III. MODELLISTICA DI SISTEMI ELETTRICI

In analogia a quanto fatto per i sistemi meccanici, in questo capitolo considereremo sistemi elettrici discreti o, come sono più frequentemente detti, a parametri concentrati. Tali sistemi sono costituiti da un insieme di componenti elementari tra loro variamente interconnessi. I componenti elettrici elementari possono essere divisi in utilizzatori e generatori. Gli utilizzatori sono di tre tipi: elementi resistivi o resistori, elementi capacitivi o condensatori, elementi induttivi o induttori. Nel seguito vengono date le relazioni costitutive che descrivono il comportamento causa-effetto di tali componenti. I generatori vengono invece divisi in generatori di tensione e generatori di corrente. Essi costituiscono le cosiddette alimentazioni del sistema elettrico reale, e forniscono le grandezze di ingresso del sistema astratto orientato.

III.1 Componenti elementari dei sistemi elettrici

Nella presentazione dei componenti elementari dei sistemi elettrici, per fornire le relazioni tra tensioni e correnti adotteremo la cosiddetta convenzione dell'utilizzatore: la corrente circolante in un utilizzatore è positiva se circola nel verso che va dal terminale assunto come positivo (indicato con una freccia) al terminale negativo; dualmente, con riferimento alla tensione ai capi di un utilizzatore, assumeremo come terminale positivo quello in cui la corrente è entrante.

Resistore. Il resistore è un componente elettrico ideale (privo di induttanza e capacità) in cui, tra la tensione *v(t)* ai suoi capi e la corrente *i(t)* in esso circolante nella direzione che va dal terminale positivo a quello negativo (vedi Figura 3.1), sussiste una relazione di proporzionalità.

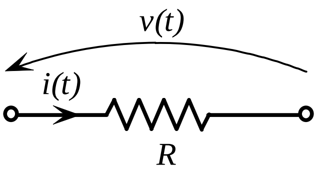

Fig.3.1

La relazione di proporzionalità tra tensione e corrente è data dalla legge di Ohm:

$$v(t) = Ri(t) \tag{3.1}$$

dove R è detta resistenza del resistore e si misura inOhm:

$$\text{ohm} = \frac{\text{Volt}}{\text{Ampere}} \qquad \left(\Omega = \frac{\text{V}}{\text{A}}\right)$$

Un resistore, come risulta dalla (3.1), è un sistema istantaneo, ossia privo di memoria: esso, infatti, qunado è attraversato da corrente non immagazzina energia, anzi la dissipa sotto forma di calore per effetto Joule.

Condensatore. Il condensatore è un componente elettrico ideale (privo di resistenza e induttanza) in cui, tra la tensione *v(t)* ai suoi capi e la corrente *i(t)* in esso circolante nella direzione che va dal terminale positivo a quello negativo (vedi Figura 3.2), sussiste una relazione del tipo:

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \tag{3.2}$$

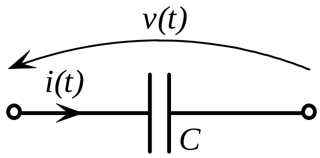

Fig.3.2

C è detta capacità del condensatore e si misura in Farad:

$$\text{Farad} = \frac{\text{Ampere}}{\text{Volt/s}} = \frac{\text{Ampere} \cdot \text{s}}{\text{Volt}} = \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} \qquad \left(\text{F} = \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V}} = \frac{C}{\text{V}} \right)$$

Poiché il Farad indica un valore di capacità estremamente elevata, solitamente si ricorre a suoi sottomultipli quali il millifarad (1mF=10^{-3}F), il microfarad (1μF=10^{-6}F), il nanofarad (1nF=10^{-6}F), il picofarad (1pF=10^{-12}F).

Il condensatore è un sistema dinamico; infatti, come risulta dalla (3.2), la tensione ai suoi capi in un istante *t* ha memoria del suo valore precedente. La memoria di tale sistema si spiega con il fatto che il condensatore è un componente in grado di immagazzinare energia sotto forma di energia elettrostatica. Poiché tale energia, in un generico istante *t*, vale $\frac{1}{2}Cv(t)^2$, una sua misura è fornita direttamente dalla tensione ai capi del condensatore, che può pertanto essere assunta come variabile di stato nella descrizione i-s-u di tale componente.

Induttore. L'induttore è un componente elettrico ideale (privo di resistenza e capacità) in cui, tra la tensione *v(t)* ai suoi capi e la corrente *i(t)* in esso circolante nella direzione che va dal dal terminale positivo a quello negativo (vedi Figura 3.3), sussiste una relazione del tipo:

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \tag{3.3}$$

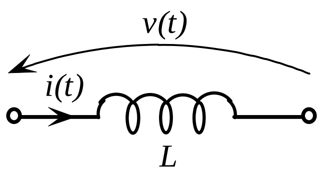

Fig.3.3

L è detta induttanza dell'induttore e si misura in Henry:

$$\text{Henry} = \frac{\text{Volt}}{\text{Ampere/s}} = \frac{\text{Volt} \cdot \text{s}}{\text{Ampere}} = \frac{\text{Weber}}{\text{Ampere}} \qquad \left(\text{H} = \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A}} = \frac{\text{Wb}}{\text{A}} \right)$$

Anche per l'Henry si ricorre a suoi sottomultipli quali il millihenry (1mH=10^{-3}H).

L'induttore è un sistema dinamico; infatti, come risulta dalla (3.3), la corrente in esso circolante in un istante *t* ha memoria del suo valore precedente. La memoria di tale sistema si spiega con il fatto che l'induttore è un componente in grado di immagazzinare energia sotto forma di energia elettromagnetica. Poiché tale energia, in un generico istante *t*, vale $\frac{1}{2}Li(t)^2$, una sua misura è fornita direttamente dalla corrente circolante nell'induttore, che può pertanto essere assunta come variabile di stato nella descrizione i-s-u di tale componente.

Generatore ideale di tensione. Il generatore di tensione è un componente elettrico ideale che genera ai suoi capi una tensione, che può essere anche variante nel tempo, il cui valore è indipendente dalla corrente che in esso circola. La rappresentazione schematica di un generatore di tensione è mostrata in Figura 3.4. In esso il segno + indica il terminale morsetto positivo.

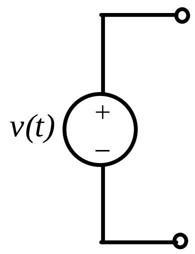

Fig.3.4

Generatore ideale di corrente. Il generatore di corrente è un componente elettrico ideale che fa circolare, nel ramo in cui è inserito, una corrente, che può essere anche variante nel tempo, il cui valore è indipendente dalle condizioni di carico e di funzionamento della parte rimanente del circuito. La rappresentazione schematica di un generatore di corrente è mostrata in Figura 3.5. In esso la freccia indica il verso di circolazione della corrente del generatore.

La resistenza interna di un generatore ideale di tensione è zero.

Generatore ideale di tensione. Il generatore di tensione è un componente elettrico ideale che genera ai suoi capi una tensione, che può essere anche variante nel tempo, il cui valore è indipendente dalla corrente che in esso circola. La rappresentazione schematica di un generatore di tensione è mostrata in Figura 3.4. In esso la punta della freccia indica il morsetto assunto come positivo: quando la tensione è positiva, il potenziale elettrico di tale morsetto è maggiore di quello dell'altro.

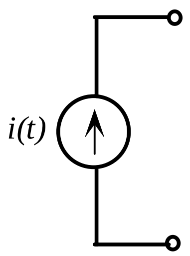

Fig.3.5

La resistenza interna di un generatore ideale di tensione è infinito.

III.2 Equazioni dei sistemi elettrici

Le leggi fisiche utilizzate per la scrittura delle equazioni del comportamento dinamico di un sistema elettrico sono i principi di Kirchhoff. Nel richiamare tali principi assumeremo note le definizioni di nodo, ramo e maglia.

Primo principio di Kirchhoff. Consideriamo un generico circuito e supponiamo di aver fissato, in maniera del tutto arbitraria, un verso positivo per la corrente che circola in ciascun ramo. In un qualsiasi istante *t* la somma algebrica delle correnti che confluiscono in un nodo è zero.

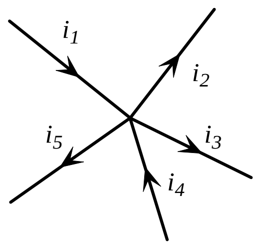

Fig.3.6

Pertanto, se conveniamo di assumere positive le correnti entranti in un nodo, con riferimento alla Figura 3.6 il primo principio di Kirchhoff stabilisce che:

$$i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) + i_4(t) - i_5(t) = 0$$

Secondo principio di Kirchhoff. Consideriamo un generico circuito e, con riferimento ad una generica sua maglia, supponiamo di aver fissato, in maniera del tutto arbitraria, un verso positivo delle tensioni ai capi di ogni ramo. Fissato allora un verso di percorrenza nella maglia, in un qualsiasi istante t la somma algebrica delle tensioni ai capi dei vari componenti che si incontrano percorrendo la maglia nel verso prefissato è zero.

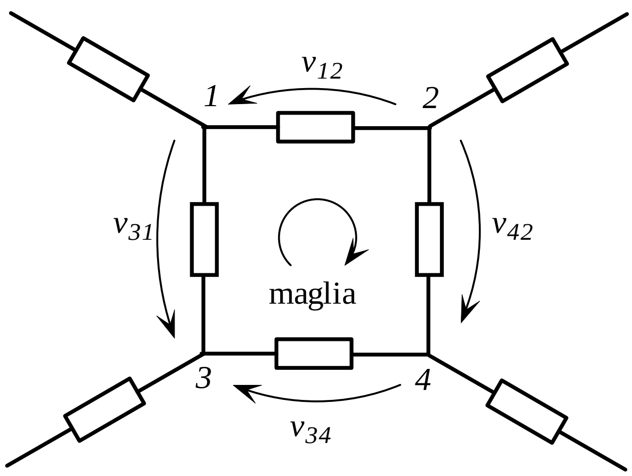

Fig.3.7

Pertanto, con riferimento alle tensioni indicate in Figura 3.7 e al verso di percorrenza della maglia, il secondo principio di Kirchhoff stabilisce che:

$$v_{12} - v_{42} - v_{43} + v_{31} = 0$$

III.3 Modelli i-s-u di sistemi elettrici

Dato un circuito elettrico, per la scrittura di un modello i-s-u, la prima operazione da effettuare consiste nella scelta delle variabili di stato. Queste, sulla base di quanto precedentemente detto, nella quasi totalità dei casi, possono essere assunte coincidenti con le tensioni ai capi dei condensatori e le correnti negli induttori, fatta eccezione per quei componenti in cui tali grandezze non siano imposte da qualche generatore di tensione o di corrente. Supponiamo di indicare con n il numero di tali variabili di stato.

Successivamente si passa alla scrittura delle relazioni fisiche tra tali grandezze, relazioni fornite dai principi di Kirchhoff e dalle relazioni costitutive dei vari componenti. Per la scrittura delle leggi di Kirchhoff, spesso è necessario introdurre, oltre alle variabili di stato, altre grandezze di comodo, come ad esempio correnti che circolano in alcuni resistori, oppure tensioni o correnti di interesse nello studio (variabili di uscita). Poiché ogni aggiunta di una variabile implica la scrittura di un'equazione in più, conviene cercare di ridurre il numero di tali variabili aggiuntive cercando di esprimerle direttamente in termini delle variabili di stato sfruttando sia le relazioni costitutive relative ai vari componenti sia le ben note proprietà relative ai collegamenti in serie e in parallelo, ossia "in componenti elettrici collegati in serie circola la stessa corrente", "ai capi di componenti elettrici collegati in parallelo vi è la stessa tensione". Supponiamo di indicare con z il numero di variabili aggiuntive.

A questo punto si tratta di scrivere $n+z$ equazioni indipendenti. Allo scopo di evitare errori, conviene ricordare che:

- in un sistema con N nodi, comunque si scelgano N-1 nodi si ottengono altrettante equazioni ai nodi tra loro indipendenti;
- ogni equazione aggiuntiva ad una maglia è indipendente dalle altre equazioni alle maglie purché in tale maglia vi sia almeno un ramo che non sia presente nelle precedenti.

Delle $n+z$ equazioni scritte, z saranno utilizzate per esprimere le variabili di comodo in funzione delle variabili di stato e delle loro derivate; le rimanenti, dopo aver effettuato le sostituzioni, dovranno essere manipolate per pervenire alla rappresentazione i-s-u cercata.

Esempio 3.1 Scrivere un modello i-s-u del circuito in Figura 3.8a che consenta di studiare l'andamento della tensione ai capi dell'induttanza L.

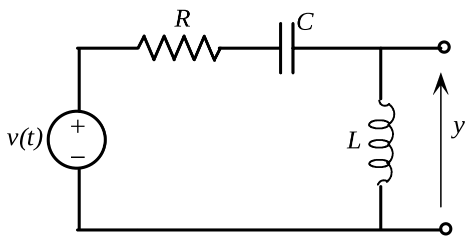

Fig.3.8a

In questo caso si può cominciare con l'osservare quanto segue:

- tutti i componenti del circuito sono disposti in serie, per cui in essi circola la stessa corrente;
- per la descrizione del sistema si utilizzeranno due variabili di stato: la tensione ai capi del condensatore e la corrente nell'induttore;
- per la scrittura delle equazioni con i principi di Kirchhoff conviene utilizzare le seguenti convenzioni:

- scegliere come verso positivo per la corrente quello in accordo con la tensione di uscita ai capi dell'induttore (vedi Fig.3.8b);
- scegliere come verso positivo per la tensione ai capi del condensatore quello in accordo con la corrente in esso circolante, coincidente con quello della corrente nell'induttore.

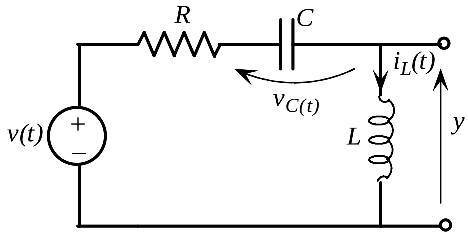

Fig.3.8b

Scegliendo come verso di percorrenza della maglia quello orario, e posto:

$$u(t) = v(t); \quad x_1(t) = v_C(t); \quad x_2(t) = i_L(t)$$

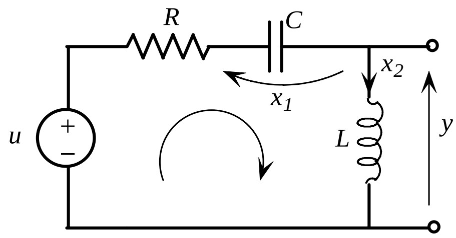

Fig.3.8c

tenendo presente che si hanno 3 variabili, di cui due di stato e una di uscita, saranno necessarie 3 equazioni. Dalla Figura 3.8c si ha: una può essere fornita dal secondo principio di Kirchoff , mentre altre due risultano di scrittura immediata:

- Secondo principio di Kirchhoff: $R x_2 + x_1 + L\dot{x}_2 - u = 0$
- Condizione derivante dall'essere L e C in serie: $C\dot{x}_1 = x_2$
- Relazione costitutiva dell'induttore: $y = L\dot{x}_2$

Con semplici manipolazioni si ottiene:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= \frac{1}{C} x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= -\frac{1}{L} x_1(t) - \frac{R}{L} x_2(t) + \frac{1}{L} u(t) \\
y(t) &= -x_1(t) - R x_2(t) + u(t)
\end{aligned}$$

Come si vede, il sistema è lineare e stazionario. In forma matriciale si scrive:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} -1 & -R \end{pmatrix} x + (1) u$$

Esempio 3.2 Scrivere un modello i-s-u del circuito in Figura 3.9a che consenta di studiare l'andamento della corrente nella resistenza *R*.

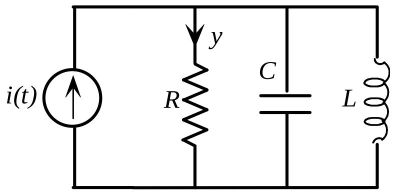

Fig.3.9a

Con la scelta delle variabili di stato indicata in Figura 3.9b, con considerazioni analoghe a quelle svolte nell'esempio 3.1, si ha:

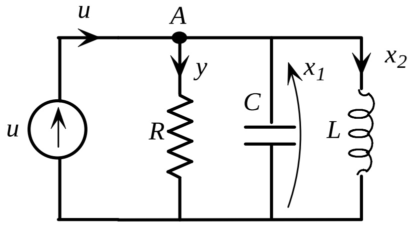

Fig.3.9b

- Primo principio di Kirchhoff al nodo A: $u = \frac{x_1}{R} + C\dot{x}_1 + x_2$

- Condizione derivante dall'essere *L* e *C* in parallelo: $L\dot{x}_2 = x_1$

- Condizione derivante dall'essere *R* e *C* in parallelo: $Ry = x_1$

Con semplici manipolazioni si ottiene:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -\frac{1}{RC}x_1(t) - \frac{1}{C}x_2(t) + \frac{1}{C}u(t) \\
\dot{x}_2(t) &= \frac{1}{L}x_1(t) \\
y(t) &= \frac{1}{R}x_1(t)
\end{aligned}$$

Come si vede, il sistema è lineare e stazionario. In forma matriciale si scrive:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{pmatrix} u \\
y &= \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \end{pmatrix} x + (0)u
\end{aligned}$$

Esempio 3.3 Scrivere un modello i-s-u del circuito in Figura 3.10a che consenta di studiare l'andamento della tensione ai capi della resistenza R_2.

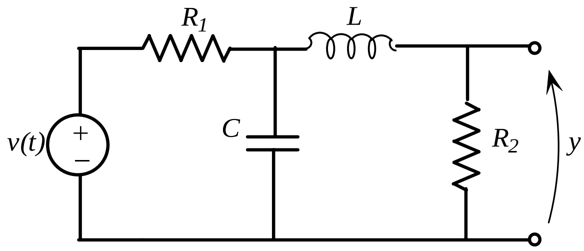

Fig.3.10a

Con la scelta delle variabili di stato indicata in Figura 3.10b, e tenendo presente che per la scrittura comoda del primo principio di Kirchhoff al nodo *A* conviene introdurre come variabile di comodo la corrente *z(t)* circolante nella resistenza R_1, si ha:

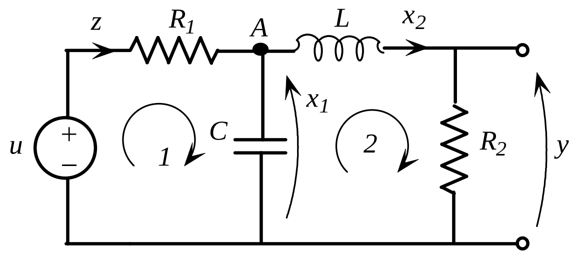

Fig.3.10b

- Primo principio di Kirchhoff al nodo A: $z = C\dot{x}_1 + x_2$

- Secondo principio di Kirchhoff alla maglia 1: $u = R_1 z + x_1$

- Secondo principio di Kirchhoff alla maglia 2: $x_1 = L\dot{x}_2 + y$

- Legge di Ohm alla resistenza R_2: $y = R_2 x_2$

Si noti che, allo scopo di evitare l'introduzione della corrente nel condensatore tra le incognite del sistema, la si è espressa direttamente come $C\dot{x}_1$. Ricavando *z* dalla prima equazione e sostituendo nelle altre, con semplici manipolazioni si ottiene:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t) = -\frac{1}{R_1 C} x_1(t) - \frac{1}{C} x_2(t) + \frac{1}{R_1 C} u(t) \\
&\dot{x}_2(t) = \frac{1}{L} x_1(t) - \frac{R_2}{L} x_2(t) \\
&y(t) = R_2 x_2(t)
\end{aligned}
$$

Come si vede, il sistema è lineare e stazionario. In forma matriciale si scrive:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1 C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C} \\ 0 \end{pmatrix} u \\
y &= \begin{pmatrix} 0 & R_2 \end{pmatrix} x + (0) u
\end{aligned}
$$

Esempio 3.4 Scrivere un modello i-s-u del circuito in Figura 3.11a che consenta di studiare l'andamento della corrente nella resistenza R_3.

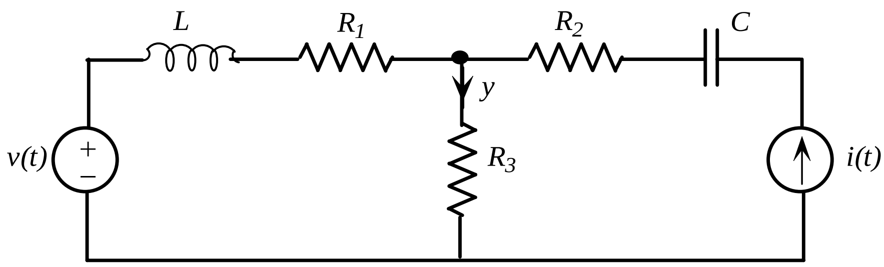

Fig.3.11a

Con la scelta delle variabili di stato indicata in Figura 3.11b si ha:

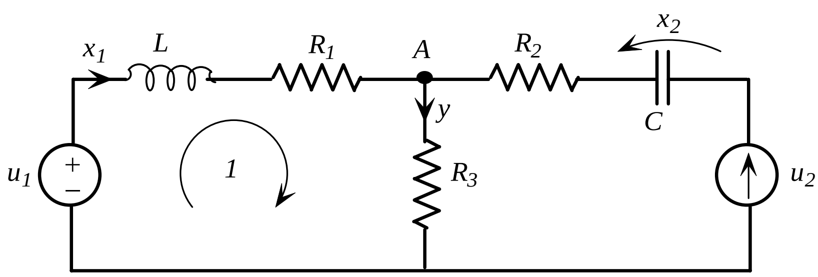

Fig.3.11b

- Primo principio di Kirchhoff al nodo A: $x_1 + u_2 = y$

- Secondo principio di Kirchhoff alla maglia 1: $u_1 = R_1 x_1 + L\dot{x}_1 + R_3 y$

- Condizione derivante dall'essere *C* in serie al g.c.: $C\dot{x}_2 = -u_2$

Ricavando *y* dalla prima e sostituendo nelle altre, con semplici manipolazioni si ottiene:

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{(R_1 + R_3)}{L} x_1(t) + \frac{1}{L} u_1(t) - \frac{R_3}{L} u_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{1}{C} u_2(t)$$
$$y(t) = x_1 + u_2$$

Come si vede, il sistema è lineare e stazionario. In forma matriciale si scrive:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{R_1 + R_3}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{R_3}{L} \\ 0 & -\frac{1}{C} \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} u$$