INDICE

II SISTEMI E MODELLI

II.1 Concetto di sistema

Sebbene il concetto di *sistema* possa considerarsi un concetto primitivo (come quello di elemento o di insieme) è opportuno far riferimento ad una sua definizione per evidenziarne alcuni punti essenziali. La seguente definizione è tratta dal dizionario standard dell'IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers).

"*Un sistema è una aggregazione di componenti che operano insieme per svolgere una funzione non realizzabile con nessuno di essi presi individualmente*".

Gli aspetti essenziali da evidenziare sono:

- un sistema consiste di componenti interagenti;
- ad un sistema è associata una funzione che esso deve svolgere;
- i componenti di un sistema non sono necessariamente oggetti fisici.

Con tali specificazioni si può intuire come il termine sistema possa essere utilizzato in un'accezione estremamente ampia, così da consentire di parlare indifferentemente di sistemi fisici (come ad esempio "sistema meccanico", "sistema elettrico", "sistema termico", ...), di "sistemi economici", di "sistemi comportamentali", etc.

II.1 Modello di un sistema

Negli studi ingegneristici si è interessati a studiare gli aspetti ***quantitativi*** *dei sistemi*, per cui la definizione qualitativa di sistema data nel paragrafo precedente è inadeguata. Per l'analisi quantitativa, più che al sistema reale in sé, si è interessati a costruire un suo *modello matematico* che dia una descrizione matematica del comportamento del sistema reale, o meglio dei legami funzionali che sussistono tra le grandezze d'interesse.

La Teoria dei Sistemi studia i cosiddetti *sistemi orientati*, nei quali è possibile effettuare una divisione delle grandezze di interesse in due insiemi:

i) grandezze che possono variare nel tempo in maniera indipendente dalle altre, dette grandezze d'ingresso o semplicemente *ingressi*;

ii) grandezze di cui si è interessati a studiare l'evoluzione nel tempo, per le quali è possibile adottare uno schema interpretativo causa-effetto in cui esse appaiono come dipendenti dagli ingressi; esse sono dette grandezze d'uscita o semplicemente *uscite*.

Esempio 2.1 *Un sistema elastico elementare.* Nel sistema costituito dall'elemento elastico mostrato in Fig.2.1, avente un estremo collegato ad una parete ed un altro sottoposto ad una forza f(t) variante nel tempo, e di cui si vuole studiare l'andamento temporale della posizione s(t) dell'estremo libero, si assumerà come *ingresso* la *forza* f(t) e come *uscita* la *posizione* s(t).

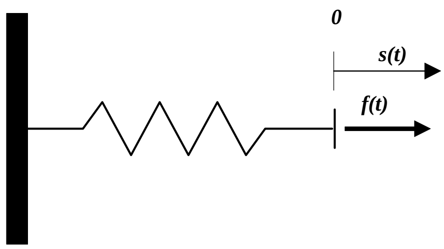

Figura 2.1 Elemento elastico

Esempio 2.2 *Un sistema idraulico elementare.* Nel sistema costituito dal serbatoio mostrato in Fig.2.2, alimentato per mezzo di una pompa, e di cui si vuole studiare l'andamento temporale del livello, si assumerà come *ingresso* la *portata volumetrica* q(t) della pompa e come *uscita* il *livello* h(t) del pelo libero.

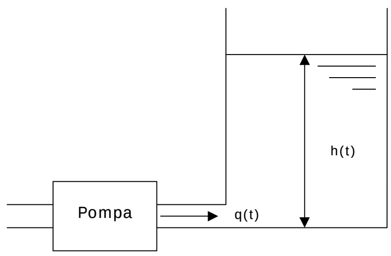

Figura 2.2 Serbatoio

E' facile rendersi conto che ad uno stesso sistema fisico possono essere associate diverse grandezze di ingresso e di uscita. Ad esempio nel caso del serbatoio si potrebbe essere interessati a studiare l'andamento nel tempo del volume di liquido nel serbatoio, anziché del livello. Oppure potrebbero interessare entrambe. In generale un sistema reale potrà avere più ingressi e più uscite.

Nel seguito indicheremo con:

$$u(t) = [u_1(t),...,u_r(t)]^T \tag{2.1}$$

il vettore degli ingressi, e con

$$y(t) = [y_1(t),...,y_m(t)]^T \tag{2.2}$$

il vettore delle uscite. L'apice T indica l'operazione di trasposizione.

Una volta individuate le grandezze di ingresso e uscita, per la scrittura del modello bisogna individuare i legami funzionali di tipo matematico tra gli ingressi e le uscite. Tali legami funzionali saranno individuati sulla base di leggi (*relazioni costitutive*) che descrivono il fenomeno in studio, e/o sulla base di relazioni di tipo logico.

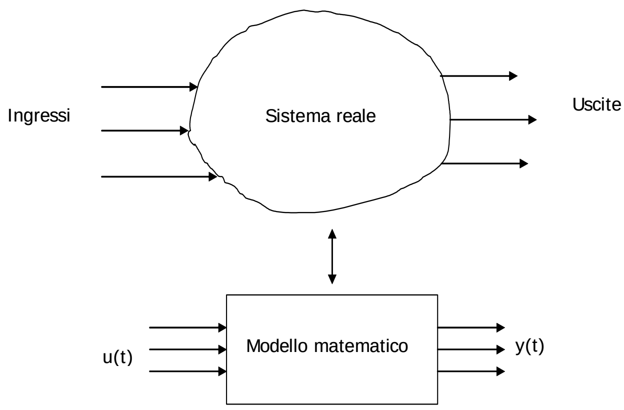

Figura 2.3 Sistema e modello

Nella misura in cui il modello ottenuto è in grado di fornirci l'andamento delle variabili di uscita così come nel sistema reale, il modello (che è un oggetto astratto) e il sistema si confondono e i due termini possono essere usati in maniera intercambiabile (vedi Fig.2.3).

II.1.1 Sistemi statici e sistemi dinamici

Interessiamoci ora di investigare le tipologie di legami funzionali che si possono avere per i vari sistemi di interesse. Cominciamo col ricavare i legami funzionali tra ingresso e uscita per gli esempi 2.1 e 2.2.

Per l'elemento elastico dell'esempio 2.1, posto *u(t)=f(t)* e *y(t)=s(t)*, il legame funzionale è:

$$y(t) = \frac{1}{k} u(t) \tag{2.3}$$

dove *k* è la costante elastica della molla.

Per il serbatoio dell'esempio 2.2, posto *u(t)=q(t)* e *y(t)=h(t)*, detta *S* la superficie di base del serbatoio (supposto cilindrico), nell'ipotesi di fluido incompressibile il legame funzionale è:

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{S} u(t) \tag{2.4}$$

Il confronto tra questi due modelli mette in evidenza uno degli aspetti principali secondo cui vengono classificati i sistemi.

Nel caso dell'elemento elastico il legame funzionale è un legame puramente algebrico: l'uscita in un generico istante *t* dipende solo dal valore dell'ingresso nello stesso istante, e il sistema non ha memoria dei valori dell'ingresso negli istanti precedenti. Sistemi di questo tipo sono detti *sistemi statici* o *algebrici;* in taluni casi, come si vedrà meglio in seguito, vengono anche detti *sistemi combinatori.*

Nel caso del serbatoio, il legame funzionale è un'equazione differenziale: in tal caso ci si convince facilmente che l'uscita in un generico istante *t* dipende anche dai valori passati dell'ingresso. Infatti:

$$y(t) = y(t_0) + \frac{1}{S} \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau \tag{2.5}$$

per cui l'uscita all'istante t dipende dal livello iniziale $y(t_0)$ e dai valori assunti dalla portata nell'intervallo $[t_0, t]$, e quindi il sistema ha memoria della storia passata. Sistemi di questo tipo vengono detti *sistemi dinamici*.

In questo corso l'attenzione sarà posta principalmente sui sistemi dinamici. Si ritiene tuttavia opportuno, prima di passare a tale classe di sistemi, fare alcuni esempi di sistemi algebrici.

Esempio 2.3 *Rete di parità.* Si consideri una rete binaria che riceve in ingresso stringhe $u = [u_1, u_2, ..., u_n]$ di "0" ed "1", e la cui uscita y vale "1" se il numero di simboli "1" nella stringa u è pari, "0" in caso contrario. E' facile convincersi che il legame ingresso-uscita è di tipo algebrico, ed è quello rappresentato in Tabella 2.1 per il caso di n=3. Tale rete è detta *rete di parità.*

u_1	u_2	u_3	y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Tabella 2.1 Legame I/O della rete di parità per n=3

I sistemi algebrici in cui il numero di possibili valori di ingresso e uscita è finito, come nel caso in esame, vengono usualmente detti *combinatori*. Per essi il legame ingresso-uscita è del tipo:

$$y_k = \eta(u_k)$$

dove, per semplicità di notazione, si è usato il pedice k per indicare il tempo t_k . Tale sistema è rappresentato schematicamente come in Figura 2.4.

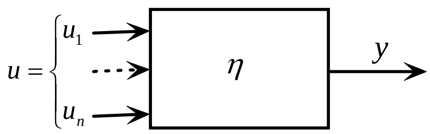

Figura 2.4 Schema della rete combinatoria

Esempio 2.4 *Un multiplexer elementare.* Si consideri il *multiplexer* indirizzabile binario mostrato in Fig. 2.5.

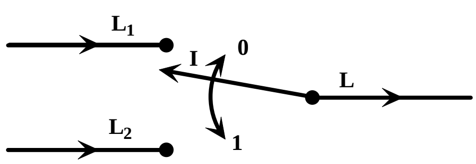

Figura 2.5 Multiplexer binario

Se I=0 è l'indirizzo della linea L_1 e I=1 è l'indirizzo della linea L_2 deve aversi:

$$L = \begin{cases} L_1 & se\ I = 0 \\ L_2 & se\ I = 1 \end{cases}$$

Pertanto il legame ingresso-uscita è quello rappresentato in Tabella 2.2.

I	L_1	L_2	L
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Tabella 2.2 Legame I/O del multiplexer

Posto $u = [u_1, u_2, u_3] = [I, L_1, L_2]$ e $y = L$, anche per tale sistema vale una rappresentazione ingresso-uscita del tipo:

$$y_k = \eta(u_k)$$

II.2 Modelli ingresso-stato-uscita (i-s-u) di sistemi dinamici

II.2.1 Il concetto di stato

Poiché in un sistema dinamico l'uscita *y(t)* in un generico istante *t* dipende anche dai valori passati dell'ingresso, è evidente che se si è interessati a calcolare l'uscita in un intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ non è sufficiente conoscere i valori dell'ingresso *u(t)* in tale intervallo. Ci chiediamo allora qual è l'informazione che manca per risolvere il problema.

Torniamo al problema del serbatoio discusso nell'esempio 2.2 e descritto dal modello (2.4). Prima di ricorrere alla matematica, facciamo qualche considerazione pratica. Risulta evidente che per calcolare in maniera univoca il livello del serbatoio in un dato intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ non è sufficiente assegnare la portata d'ingresso in tale intervallo. L'informazione mancante è rappresentata dal livello iniziale all'istante t_0. Da un punto di vista matematico questo è confermato dal fatto che, essendo la (2.4) un'equazione differenziale del primo ordine, per avere una soluzione unica abbiamo bisogno di assegnare la condizione iniziale dell'uscita.

Ovviamente, essendo noi interessati a studiare sistemi anche diversi da quelli rappresentati da equazioni differenziali del tipo (2.4), è necessario introdurre un concetto di "informazione sulla situazione iniziale del sistema" più ampio di quello rappresentato dalle condizioni iniziali di un'equazione differenziale. Questo ci porta a introdurre il concetto di "stato" di un sistema.

Definizione. Lo *stato* di un sistema in un generico istante t_0 è l'informazione all'istante t_0 necessaria per poter determinare univocamente l'uscita $y(t)$, per ogni $t \geq t_0$, una volta assegnato l'ingresso $u(t)$, $t \geq t_0$.

Anche lo stato, così come l'ingresso e l'uscita, è in generale un vettore che denoteremo con $x(t)$. Le componenti di tale vettore, $x_1(t),\ldots, x_n(t)$, sono chiamate *variabili di stato*.

II.2.2 Definizione formale di sistema e modello implicito i-s-u

Avendo introdotto il concetto di stato, vediamo se sulla base di tale concetto è possibile definire una struttura di modello matematico che sia sufficientemente generale da consentirci di rappresentare in un contesto unico tutti o, almeno, la maggior parte dei sistemi di interesse.

L'idea di base nella definizione di tale struttura è quella di descrivere un sistema attraverso due equazioni, in generale di tipo vettoriale:

- la prima, detta *equazione di stato*, specifica, in maniera implicita, l'evoluzione dello stato $x(t)$, $t \geq t_0$, una volta dato lo stato iniziale $x(t_0)$ e l'ingresso $u(t)$, $t \geq t_0$;
- la seconda, detta *trasformazione d'uscita*, specifica il valore assunto dall'uscita in un generico istante t una volta dati il valore dello stato $x(t)$ e dell'ingresso $u(t)$ nello stesso istante.

Prima di definire tali funzioni, allo scopo di estendere al maggior numero possibile di sistemi reali la struttura di modello in questione, generalizziamo la tipologia di segnali di ingresso, uscita e stato rispetto a quella finora considerata, mantenendo tuttavia inalterato il loro significato.

Definizioni.

- Le grandezze di *ingresso, stato e uscita* di un sistema sono in generale dei *segnali* o funzioni $s(t)$, di tipo scalare o vettoriale, di una variabile t detta tempo.
- La variabile tempo t assume valori in un sottoinsieme ordinato $T \subseteq R$ detto *insieme dei tempi*. Tale insieme può essere costituito da valori continui, ad esempio $T = \{t \in R, t_0 \leq t \leq t_f\}$, oppure da valori discreti, ad esempio $T = \{\ldots, t_{-k}, \ldots, t_0, \ldots, t_k, \ldots\}$.
- Un *segnale* $s(t)$ è detto a *tempo continuo* se T è un insieme continuo. In caso contrario è detto a *tempo discreto*.
- I valori assunti dai segnali s in un generico istante t potranno essere numeri reali (o vettori di numeri reali), livelli logici, o elementi di un qualsiasi insieme numerabile.
- Un segnale a tempo discreto i cui valori nei vari istanti t_k sono quantizzati è anche detto *numerico* oppure *digitale*.
- Un *segnale s(t)* è detto *deterministico* quando il suo valore in un generico istante t è noto con certezza; in caso contrario è detto *stocastico* o *aleatorio*.

Introduciamo ora le seguenti notazioni.

Notazioni.

- $s(\cdot)$ indica l'intero segnale *s* definito su tutto l'insieme dei tempi;
- se *s* è un segnale tempo continuo, $s(t)$ indica il suo valore all'istante t ;
- se *s* è un segnale tempo continuo ed inoltre è derivabile, $\dot{s}(t)$ indica il valore della sua derivata prima all'istante t ;
- se *s* è un segnale tempo discreto, $s(t_k)$ o semplicemente s_k indica il valore assunto all'istante t_k, mentre $s(t_{k+1})$ (o s_k') indica il valore prossimo;
- $s_{[t_i, t_f)}$ indica la restrizione del segnale (o segmento del segnale) *s* all'intervallo aperto a destra $[t_i, t_f)$.

Possiamo ora dare la definizione formale di sistema astratto orientato.

Definizione di Sistema. *Dato un sottoinsieme T di R, un insieme* $\mathcal{U}$, *detto insieme delle funzioni di ingresso, di funzioni* $u(\cdot)$ *definite in T e a valori in un insieme U, detto insieme dei valori di ingresso, un insieme Y di valori di y(t), detto insieme dei valori di uscita, un insieme X di valori di x(t), detto insieme dei valori di stato, viene detto sistema la coppia di equazioni:*

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{2.6a}$$

$$y(t) = \eta(x(t), u(t), t) \tag{2.6b}$$

se l'insieme dei tempi è continuo;

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, k), \qquad x_{k_0} = x_0 \tag{2.7a}$$

$$y_k = \eta(x_k, u_k, k) \tag{2.7b}$$

se l'insieme dei tempi è discreto.

Come già accennato in precedenza, i sistemi in cui l'insieme dei tempi *T* è un insieme continuo sono detti *sistemi a tempo continuo*; quelli in cui l'insieme *T* è discreto sono detti *sistemi a tempo discreto.*

Le equazioni (2.6) (risp. (2.7)) prendono il nome di *modello implicito ingresso-stato-uscita* di un sistema a tempo continuo (risp. a tempo discreto). L'equazione (2.6a) (risp. (2.7a)) è detta *equazione di stato*, e la funzione $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ è detta *funzione generatrice* (risp. *funzione stato prossimo*); l'equazione (2.6b) (risp. (2.7b)) è detta *equazione d'uscita*, e la funzione $\eta(\cdot,\cdot,\cdot)$ è detta *trasformazione d'uscita*. Un modello implicito i-s-u viene anche sinteticamente indicato con la tripla (X, f, η).

Come si può facilmente constatare, effettivamente, così come ci eravamo riproposti di fare, l'equazione differenziale (2.6a) se il sistema è a tempo continuo, oppure l'equazione alle ricorrenze (2.7a) se il sistema è a tempo discreto, specifica, in maniera implicita, l'evoluzione dello stato $x(t),\ t \ge t_0$, una volta dato lo stato iniziale $x(t_0)$ e l'ingresso $u(t),\ t \ge t_0$. La trasformazione d'uscita, viceversa, specifica il valore assunto dall'uscita in un generico istante *t* sulla base dei valori assunti, nello stesso istante, dallo stato e dall'ingresso.

E' importante osservare che, nel caso in cui lo stato *x* è un vettore di dimensione *n* anche la funzione generatrice $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ è costituita da un vettore di *n* funzioni scalari. Allo stesso modo, se l'uscita y è un vettore di dimensione m anche la trasformazione d'uscita $\eta(\cdot,\cdot,\cdot)$ è costituita da un vettore di m funzioni scalari. Pertanto, assumendo che anche l'ingresso u sia un vettore di dimensione r, la scrittura estesa del modello (2.6) è la seguente:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f(x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_r(t),t)\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n(t) = f(x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_r(t),t)\,, \end{cases} \qquad x_i(t_0) = x_{i0}\,, \quad i = 1,\dots,n$$

$$\begin{cases} y_1(t) = \eta_1(x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_r(t),t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m(t) = \eta_m(x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_r(t),t) \end{cases}$$

Tipi particolari di sistemi dinamici.

Nello studio dei sistemi di controllo si fa spesso riferimento ai seguenti tipi particolari di sistemi dinamici.

- Sistemi con un solo ingresso e una sola uscita, detti anche *sistemi SISO* (Single Input Single Output).
- Sistemi con più ingressi e più uscite, detti anche *sistemi MIMO* (Multi Input Multi Output).
- Sistemi in cui la trasformazione d'uscita non dipende da u, ossia:

  $$y(t) = \eta(x(t),t) \;\; ;$$

  tali sistemi sono detti *sistemi puramente dinamici* o *strettamente propri* o *macchine di Moore* (*sistemi propri* o *macchine di Mealy* in caso contrario).
- Sistemi in cui la trasformazione d'uscita non dipende da x, ossia:

  $$y(t) = \eta(u(t),t) \;\; ;$$

  tali sistemi sono i *sistemi statici o algebrici o privi di memoria* già precedentemente definiti.

II.2.3 Il processo di costruzione di un modello e la scelta delle variabili di stato

La costruzione di un modello i-s-u viene effettuata in quattro passi successivi:

1. Individuazione delle variabili di ingresso e uscita;
2. Scelta delle variabili di stato;
3. Scrittura delle relazioni costitutive;
4. Elaborazione delle relazioni costitutive per pervenire alla scrittura dell'equazione di stato e della trasformazione di uscita.

Di tali operazioni quella da effettuare con una certa attenzione è la scelta delle variabili di stato. Essa è, in genere, un'operazione abbastanza delicata per i seguenti motivi: a) la scelta delle variabili di stato è fortemente legata alla tipologia del sistema in studio e, talvolta, richiede una maturata esperienza operativa su di esso; b) la scelta delle variabili di stato non è unica, per cui esistono più modelli associati ad uno stesso sistema; c) il numero delle variabili di stato dipende dalla maggiore o minore accuratezza con cui si vuole descrivere il comportamento del sistema in studio; d) il numero delle variabili di stato non sempre può essere fissato a priori, per cui si possono anche porre questioni di ridondanza. Se tuttavia si fa riferimento al significato generale di "stato", si possono individuare delle linee guida da seguire nella scelta delle variabili di stato, almeno nel caso di sistemi usualmente ricorrenti nella pratica ingegneristica.

Lo stato, come detto in precedenza, rappresenta l'informazione necessaria in un generico istante per poter determinare l'evoluzione futura dell'uscita una volta assegnato l'ingresso. Esso, pertanto, deve descrivere la "situazione interna" del sistema in un generico istante determinata dalla storia passata del sistema stesso. Nella scelta delle variabili di stato del sistema, quindi, bisogna orientarsi verso quelle variabili il cui valore può essere considerato come descrittivo della "memoria" del sistema.

Nel caso di sistemi fisici la situazione interna di un sistema è tipicamente descritta dall'energia in esso immagazzinata nelle varie forme. Ovviamente noi dovremo portare in conto solo quelle forme di energia le quali subiscono variazioni nel tempo in conseguenza degli ingressi che agiscono sul sistema. Così, ad esempio, nel caso di sistemi meccanici orienteremo la nostra scelta verso le variabili di posizione (legate all'energia potenziale gravitazionale degli elementi di massa e all'energia potenziale elastica degli elementi elastici) e di velocità di elementi di massa (legate all'energia cinetica). Nel caso di sistemi elettrici considereremo le tensioni ai capi di condensatori (legate all'energia elettrostatica in essi immagazzinata) e le correnti negli induttori (legate all'energia magnetica in essi immagazzinata). Nel caso di un serbatoio contenente un liquido, e nel quale si hanno come ingressi portate entranti e/o uscenti di liquido nel serbatoio, considereremo come variabile di stato il livello di liquido (legato all'energia potenziale gravitazionale del liquido stesso). Nel caso di sistemi termici considereremo le temperature dei corpi, legate all'energia termica in essi immagazzinata.

Nel caso di sistemi non descritti da leggi fisiche, ad esempio calcolatori, sistemi di comunicazione, sistemi di produzione, etc., per la scelta delle variabili di stato non si hanno regole generali per cui, oltre all'esperienza e alla conoscenza del sistema in studio, diventa importante disporre di metodologie che consentano di verificare se un insieme di variabili possa essere assunto come stato e, nello stesso tempo, che tale insieme non sia ridondante.

Nel paragrafo 2.4 illustreremo tali concetti con una serie di esempi.

II.2.4 Modello esplicito i-s-u

Assumendo, così come si dimostra essere vero in molte situazioni di interesse pratico, che la soluzione della (2.6a) o della (2.7a) esista e sia unica, è facile convincersi che essa può essere messa nella forma:

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, u_{[t_0,t)}) \tag{2.8}$$

nel caso tempo continuo, e nella forma:

$$x_k = \varphi(k, k_0, x_0, u_{[k_0,k)}) \tag{2.9}$$

nel caso tempo discreto. La funzione φ (o più precisamente il funzionale φ, dal momento che esso dipende da un segmento di funzione) è detta *funzione di transizione dello stato*. Le (2.8), (2.6b) (risp. le (2.9), (2.7b)) prendono il nome di *modello (o rappresentazione) esplicito ingresso-stato-uscita* del sistema a tempo continuo (risp. a tempo discreto). Un modello esplicito i-s-u viene anche sinteticamente indicato con la tripla (X, φ, η).

II.3 Classificazione dei sistemi

I sistemi dinamici vengono classificati sulla base delle proprietà delle funzioni rappresentative del modello (f ed η, oppure φ ed η), le quali, a loro volta, vengono diversificate in base al tipo di tecniche utilizzate per risolvere i problemi di analisi del comportamento.

II.3.1 Sistemi a tempo continuo e a tempo discreto

Una prima classificazione viene fatta, come già detto in precedenza, sulla base della natura dell'insieme dei tempi T. I sistemi in cui l'insieme dei tempi T è un insieme continuo sono detti *sistemi a tempo continuo*; quelli in cui l'insieme T è discreto sono detti *sistemi a tempo discreto*.

Prima di fare alcuni esempi, si richiama l'attenzione sul fatto che i fenomeni fisici evolvono tutti nel tempo continuo, per cui le leggi fisiche che li descrivono, e di conseguenza i modelli matematici, sono formulate nel tempo continuo. I modelli a tempo discreto, viceversa, vengono utilizzati per descrivere le seguenti categorie di sistemi:

- sistemi che effettivamente evolvono in maniera tempo discreta, come i calcolatori, in cui i contenuti dei registri interni, delle locazioni di memoria, … variano solo in corrispondenza di certi istanti (talvolta scanditi da un clock interno);
- sistemi che, pur evolvendo nel tempo continuo, vengono in genere descritti con delle leggi di evoluzione che prevedono variazioni delle grandezze solo alla "fine" di periodi di tempo di lunghezza finita (minuti, ore, giorni, anni), come ad esempio sistemi di tipo economico, gestionale, ambientale, sociologico;
- sistemi che, pur essendo per loro natura di tipo continuo, vengono comandati con segnali di ingresso che cambiano valore solo in corrispondenza di fissati istanti di tempo, come ad esempio i sistemi comandati da un calcolatore.

Nei sistemi appartenenti all'ultima categoria, l'insieme dei tempi T può essere pensato come suddiviso in una sequenza di intervalli definiti da una sequenza di istanti $t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots$ i quali diventano gli istanti significativi per la valutazione delle variabili di uscita. L'intervallo di tempo $[t_k, t_{k+1})$ è detto intervallo di campionamento, mentre la sua ampiezza $T = t_{k+1} - t_k$, spesso costante, è detta *periodo di campionamento*.

Esempio 2.5 *Serbatoio con valvola di prelievo*. Si consideri il serbatoio cilindrico, con superficie di base S, mostrato in Fig.2.6, in cui è presente una valvola di prelievo sul fondo. Si vuole studiare l'andamento del volume $V(t)$ di liquido in esso contenuto al variare della portata volumetrica di liquido in ingresso $q_i(t)$ nell'ipotesi di apertura costante della valvola di prelievo.

Anzitutto si pone $u(t)=q_i(t)$, e $y(t)=V(t)$.

Per quanto riguarda la scelta delle variabili di stato, in accordo con quanto detto nel paragrafo II.3.3, possiamo scegliere come variabile di stato il livello del liquido, e quindi porre *x(t)= h(t)*. Ovviamente una possibilità alternativa è quella di scegliere come variabile di stato direttamente il volume *V(t)*; infatti, essendo nota la geometria del serbatoio, tale variabile ha lo stesso contenuto d'informazione del livello.

Le relazioni costitutive sono fornite dall'equazione di continuità:

$$\frac{dV}{dt} = q_i(t) - q_u(t)$$

e dalla relazione che fornisce la portata d'uscita attraverso la valvola di prelievo; tale portata dipende dall'altezza del liquido nel serbatoio secondo un legame del tipo:

$$q_u(t) = k\sqrt{h(t)}$$

nel caso di moto turbolento del fluido attraverso la valvola di prelievo, oppure

$$q_u(t) = kh(t)$$

nel caso di moto laminare, ove *k* è una costante che dipende dalla geometria e dalla luce di apertura della valvola di prelievo.

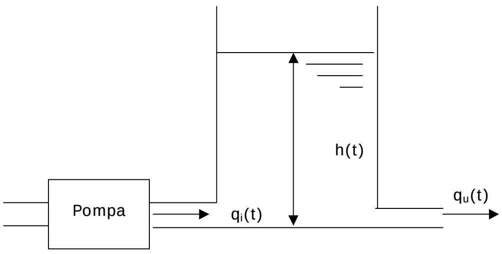

Figura 2.6 Serbatoio con valvola di prelievo

Facendo l'ipotesi di moto turbolento, con semplici manipolazioni delle relazioni costitutive possiamo ottenere un modello implicito i-s-u nella forma:

$$\dot{x}(t) = -\frac{k}{S}\sqrt{x(t)} + \frac{1}{S}u(t)$$
$$y(t) = Sx(t)$$

Questo sistema, come si vede, è tempo continuo. Inoltre esso è di tipo SISO ed è strettamente proprio (o puramente dinamico).

Esempio 2.6 *Sistema molla-smorzatore.* Si consideri il sistema molla-smorzatore mostrato in Fig.2.7. Sia *k* il coefficiente elastico della molla e *b* il coefficiente di attrito viscoso dello smorzatore. Si vuole studiare l'andamento dello spostamento *s(t)* dell'estremo libero dei due elementi al variare della forza applicata *f(t).*

Si pone *u(t)=f(t)*, e *y(t)=s(t).*

In accordo con quanto detto nel paragrafo II.3.3, possiamo scegliere come variabile di stato la posizione dell'elemento libero della molla, e quindi porre

x(t)= s(t).

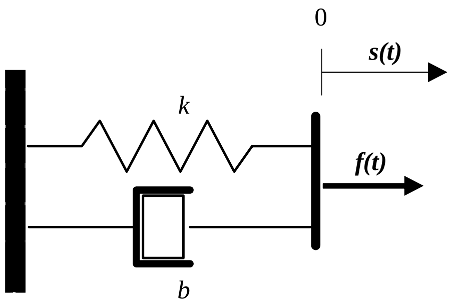

Figura 2.7 Sistema molla-smorzatore

La relazione costitutiva è fornita dall'equazione di equilibrio delle forze:

$$f(t) = ks(t) + b\frac{ds}{dt}$$

Il modello implicito i-s-u è il seguente:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\frac{k}{b}x(t) + \frac{1}{b}u(t)\\ y(t) &= x(t)\end{aligned}$$

Il sistema è tempo continuo. Inoltre esso è di tipo SISO ed è strettamente proprio.

Esempio 2.7 *Filtro numerico.* Si consideri il seguente semplice algoritmo I/O di elaborazione di un segnale discreto:

$$y_k = \frac{u_k + u_{k-1}}{2}.$$

In tal caso l'informazione da ricordare per poter calcolare l'uscita all'istante *k* è rappresentata dal valore dell'ingresso nell'istante precedente. Ponendo

$$x_k = u_{k-1}$$

si ha:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= u_k\\ y_k &= \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{2}u_k\end{aligned}$$

Per capire l'effetto "filtrante" di tale sistema, si cominci col notare che l'uscita del sistema è la media degli ultimi due valori di ingresso. Se allora supponiamo di inviare in ingresso un segnale sinusoidale di periodo molto grande rispetto al periodo T_c con cui è campionato l'ingresso (vedi Fig. 2.8), essendo $u_k \cong u_{k-1}$, si ha $y_k \cong u_k$, ossia l'ingresso passa inalterato. Se, viceversa, il periodo del segnale sinusoidale diminuisce e si porta ad un valore circa doppio del periodo di campionamento, allora $u_k \cong -u_{k-1}$ e di conseguenza $y_k \cong 0$, ossia l'ingresso risulta fortemente attenuato. Per tale motivo un tale sistema viene chiamato filtro numerico (passa-basso).

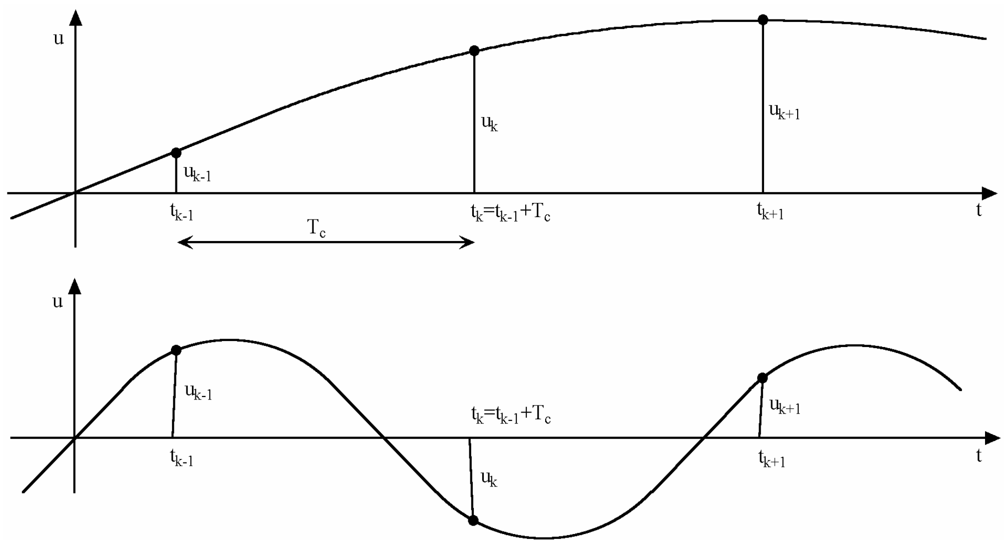

Figura 2.8 Sinusoidi di periodo molto grande (quella in alto) e prossimo al doppio del periodo di campionamento T_c (quella in basso)

Esempio 2.8 *Ammortamento di un capitale.* Si consideri il processo di ammortamento di un capitale C_0 mediante rate semestrali. In tale processo si può considerare come ingresso la rata semestrale *r(k)* da pagare alla fine del semestre k-esimo, e come uscita il capitale residuo *C(k)* da restituire, calcolato all'inizio del k-esimo semestre.

Si pone *u(k)=r(k),* e *y(k)=C(k).*

Per quanto riguarda la scelta delle variabili di stato, in questo caso si intuisce che l'informazione da portare in conto per poter calcolare il capitale residuo da un certo semestre in poi è proprio il capitale da restituire all'inizio del semestre in questione, per cui come stato assumeremo *x(k)= C(k).*

Nella scrittura delle relazioni costitutive bisogna anche portare in conto l'interesse che matura, ad ogni semestre, sul capitale residuo. Detto *I* il tasso di interesse annuale (supposto costante), si ha:

$$C(k+1) = C(k) + \frac{I}{2}C(k) - r(k)$$

Pertanto il modello implicito è:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (1 + I/2)x(k) - u(k), \qquad x(k_0) = C_0 \\ y(k) &= x(k) \end{aligned}$$

Il sistema è tempo discreto, SISO e strettamente proprio.

Esempio 2.9 *Dinamica di una popolazione con risorse illimitate.* Si consideri il processo di crescita, su base annuale, di una popolazione nell'ipotesi di risorse ambientali illimitate. Supponendo che ogni anno vi sia un flusso migratorio che comporta una variazione di *m(k)* individui, si vuole calcolare l'evoluzione del numero di individui *P(k),* calcolati all'inizio di ogni anno, nell'ipotesi di avere una tasso di natalità *N* e un tasso di mortalità *M*.

Si pone *u(k)=m(k),* e *y(k)=P(k).*

Per quanto riguarda la scelta delle variabili di stato, in questo caso si potrà assumere *x(k)= P(k).*

La relazione costitutiva è:

$$P(k+1) = P(k) + m(k) + NP(k) - MP(k)$$

Pertanto il modello implicito è:

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= \left(1+N-M\right)x(k)+u(k) \\
y(k) &= x(k)
\end{aligned}
$$

Il sistema è tempo discreto, SISO e strettamente proprio.

Esempio 2.10 *Dinamica di una popolazione con risorse limitate.* Il problema è analogo a quello precedente, salvo il fatto che, essendo le risorse limitate, il tasso di mortalità M dipenderà verosimilmente dalla popolazione stessa e quindi varia di anno in anno, ossia: $M(k)=M(y_k)$. In quest'esempio assumeremo $M(y_k)=my_k$.

Con semplici passaggi si vede che il modello implicito avrà la forma seguente:

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= (1+N)x(k)-mx(k)^2+u(k) \\
y(k) &= x(k)
\end{aligned}
$$

Il sistema è tempo discreto, SISO e strettamente proprio.

II.3.2 Sistemi invarianti e varianti nel tempo

> **Definizione.** Un sistema è detto tempo-invariante o stazionario se traslando nel tempo l'ingresso, a parità di stato iniziale, trasla anche lo stato e l'uscita.

E' facile verificare che se le funzioni f ed η sono indipendenti dal tempo il sistema è stazionario. In tal caso il modello implicito i-s-u assume la forma:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= f(x(t),u(t)) \\
y(t) &= \eta(x(t),u(t))
\end{aligned}
$$

nel caso tempo continuo, e:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= f(x_k,u_k) \\
y_k &= \eta(x_k,u_k)
\end{aligned}
$$

nel caso tempo discreto. Sulla base della definizione, inoltre, si intuisce facilmente che in un sistema stazionario la funzione di transizione φ della rappresentazione esplicita i-s-u non dipende separatamente dall'istante attuale t e da quello iniziale t_0 , bensì dalla differenza t-t_0 , ossia solo dal tempo intercorso tra l'istante iniziale e quello attuale. Per i sistemi stazionari si può pertanto scrivere:

$$
x(t)=\varphi(t,t_0,x_0,u_{[t_0,t)})=\varphi(t-t_0,x_0,u_{[t_0,t)}) \qquad (2.10)
$$

I sistemi considerati negli esempi 2.5 - 2.10 sono tutti sistemi stazionari.

Vediamo un esempio di sistema non stazionario.

Esempio 2.11 *Sistema massa-molla-smorzatore con massa tempo variante.* Si consideri il sistema massa-molla-smorzatore mostrato in Fig.2.9, in cui la massa del carrello (supposto puntiforme) varia nel tempo. Si vuole studiare l'andamento nel tempo della posizione del carrello.

Si pone $u(t)=f(t)$, e $y(t)=s(t)$.

Per quanto riguarda la scelta delle variabili di stato, in accordo con quanto detto nel paragrafo II.3.3 possiamo scegliere come variabili di stato la posizione $s(t)$ e la velocità $v(t)$ del carrello, e quindi porre:

$$
x(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s(t) \\ v(t) \end{pmatrix}
$$

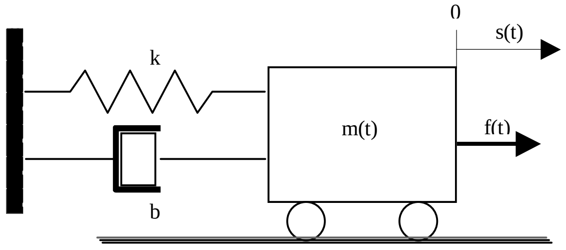

Figura 2.9 Sistema massa-molla-smorzatore

La relazione costitutiva è fornita dalla legge di conservazione della quantità di moto:

$$\frac{d(mv)}{dt} = -ks(t) - b\frac{ds}{dt} + f(t)$$

Con semplici manipolazioni si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t) = x_2(t)\\
&\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{m(t)}x_1(t) - \frac{b}{m(t)}x_2(t) - \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}x_2(t) + \frac{1}{m(t)}u(t)\\
&y(t) = x_1(t)
\end{aligned}$$

Come si vede, i coefficienti (o parametri) della funzione *f* variano nel tempo: il sistema è quindi non stazionario. Esso, inoltre, è tempo continuo, SISO e strettamente proprio. E' da notare infine che, in questo caso, la dimensione del sistema (numero delle variabili di stato) è pari a 2.

II.3.3 Sistemi lineari e non lineari

La definizione di sistema lineare fa riferimento a proprietà che riguardano combinazioni lineari degli ingressi, degli stati e delle uscite. Pertanto essa può essere data solo con riferimento a sistemi in cui gli insiemi dei valori di ingresso *U*, stato *X* e uscita *Y* sono spazi vettoriali. Sistemi che godono di questa proprietà sono detti *sistemi a stato vettore*.

> **Definizione.** Un sistema a stato vettore si dice *lineare* se ad una combinazione lineare di ingressi e stati iniziali, secondo gli stessi coefficienti, corrisponde la combinazione lineare, sempre secondo gli stessi coefficienti, degli andamenti dello stato e dell'uscita.

Poiché la definizione fa riferimento all'andamento dello stato, ossia ai valori assunti dallo stato nel tempo, essa va espressa matematicamente mediante la funzione di transizione di stato φ, oltre che con la trasformazione di uscita η. In particolare la condizione di linearità si esprime come segue:

$$\begin{aligned}
x(t) = \varphi(t, t_0, k_1x_{01} + k_2x_{02}, k_1u_{1[t_0,t)} + k_2u_{2[t_0,t)}) = \\
k_1\varphi(t, t_0, x_{01}, u_{1[t_0,t)}) + k_2\varphi(t, t_0, x_{02}, u_{2[t_0,t)})
\end{aligned} \qquad (2.11a)$$

$$\begin{aligned}
y(t) = \eta(t, k_1x_1(t) + k_2x_2(t), k_1u_1(t) + k_2u_2(t)) = \\
k_1\eta(t, x_1(t), u_1(t)) + k_2\eta(t, x_2(t), u_2(t))
\end{aligned} \qquad (2.11b)$$

Sulla base di questa definizione si conclude che, quando in un sistema lineare si vuole calcolare l'andamento dello stato e/o dell'uscita corrispondente ad una combinazione lineare di ingressi e di stati iniziali secondo gli stessi coefficienti, si possono calcolare separatamente gli andamenti di stato e uscita corrispondenti alle due coppie stato iniziale-ingresso, e poi combinarle linearmente secondo gli stessi coefficienti. Il principio è illustrato graficamente in Fig.2.10. Questa proprietà va anche sotto il nome di *Principio di sovrapposizione degli effetti.*

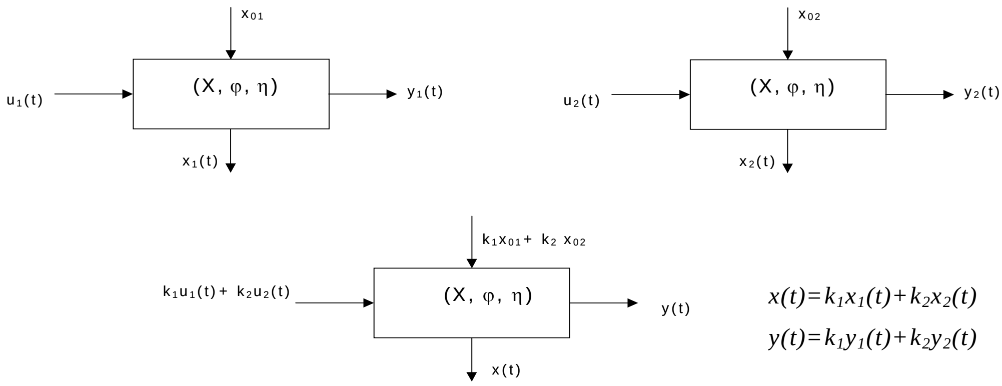

Figura 2.10 Illustrazione del principio di sovrapposizione degli effetti

Con riferimento alla rappresentazione implicita i-s-u, è possibile dimostrare che un sistema è lineare se e solo se le funzioni f e η sono combinazioni lineari delle variabili di stato e di ingresso, ossia:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + ... + a_{1n}x_n(t) + b_{11}u_1(t) + ... + b_{1r}u_r(t), t) \\ .... \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + ... + a_{nn}x_n(t) + b_{n1}u_1(t) + ... + b_{nr}u_r(t), t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1(t) = c_{11}x_1(t) + ... + c_{1n}x_n(t) + d_{11}u_1(t) + ... + d_{1r}u_r(t), t) \\ .... \\ y_m(t) = c_{m1}x_1(t) + ... + c_{mn}x_n(t) + d_{m1}u_1(t) + ... + d_{mr}u_r(t), t) \end{cases}$$

Pertanto f e η possono anche essere scritte in forma matriciale come segue:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \qquad (2.12a)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \qquad (2.12b)$$

ove $u \in R^r$, $y \in R^m$, $x \in R^n$, e le matrici A, B, C, D hanno dimensioni $n \times n$, $n \times r$, $m \times n$, $m \times r$, rispettivamente. Se tali matrici sono costanti nel tempo, il sistema è anche stazionario. La dimensione n del vettore di stato è detta *ordine del sistema*.

I sistemi degli Esempi 2.5 e 2.10 sono non lineari. I sistemi degli Esempi 2.6, 2.7, 2.8, 2.9 sono lineari e stazionari.

Esempio 2.12 *Sistema massa-molla-smorzatore con massa costante.* Si consideri il sistema massa-molla-smorzatore discusso nell'Esempio 2.11. Esso è un sistema lineare e non stazionario la cui rappresentazione matriciale è:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m(t)} & -\left(\dfrac{b+\dot{m}(t)}{m(t)}\right) \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m(t)} \end{pmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} u(t)$$

Se la *massa* del carrello è *costante* nel tempo, il sistema risulta anche stazionario, e la sua rappresentazione matriciale diventa:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{b}{m} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} u(t)$$

Esempio 2.13 *Pendolo.* Si consideri il pendolo semplice mostrato in Fig.2.11 costituito da una sfera di massa *m* collegata per mezzo di un'asta rigida, di lunghezza ℓ e priva di massa, ad una cerniera. Supponendo che sulla cerniera agisca una coppia motrice *C(t)* si vuole studiare l'andamento nel tempo dell'energia cinetica *E(t)* della sfera.

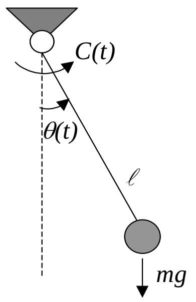

Figura 2.11 Pendolo

Si pone *u(t)= C(t)*, e *y(t)= E(t).*

Per quanto riguarda la scelta delle variabili di stato, in accordo con quanto detto nel paragrafo II.3.3, possiamo scegliere come variabili di stato la posizione angolare $\theta(t)$ e la velocità angolare $\omega(t)$ del pendolo, e quindi porre:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}$$

Detto *J* il momento di inerzia della sfera rispetto alla cerniera (centro di rotazione), dato da $J = m\ell^2$, e *g* l'accelerazione di gravità, le relazioni costitutive sono fornite dalla legge di Newton, che nel caso di moto rotazionale si scrive:

$$J\frac{d\omega}{dt} = -mg\ell sin\theta + C(t)$$

e dalla espressione dell'energia cinetica, ossia

$$E(t) = \frac{1}{2} J\omega(t)^2$$

Con semplici manipolazioni si ottiene:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{g}{\ell} sin(x_1(t)) + \frac{1}{J} u(t)$$
$$y(t) = \frac{1}{2} J x_2^2(t)$$

Il sistema risultante è a tempo continuo, non lineare, del secondo ordine, stazionario, SISO, strettamente proprio.

Esempio 2.14 *Termometro.* Si consideri il termometro a mercurio, con contenitore in vetro sottile mostrato in Fig.2.12. Supponiamo che tale termometro, inizialmente a temperatura ambiente θ_a, venga immerso in una vasca contenente un liquido a temperatura $\theta_b(t)$ variante nel tempo. Si vuole studiare l'andamento nel tempo della temperatura $\theta(t)$ del termometro.

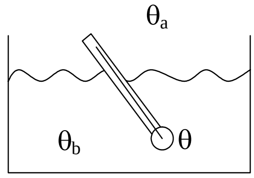

Figura 2.12 Termometro a mercurio

Si pone $u(t)= \theta_b(t)$, e $y(t)= \theta(t)$.

Per quanto riguarda la scelta delle variabili di stato, in accordo con quanto detto nel paragrafo II.3.3, possiamo scegliere come variabili di stato la stessa temperatura $\theta(t)$ del termometro, per cui $x(t)=\theta(t)$.

Detta C la capacità termica del termometro (data dal prodotto del calore specifico del mercurio per la massa di mercurio) e K il coefficiente di scambio termico tra liquido e termometro (dato dal prodotto della conducibilità termica del vetro per la superficie di scambio termico e diviso lo spessore del vetro), le relazioni costitutive sono fornite dall'equazione di bilancio termico:

$$C \frac{d\theta}{dt} = q(t)$$

dove $q(t)$ è la quantità di calore che, in un'unità di tempo, dal liquido si trasferisce al termometro, e dall'espressione di $q(t)$, data da:

$$q(t) = K(\theta_b(t) - \theta(t))$$

Con semplici manipolazioni delle relazioni costitutive, si ottiene un modello implicito i-s-u nella forma:

$$\dot{x}(t) = -\frac{K}{C} x(t) + \frac{K}{C} u(t)$$
$$y(t) = x(t)$$

Il sistema risultante è a tempo continuo, lineare, del primo ordine, stazionario, SISO, strettamente proprio.

Esempio 2.15 *Forno elettrico.* Si consideri il forno con riscaldamento elettrico mostrato in Fig.2.13. Il fluido (aria) all'interno del forno riceve, dalla resistenza elettrica, una potenza termica $q(t)$ ma, essendo le pareti del forno non perfettamente adiabatiche, cede all'esterno una potenza termica che dipende dal salto termico tra la temperatura del fluido θ e quella dell'ambiente esterno θ_a. Si vuole studiare l'andamento nel tempo della temperatura $\theta(t)$ del fluido nel forno.

Si noti che, in questo sistema, gli ingressi sono sia la potenza termica fornita $q(t)$, che è un ingresso manipolabile a piacere, sia la temperatura esterna dell'ambiente $\theta_a(t)$, che non è manipolabile: essa viene detta *ingresso di disturbo* o semplicemente *disturbo*.

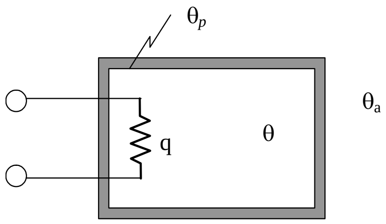

Figura 2.13 Forno elettrico

Si pone:

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q(t) \\ \theta_a(t) \end{pmatrix}$$
$$y(t) = \theta(t)$$

Per quanto riguarda la scelta delle variabili di stato, in accordo con quanto detto nel paragrafo II.3.3, possiamo scegliere come variabili di stato le temperature di tutti gli elementi in grado di immagazzinare calore. Questi sono il fluido interno e le pareti del forno. Pertanto, detta $\theta_p(t)$ la temperatura della parete (supposta uniforme), porremo:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta_p(t) \end{pmatrix}$$

E' da notare che, se ci accontentassimo di una minore accuratezza nella descrizione del fenomeno in studio, potremmo ritenere trascurabile la quantità di calore che si accumula nelle pareti rispetto a quella accumulata nel fluido e considerare una sola variabile di stato.

Per quanto riguarda la scrittura delle relazioni costitutive, con la scelta di modellizzazione effettuata dobbiamo considerare sia lo scambio termico tra fluido e parete che quello tra parete e ambiente. Detta C la capacità termica del fluido, C_p la capacità termica della parete, K_{fp} il coefficiente di scambio termico tra fluido e parete, K_{pa} il coefficiente di scambio termico tra parete e ambiente esterno, le relazioni costitutive sono fornite dalle due equazioni di bilancio termico:

$$C\frac{d\theta}{dt} = -K_{fp}(\theta - \theta_p) + q(t)$$
$$C_p\frac{d\theta_p}{dt} = K_{fp}(\theta - \theta_p) - K_{pa}(\theta_p - \theta_a)$$

Come già si vede, le relazioni costitutive sono tutte espresse in termini di combinazioni lineari delle variabili in gioco. Questo ci fa già intuire che il sistema è lineare, per cui possiamo dare direttamente la sua rappresentazione in forma matriciale. Con manipolazioni standard delle relazioni costitutive, si ottiene:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{K_{fp}}{C} & \frac{K_{fp}}{C} \\ +\frac{K_{fp}}{C_p} & -\frac{K_{fp}+K_{pa}}{C_p} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{K_{pa}}{C_p} \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} u(t)$$

Il sistema risultante è a tempo continuo, lineare, del secondo ordine, stazionario, con più ingressi, strettamente proprio.

I sistemi lineari e stazionari, nel seguito indicati come "*sistemi LTI*" (che sta per sistemi Lineari e Tempo Invarianti), costituiscono una classe molto importante di sistemi per le seguenti ragioni:

- Molti sistemi reali si possono modellare come sistemi lineari e stazionari;
- La teoria dei sistemi lineari e stazionari è sufficientemente assestata;

- La teoria dei sistemi lineari consente di studiare in modo approssimato anche sistemi non lineari a stato vettore sotto particolari segnali di ingresso.

II.3.4 Automi

Un altro modo di classificare i sistemi è basato sulla natura degli insiemi di valori di ingresso *U*, di uscita *Y* e di stato *X*. Negli esempi considerati finora tali insiemi sono sempre stati costituiti da vettori di variabili reali e gli insiemi *U*, *Y* e *X* sono spazi vettoriali. Come già detto, tali sistemi vengono detti *Sistemi a stato vettore*. In essi le equazioni di stato sono normalmente equazioni differenziali o equazioni alle differenze.

In molte applicazioni, viceversa, si ha a che fare con sistemi in cui gli insiemi *U e Y* sono costituiti da un numero finito di elementi, detti rispettivamente insieme dei *simboli di ingresso e di uscita*, e l'insieme *X*, detto insieme dei *simboli di stato*, è al più costituito da una quantità numerabile di elementi, ossia:

$$U = \{u_1, u_2, ..., u_\rho\} \qquad Y = \{y_1, y_2, ..., y_\mu\} \qquad X = \{x_1, x_2, ..., x_\nu, ...\}$$

In tali sistemi lo stato varierà istantaneamente da un valore all'altro nell'istante in cui si manifesta un nuovo simbolo di ingresso.

> **Definizione.** Un sistema è detto *Automa* se è stazionario, gli insiemi di valori di ingresso *U*, di uscita *Y* sono insiemi di cardinalità finita e se l'insieme di stato *X* è numerabile.

Nel caso in cui l'insieme *X* è anch'esso costituito da un numero finito di elementi, il sistema è detto *automa a stati finiti* o *sistema a stati finiti.*

In questo paragrafo noi considereremo sistemi a stati finiti a tempo discreto, ossia quelli in cui l'insieme dei tempi è discreto e gli elementi di tale insieme sono noti a priori, in genere scanditi da un clock.

In un sistema a stati finiti a tempo discreto la funzione generatrice *f* fornisce lo stato prossimo a partire dallo stato corrente e dall'ingresso corrente; per tale ragione essa è anche detta *funzione stato prossimo.* La trasformazione d'uscita definisce l'uscita attuale a partire dallo stato corrente e dall'ingresso corrente. Poiché nei sistemi a stati finiti i pedici vengono utilizzati per individuare i simboli degli insiemi di stato, ingresso e uscita, per semplificare le notazioni indicheremo con x lo stato corrente del sistema, con u e y l'ingresso e l'uscita corrente, con x' lo stato prossimo. Pertanto la rappresentazione standard sarà del tipo:

$$\begin{cases} x' = f(x,u) \\ y = \eta(x,u) \end{cases} \tag{2.13}$$

Poiché gli insiemi di ingresso, uscita e stato non sono strutturati algebricamente, anche le funzioni f e η non sono di tipo algebrico. Essendo tali insiemi costituiti da un numero finito di elementi, un modo frequentemente utilizzato per rappresentare tali funzioni è quello che fa uso di grafi orientati o tabelle.

Nella rappresentazione con grafi la funzione generatrice viene rappresentata mediante un grafo orientato, detto *grafo di transizione*, che si costruisce nel seguente modo: ad ogni simbolo x_i di stato si associa un nodo del grafo (rappresentato da un cerchietto); se poi esiste almeno un simbolo d'ingresso u_r che porta il sistema dallo stato x_i allo stato x_j si traccia un arco orientato che parte dal nodo x_i e termina sul nodo x_j e lo si contraddistingue con il simbolo u_r (vedi Fig. 2.14).

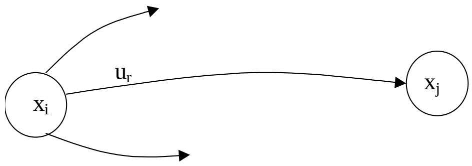

Figura 2.14 Particolare di grafo di transizione

Per quanto riguarda la trasformazione d'uscita, tra le varie possibilità di rappresentazione, una delle più utilizzate è quella consistente nello scrivere il valore dell'uscita in corrispondenza di ciascun simbolo di ingresso riportato su un arco (vedi Fig. 2.15). Se invece il sistema è puramente dinamico, ossia l'uscita dipende solo dal valore dello stato, il valore dell'uscita va indicato nel cerchietto associato a ciascun simbolo di stato.

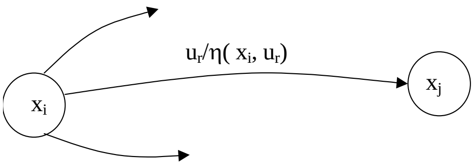

Figura 2.15 Particolare di grafo di transizione e trasformazione d'uscita per una macchina di Mealy

Un modo alternativo per rappresentare le funzioni f e η è quello che fa uso di tabelle. Un tipo di tabella molto utilizzata è la cosiddetta *tabella stato presente - ingresso presente*. Essa è costituita da ν righe (tante quanti sono i simboli di stato) e da ρ colonne (tante quanti sono i simboli d'ingresso). Ogni casella della tabella riporta la coppia stato prossimo/uscita presente. Così se, ad esempio, alla coppia (x_i, u_r) corrisponde l'uscita presente y_m e lo stato prossimo x_j la tabella si presenterà come in Fig.2.16. Se invece il sistema è puramente dinamico il valore dell'uscita va indicato in un'apposita colonna.

Ovviamente il grafo di transizione ha il vantaggio di dare una visualizzazione più chiara del comportamento del sistema. Per questo motivo esso è più utilizzato nella fase di scrittura del modello. Nell'implementazione al calcolatore, invece, si usa quasi sempre la rappresentazione per mezzo di tabelle.

	u_1	……	u_r	……	u_ρ
x_1					
……					
x_i			x_j / y_m		
……					
x_ν					

Figura 2.16 Particolare di tabella stato presente - ingresso presente

In molte applicazioni sui sistemi a stati finiti lo stato iniziale x_0 del sistema è fissato una volta per tutte e prende il nome di stato di reset. In questo caso, nella rappresentazione con grafo di transizione, tale stato sarà indicato esplicitamente mediante una freccia che punta sul nodo associato a tale stato; nella rappresentazione con tabelle la freccia punterà alla riga associata allo stato iniziale.

Infine, in alcune applicazioni, come ad esempio i riconoscitori di sequenze di simboli di ingresso, in cui l'uscita può assumere solo due valori (ad esempio 0 e 1, oppure Falso e Vero) e inoltre essa dipende solo dal valore assunto dallo stato (macchina di Moore), si usa talvolta definire un insieme F, detto *insieme degli stati finali*, come l'insieme degli stati in cui l'uscita assume il valore 1 (che, nel caso di riconoscitori di sequenze, sta a significare "sequenza identificata"). Tali stati vengono denotati nel grafo di transizione con una colorazione di grigio dei cerchietti corrispondenti.

In conclusione possiamo dare le seguente definizione formale:

> **Definizione.** Un automa a stati finiti a tempo discreto è definito o mediante una sestupla
>
> $$(U, X, f, x_0, Y, \eta)$$
>
> oppure, nel caso in cui sia assegnato l'insieme degli stati finali, mediante la quintupla
>
> $$(U, X, f, x_0, F)\,.$$

Esempio 2.16 *Contatore modulo N.* Si vuole determinare il modello di un contatore modulo N degli 1 di una sequenza di 0 e 1.

Per tale sistema si ha: $U=\{0,1\}$, $Y=\{0,1,2,\dots,N-1\}$.

Il sistema dovrà avere N stati: il primo, diciamolo x_0, "ricorderà" che sono arrivati Nk impulsi, con k=0,1,2,…; il secondo, x_1, "ricorderà" che sono arrivati Nk+1 impulsi; il terzo, x_2, "ricorderà" che sono arrivati Nk+2 impulsi, e così via. Pertanto: $X=\{x_0, x_1, x_2,\dots, x_{N-1}\}$. E' ovvio che tale sistema, per rispondere alla specifica di funzionamento, dovrà avere x_0 come stato iniziale (stato di reset).

Un modello di tale sistema, per il caso N=3, è riportato in Fig. 2.17.

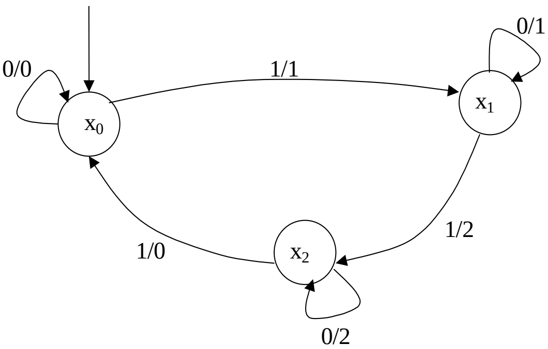

Figura 2.17 Grafo di transizione del contatore modulo 3

La rappresentazione dello stesso sistema mediante la tabella stato presente - ingresso presente è riportata in Fig.2.18.

	0	*1*
x_0	$x_0/0$	$x_1/1$
x_1	$x_1/1$	$x_2/2$
x_2	$x_2/2$	$x_0/0$

Figura 2.18 Tabella stato presente - ingresso presente del contatore modulo 3

Esempio 2.17 *Riconoscitore di una stringa.* Si vuole scrivere il modello di una macchina che, ricevendo in ingresso una sequenza di simboli dell'insieme {1,2,3}, riconosca le sequenze ordinate (stringhe) del tipo (2,2,3).

Supponendo che l'uscita sia normalmente Falsa e che diventi Vera quando la stringa viene riconosciuta, per tale sistema avremo: *U={1,2,3}*, *Y={Falso,Vero}*.

In tale sistema le situazioni da "ricordare", e quindi le situazioni a cui dobbiamo associare un valore dello stato, sono le seguenti:

- x_0 l'ultimo simbolo di ingresso arrivato non è significativo per il riconoscimento della stringa;
- x_1 l'ultimo simbolo di ingresso arrivato è 2 ma non è preceduto da un 2;
- x_2 l'ultimo simbolo di ingresso arrivato è 2 ed è preceduto da un 2;
- x_3 gli ultimi tre simboli di ingresso arrivati sono, in ordine crescente di tempo, 2, 2, 3.

Pertanto: $X=\{ x_0, x_1, x_2, x_3\}$. E' ovvio che tale sistema, per rispondere alla specifica di funzionamento, dovrà avere x_0 come stato iniziale (stato di reset).

Per tale sistema, inoltre, possiamo adottare la descrizione mediante la quintupla (U, X, f, x_0, F) con la convenzione di associare agli stati dell'insieme F il valore di uscita *Vero*. Ovviamente risulta: $F=\{ x_3\}$.

La rappresentazione mediante grafo di tale sistema è riportata in Fig.2.19.

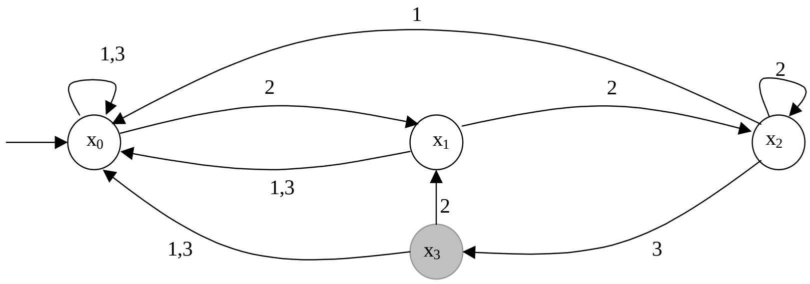

Figura 2.19 Grafo di transizione del riconoscitore di stringa dell'esempio 2.17

Esempio 2.18 *Riconoscitore di più stringhe.* Si vuole scrivere il modello di una macchina che, ricevendo in ingresso una sequenza di simboli dell'insieme $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, riconosca stringhe di 3 o 4 caratteri, che iniziano e terminano con α o β e contengano al centro solo simboli γ, ossia stringhe appartenenti al seguente insieme $L=\{\alpha\gamma\alpha, \alpha\gamma\beta, \beta\gamma\alpha, \beta\gamma\beta, \alpha\gamma\gamma\alpha, \alpha\gamma\gamma\beta, \beta\gamma\gamma\alpha, \beta\gamma\gamma\beta\}$.

Supponendo che l'uscita sia normalmente Falsa e che diventi Vera quando una delle stringhe assegnate viene riconosciuta, per tale sistema avremo: $U=\{\alpha, \beta, \gamma\}$, *Y={Falso,Vero}*.

Con semplici ragionamenti, e con ovvio significato dei simboli di stato, si vede che una rappresentazione mediante grafo di tale sistema è quella riportata in Fig.2.20. In esso, come si può notare, risulta $X=\{ x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ e $F=\{ x_3, x_5\}$.

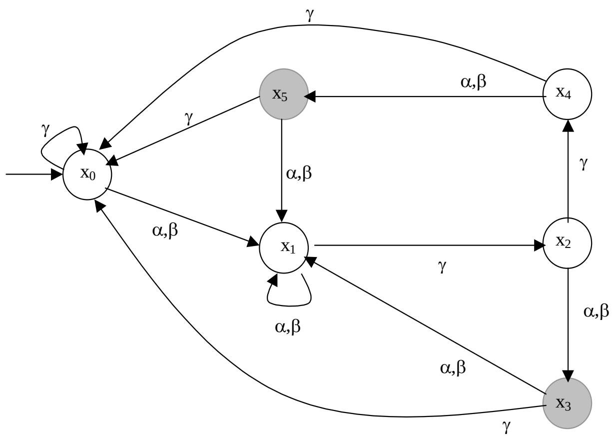

Figura 2.20 Grafo di transizione del riconoscitore delle stringhe dell'esempio 2.18

La teoria degli automi è alla base delle tecniche utilizzate per l'analisi e la progettazione di alcune categorie di sistemi di notevole interesse pratico, quali ad esempio quelle dei circuiti numerici e quella dei cosiddetti *Sistemi a Eventi Discreti.* Data la particolarità di tali tecniche, esse costituiscono un corpo teorico a sé che verrà trattato in maniera estensiva nel Capitolo 5.

II.4 L’analisi del comportamento dei sistemi dinamici

Lo sforzo sia di modellazione che di classificazione dei sistemi effettuato nei paragrafi precedenti è giustificato dal fatto che esso è destinato a fornire le infrastrutture necessarie per la soluzione di molti problemi di interesse ingegneristico come, ad esempio, quello della progettazione e realizzazione di sistemi di controllo.

Una volta costruito un modello matematico di un sistema, un primo passo per la soluzione di un qualsiasi problema ingegneristico consiste nel capire come il sistema si comporta in differenti condizioni operative. Tale analisi, che va sotto il nome di *analisi del comportamento*, è basata sulla possibilità di calcolare l'andamento dell'uscita (*risposta in uscita*) e/o dello stato (*risposta nello stato*) sotto differenti segnali di ingresso, eventualmente in presenza di variazioni di alcuni parametri del sistema. Tale calcolo può essere effettuato, in linea di principio, in tre modi diversi:

1. calcolo analitico esatto della risposta;
2. valutazione approssimata (o andamento qualitativo) della risposta basata su parametri sintetici del modello;
3. determinazione numerica della risposta attraverso simulazione al calcolatore.

Nella pratica il calcolo analitico esatto e l'andamento qualitativo della risposta possono essere effettuati solo per la classe dei sistemi lineari e stazionari (sistemi LTI). In tutti gli altri casi, la tecnica di analisi più utilizzata è quella basata sulla determinazione della risposta mediante simulazione al calcolatore.

Negli ultimi anni sono stati sviluppati diversi pacchetti software specializzati nella modellizzazione e simulazione di particolari classi di sistemi fisici come, ad esempio, SPICE per la simulazione di sistemi elettrici ed elettronici, DYMOLA per la simulazione di sistemi meccanici, elettromeccanici, …, LOGIC WORKS per la simulazione di sistemi logici, etc. Per l'analisi e la progettazione di sistemi di automazione e controllo, viceversa, l'ambiente software più frequentemente utilizzato è il MATLAB/SIMULINK. Questo, a differenza di quelli precedentemente citati, non è orientato a particolari classi di sistemi fisici, bensì fa direttamente riferimento alla disponibilità di un modello matematico del sistema oggetto di studio. Nel seguito verrà presentata una tecnica molto semplice, e tuttavia generale, per la simulazione di sistemi dinamici in ambiente MATLAB/SIMULINK. Essa è basata su uno schema usualmente utilizzato per la realizzazione di sistemi dinamici di cui è assegnato un modello matematico implicito i-s-u. Tale schema è costituito da un sottosistema puramente algebrico e da particolari sistemi dinamici che sono l'integratore, nel caso di sistemi continui, ed il ritardo, nel caso di sistemi discreti.

L'**integratore** è un sistema dinamico continuo del I ordine descritto dalle equazioni:

$$\dot{x}(t) = u(t)$$
$$y(t) = x(t)$$

o, in maniera equivalente, dall'unica equazione ingresso-uscita

$$y(t) = \int u(\tau)d\tau$$

Il **ritardo (**unitario**)** è un sistema dinamico discreto del I ordine descritto dalle equazioni:

$$x_{k+1} = u_k$$
$$y_k = x_k$$

o, in maniera equivalente, dall'unica equazione ingresso-uscita

$$y_{k+1} = u_k$$

Vale il seguente importante risultato.

Realizzazione di un sistema dinamico. *Ogni sistema dinamico può essere realizzato mediante un sistema algebrico (rispetto ai suoi ingressi) F e un integratore $\int$ se continuo, un ritardo unitario R se discreto, secondo lo schema realizzativo di Fig. 2.21.*

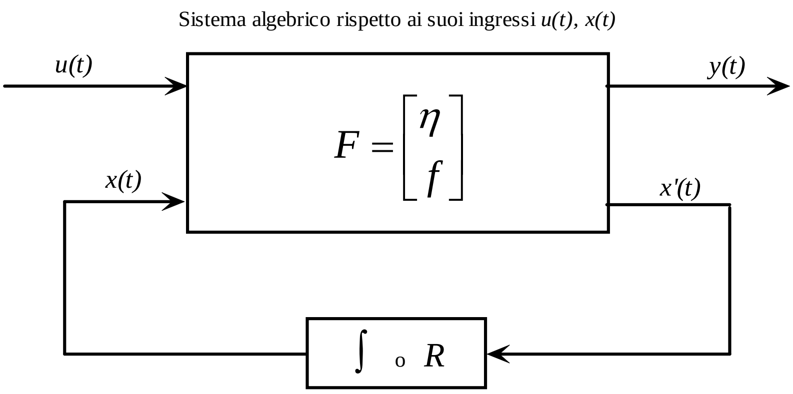

Figura 2.21 Schema realizzativo di un sistema dinamico

Siamo ora in grado di fare la seguente:

Osservazione. Lo schema realizzativo di Fig. 2.21 può anche essere usato per **simulare** facilmente un qualsiasi sistema, come mostrato dai seguenti esempi.

Esempio 2.19 *Simulazione di sistemi a tempo continuo.* In ambiente MATLAB/SIMULINK, per simulare un sistema a tempo continuo con due variabili di stato, si può utilizzare lo *schema Simulink* di Fig. 2.22, ove il blocco contrassegnato con $\frac{1}{s}$ rappresenta un integratore ed il blocco *MATLAB function* implementa le funzioni f ed η del sistema.

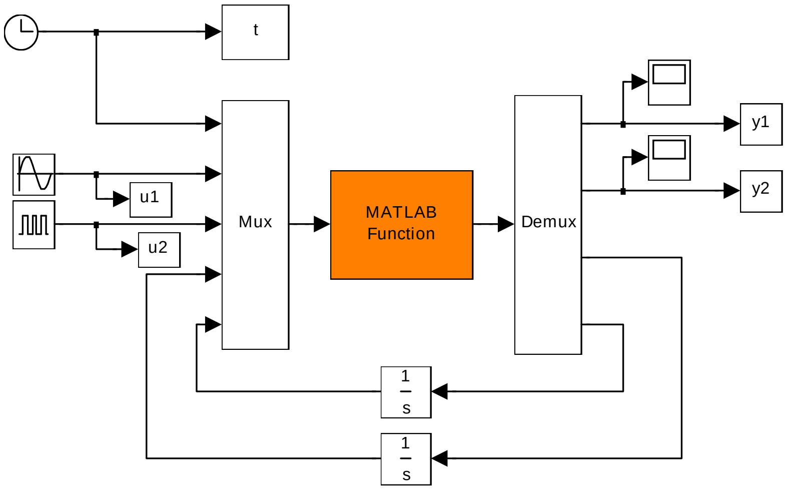

Figura 2.22 Schema (Simulink) per simulare un sistema a tempo continuo

Così, se si vuole simulare il sistema:

$$\dot{x}_1 = -2x_1 - \sin(t)x_2 + g(u_1) + u_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - 10x_2 + u_2$$
$$y_1 = x_1 - x_2$$
$$y_2 = x_1 + x_2/10$$

ove $g(u_1)$ è la funzione di interpolazione lineare a tratti dei punti di ascisse [-10 0 10] e ordinate [-1 0 10], la *MATLAB function*, a cui si può dare il nome "fsisc", risulta:

```
% FSISC.m
function v=fsisc(u)
T=u(1);
U1=u(2);
U2=u(3);
X1=u(4);
X2=u(5);
ud=[-10 0 10]; gd=[-1 0 10];
Xp1=-2*X1-sin(T)*X2 + interp1(ud,gd,U1) + U2;
Xp2=-X1-10*X2+U2;
Y1=X1-X2;
Y2=X1+.1*X2;
v=[Y1 Y2 Xp1 Xp2]';
return
```

Esempio 2.20 *Simulazione di sistemi a tempo discreto.* Uno schema Simulink per simulare un sistema a stato vettore tempo discreto con due variabili di stato può essere quello di Fig. 2.23, ove il blocco contrassegnato con $\frac{1}{z}$ rappresenta un elemento di ritardo ed il blocco *MATLAB function* implementa le funzioni f ed η del sistema.

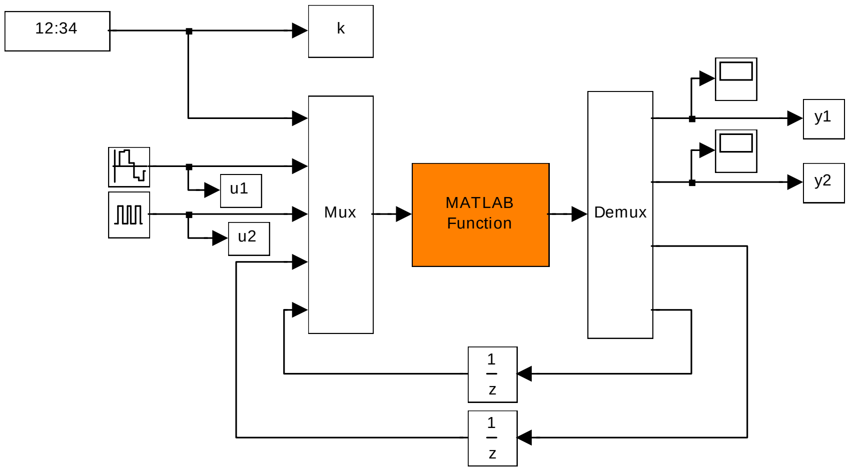

Figura 2.23 Schema (Simulink) per simulare un sistema a stato vettore tempo discreto

Così, se si vuole simulare il sistema:

$$x_{1k+1} = \frac{1}{2} x_1 + u_{2k}$$

$$x_{2k+1} = \frac{x_{1k} x_{2k}}{10} + u_{1k}$$

$$y_{1k} = x_{1k}$$

$$y_{2k} = x_{2k}$$

la *MATLAB function*, a cui si può dare il nome “fsisd”, risulta:

```
% FSISD.m
function v=fsisd(u)
k=u(1);
U1=u(2);
U2=u(3);
X1=u(4);
X2=u(5);
Xp1=X1/2+U2;
Xp2=X1*X2/10+U1;
Y1=X1;
Y2=X2;
v=[Y1 Y2 Xp1 Xp2]';
return
```

Esempio 2.21 *Simulazione di automi a stati finiti a tempo discreto.* La simulazione di automi a tempo discreto può essere effettuata in maniera semplice utilizzando l'artificio di codificare i simboli di ingresso $\{u_1, u_2, ..., u_\rho\}$ con i numeri naturali $\{1, 2, ..., \rho\}$ e facendo cosa analoga per i simboli di stato $\{x_1, x_2, ..., x_\nu\}$ e di uscita $\{y_1, y_2, ..., y_\mu\}$. In tal caso lo schema di simulazione può essere quello di Fig. 2.24. La *MATLAB function* dovrà semplicemente implementare la corrispondenza tra (ingresso presente, stato presente) – (uscita presente, stato prossimo) dettata dalle tabelle di definizione delle funzioni f ed η.

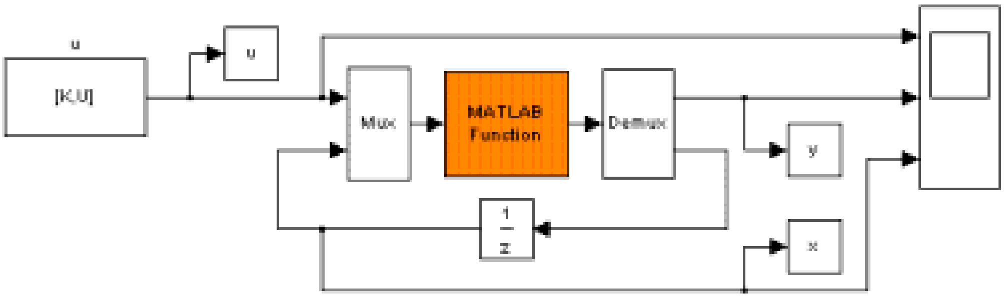

Figura 2.24 Schema (Simulink) per simulare un automa a tempo discreto

Così, se si vuole simulare il contatore modulo 3 dell'Esempio 2.16, introducendo le seguenti codifiche:

Simbolo di ingresso u_i	Ingresso codificato
0	1
1	2

Simbolo di stato x_i	Stato codificato
x_0	1
x_1	2
x_2	3

Simbolo di uscita y_i	Uscita codificata
0	1
1	2
2	3

la *MATLAB function*, a cui si può dare il nome "fsisa", risulta:

```
% FSISA.m
function v=fsisa(u)
TXP=[1 2; 2 3; 3 1];
TY=[1; 2; 3];  % In quest'esempio l'uscita dipende solo dallo stato
U=u(1);
X=u(2);
Y=TY(X);
XP=TXP(X,U);
v=[Y XP];
return
```

E' interessante notare che, per il caso in esame, la funzione stato prossimo può essere anche scritta direttamente in forma algebrica utilizzando la funzione "mod" del MATLAB. Una possibile scrittura della *MATLAB function* "fsisa" è allora la seguente:

```matlab
% FSISA.m
function v=fsisa(u)
U=u(1);
X=u(2);
Y=X;
XP=mod((X-1)+(U-1),3)+1;
v=[Y XP];
return
```

Nel capitolo 5 sarà mostrato come, utilizzando una codifica binaria e l'algebra di Boole binaria, è sempre possibile algebrizzare le funzioni f ed η.