

ESEMPIO 10.6. Calcolare la risposta indiciale del sistema di Fig. 10.8.

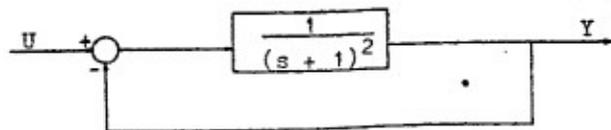


Fig. 10.8

La funzione di trasferimento vale:

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{(s+1)^2}} = \frac{1}{(s+1)^2 + 1} = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} \quad (10.71)$$

Ne segue che:

$$Y(s) = \frac{W(s)}{s} = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{1}{s((s+1)^2 + 1)} = \frac{1/2}{s} - \frac{1/2(s+1)}{(s+1)^2 + 1} - \frac{1/2}{(s+1)^2 + 1}, \quad (10.72)$$

da cui:

$$y(t) = 1/2 - 1/2 e^{-t} \cos t - 1/2 e^{-t} \sin t = 1/2 - \sqrt{2}/2 e^{-t} \sin(t + \pi/4) \quad (10.73)$$

III.11 ANALISI DEI SISTEMI DISCRETI NEL DOMINIO DELLA z

Un discorso analogo a quello fatto nel paragrafo precedente per i sistemi lineari stazionari continui può essere fatto

per i sistemi lineari stazionari discreti ricorrendo alla cosiddetta trasformata z.

La trasformata z di una funzione reale di variabile discreta (o successione):

$$f(k) = \{f(k)\} = f(0), f(1), f(2), \dots, f(k), \dots \quad (11.1)$$

è una funzione complessa di variabile complessa $F(z)$ definita all'esterno del cerchio di raggio

$$\rho = \max \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|f(k)|} \quad (11.2)$$

e legata biunivocamente alla precedente dalla coppia di relazioni:

$$F(z) = Z(f(k)) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}, \quad (11.3a)$$

$$f(k) = Z^{-1}(F(z)) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} z^{k-1} F(z) dz, \quad (11.3b)$$

dove Γ è una curva chiusa compresa nel dominio di definizione di $F(z)$ e contenente l'origine.

Le più importanti proprietà della trasformata z sono le seguenti:

$$- Z(f(k+1)) = zF(z) - zf(0) \quad (\text{anticipo}) \quad (11.4)$$

Infatti (vedi le Fig. 11.1a, b):

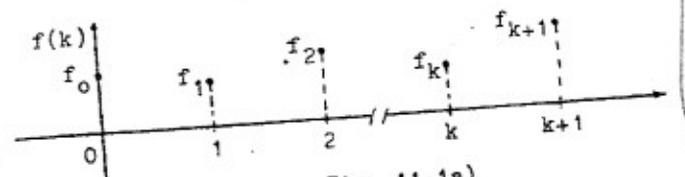


Fig. 11.1a

costituiscono una rappresentazione i-s-u della $W(s)$.

A conclusione del paragrafo si pone l'attenzione sul fatto che, con i procedimenti esposti per passare da una rappresentazione i-u ad una i-s-u, non si perviene in generale ad una rappresentazione minima.

Nel caso particolare di un solo ingresso o di una sola uscita, se il vettore di trasferimento da cui si parte è ridotto ai minimi termini, allora la rappresentazione cui si perviene è minima (vedi il Capitolo IV).

ESEMPIO 13.6. Determinare una rappresentazione i-s-u del sistema di Fig. 13.3.

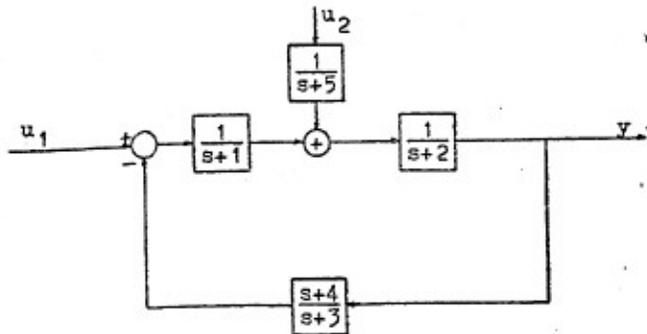


Fig. 13.3

Si ha:

$$W_{11}(s) = \frac{Y(s)}{U_1(s)} \Big|_{u_2=0} = \frac{(s+1)(s+2)}{1 + \frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)}} = \frac{s+3}{s^3+6s^2+12s+10} \quad (13.52a)$$

$$W_{12}(s) = \frac{Y(s)}{U_2(s)} \Big|_{u_1=0} = \frac{1}{s+5} \frac{1}{1 + \frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)}} = \frac{(s+1)(s+3)}{(s+5)(s^3+6s^2+12s+10)} = \frac{s^2+4s+3}{s^4+11s^3+42s^2+70s+50} \quad (13.52b)$$

da cui:

$$W(s) = \frac{(s^2+8s+15) \quad s^2+4s+3}{s^4+11s^3+42s^2+70s+50} \quad (13.53)$$

Pertanto, tenendo presente le (13.42), una rappresentazione i-s-u risulta:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -50 \\ 1 & 0 & 0 & -70 \\ 0 & 1 & 0 & -42 \\ 0 & 0 & 1 & -11 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 15 & 3 \\ 8 & 4 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u \quad (13.54a)$$

$$y = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)x \quad (13.54b)$$

ESEMPIO 13.7. Si consideri il sistema rappresentato dallo schema a blocchi di Fig. 13.4.

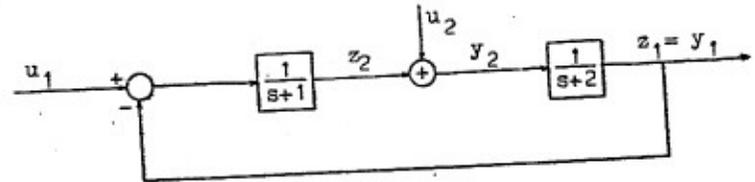


Fig. 13.4

Si ha:

$$W_{11}(s) = \frac{\frac{1}{(s+1)(s+2)}}{1 + \frac{1}{(s+1)(s+2)}} = \frac{1}{s^2+3s+3} \quad (13.55a)$$

$$W_{21}(s) = \frac{\frac{1}{s+1}}{1 + \frac{1}{(s+1)(s+2)}} = \frac{s+2}{s^2+3s+3} \quad (13.55b)$$

$$W_{12}(s) = \frac{\frac{1}{s+2}}{1 + \frac{1}{(s+1)(s+2)}} = \frac{s+1}{s^2+3s+3} \quad (13.55c)$$

$$W_{22}(s) = \frac{W_{21}(s)}{\frac{1}{s+2}} = \frac{s^2+3s+2}{s^2+3s+3}, \quad (13.55d)$$

da cui:

$$W(s) = \begin{bmatrix} 1 & s+2 \\ s+1 & s^2+3s+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 \\ s^2+3s+2 \end{bmatrix} = (W_1(s) \ W_2(s)). \quad (13.56)$$

Una rappresentazione di $W_1(s)$ è:

$$\dot{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 \quad (13.57a)$$

$$y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x_1, \quad (13.57b)$$

mentre una rappresentazione di $W_2(s)$ vale:

$$\dot{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2 \quad (13.58a)$$

$$y_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2. \quad (13.58b)$$

Pertanto, tenendo presente le (13.48), una rappresentazione del sistema di Fig. 13.4 risulta:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \quad (13.59a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u. \quad (13.59b)$$

Una diversa rappresentazione si ottiene notando che (vedi lo schema a blocchi di Fig. 13.4):

$$Z_1(s) = \frac{Z_2(s) + U_2(s)}{s+2} \iff sZ_1(s) + 2Z_1(s) = Z_2(s) + U_2(s) \implies \dot{z}_1 = -2z_1 + z_2 + u_2 \quad (13.60a)$$

$$Z_2(s) = \frac{U_1(s) - Z_1(s)}{s+1} \iff sZ_2(s) + Z_2(s) = -Z_1(s) + U_1(s) \implies \dot{z}_2 = -z_1 - z_2 + u_1 \quad (13.60b)$$

$$y_1 = z_1 \quad (13.61a)$$

$$y_2 = z_2 + u_2, \quad (13.61b)$$

da cui:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u \quad (13.62a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u. \quad (13.62b)$$

E' chiaro che la rappresentazione (13.62) è equivalente alla rappresentazione (13.59) e quindi quest'ultima non è minima.

III.14 ANALISI DEI SISTEMI LINEARI STAZIONARI NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA

Un altro metodo di analisi dei sistemi lineari stazionari è quello che fa uso della trasformata di Fourier.

Tale metodo è molto importante perchè porta alla definizione di risposta armonica di un sistema dinamico e alla possibilità di determinare la funzione di trasferimento per mezzo di semplici prove da effettuare sul sistema.

Si consideri prima il caso dei sistemi continui.

Come è ben noto, la trasformata di Fourier di una funzione reale $f(t)$, definita su R , è una funzione complessa di variabile reale $F(\omega)$, legata biunivocamente alla precedente dalla coppia di relazioni:

$$\begin{aligned} F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt = \operatorname{Re}F(\omega) + j\operatorname{Im}F(\omega) = \\ &= |F(\omega)| e^{j\angle F(\omega)} = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \quad (o) \end{aligned} \quad (14.1a)$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (14.1b)$$

(o) $\angle F(\omega)$ denota la fase di $F(\omega)$.

Il diagramma di $M(\omega)$ prende il nome di spettro di ampiezza di $f(t)$, mentre quello di $\varphi(\omega)$ spettro di fase.

Le più importanti proprietà della trasformata di Fourier sono le seguenti:

- $F(-\omega) = F^*(\omega)$ (coniugazione). (14.2)
- $\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = j\omega F(\omega)$ (derivazione in t). (14.3)
- $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$ (integrazione). (14.4)
- $\mathcal{F}\{f(t/a)\} = |a|F(\omega)$ (cambiamento di scala). (14.5)
- $\mathcal{F}\{f(t-T)\} = e^{-j\omega T}F(\omega)$ (traslazione in t). (14.6)
- $\mathcal{F}\{2f(t)\cos\omega_0 t\} = -F(\omega-\omega_0) + F(\omega+\omega_0)$ (modulazione). (14.7)
- $\mathcal{F}\{tf(t)\} = j\frac{d}{d\omega}F(\omega)$ (derivazione in ω). (14.8)
- $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right\} = F(\omega)G(\omega)$ (convoluzione). (14.9)
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G^*(\omega)d\omega$ (Parseval). (14.10)
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)d\tau = F(0)$. (valore nell'origine). (14.11)

Dalla (14.10) si ha:

$$\text{energia di } f(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega, \quad (14.12)$$

che giustifica il nome di densità spettrale di energia di $f(t)$ che viene dato alla funzione $\frac{1}{2\pi}|F(\omega)|^2$.

Alcune coppie di trasformate di notevole interesse sono:

- $S(t) \xrightarrow{F} 1$ (14.13a)
- $1 \xrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega)$ (14.13b)

$$Y_h(\omega) = U_i \frac{\pi}{j} (W_{hi}(\omega) \delta(\omega - \omega_0) e^{j\alpha_i} - W_{hi}(\omega) \delta(\omega + \omega_0) e^{-j\alpha_i}). \quad (14.28)$$

L'uscita $y_h(t)$ si ottiene antitrasformando $Y_j(\omega)$; applicando la (14.1b) si ottiene:

$$y_h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y_h(\omega) e^{j\omega t} d\omega = U_i \frac{W_{hi}(\omega_0) e^{j\omega_0 t} e^{j\alpha_i} - W_{hi}(-\omega_0) e^{-j\omega_0 t} e^{-j\alpha_i}}{2j} \quad (14.29)$$

Da cui, tenendo presente la (14.2), si ha:

$$y_h(t) = U_i M_{hi}(\omega_0) \frac{e^{j(\omega_0 t + \alpha_i + \varphi_{hi}(\omega_0))} - e^{-j(\omega_0 t + \alpha_i + \varphi_{hi}(\omega_0))}}{2j} = U_i M_{hi}(\omega_0) \text{sen}(\omega_0 t + \alpha_i + \varphi_{hi}(\omega_0)) \quad (14.30)$$

Come si vedrà nel paragrafo 16, il Teorema 14.2 è fondamentale ai fini della determinazione sperimentale della matrice di trasferimento di un sistema dinamico lineare e stazionario.

ESEMPPIO 14.1. Calcolare l'uscita y del circuito RLC di Fig. 14.1 nell'ipotesi che

$$u(t) = V_M \text{sen} \omega_0 t. \quad (14.31)$$

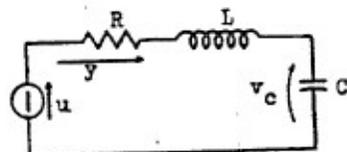


Fig. 14.1

Si ha:

$$u = Ry + Ly' + \frac{1}{C} \int_0^t y(\tau) d\tau + v_c(0), \quad (14.32)$$

da cui, trasformando con le condizioni $y(0) = 0, v_c(0) = 0$, si ottiene:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{R + sL + 1/sC} = \frac{sC}{1 + RCs + LCs^2}. \quad (14.33)$$

Poichè i poli di $W(s)$, per valori positivi di R, L, C , sono a parte reale negativa, in base al Teorema 14.2, la corrente y risulta:

$$y(t) = V_M \left| \frac{1}{R + j(\omega_0 L - 1/\omega_0 C)} \right| \text{sen}(\omega_0 t - \arctan \frac{R + j(\omega_0 L - 1/\omega_0 C)}{1}). \quad (14.34)$$

ESEMPPIO 14.2. Determinare l'uscita y del sistema di sospensione di un autoveicolo (vedi l'Esempio 13.5) nell'ipotesi che l'asperità della strada sia (vedi la Fig. 14.2)

$$a = S \text{sen} \frac{2\pi}{l} z \quad (14.35)$$

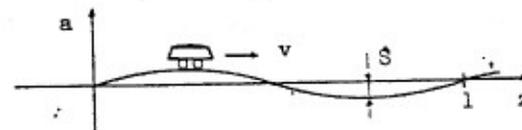


Fig. 14.2

e l'autoveicolo viaggia con velocità costante v .

Ponendo

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{l} v, \quad (14.36)$$

l'ingresso u risulta:

$$u(t) = S \sin \omega_0 t. \quad (14.37)$$

D'altra parte, dalla (13.36) o dalle (13.37), la funzione di trasferimento vale:

$$W(s) = \frac{sF/M + K/M}{s^2 + F/Ms + K/M}, \quad (14.38)$$

i cui poli sono a parte reale negativa.

Pertanto l'uscita risulta:

$$y(t) = \left| \frac{K + j\omega_0 F}{K - M\omega_0^2 + j\omega_0 F} \right| S \sin(\omega_0 t + \frac{K + j\omega_0 F}{K - M\omega_0^2 + j\omega_0 F}) \quad (14.39)$$

Si consideri ora il caso discreto.

Definendo trasformata (discreta) di Fourier di una funzione reale di variabile discreta

$$f(k) = \{f(k)\} = \dots, f(-k), \dots, f(-1), f(0), f(1), \dots, f(k), \dots, \quad (14.40)$$

la funzione complessa di variabile reale $F(\omega)$, legata biunivocamente alla precedente dalla coppia di relazioni:

$$F(\omega) = F(f(k)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) e^{-j\omega k} \quad (14.41a)$$

$$f(k) = F^{-1}(F(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\omega) e^{j\omega k} d\omega, \quad (14.41b)$$

è immediato constatare che quanto illustrato in precedenza per i sistemi continui può essere esteso anche al caso dei sistemi discreti.

In particolare, se i poli di $W(z)$ sono in modulo minore

di uno, la matrice delle risposte armoniche risulta:

$$\hat{W}(\omega) = F(W(k)) = Z(W(k)) \Big|_{z=e^{j\omega}} = W(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}, \quad (14.42)$$

mentre l'uscita h-esima all'ingresso

$$u_i(k) = U_i \sin(\omega_0 k + \alpha_i) \quad (14.43)$$

vale:

$$y_h(k) = U_i M_{hi}(\omega_0) \sin(\omega_0 k + \alpha_i + \varphi_{hi}(\omega_0)), \quad (14.44)$$

dove:

$$M_{hi}(\omega_0) = |\hat{W}_{hi}(\omega_0)| = |W_{hi}(z)|_{z=e^{j\omega_0}} \quad (14.45a)$$

$$\varphi_{hi}(\omega_0) = \angle \hat{W}_{hi}(\omega_0) = \angle W_{hi}(z) \Big|_{z=e^{j\omega_0}} \quad (14.45b)$$

ESEMPIO 14.3. Calcolare la risposta $y(k)$ del sistema

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/8 & 3/4 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (14.46a)$$

$$y(k) = (1 \ 0)x(k) \quad (14.46b)$$

sottoposto all'ingresso

$$u(k) = 10 \sin \frac{\pi}{4} k. \quad (14.47)$$

(*) La matrice delle risposte armoniche è stata indicata con $\hat{W}(\omega)$ in modo da non confonderla, come spesso erroneamente accade, con $W(z) \Big|_{z=j\omega}$.

PASSO 2. Si tracci il primo lato del diagramma asintotico che è una semiretta orizzontale e che interseca, eventualmente con il suo prolungamento, l'asse delle ordinate nel punto φ_0 , ove:

$$\varphi_0 = \begin{cases} (m_0 - n_0)90^\circ & \text{se } K > 0 \\ (m_0 - n_0)90^\circ - 180^\circ & \text{se } K < 0. \end{cases} \quad (17.32)$$

PASSO 3. Si traccino i lati consecutivi del diagramma asintotico in modo che ciascuno risulti inclinato rispetto al precedente di l_j °/dec, ovvero di

$$l_{j+} = (l_1 + l_2 + \dots + l_j) \text{ °/dec} \quad (17.33)$$

rispetto all'asse delle ascisse e si verifichi che l'ultimo lato sia orizzontale ed intersechi, eventualmente con il suo prolungamento, l'asse delle ordinate nel punto φ_f , ove:

$$\varphi_f = \begin{cases} (m-n)90^\circ & \text{se } K > 0 \\ (m-n)90^\circ - 180^\circ & \text{se } K < 0 \end{cases} \quad (17.34)$$

OSSERVAZIONE. Nel tracciare i diversi lati dei diagrammi asintotici è conveniente prendere le relative pendenze, con una coppia di squadre, dalle congiungenti del punto di ascissa $\log 0.1$ con i punti di ordinata l_{j+} (vedi le Fig. 17.10, 11).

Qualora i diagrammi asintotici non siano sufficienti è necessario apportare le dovute correzioni servendosi di abachi come quelli di Fig. 17.8 (°) e 17.9 (°).

A tal proposito si noti che mentre per il diagramma dei moduli le correzioni sono facili da apportare, specie quando

(°) _____

Chiaramente se $\omega_n \neq 1$ tali abachi devono essere traslati orizzontalmente di una quantità pari a $\log \omega_n$.

i punti di rottura sono sufficientemente lontani, per il diagramma delle fasi, in generale, le correzioni da apportare risultano difficili e tediose. Per tale ragione, a volte, il diagramma asintotico delle fasi viene tracciato per avere solo un'idea qualitativa, per poi passare al tracciamento più accurato della parte di maggiore interesse procedendo per punti ricavati con l'ausilio di abachi, come quello di Fig. 17.8, oppure di una calcolatrice da tavolo.

ESEMPIO 17.2. Tracciare i diagrammi asintotici della seguente risposta armonica:

$$W(\omega) = \frac{20j\omega(1 + j\omega/0.5)}{(1 + j\omega/2)^2(1 + j\omega/100 - (\omega/100)^2)} \quad (17.35)$$

Poichè la $W(\omega)$ è già nella forma fattorizzata, applicando le Procedure 17.1 e 17.2 si ottengono i diagrammi mostrati in Fig. 17.12▲

Si noti che se i diagrammi della (17.15) interessano prevalentemente in un intervallo del tipo $[0, S]$, con S non molto diverso da uno, conviene usare una scala lineare per le pulsazioni. Così facendo (come d'altro canto per i sistemi discreti) le procedure precedenti per il tracciamento dei diagrammi asintotici non possono essere più usate.

In tal caso i diagrammi devono essere tracciati punto per punto servendosi di una calcolatrice da tavolo oppure del sottoprogramma BODMFW riportato nell'Appendice A.

A conclusione del paragrafo si noti che la formula di Bode (16.11), nel caso che la pendenza del diagramma dei moduli sia espressa in db/dec e la fase la si voglia in gradi (come avviene per i diagrammi di Bode), essendo

$$u = \log(\omega/\omega) = \log_e(\ln \omega - \ln \hat{\omega}) = \log_e(\xi - \hat{\xi}), \quad (17.36)$$

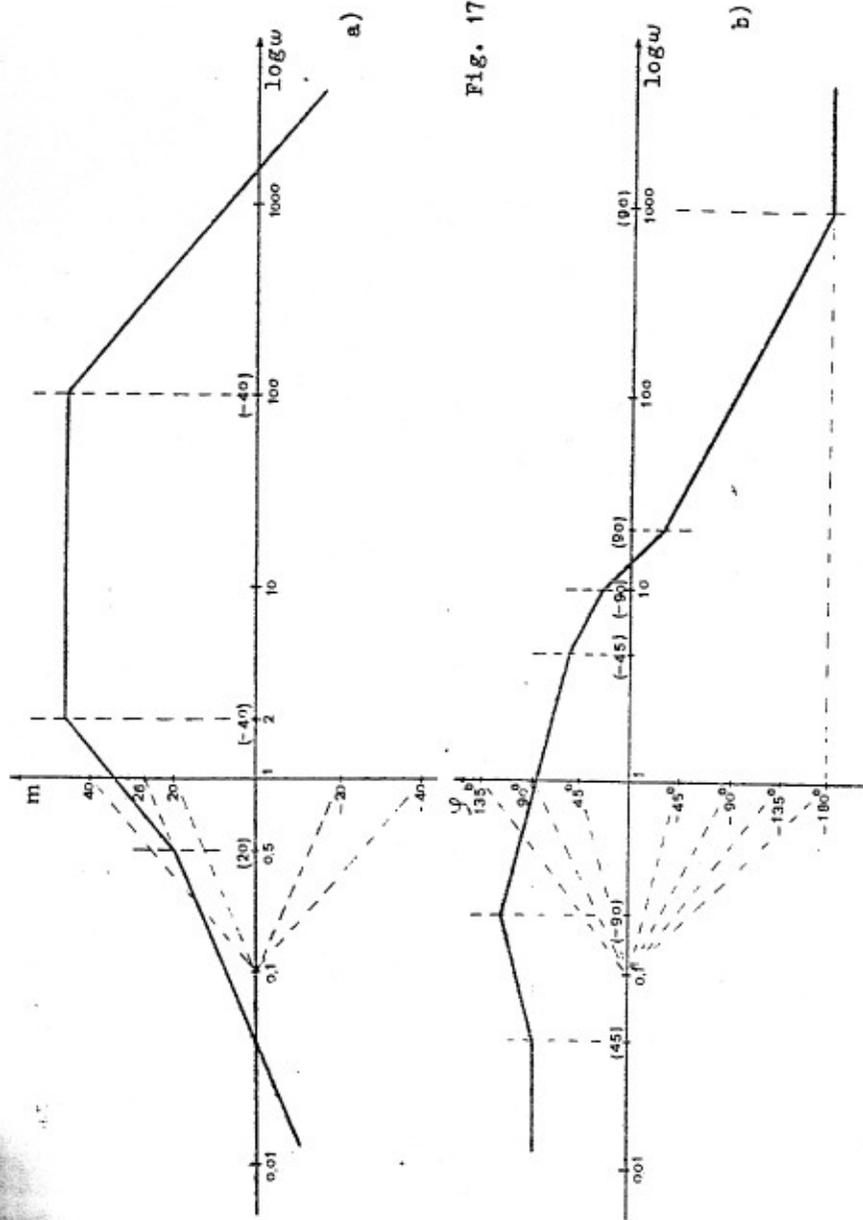


Fig. 17.12

$$p = \frac{dm}{du} = \frac{dm}{d \log w} = 20 \frac{dm'}{d \log w}, \quad (17.37)$$

e tenendo presente che per passare dai radianti ai gradi bisogna moltiplicare per $180/\pi$, si riscrive:

$$\varphi(\omega) = 4.5p(0) + \frac{9}{\pi^2 \log e} \int_{-\infty}^{\infty} (p(u) - p(0)) \ln \operatorname{coth} \left| \frac{u}{2 \log e} \right| du. \quad (17.38)$$

Ricordando che

$$\operatorname{coth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}, \quad (17.39)$$

la (17.38) si può mettere anche nella forma:

$$\varphi(\omega) = 4.5p(0) + \frac{9}{\pi^2 \log e} \int_{-\infty}^{\infty} (p(u) - p(0)) \ln \frac{10^{|u|} + 1}{10^{|u|} - 1} du. \quad (17.40)$$

La funzione

$$\ln \frac{10^{|u|} + 1}{10^{|u|} - 1} \quad (17.41)$$

con cui viene pesata la variazione della pendenza rispetto a quella del punto che si considera ha l'andamento di Fig. 17.13.

Pertanto il secondo termine della (17.40) è trascurabile se la pendenza è costante su un tratto sufficientemente ampio intorno a $\log \omega$; in tal caso la fase risulta di circa $4.5p(0)$.

Se la pendenza non è costante su un tratto sufficientemente ampio intorno a $\log \omega$, bisogna considerare anche il secondo termine della (17.40), il cui calcolo può essere eseguito per via numerica.

Ad esempio, se l'integrale lo si limita all'intervallo $[-1, 1]$, usando la formula dei trapezi con passo 0.4, si ha: