

# I. MODELLISTICA DI SISTEMI MECCANICI

## I.1 Unità di misura di grandezze meccaniche

I sistemi comunemente usati per la misura di grandezze fisiche si differenziano l'uno dall'altro in base a:

- le grandezze fisiche assunte come *grandezze di base*, distinte dalle altre grandezze dette *grandezze derivate*;
- le unità di misura utilizzate per le grandezze di base.

Una prima grossa classificazione dei sistemi di misura è quella che li divide in *Sistemi Assoluti* e *Sistemi Gravitazionali*. I Sistemi assoluti sono quelli in cui tra le grandezze di base è assunta la massa, mentre la forza è una grandezza derivata; i sistemi gravitazionali, invece, sono quelli in cui tra le grandezze di base è assunta la forza, mentre la massa è una grandezza derivata.

Tra i sistemi assoluti, il più utilizzato in campo ingegneristico è il *Sistema Internazionale*. In esso le grandezze di base utilizzate in campo meccanico sono la lunghezza misurata in metri, la massa misurata in chilogrammi massa, e il tempo misurato in secondi.

Il sistema gravitazionale più utilizzato in campo ingegneristico è il *Sistema Metrico Ingegneristico*. In esso le grandezze di base utilizzate in campo meccanico sono la lunghezza misurata in metri, la forza misurata in chilogrammi forza, e il tempo misurato in secondi. In particolare il chilogrammo forza è definito come il peso di un prototipo standard avente la massa di un chilogrammo massa.

La Tabella 2.I riporta le unità di misura di alcune grandezze derivate e le formule di conversione tra i due sistemi di misura.

	Sistema Internazionale (SI)	Sistema ingegneristico
Lunghezza	m	m
Massa	kg	$Kg_f/(m/s^2)=9.81kg$
Tempo	s	s
Forza	$N=kg\ m/s^2 = 0.102kg_f$	$Kg_f = 9.81N = 9.81\ kg\ m/s^2$
Energia	$J = Nm = 0.102kg_fm = 2.389\ 10^{-4}\ kcal$	$Kg_f m = 9.81\ Nm = 9.81\ J$
Potenza	$W = Nm/s = J/s = 1.341\ 10^{-3}hp\ (1hp = 745.7W)$	$Kg_f\ m/s = 9.81\ J/s$

**Tabella 2.I** Sistemi di unità di misura

## I.2 Sistemi meccanici elementari

Un sistema meccanico consiste di un insieme di componenti elementari tra loro variamente interconnessi. I componenti meccanici elementari sono di tre tipi: elementi di inerzia, elementi elastici e elementi di attrito. Nel seguito vengono date le relazioni costitutive che descrivono il comportamento causa-effetto di tali componenti.

**Elementi di inerzia.** Gli elementi di inerzia sono di due tipi (vedi Figura 2.1): *masse* e *momenti di inerzia*.

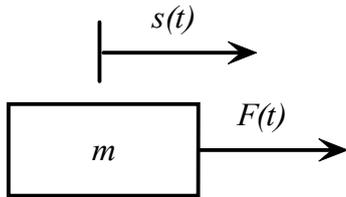


Fig.2.1a Elemento di massa

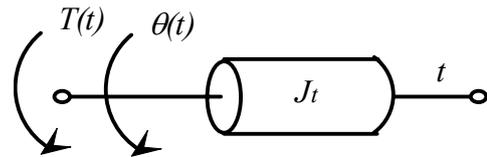


Fig.2.1b Momento di inerzia

In un elemento di massa (risp. momento di inerzia) la massa (risp. il momento di inerzia) può essere definita come la variazione di forza (rispettivamente di coppia) necessaria per ottenere una variazione unitaria di accelerazione (rispettivamente di accelerazione angolare).

$$\text{massa} = \frac{\text{variazione di forza}}{\text{variazione di accelerazione}} \quad \left( \frac{\text{N}}{\text{m/s}^2} \text{ o } \text{kg} \right)$$

$$\text{momento di inerzia} = \frac{\text{variazione di coppia}}{\text{variazione di accelerazione angolare}} \quad \left( \frac{\text{Nm}}{\text{rad/s}^2} \text{ o } \text{kg m}^2 \right)$$

Per un elemento di massa  $m$  (vedi Fig. 2.1a), detta  $F(t)$  la forza applicata e  $\ddot{s}(t)$  la sua accelerazione, si ha:

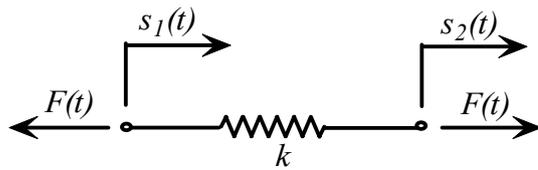
$$F(t) = m\ddot{s}(t) \quad (2.1a)$$

Per un elemento avente momento di inerzia  $J_t$  rispetto ad un asse di rotazione  $t$  (vedi Fig. 2.1b), detta  $T(t)$  la coppia applicata e  $\ddot{\theta}(t)$  la sua accelerazione angolare, si ha:

$$T(t) = J_t\ddot{\theta}(t) \quad (2.1b)$$

**Elementi elastici (molle).** Un elemento elastico (molla) lineare ideale è un elemento meccanico privo di massa e di attrito che, ad una sollecitazione esterna costituita da due forze aventi la stessa retta d'azione, uguali ed opposte applicate agli estremi, risponde con una deformazione proporzionale alla sollecitazione stessa.

Nel caso di sollecitazioni in forza e deformazioni di tipo traslatorio degli estremi (vedi Fig.2.2a), l'elemento elastico è detto *molla traslatoria* o semplice *molla*. Nel caso di sollecitazioni in coppia e deformazioni di tipo torsionale degli estremi (vedi Fig.2.2b), l'elemento elastico è detto *molla torsionale*.



v Fig.2.2a Molla traslatoria

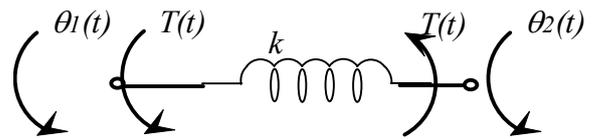


Fig.2.2b Molla torsionale

Per le molle traslatorie, detto  $F(t)$  il valore delle forze uguali ed opposte applicate agli estremi, e detti  $s_1(t)$  e  $s_2(t)$  gli spostamenti degli estremi rispetto alle posizioni da essi occupate in assenza di sollecitazione, con gli orientamenti mostrati in Fig.2.2a, vale la relazione:

$$F(t) = k[s_2(t) - s_1(t)] \quad (2.2a)$$

dove  $k$  è una costante caratteristica della molla, detta *costante elastica* o *rigidezza* della molla.

Per le molle torsionali, detto  $T(t)$  il valore delle coppie uguali ed opposte applicate agli estremi, e detti  $\theta_1(t)$  e  $\theta_2(t)$  gli spostamenti angolari degli estremi rispetto alle posizioni da essi occupate in assenza di sollecitazione, con gli orientamenti mostrati in Fig.2.2a, vale la relazione:

$$T(t) = k[\theta_1(t) - \theta_2(t)] \quad (2.2b)$$

dove  $k$  è detta *rigidezza torsionale* della molla.

Per quanto riguarda la definizione della rigidezza  $k$ , essa per molle traslatorie è definita come:

$$k = \frac{\text{variazione di forza}}{\text{variazione di spostamento}} \quad \left( \frac{\text{N}}{\text{m}} \right)$$

mentre, per molle torsionali

$$k = \frac{\text{variazione di coppia}}{\text{variazione angolare}} \quad \left( \frac{\text{N m}}{\text{rad}} \right)$$

Talvolta anziché attraverso la rigidezza  $k$ , una molla è caratterizzata con l'inversa di  $k$ , ossia  $c=1/k$ , detta *cedevolezza*.

**Elementi di attrito viscoso (smorzatori).** Uno smorzatore ideale è un elemento meccanico privo di massa e di elasticità che, ad una sollecitazione esterna costituita da due forze aventi la stessa retta d'azione, uguali ed opposte applicate agli estremi, risponde con una velocità relativa degli estremi proporzionale alla sollecitazione stessa.

A differenza degli elementi di inerzia e degli elementi elastici che immagazzinano energia sotto forma di energia cinetica e potenziale, un elemento di attrito viscoso dissipa energia sotto forma di calore.

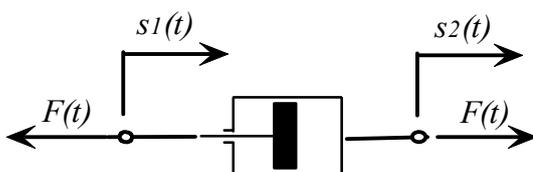


Fig.2.3a Smorzatore traslativo

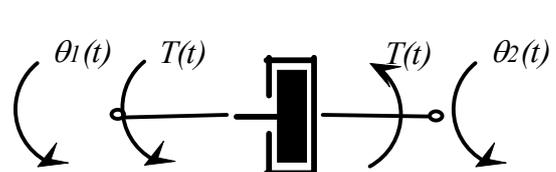


Fig.2.3b Smorzatore torsionale

Le Figure 2.3 mostrano le rappresentazioni schematiche di uno smorzatore traslativo e di uno smorzatore torsionale. In uno smorzatore traslativo (risp. torsionale) la forza  $F(t)$  (risp. la coppia  $T(t)$ ) è proporzionale alla velocità (risp. velocità angolare) relativa degli estremi.

$$F(t) = b[\dot{s}_2(t) - \dot{s}_1(t)] \quad (2.3a)$$

$$\text{(risp. } T(t) = b[\dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t)] \text{ )} \quad (2.3b)$$

La costante  $b$  è detta coefficiente di attrito viscoso (risp. coefficiente di attrito viscoso torsionale) Per essa si ha:

$$b = \frac{\text{variazione di forza}}{\text{variazione di velocità}} \quad \left( \frac{\text{N}}{\text{m/s}} \right)$$

$$\text{(risp. } b = \frac{\text{variazione di coppia}}{\text{variazione di velocità angolare}} \quad \left( \frac{\text{N m}}{\text{rad/s}} \right) \text{)}$$

### I.3 Equazioni del moto di un sistema di corpi rigidi: approccio Newtoniano

Le equazioni del moto di un corpo rigido si possono scrivere applicando la seconda legge di Newton. Questa può essere formulata come segue.

**Seconda legge di Newton per moti traslatori.** Consideriamo un corpo rigido di massa  $m$ . Comunque scelta una direzione  $d$ , se  $\Sigma F$  è la somma delle componenti, lungo la direzione data, di tutte le forze agenti sul corpo, si ha:

$$\Sigma F = ma \quad (2.4)$$

dove  $a$  è la componente dell'accelerazione nella direzione scelta.

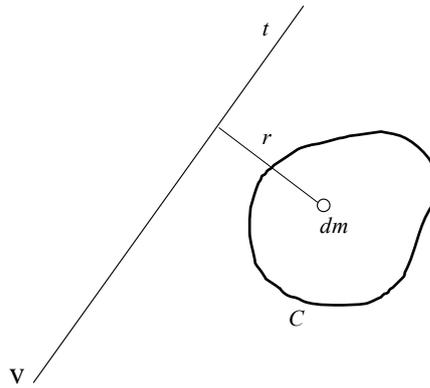
**Seconda legge di Newton per moti rotatori.** Consideriamo un corpo rigido libero di ruotare intorno ad un asse  $t$ , e sia  $J_t$  il momento di inerzia del corpo intorno a quell'asse. Detta  $\Sigma T$  la somma di tutte le coppie agenti intorno all'asse  $t$  si ha:

$$\Sigma T = J_t \alpha \quad (2.5)$$

dove  $\alpha$  è l'accelerazione angolare del corpo intorno all'asse  $t$ .

**Momento d'inerzia.** Consideriamo un corpo rigido  $C$  libero di ruotare intorno ad un asse  $t$ , e sia  $dm$  un elemento di massa a distanza  $r$  dall'asse  $t$  (vedi Figura 2.4). Il momento di inerzia del corpo intorno all'asse  $t$  è definito come:

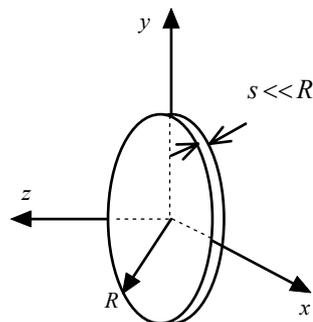
$$J_t = \int_C r^2 dm \quad (2.6)$$



**Fig. 2.4** Definizione di momento di inerzia

Il calcolo analitico del momento di inerzia può essere effettuato facilmente solo nel caso di corpi omogenei, geometrie semplici, e simmetrie rispetto all'asse di rotazione. Vediamo alcuni esempi.

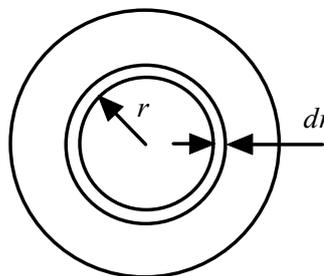
**Esempio 2.1** Calcolare i momenti di inerzia rispetto agli assi coordinati del disco sottile mostrato in Figura 2.5.



**Fig.2.5** Disco sottile omogeneo

Detta  $c$  la densità del materiale, la massa totale risulta:  $M = \pi R^2 s c$ .

Per il calcolo di  $J_z$  dividiamo il disco in corone circolari di larghezza  $dr$  come in Figura 2.6.



**Fig.2.6** Disco sottile: calcolo del momento di inerzia intorno all'asse  $z$

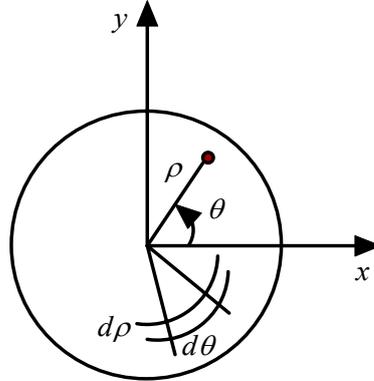
Risulta allora:

$$dm = 2\pi r dr s c \quad (2.7)$$

Pertanto:

$$J_z = \int_C r^2 dm = \int_0^R r^2 2\pi r s c dr = \frac{1}{2} R^4 \pi s c = M \frac{R^2}{2} \quad (2.8)$$

Per il calcolo di  $J_y$  (o di  $J_x$ ) conviene operare in coordinate polari  $(\rho, \theta)$  come mostrato in Figura 2.7.



**Fig.2.7** Disco sottile: calcolo del momento di inerzia intorno all'asse y (o x)

Essendo:

$$x = \rho \cos \vartheta$$

$$dm = c s \rho d\vartheta d\rho$$

risulta

$$J_y = \int_C x^2 dm = \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^2 \cos^2 \vartheta c s \rho d\rho d\vartheta = \int_0^{2\pi} c s \cos^2 \vartheta \left( \int_0^R \rho^3 d\rho \right) d\vartheta =$$

$$= \frac{R^4}{4} s c \int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta d\vartheta = \frac{R^4}{4} s c \left[ \frac{\vartheta + \sin \vartheta \cos \vartheta}{2} \right]_0^{2\pi} = \pi \frac{R^4}{4} s c = M \frac{R^2}{4} = J_x \quad (2.9)$$

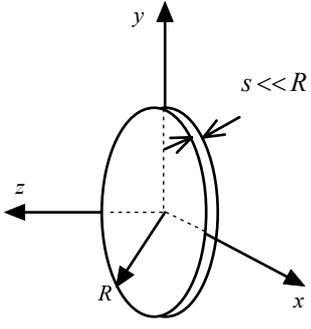
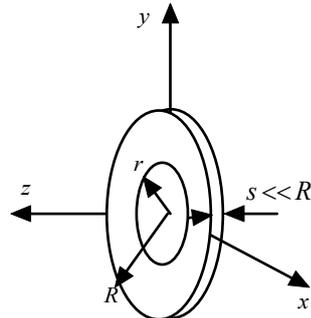
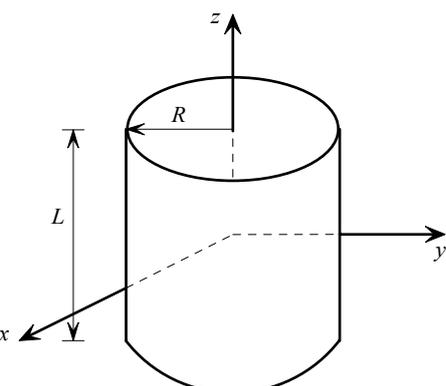
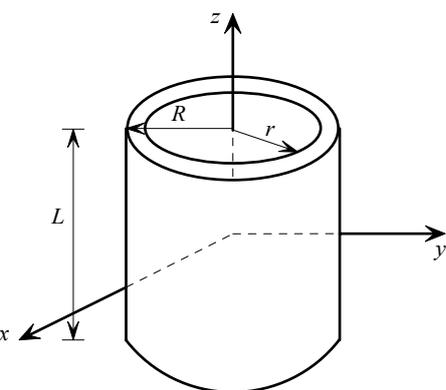
In Tabella 2.II sono indicati i momenti di inerzia di alcuni corpi rigidi di uso comune.

**Raggio d'inerzia.** Il raggio d'inerzia  $K_t$  di un corpo rigido rispetto ad un asse  $t$  è la distanza di un punto  $P$  dall'asse  $t$  in cui può essere concentrata la massa del corpo per avere momento d'inerzia uguale a quello del corpo rispetto allo stesso asse. Pertanto:

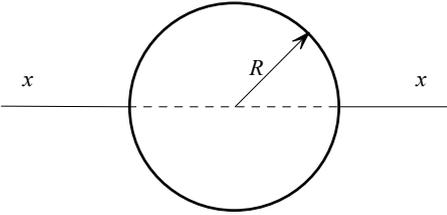
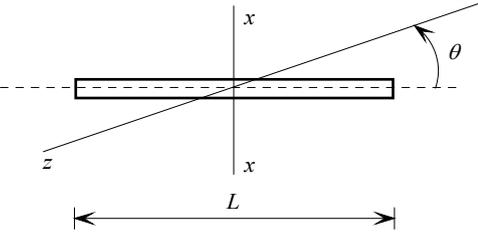
$$K_t = \sqrt{\frac{J_t}{m}} \quad (2.10)$$

**Momento d'inerzia rispetto ad un asse parallelo ad uno passante per il baricentro.** Sia  $J_{r_0}$  il momento d'inerzia di un corpo di massa  $m$  rispetto ad una retta  $r_0$  baricentrale (vedi Figura 2.7) e sia  $r$  una retta parallela a  $r_0$  e a distanza  $\delta$  da essa. Utilizzando la definizione di momento d'inerzia si dimostra che:

$$J_r = J_{r_0} + m\delta^2 \quad (2.11)$$

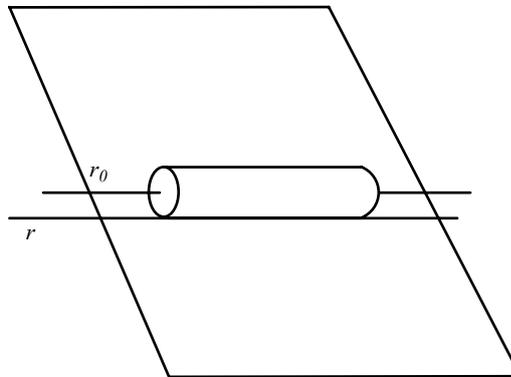
	<p><u>Disco sottile (<math>s \ll R</math>)</u></p> <p><math>M =</math> massa totale</p> $J_x = J_y = M \frac{R^2}{4}$ $J_z = M \frac{R^2}{2}$
	<p><u>Corona circolare sottile (<math>s \ll R</math>)</u></p> <p><math>M =</math> massa totale</p> $J_x = J_y = M \frac{R^2 + r^2}{4}$ $J_z = M \frac{R^2 + r^2}{2}$
	<p><u>Cilindro</u></p> <p><math>M =</math> massa totale</p> $J_x = J_y = M \frac{3R^2 + L^2}{12}$ $J_z = M \frac{R^2}{2}$
	<p><u>Cilindro cavo</u></p> <p><math>M =</math> massa totale</p> $J_x = J_y = M \frac{3(R^2 + r^2) + L^2}{12}$ $J_z = M \frac{R^2 + r^2}{2}$

**Tab. 2.IIa**

	<p><u>Sfera</u></p> <p><math>M =</math> massa totale</p> <p><math>\rho =</math> densità</p> $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$ $J_{xx} = M \frac{2}{5} R^2$
	<p><u>Barretta</u></p> <p><math>M =</math> massa totale</p> $J_{xx} = M \frac{L^2}{12}$ $J_{zz} = M \frac{(L \text{ sen } \theta)^2}{12}$

**Tab. 2.IIb**

**Esempio 2.2** Si consideri il sistema di Figura 2.8 in cui un cilindro omogeneo di massa  $m$  e raggio  $R$  rotola su una superficie piana. Si vuole calcolare il momento di inerzia  $J_r$  del cilindro rispetto alla linea di contatto con la superficie.



**Fig.2.8** Momento d'inerzia rispetto ad una retta parallela ad una baricentrale

Si ha:

$$J_r = J_{r_0} + mR^2$$

Poiché (vedi Tabella 2.II)

$$J_{r_0} = m \frac{R^2}{2}$$

risulta

$$J_r = \frac{3}{2} mR^2$$

#### 1.4 Esempi di modelli di sistemi meccanici semplici

La prima operazione da effettuare per la scrittura del modello matematico di un sistema meccanico consiste nell'individuare il numero  $\nu$  di gradi di libertà del sistema. Questo è definito come il **minimo** numero di coordinate posizionali necessarie per individuare, in un generico istante  $t$ , la posizione completa del sistema meccanico (inteso come insieme di tutti i componenti elementari). L'individuazione del numero di gradi di libertà di un sistema meccanico non è sempre un'operazione semplice, e questo principalmente per la presenza di vincoli che limitano i movimenti degli elementi di massa del sistema. Nel seguito, salvo avviso contrario, faremo riferimento al solo caso di moto planare. In tal caso, per sistemi costituiti da  $\mu$  punti materiali interconnessi, risulta  $\nu = 2\mu - l$ , dove  $l$  è il numero di equazioni di vincolo imposte dagli elementi di interconnessione tra i punti materiali. Nel caso di corpi rigidi bisogna considerare anche le possibili rotazioni di ciascun corpo, per cui risulta  $\nu = 3\mu - l$ .

Il passo successivo consiste nella scelta delle coordinate posizionali da utilizzare per la scrittura delle leggi del moto (leggi di Newton). Come vedremo in seguito, anche se la scelta più ovvia sembrerebbe quella consistente nello scegliere le coordinate dei punti materiali (o del baricentro dei corpi rigidi oltre all'angolo di rotazione) rispetto ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, non sempre tale scelta è la più conveniente.

Così facendo, infatti, avremmo un numero di coordinate maggiori del numero di gradi di libertà, per cui saremmo poi costretti a portare in conto tutte le  $l$  equazioni di vincolo.

La terza operazione consiste nella scrittura delle equazioni del moto. Queste si ottengono generalmente scrivendo le equazioni di Newton per ciascun elemento di massa e per ciascuna delle sue coordinate posizionali scelte. Laddove le coordinate posizionali necessarie per la scrittura delle leggi di Newton siano in numero maggiore dei gradi di libertà, bisogna portare in conto altrettante equazioni di vincolo. L'insieme di tutte le equazioni ottenute le chiameremo "relazioni costitutive" del sistema.

Ultimo passo consiste nella scelta delle variabili di stato e nella manipolazione delle relazioni costitutive così da pervenire ad una rappresentazione i-s-u nella forma (1.1). Per quanto riguarda la scelta delle variabili di stato, queste, nella quasi totalità dei casi, possono essere assunte coincidenti con  $\nu$  coordinate posizionali (coordinate generalizzate) e con le loro derivate temporali (velocità generalizzate). In alcuni casi, tuttavia, tale scelta non porta ad un modello i-s-u nella forma standard (1.1). In tal caso bisogna ricorrere a tecniche "ad hoc" la cui descrizione esula dagli scopi di questo corso.

**Esempio 2.3** Si consideri il sistema massa- molla- attrito mostrato in Figura 2.9. Si vuole scrivere un modello i-s-u per lo studio dell'andamento della posizione del carrello.

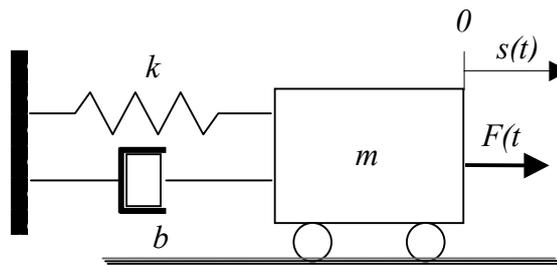


Fig.2.9

Il sistema ha 1 solo grado di libertà. Come coordinata posizionale assumiamo lo spostamento del carrello rispetto alla posizione di molla non sollecitata. Per la scrittura della seconda legge di Newton facciamo riferimento alla schematizzazione delle forze agenti sul carrello mostrata in Figura 2.10.

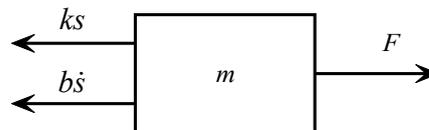


Fig.2.10

Si ha allora:

$$m\ddot{s} = F - ks - b\dot{s}$$

Posto:  $u(t) = F(t)$ ;  $y(t) = s(t)$ ;  $x_1(t) = s(t)$ ;  $x_2(t) = \dot{s}(t)$  con semplici manipolazioni si ottiene:

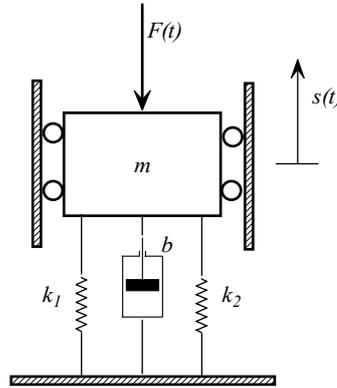
$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{b}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

Come si vede, il sistema è lineare e stazionario. In forma matriciale si scrive:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x + (0)u$$

**Esempio 2.4** Con riferimento al sistema massa- molla- attrito (sospensione) mostrato in Figura 2.11, si ricavi un modello i-s-u per lo studio della velocità verticale dell'elemento di massa.



**Fig.2.11**

Il sistema ha 1 solo grado di libertà. Come coordinata posizionale assumiamo lo spostamento del carrello rispetto alla posizione di molle non sollecitate. Indicando con  $g$  l'accelerazione di gravità, si ha:

$$m\ddot{s} = -F - k_1s - k_2s - b\dot{s} - mg$$

Riscriviamo lo stesso modello assumendo come riferimento per la misura degli spostamenti la posizione assunta dalla massa allorchè è in equilibrio sotto l'azione della forza peso, ossia quella in cui lo spostamento  $s$  precedentemente definito assume un valore  $\bar{s}$  tale che:

$$0 = -k_1\bar{s} - k_2\bar{s} - mg \Rightarrow -mg = k_1\bar{s} + k_2\bar{s}$$

Detto  $\tilde{s}(t)$  lo spostamento nel nuovo riferimento, si ha ovviamente:

$$s(t) = \tilde{s}(t) + \bar{s}$$

Sostituendo nell'equazione del moto e tenendo presente che  $\dot{s}(t) = \dot{\tilde{s}}(t)$  e  $\ddot{s}(t) = \ddot{\tilde{s}}(t)$ , con semplici passaggi si ha:

$$m\ddot{\tilde{s}} = -F - (k + k_2)\tilde{s} - b\dot{\tilde{s}}$$

Questa equazione ha la forma di quella che avremmo scritto in assenza di forza peso e in presenza di una molla con costante elastica  $(k + k_2)$ . Si conclude pertanto che:

- **quando gli spostamenti vengono misurati rispetto alla posizione del sistema sotto l'azione della forza peso, nella scrittura delle equazioni non bisogna considerare la forza peso stessa;**
- **due elementi elastici in parallelo si comportano come un unico elemento equivalente avente costante elastica pari alla somma delle costanti elastiche.**

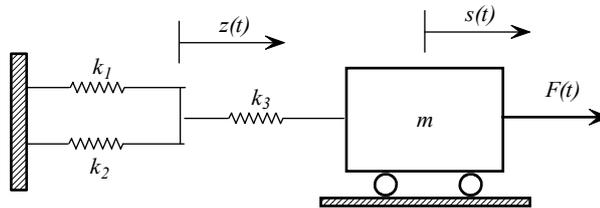
Posto:  $u(t) = F(t)$ ;  $y(t) = \dot{\tilde{s}}(t)$ ;  $x_1(t) = \tilde{s}(t)$ ;  $x_2(t) = \dot{\tilde{s}}(t)$ , con semplici manipolazioni si ottiene:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{(k_1+k_2)}{m}x_1(t) - \frac{b}{m}x_2(t) - \frac{1}{m}u(t) \\ y(t) &= x_2(t)\end{aligned}$$

Come si vede, il sistema è lineare e stazionario. In forma matriciale si scrive:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x + (0)u\end{aligned}$$

**Esempio 2.5** Si ricavi un modello i-s-u del sistema mostrato in Figura 2.12, assumendo come uscita la posizione  $s(t)$  del carrello.



**Fig.2.12**

Il sistema ha 1 solo grado di libertà. Come coordinata posizionale assumiamo lo spostamento  $s(t)$  del carrello rispetto alla posizione di molle non sollecitate. Assumiamo poi come variabile posizionale di comodo la posizione  $z(t)$  del punto in comune delle 3 molle. Ovviamente per la scrittura del modello i-s-u tale variabile andrà eliminata. La legge di Newton applicata al carrello si scrive:

$$m\ddot{s} = F - k_3(s - z)$$

D'altro canto vale l'equazione di vincolo:

$$0 = k_3(s - z) - k_1z - k_2z$$

che completa le relazioni costitutive. Per la scrittura del modello i-s-u ricaviamo  $z(t)$  dall'equazione di vincolo e sostituiamola nella legge di Newton. Si ottiene:

$$m\ddot{s} = F - k_3s - \frac{k_3^2}{k_1+k_2+k_3}s = F - k_3\left(1 - \frac{k_3}{k_1+k_2+k_3}\right)s = F - \frac{k_3(k_1+k_2)}{k_1+k_2+k_3}s = F - \frac{1}{\frac{1}{k_1+k_2} + \frac{1}{k_3}}s$$

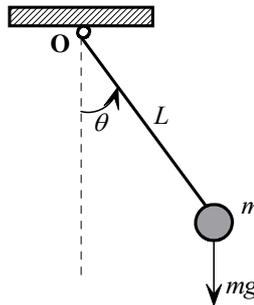
Questo esempio, pertanto, mette anche in evidenza che: **la cedevolezza (inverso della rigidezza) di due molle in serie è uguale alla somma delle cedevolezza.**

Posto:  $u(t) = F(t)$ ;  $y(t) = s(t)$ ;  $x_1(t) = s(t)$ ;  $x_2(t) = \dot{s}(t)$ , con semplici manipolazioni si ottiene:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k_e}{m}x_1(t) + \frac{1}{m}u(t) \\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

dove si è indicato con  $k_e$  la costante elastica equivalente delle 3 molle.

**Esempio 2.6** Si consideri il pendolo mostrato in Figura 2.13 e costituito da un corpo puntiforme di massa  $m$  collegato alla cerniera O mediante un'asta rigida di lunghezza  $L$  priva di massa. Si vuole studiare l'andamento della posizione angolare  $\theta$  mediante un modello i-s-u.



**Fig.2.13**

Il sistema ha 1 solo grado di libertà essendo solo libero di ruotare intorno al punto O. In linea di principio potremmo assumere come coordinate posizionali le coordinate della pallina rispetto ad un riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$  centrato in O. In tal caso dovremmo scrivere le due equazioni di Newton lungo  $x$  e lungo  $y$  e poi imporre che, per effetto del vincolo imposto dall'asta, le coordinate  $x$  e  $y$  sono legate dall'equazione della circonferenza di centro O e raggio  $L$ . La procedura sarebbe estremamente laboriosa. Conviene invece assumere come unica coordinata posizionale lo spostamento angolare  $\theta(t)$  e scrivere l'equazione di Newton per le rotazioni intorno ad O. Tenendo presente che l'unica forza che produce momento intorno ad O è la componente della forza peso tangente alla traiettoria circolare, ossia  $mg \sin \vartheta$ , la legge di Newton si scrive:

$$J_O \ddot{\vartheta} = -mg \sin \vartheta L$$

dove  $J_O$  rappresenta il momento d'inerzia della pallina rispetto al punto O, e vale:

$$J_O = mL^2$$

Pertanto la relazione costitutiva diventa:

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{L} \sin \vartheta$$

Posto:  $u(t) = 0$ ;  $y(t) = \vartheta(t)$ ;  $x_1(t) = \vartheta(t)$ ;  $x_2(t) = \dot{\vartheta}(t)$ , si ottiene:

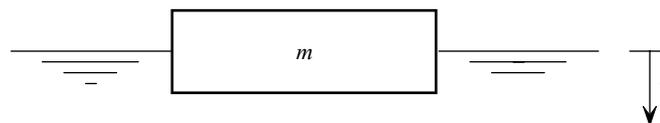
$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{g}{L} \sin x_1(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

Il sistema, come si vede, è autonomo (privo di ingressi) e nonlineare.

**Esempio 2.7** Si scriva un modello i-s-u per lo studio degli spostamenti verticali di un galleggiante cilindrico a sezione costante  $A$ , posto in un liquido di peso specifico  $\rho$ , assumendo che, all'istante iniziale, la sua posizione verticale sia spazzata rispetto a quella di equilibrio.



**Fig.2.14**

Mettiamoci nell'ipotesi semplificativa di soli moti verticali (sistema a 1 grado di libertà) e assumiamo come coordinata posizionale gli spostamenti verticali del galleggiante rispetto alla posizione di galleggiamento, assumendo positivi gli spostamenti verso il basso (vedi Figura 2.14). In base al principio di Archimede si può scrivere:

$$m\ddot{s} = -As\rho \quad s(t_0) = s_0$$

Posto:  $u(t) = 0$ ;  $y(t) = s(t)$ ;  $x_1(t) = s(t)$ ;  $x_2 = \dot{s}(t)$ , si ottiene:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{A\rho}{m}x_1(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

Il sistema, come si vede, si comporta come un sistema massa - molla..

**Esempio 2.8** Si consideri il pendolo bifilare mostrato in Figura 2.15, costituito da una barretta rigida uniforme di massa  $m$  sospesa mediante due fili inestensibili di lunghezza  $L$  e privi di massa. Si vuole studiare l'andamento delle oscillazioni angolari  $\theta$  intorno all'asse verticale, nell'ipotesi di piccole oscillazioni, ossia di valori di  $\theta$  tali da poter assumere valida l'approssimazione  $\text{sen } \vartheta \cong \tan \vartheta \cong \vartheta$ .

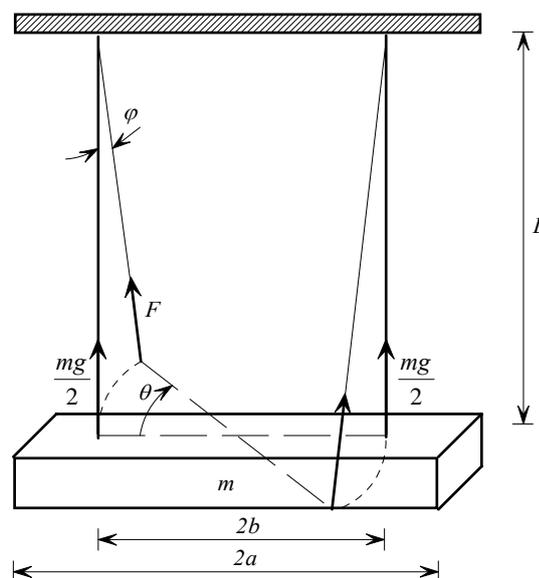


Fig.2.15

Per quanto riguarda la legge del moto, detta  $F(t)$  la forza esercitata dal filo sulla barretta e  $F_o(t)$  la sua componente orizzontale, con le convenzioni sui versi positivi assunti per le varie grandezze (vedi Figura 2.15) la legge di Newton si scrive:

$$J\ddot{\vartheta} = -F_o 2b$$

dove  $J$  rappresenta il momento d'inerzia della barretta rispetto all'asse verticale. Come indicato in Tabella 2.II, esso vale:

$$J = m \frac{4a^2}{12} = m \frac{a^2}{3}$$

Per quanto riguarda  $F_o$ , si cominci con l'osservare che la componente verticale di  $F$  (che è chiamata a bilanciare il peso della barretta) è pari a  $\frac{mg}{2}$ . Nell'ipotesi di piccole rotazioni  $\theta$ , anche l'angolo  $\varphi$  sarà piccolo, per cui risulta:

$$F_o = \frac{mg}{2} \tan \varphi \cong \frac{mg}{2} \varphi$$

D'altro canto, sempre nell'ipotesi di piccole rotazioni, si può anche scrivere:

$$L\varphi \cong b\vartheta$$

e quindi

$$F_o = \frac{mg}{2} \frac{b}{L} \vartheta$$

In definitiva la legge del moto si scrive:

$$\frac{ma^2}{3} \ddot{\vartheta} = -\frac{mgb^2}{L} \vartheta$$

Posto:  $u(t) = 0$ ;  $y(t) = \vartheta(t)$ ;  $x_1(t) = \vartheta(t)$ ;  $x_2(t) = \dot{\vartheta}(t)$ , si ottiene:

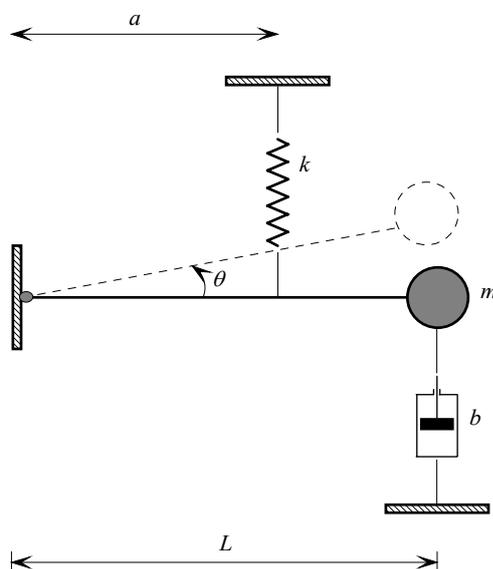
$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{3gb^2}{La^2} x_1(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

Il sistema, come si vede, è lineare e stazionario, e tende a comportarsi come un sistema massa-molla.

**Esempio 2.9** Si determini un modello i-s-u per lo studio delle oscillazioni del sistema mostrato in Figura 2.16 nell'ipotesi di piccole oscillazioni.



**Fig.2.16**

Il sistema ha 1 grado di libertà. Come coordinata posizionale scegliamo l'angolo  $\theta$ . La legge di Newton si scrive:

$$J\ddot{\vartheta} = -F_e a - F_a L$$

dove  $J = mL^2$ , e  $F_e$ ,  $F_a$  rappresentano la forza elastica della molla e la forza d'attrito dello smorzatore esercitate sull'asta di sostegno. E' da notare che non è stata portata in conto la coppia dovuta alla forza peso; questo può essere fatto nell'ipotesi di assumere come riferimento per la misura degli spostamenti angolari la posizione di equilibrio del sistema sotto l'azione della forza peso, e nell'ipotesi di piccoli angoli di deviazione rispetto alla posizione orizzontale di molla non sollecitata.

Poiché:

$$F_e = ka \vartheta$$

$$F_a = bL \dot{\vartheta}$$

si ha:

$$mL^2 \ddot{\vartheta} = -ka^2 \vartheta - bL^2 \dot{\vartheta}$$

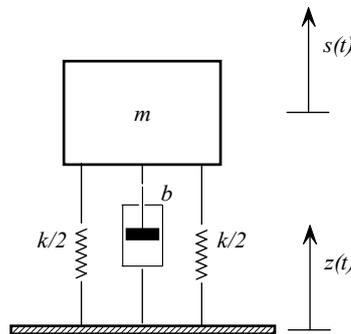
Posto:  $u(t) = 0$ ;  $y(t) = \vartheta(t)$ ;  $x_1(t) = \vartheta(t)$ ;  $x_2(t) = \dot{\vartheta}(t)$ , si ottiene:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{ka^2}{mL^2} x_1(t) - \frac{b}{m} x_2(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

**Esempio 2.10** Si consideri il sistema meccanico mostrato in Figura 2.17 in cui il forzamento è costituito dallo spostamento  $z(t)$  del supporto (come nel caso delle sospensioni degli autoveicoli). Si vuole determinare un modello i-s-u per lo studio degli spostamenti verticali dell'elemento di massa



**Fig.2.17**

Il sistema ha 1 grado di libertà. Come coordinata posizionale scegliamo la posizione verticale  $s(t)$  dell'elemento di massa misurata rispetto alla posizione di equilibrio da essa assunta sotto l'azione della forza peso e allorchè è  $z=0$ . La legge di Newton si scrive:

$$m\ddot{s} = -k(s - z) - b(\dot{s} - \dot{z})$$

E' facile rendersi conto che, in questo caso, scegliendo  $u(t) = z(t)$ ;  $y(t) = s(t)$ ;  $x_1(t) = s(t)$ ;  $x_2(t) = \dot{s}(t)$ , non si perviene ad una rappresentazione implicita i-s-u in forma standard. Infatti, con tale scelta, nell'espressione a secondo membro di  $\dot{x}_2$  figurerebbe anche  $\dot{u}$ . In questo caso, pertanto, la scelta delle variabili di stato non può essere effettuata con le regole usate per i casi precedenti. La trattazione di tale problema esula dagli scopi di questo corso. Esso verrà trattato nel corso di Teoria dei Sistemi.

**Esempio 2.11** Si consideri il sistema meccanico mostrato in Figura 2.18a. Si vuole derivare un modello i-s-u per lo studio dell'andamento delle posizioni dei due carrelli.

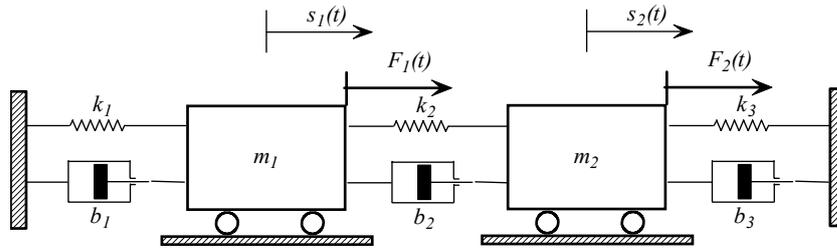


Fig.2.18a

Il sistema ha due gradi di libertà. Come coordinate posizionali assumiamo le posizioni  $s_1(t)$  e  $s_2(t)$  dei due carrelli misurate rispetto alla posizione di molle non sollecitate. Per la scrittura della seconda legge di Newton alle masse  $m_1$  e  $m_2$  facciamo riferimento alle schematizzazioni delle forze agenti su di esse mostrate in Figura 2.18b.



Fig.2.18b

Risulta:

$$m_1 \ddot{s}_1 = -k_1 s_1 - b_1 \dot{s}_1 + k_2 (s_2 - s_1) + b_2 (\dot{s}_2 - \dot{s}_1) + F_1$$

$$m_2 \ddot{s}_2 = -k_2 (s_2 - s_1) - b_2 (\dot{s}_2 - \dot{s}_1) - k_3 s_2 - b_3 \dot{s}_2 + F_2$$

Posto:

$$u_1(t) = F_1(t); \quad u_2(t) = F_2(t); \quad y_1(t) = s_1(t); \quad y_2(t) = s_2(t);$$

$$x_1(t) = s_1(t); \quad x_2(t) = \dot{s}_1(t); \quad x_3(t) = s_2(t); \quad x_4(t) = \dot{s}_2(t)$$

con semplici manipolazioni si ottiene:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k_1 + k_2}{m_1} x_1 - \frac{b_1 + b_2}{m_1} x_2 + \frac{k_2}{m_1} x_3 + \frac{b_2}{m_1} x_4 + \frac{1}{m_1} u_1$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{k_2}{m_2} x_1 + \frac{b_2}{m_2} x_2 - \frac{k_2 + k_3}{m_2} x_3 - \frac{b_2 + b_3}{m_2} x_4 + \frac{1}{m_2} u_2$$

$$y_1 = x_1$$

$$y_2 = x_3$$

Come si vede, il sistema è lineare e stazionario. In forma matriciale si scrive:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & -\frac{b_1 + b_2}{m_1} & +\frac{k_2}{m_1} & +\frac{b_2}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ +\frac{k_2}{m_2} & +\frac{b_2}{m_2} & -\frac{k_2 + k_3}{m_2} & -\frac{b_2 + b_3}{m_2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u$$

## I.5 Equazioni della meccanica nella seconda forma

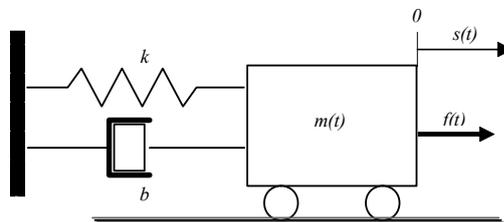
Come visto negli esempi precedenti, le equazioni della meccanica nella forma (2.4)-(2.5) consentono di pervenire, in un gran numero di casi, alle equazioni del moto di un sistema di corpi rigidi a  $n$  gradi di libertà. Vi sono però delle situazioni in cui l'applicazione delle (2.4)-(2.5) non è corretta. Questo si ha, in particolare, nel caso in cui la massa e/o il momento d'inerzia degli elementi di inerzia variano nel tempo. In questi casi si ricorre ad una formulazione più generale della seconda legge di Newton, che, per i moti traslatori, va sotto il nome di **teorema di conservazione della quantità di moto**, e per i moti rotatori, sotto il nome di **teorema di conservazione del momento della quantità di moto**. Tali teoremi, per un generico corpo rigido, si scrivono:

$$\frac{d(mv)}{dt} = \Sigma F \quad (2.12)$$

$$\frac{d(J_t \omega)}{dt} = \Sigma T \quad (2.13)$$

dove, nella (2.12),  $v$  indica la velocità del corpo in una generica direzione prescelta e  $\Sigma F$  la risultante delle componenti delle forze nella stessa direzione, mentre nella (2.13),  $J_t$  indica il momento di inerzia del corpo rispetto ad un asse  $t$ ,  $\omega$  indica la velocità angolare intorno a tale asse, e  $\Sigma T$  la somma dei momenti di tutte le forze intorno all'asse  $t$ .

**Esempio 2.11** *Sistema massa-molla-smorzatore con massa tempo variante.* Si consideri il sistema massa-molla-smorzatore mostrato in Fig.2.19, in cui la massa del carrello (supposto puntiforme) varia nel tempo. Si vuole studiare l'andamento nel tempo della posizione del carrello.



**Figura 2.19** Sistema massa-molla-smorzatore

Il sistema ha 1 solo grado di libertà. Come coordinata posizionale assumiamo lo spostamento del carrello rispetto alla posizione di molla non sollecitata. Poiché la massa del carrello varia nel tempo, la relazione costitutiva è fornita dalla legge di conservazione della quantità di moto:

$$\frac{d(mv)}{dt} = -ks(t) - b \frac{ds}{dt} + f(t)$$

che può risciversi come:

$$m\ddot{s} + \dot{m}\dot{s} = -ks - b\dot{s} + f$$

Posto:  $u(t) = f(t)$ ;  $y(t) = s(t)$ ;  $x_1(t) = s(t)$ ;  $x_2(t) = \dot{s}(t)$  con semplici manipolazioni si ottiene:

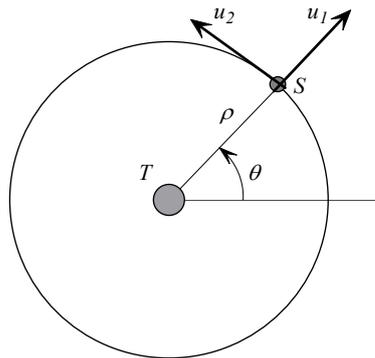
$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k}{m(t)}x_1(t) - \frac{b}{m(t)}x_2(t) - \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}x_2(t) + \frac{1}{m(t)}u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

Come si vede il sistema è lineare ma non stazionario. La sua rappresentazione matriciale è:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m(t)} & -\frac{b}{m(t)} - \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m(t)} \end{pmatrix} u$$

$$y = (1 \quad 0)x + (0)u$$

**Esempio 2.12** Si consideri il sistema satellite-terra mostrato in Figura 2.20. In esso si assume che sul satellite possa essere esercitata una spinta radiale  $u_1$  e una tangenziale all'orbita  $u_2$ . Supponendo la terra ferma, si vuole studiare il moto del satellite intorno alla terra.



**Fig.2.20**

Il sistema ha 2 gradi di libertà in quanto il satellite è libero di muoversi nell'intero piano dell'orbita. Poiché sul satellite agisce sia una spinta radiale che una tangenziale all'orbita, conviene assumere come coordinate posizionali le coordinate polari del satellite mostrate in Figura 2.20. Così facendo, infatti, le due spinte contribuiscono separatamente al moto lungo ciascuna coordinata posizionale.

Per la scrittura delle equazioni del moto, notiamo che, avendo fissato un sistema di riferimento solidale alla terra, sul satellite, oltre alle forze esterne, agiscono la forza di attrazione gravitazionale, che ha direzione radiale ed è orientata verso la terra, e la forza centrifuga, che ha direzione radiale ed è orientata in verso opposto a quella gravitazionale.

Le equazioni del moto si ottengono scrivendo la legge di Newton relativa alle traslazioni lungo  $\rho$  e quella relativa alle rotazioni intorno alla terra. Per quanto riguarda la prima, indicando con  $M_T$  la massa della terra, con  $M_S$  la massa del satellite e con  $K$  la costante di attrazione gravitazionale, essa si scrive:

$$M_S \ddot{\rho} = -K \frac{M_T M_S}{\rho^2} + M_S \rho \dot{\theta}^2 + u_1$$

Per quanto riguarda l'equazione di equilibrio radiale, poiché il momento di inerzia del satellite rispetto alla terra varia nel tempo in quanto varia la distanza  $\rho$ , bisogna scrivere l'equazione di conservazione del momento della quantità di moto. Si ha allora:

$$\frac{d(M_S \rho^2 \dot{\theta})}{dt} = u_2 \rho$$

che sviluppata diventa:

$$2M_S \rho \dot{\rho} \dot{\theta} + M_S \rho^2 \ddot{\theta} = u_2 \rho$$

Posto:  $y_1(t) = \rho(t)$ ;  $y_2(t) = \theta(t)$ ;  $x_1(t) = \rho(t)$ ;  $x_2(t) = \dot{\rho}(t)$ ;  $x_3(t) = \theta(t)$ ;  $x_4(t) = \dot{\theta}(t)$ , si ottiene:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -K \frac{M_T}{x_1^2} + x_1 x_4^2 + \frac{1}{M_S} u_1 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -\frac{2x_2 x_4}{x_1} + \frac{1}{M_S} \frac{u_1}{x_1} \\ y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_3\end{aligned}$$

Il sistema, come si vede, è nonlineare, tempo-invariante.