

Sommario

Concetto di
Sistema

Modello di
un sistema

Modelli I-S-U

Elementi di Automazione

Lezione 2 - Sistemi e modelli

Ing. Gianmaria De Tommasi

A.A. 2006/07

SommarioConcetto di
SistemaModello di
un sistema

Modelli I-S-U

- 1 **Concetto di Sistema**
- 2 **Modello di un sistema**
- 3 **Modelli Ingresso-Stato-Usiccta (I-S-U) per sistemi dinamici**

Sommario

Concetto di Sistema

Modello di un sistema

Modelli I-S-U

Definizione IEEE

“Un sistema è un insieme di elementi che cooperano per svolgere una funzione altrimenti impossibile per ciascuno dei singoli componenti”

Aspetti essenziali:

- un sistema è un *insieme di componenti che interagiscono*
- ad un sistema è associata una funzione da svolgere
- i componenti di un sistema possono essere di natura diversa

Sommario

Concetto di Sistema

Modello di un sistema

Modelli I-S-U

Osservazione

Una definizione qualitativa di questo tipo è abbastanza generale da poter essere applicata a diversi tipi di sistemi

- Nelle discipline ingegneristiche è necessario avere a disposizione una descrizione **QUANTITATIVA** del comportamento di un sistema
- Questa descrizione deve consentire l'applicabilità di metodi formali di analisi e sintesi

Modello di un sistema

Il modello matematico di un sistema è la descrizione quantitativa del suo comportamento

Sommaro

Concetto di
SistemaModello di
un sistema

Modelli I-S-U

Sistemi orientati

In un *sistema orientato* è possibile suddividere le grandezze d'interesse in due insiemi:

- **grandezze d'ingresso (o ingressi)** - variano nel tempo in maniera indipendente dalle altre grandezze
- **grandezze d'uscita (o uscite)** - sono le grandezze di cui si è interessati a studiare l'evoluzione, le quali si suppongono dipendere dagli ingressi (relazione *causa-effetto*)

Sistemi ad avanzamento temporale (SAT)

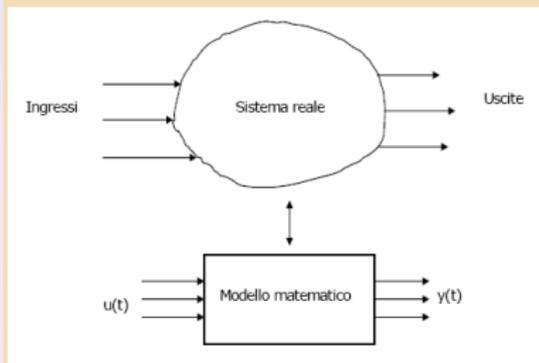
In un *sistema ad avanzamento temporale* le grandezze d'interesse sono funzioni reali della variabile tempo t (continua o discreta)

Sommario

Concetto di
SistemaModello di
un sistema

Modelli I-S-U

Sistema reale e modello matematico



$$\mathbf{u}(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ \dots \ u_r(t)]^T \in \mathbb{R}^r$$

$$\mathbf{y}(t) = [y_1(t) \ y_2(t) \ \dots \ y_m(t)]^T \in \mathbb{R}^m$$

Il modello matematico può essere visto come un operatore che assegna l'andamento delle grandezze d'uscita una volta assegnati gli andamenti delle grandezze d'ingresso

Nella pratica comune si utilizzano i termini *modello* e *sistema* come sinonimi

...esempi...

Sommaro

Concetto di Sistema

Modello di un sistema

Modelli I-S-U

In generale l'uscita di un sistema $y(t)$ in un generico istante t può dipendere anche dai valori passati dell'ingresso
 → La conoscenza di $u(t)$ in $[t_0, t_1]$ potrebbe non essere sufficiente per determinare l'uscita nello stesso intervallo
 È necessario introdurre una grandezza che permetta di *memorizzare* le condizioni iniziali in cui si trova il sistema
 → lo STATO

Stato di un sistema dinamico

Lo *stato* di un sistema dinamico all'istante t_0 è l'informazione all'istante t_0 *necessaria* per poter determinare univocamente l'uscita $y(t) \forall t \geq t_0$, una volta assegnato l'ingresso $u(t) \forall t \geq t_0$

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$$

Sommario

Concetto di
SistemaModello di
un sistema

Modelli I-S-U

- Le funzioni $u(t)$, $y(t)$ e $x(t)$ sono segnali (in generale vettoriali) del tempo t
- La variabile tempo t assume valori in $T \subseteq \mathbb{R}$. T è l'insieme ordinato dei tempi, che può essere **continuo** -
 $T = \{t \in \mathbb{R} \mid t_0 \leq t \leq t_f\}$ - o **discreto** -
 $T = \{\dots, t_{-k}, \dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots, t_k, \dots\}$
- Un segnale è detto **tempo continuo** oppure **tempo discreto** a seconda di quale sia l'insieme T sul quale è definito
- I valori assunti da un segnale possono essere **reali** oppure **elementi di un insieme numerabile**
- Un segnale può essere **deterministico** oppure **aleatorio**

Sommario

Concetto di
SistemaModello di
un sistema

Modelli I-S-U

- $s(\cdot)$ è un segnale definito sull'intero asse dei tempi
- se $s(\cdot)$ è continuo, $s(t)$ è il valore del segnale all'istante t
- se $s(\cdot)$ è continuo e derivabile, $\dot{s}(t)$ è la sua derivata all'istante t
- $s_{[t_i, t_f)}$ indica la restrizione del segnale $s(\cdot)$ all'intervallo aperto a destra $[t_i, t_f)$

Modello implicito I-S-U per sistemi tempo continuo

Sommario

Concetto di Sistema

Modello di un sistema

Modelli I-S-U

Definizione di sistema

Dati:

- $T \subseteq \mathbb{R}$ - insieme dei tempi
- $U \subseteq \mathbb{R}^r$ - insieme dei valori d'ingresso
- $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ - insieme dei valori d'uscita
- $X \subseteq \mathbb{R}^n$ - insieme dei valori di stato
- \mathcal{U} - insieme delle funzioni d'ingresso $u(\cdot) : T \rightarrow U$

Si dice *sistema dinamico tempo continuo* la coppia di equazioni

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

$$y(t) = \eta(x(t), u(t), t) \quad (2)$$

(1) è l'*equazione di stato*, (2) è l'*equazione di uscita*.

$f(\cdot, \cdot, \cdot)$ è la *funzione generatrice*, $\eta(\cdot, \cdot, \cdot)$ è la *trasformazione d'uscita* (in generale sono funzioni vettoriali)

Modello implicito I-S-U per sistemi tempo discreto

Sommaro

Concetto di Sistema

Modello di un sistema

Modelli I-S-U

Sistemi dinamici tempo discreto

Si dice *sistema dinamico tempo discreto* la coppia di equazioni

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k), \quad x(0) = x_0 \quad (3)$$

$$y(k) = \eta(x(k), u(k), k) \quad (4)$$

In questo caso $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ è detta *funzione stato prossimo*

Sommario

Concetto di
SistemaModello di
un sistema

Modelli I-S-U

Modello esplicito I-S-U per sistemi tempo continuo

Assumendo che la soluzione del sistema di equazioni differenziali (1) esista e sia unica, questa può essere messa nella forma

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, u_{[t_0, t)}) \quad (5)$$

con $\varphi(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ *funzione di transizione dello stato*.

Le equazioni (6) e (2) costituiscono il modello *esplicito* I-S-U di un sistema.

Modello esplicito I-S-U per sistemi tempo discreto

Analogamente se la soluzione del sistema di equazioni alle differenze (3) esiste ed è unica, questa può essere messa nella forma

$$x(k) = \varphi(k, 0, x_0, u_{[0, k)}) \quad (6)$$

Sommario

Concetto di Sistema

Modello di un sistema

Modelli I-S-U

La costruzione di un modello I-S-U viene tipicamente effettuata in quattro passi:

- 1 Individuazione degli ingressi e delle uscite
- 2 **Scelta delle variabili di stato**
- 3 Scrittura delle relazioni costitutive
- 4 Elaborazione delle relazioni costitutive per pervenire alla scrittura delle equazioni (1) e (2) (oppure (3) e (4))

Sommario

Concetto di Sistema

Modello di un sistema

Modelli I-S-U

- La scelta delle v.d.s. è fortemente legata alla tipologia del sistema in esame - potrebbe essere necessaria una notevole esperienza nello specifico settore applicativo
- La scelta delle v.d.s. non è unica → esistono più modelli del sistema in esame
- La scelta delle v.d.s. dipende dalla maggiore o minore accuratezza con cui si vuole descrivere il comportamento del sistema in esame
- Il numero delle v.d.s. non sempre può essere fissato a priori → si può avere ridondanza

Sommario

Concetto di
SistemaModello di
un sistema

Modelli I-S-U

Linee guida per la scelta delle v.d.s

- Lo stato deve descrivere la *situazione interna* del sistema in un generico istante, situazione che è determinata dalla storia passata del sistema
- La scelta delle v.d.s., quindi, deve orientarsi verso quelle grandezze il cui valore può essere considerato come descrittivo della *memoria* del sistema
- Nel caso di sistemi fisici la *situazione interna* di un sistema è tipicamente descritta dall'energia in esso immagazzinata
- Sono d'interesse solo quelle forme d'energia che subiscono variazioni nel tempo in conseguenza degli ingressi che agiscono sul sistema

Sommario

Concetto di Sistema

Modello di un sistema

Modelli I-S-U

Riferimenti

Dispense Ambrosino-Celentano

- Da II.1 a II.3

Bolzern-Scattolini-Schiavoni

- Da 2.1 a 2.2