

Sommario

Classificazione
dei sistemi
dinamici

Sistemi lineari e
non lineari

Sistemi varianti
ed invarianti nel
tempo

Sistemi SISO e
MIMO

Sistemi LTI

Richiami di
algebra delle
matrici

Elementi di Automazione

Lezione 3 - Classificazione dei sistemi dinamici - Richiami di algebra delle matrici

Ing. Gianmaria De Tommasi

A.A. 2006/07

Sommario

Classificazione
dei sistemi
dinamiciSistemi lineari e
non lineariSistemi varianti
ed invarianti nel
tempoSistemi SISO e
MIMO

Sistemi LTI

Richiami di
algebra delle
matrici**① Classificazione dei sistemi dinamici**

Sistemi lineari e non lineari

Sistemi varianti ed invarianti nel tempo

Sistemi SISO e MIMO

Sistemi LTI

② Richiami di algebra delle matrici

Sommario

**Classificazione
dei sistemi
dinamici**Sistemi lineari e
non lineariSistemi varianti
ed invarianti nel
tempoSistemi SISO e
MIMO

Sistemi LTI

Richiami di
algebra delle
matrici

Modello implicito I-S-U

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t), & x(t_0) &= x_0 \\ y(t) &= \eta(x(t), u(t), t)\end{aligned}$$

oppure

$$\begin{aligned}x(k+1) &= f(x(k), u(k), k), & x(0) &= x(t_{k_0}) = x_0 \\ y(k) &= \eta(x(k), u(k), k)\end{aligned}$$

I sistemi dinamici introdotti nella lezione precedente possono essere classificati in vari modi in base alle proprietà delle funzioni $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ e $\eta(\cdot, \cdot, \cdot)$.

Sommario

Classificazione
dei sistemi
dinamici**Sistemi lineari e
non lineari**Sistemi varianti
ed invarianti nel
tempoSistemi SISO e
MIMO

Sistemi LTI

Richiami di
algebra delle
matrici

- La definizione di sistema *lineare* fa riferimento a proprietà che riguardano le combinazioni lineari di ingressi, stati e uscite.
- La definizione di linearità può essere data solo per sistemi in cui gli insiemi U , X e Y sono degli spazi vettoriali
- Sistemi di questo tipo si dicono *sistemi a stato vettore*

Sommario

Classificazione
dei sistemi
dinamiciSistemi lineari e
non lineariSistemi varianti
ed invarianti nel
tempoSistemi SISO e
MIMO

Sistemi LTI

Richiami di
algebra delle
matrici**Definizione**

Un sistema a stato vettore si dice lineare se ad una combinazione lineare di ingressi e stati iniziali, secondo gli stessi coefficienti, corrisponde la combinazione lineare, secondo gli stessi coefficienti, degli andamenti dello stato e dell'uscita

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \varphi(t, t_0, k_1 x_{01} + k_2 x_{02}, k_1 u_{1[t_0, t)} + k_2 u_{2[t_0, t)}) = \\
 &= k_1 \varphi(t, t_0, x_{01}, u_{1[t_0, t)}) + k_2 \varphi(t, t_0, x_{02}, u_{2[t_0, t)}) \\
 y(t) &= \eta(t, k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t), k_1 u_1(t) + k_2 u_2(t)) = \\
 &= k_1 \eta(t, x_1(t), u_1(t)) + k_2 \eta(t, x_2(t), u_2(t))
 \end{aligned}$$

Sommario

Classificazione
dei sistemi
dinamiciSistemi lineari e
non lineariSistemi varianti
ed invarianti nel
tempoSistemi SISO e
MIMO

Sistemi LTI

Richiami di
algebra delle
matrici

Per i sistemi lineari si può parlare di *risposta forzata* e *risposta libera*

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \varphi(t, t_0, x_0, u_{[t_0, t)}) = \\
 &= \varphi(t, t_0, 1 \cdot x_0 + 1 \cdot 0, 1 \cdot 0 + 1 \cdot u_{[t_0, t)}) = \\
 &= \varphi(t, t_0, x_0, 0) + \varphi(t, t_0, 0, u_{[t_0, t)}) = x_l(t) + x_f(t) \\
 y(t) &= \eta(t, 1 \cdot x_l(t) + 1 \cdot x_f(t), 1 \cdot 0 + 1 \cdot u(t)) = \\
 &= \eta(t, x_l(t), 0) + \eta(t, x_f(t), u(t)) = y_l(t) + y_f(t)
 \end{aligned}$$

Sommario

Classificazione
dei sistemi
dinamiciSistemi lineari e
non lineari**Sistemi varianti
ed invarianti nel
tempo**Sistemi SISO e
MIMO

Sistemi LTI

Richiami di
algebra delle
matrici

Definizione

Un sistema si dice *invariante nel tempo* se le funzioni $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ e $\eta(\cdot, \cdot, \cdot)$ non dipendono dal tempo

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

$$y(t) = \eta(x(t), u(t))$$

oppure

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)), \quad x(0) = x(t_{k_0}) = x_0$$

$$y(k) = \eta(x(k), u(k))$$

Sommario

Classificazione
dei sistemi
dinamiciSistemi lineari e
non lineari**Sistemi varianti
ed invarianti nel
tempo**Sistemi SISO e
MIMO

Sistemi LTI

Richiami di
algebra delle
matrici

Forma esplicita

$$x(t) = \varphi(t - t_0, x_0, u_{[t_0, t)})$$

oppure

$$x(k) = \varphi(k, x_0, u_{[0, k)})$$

Sommario

Classificazione
dei sistemi
dinamiciSistemi lineari e
non lineariSistemi varianti
ed invarianti nel
tempo**Sistemi SISO e
MIMO**

Sistemi LTI

Richiami di
algebra delle
matrici

- I sistemi *monovariabili* o *SISO* (Single-Input-Single-Output) sono quelli con una sola variabile d'ingresso ed una sola variabile d'uscita
- In caso contrario si parla di sistemi *multivariabili* o *MIMO* (Multi-Input-Multi-Output)

Sommario

Classificazione
dei sistemi
dinamiciSistemi lineari e
non lineariSistemi varianti
ed invarianti nel
tempoSistemi SISO e
MIMO**Sistemi LTI**Richiami di
algebra delle
matrici**Sistemi LTI - Modello I-S-U implicito**

Nel caso di sistemi *lineari* e *tempo invarianti*, il modello I-S-U implicito è il seguente:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

oppure

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(0) = x(t_{k_0}) = x_0$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

Sommario

Classificazione
dei sistemi
dinamiciSistemi lineari e
non lineariSistemi varianti
ed invarianti nel
tempoSistemi SISO e
MIMO**Sistemi LTI**Richiami di
algebra delle
matrici**Sistemi LTI - Modello I-S-U esplicito**

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \quad t_0 = 0$$

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

oppure

$$x(k) = A^k x_0 + \sum_{h=0}^k A^{(k-h-1)} Bu(h)$$

$$y(k) = CA^k x_0 + \sum_{h=0}^k CA^{(k-h-1)} Bu(h) + Du(k)$$

Sommario

Classificazione dei sistemi dinamici

Sistemi lineari e
non lineari

Sistemi varianti
ed invarianti nel
tempo

Sistemi SISO e
MIMO

Sistemi LTI

Richiami di algebra delle matrici

- Matrici - definizioni
- Operazioni sulle matrici e tra matrici
- Polinomio caratteristico ed equazione caratteristica di una matrice quadrata
- Autovalori e autovettori di una matrice quadrata
- Diagonalizzazione
- Potenza ed esponenziale di una matrice quadrata

Sommario

Classificazione
dei sistemi
dinamiciSistemi lineari e
non lineariSistemi varianti
ed invarianti nel
tempoSistemi SISO e
MIMO

Sistemi LTI

Richiami di
algebra delle
matrici**Classificazione dei sistemi**

Dispense Ambrosino-Celentano

- II.4 fino a II.4.3

Bolzern-Scattolini-Schiavoni

- Paragrafo 2.3

Richiami di algebra delle Matrici

Bolzern-Scattolini-Schiavoni

- Appendice A