotesi di segnale di errore $e(t)$ a *banda limitata*, nell'intervallo di frequenze $[0, \omega_N]$ vale la seguente eguaglianza

$$R_c(j\omega) = e^{-j\frac{\omega T}{2}} R_d(e^{j\omega T}),$$

con

- $R_d(e^{j\omega T})$ risposta armonica del controllore tempo-discreto
- $R_c(j\omega)$ risposta armonica dell'equivalente tempo-continuo

Sommario

Sintesi nel
continuo

Metodi di dis-
cretizzazione

Il termine di ritardo $e^{-j\frac{\omega T}{2}}$, dovuto alla presenza dello ZOH, contribuisce alla risposta armonica solamente in termini di sfasamento.

Il suo contributo alla pulsazione critica ω_c è pari a

$$\varphi_0 = -\omega_c \frac{T}{2} \frac{180}{\pi} = -\frac{\omega_c}{\omega_s} 180^\circ,$$

ed è tanto più grande quanto più la pulsazione critica ω_c è vicina alla pulsazione di campionamento ω_s .

- scegliere il periodo di campionamento T in maniera tale che risulti $\omega_c < \omega_N = \frac{\omega_s}{2}$;
- progettare il regolatore analogico $R_c(s)$ in modo da assicurare un'adeguata eccedenza nel margine di fase rispetto alle specifiche originarie, in maniera tale da compensare l'effetto introdotto dallo ZOH;
- discretizzare il regolatore $R_c(s)$ per ottenere il regolatore tempo-discreto $R_d(z)$.

Costo dei dispositivi - All'aumentare della frequenza di campionamento, cresce il costo sia dei convertitori A/D e D/A, sia degli organi di elaborazione.

Problemi di tipo numerico - Al diminuire del periodo di campionamento T possono nascere problemi legati alla rappresentazione dei numeri in aritmetica finita all'interno degli organi di elaborazione (*underflow*).

Banda del sistema di controllo - La pulsazione di campionamento ω_s scelta anche tenendo conto della dinamica desiderata del sistema a ciclo chiuso. Se il sistema a ciclo chiuso ha un comportamento di tipo passa-basso con banda passante $\omega_B \cong \omega_c$, per il Teorema di Shannon deve essere $\omega_c < \omega_N$, quindi $\omega_s > 2\omega_c$.

Sommario

Sintesi nel
continuo

Metodi di dis-
cretizzazione

Filtro anti-aliasing Siccome i segnali reali non hanno banda limitata, è necessario effettuare in filtraggio anti-aliasing della grandezza d'uscita $y(t)$. I filtri anti-aliasing sono filtri passa-basso che introducono uno sfasamento. Per evitare che questo sfasamento produca inaccettabili diminuzioni del margine di fase è opportuno che la pulsazione di taglio del filtro anti-aliasing ω_f sia $\omega_f \gg \omega_c$. Quindi $\omega_s > 2\omega_f \gg 2\omega_c$.

Una scelta tipica per la pulsazione di campionamento è la seguente

$$\alpha\omega_c \leq \omega_s \leq 10\alpha\omega_c, \quad 5 \leq \alpha \leq 10$$

Per ottenere $R_d(z)$ si potrebbe utilizzare la trasformazione inversa di campionamento

$$s = \frac{1}{T} \ln z ,$$

ma in questo modo non si otterrebbe un regolatore tempo-discreto a dimensione finita, perchè non avrebbe una f.d.t. razionale fratta.

Nella pratica si utilizza un'approssimazione tempo-discreta di $R_c(s)$: **metodi di discretizzazione**.

$$s = \frac{z - 1}{T(\alpha z + 1 - \alpha)}.$$

$\alpha = 0$ Eulero in avanti

$$s = \frac{z - 1}{T}$$

$\alpha = 1$ Eulero all'indietro

$$s = \frac{z - 1}{zT}$$

$\alpha = 0.5$ Tustin

$$s = \frac{2(z - 1)}{T(z + 1)}$$

Discretizzazione

$$R_d(z) = R_c(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{T}}$$

Stabilità

$$\Re(s) < 0 \Leftrightarrow \Re\left(\frac{z-1}{T}\right) < 0 \Leftrightarrow \Re(z) < 1$$

- è possibile ottenere $R_d(z)$ instabile a partire da $R_c(s)$ stabile

Discretizzazione

$$R_d(z) = R_c(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{zT}}$$

Stabilità

$$\begin{aligned} \Re(s) < 0 &\Leftrightarrow \Re\left(\frac{z-1}{zT}\right) < 0 \\ \Leftrightarrow \Re\left(\left((\Re(z) - 1) + j\Im(z)\right)\left(\Re(z) - j\Im(z)\right)\right) < 0 \\ &\Leftrightarrow \Re(z)^2 + \Im(z)^2 - \Re(z) < 0 \end{aligned}$$

circonferenza di raggio $1/2$ con centro in $(1/2, 0)$.

Sommario

Sintesi nel
continuo

Metodi di dis-
cretizzazione

- tutti i controllori stabili $R_c(s)$ vengono trasformati in controllori stabili $R_d(z)$
- esiste la possibilità che controllori $R_c(s)$ instabili vengono trasformati in controllori $R_d(z)$ stabili

Sommaro

Sintesi nel
continuoMetodi di dis-
cretizzazione

Discretizzazione

$$R_d(z) = R_c(s) \Big|_{s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}}$$

Stabilità

$$\begin{aligned} \Re(s) < 0 &\Leftrightarrow \Re\left(\frac{2(z-1)}{T(z+1)}\right) < 0 \\ \Leftrightarrow \Re\left(\left((\Re(z) - 1) + j\Im(z)\right)\left((\Re(z) + 1) - j\Im(z)\right)\right) < 0 \\ &\Leftrightarrow \Re(z)^2 + \Im(z)^2 < 1 \end{aligned}$$

circonferenza di raggio 1 con centro in (0, 0).

Sommario

Sintesi nel
continuo

Metodi di discretizzazione

- si conserva la stabilità del controllore
- si introduce una compressione in frequenza
- i poli ad alta frequenza di $R_d(z)$ tendono a -1, infatti

$$z = \frac{1 + s\frac{T}{2}}{1 - s\frac{T}{2}},$$

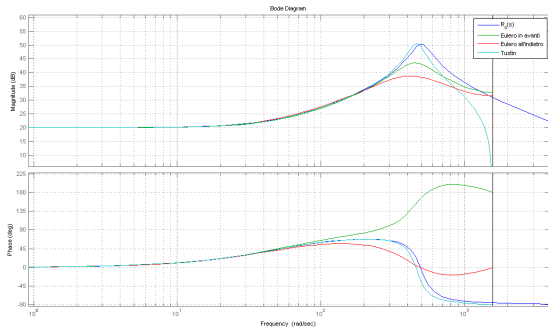
quindi il segnale di controllo u_k potrebbe presentare oscillazioni

Sommario

Sintesi nel
continuo

Metodi di dis-
cretizzazione

$$R_c(s) = \frac{10\left(1 + \frac{s}{50}\right)}{\frac{s^2}{500^2} + 0.3\frac{s}{500} + 1}$$



Se si discretizza $R_c(s)$ con il metodo di Tustin, la risposta armonica di $R_d(z)$ sarà

$$R_d(e^{j\omega T}) = R_c\left(\frac{2}{T} \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1}\right) = R_c\left(j \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}\right)$$

La scala delle frequenze viene compressa

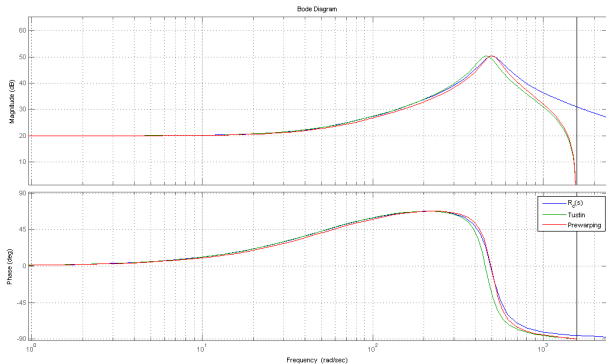
Tustin con prewarping

$$R_d(z) = R_c(s) \Big|_{s = \frac{\bar{\omega}}{\tan \frac{\bar{\omega} T}{2}} \frac{z-1}{z+1}}$$

Sommario

Sintesi nel
continuo

Metodi di dis-
cretizzazione



Discretizzazione

$$R_d(z) = \mathcal{Z} \left[\mathcal{L}^{-1} \left[R_c(s) \right] \right]$$

Esempio

$$R_c(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

$$y_{imp}(t) = 10(1 - e^{-t}) \cdot 1(t)$$

$$y_{imp}(kT) = 10(1 - e^{-kT}) \cdot 1(kT)$$

$$\mathcal{Z} \left[y_{imp}(kT) \right] = \frac{10z}{z-1} - \frac{10z}{z-e^{-T}} = \frac{10z(1 - e^{-T})}{(z-1)(z - e^{-T})}$$

- effettuare la trasformata dei singoli poli e zeri mediante la trasformazione di campionamento

$$z = e^{sT} ;$$

- introdurre tanti zeri in $z = -1$ quanti sono i poli di $R_c(s)$ in eccesso agli zeri al finito;
- compensare il guadagno statico

Sommario

Sintesi nel
continuo

Metodi di dis-
cretizzazione

$$R_c(s) = \frac{10(s + 5)}{(1 + 10s)(s + 1)}$$

$$R_d(z) = \frac{50(1 - e^{-T})(1 - e^{-0.1T})}{2(1 - e^{-5T})} \frac{(z + 1)(z - e^{-5T})}{(z - e^{-T})(z - e^{-0.1T})}$$