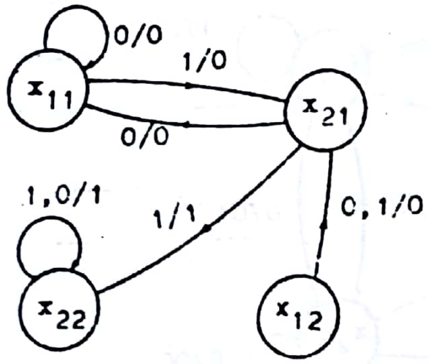

a)

$x \backslash u$	0	1
x_{11}	$x_{11}/0$	$x_{21}/0$
x_{12}	x_{21}	$x_{21}/0$
x_{21}	$x_{11}/0$	$x_{22}/1$
x_{22}	$x_{22}/1$	$x_{22}/1$

b)

Fig. 2.18

II.3 RIDUZIONE DI UNA RAPPRESENTAZIONE ALLA FORMA MINIMA

Si noti che un sistema a stati finiti è caratterizzato non tanto dalla forma della sua rappresentazione o dal numero degli stati, quanto dalla corrispondenza tra gli insiemi delle sequenze di ingresso e gli insiemi delle sequenze di uscita. Pertanto può accadere che un sistema a stati finiti può avere diverse rappresentazioni con un numero di elementi degli insiemi di stato diverso.

Data una rappresentazione (X, f, η) di un sistema a stati finiti S risulta molto importante per la pratica realizzazione del sistema stesso determinare una rappresentazione (X_m, f_m, η_m) equivalente ad (X, f, η) con numero di elementi di X_m minore di quello di X.

A tal proposito il seguente teorema è di fondamentale importanza.

TEOREMA 3.1 (Una rappresentazione ridotta ha il minor numero di stati). Condizione necessaria e sufficiente affinchè la rappresentazione (X_m, f_m, η_m) di un dato sistema S abbia il minor numero di stati rispetto a tutte le altre rappresentazioni di S è che sia ridotta o minima, cioè non abbia stati equivalenti (vedi la Definizione I.7.7).

DIMOSTRAZIONE. Si supponga (X_m, f_m, η_m) priva di stati equivalenti. Detta $(\hat{X}, \hat{f}, \hat{\eta})$ una rappresentazione equivalente ad (X_m, f_m, η_m) e con il minor numero di stati, si consideri la funzione $T(.)$ che ad ogni stato di X_m associ gli stati equivalenti di $\hat{X}$. Poichè la rappresentazione (X_m, f_m, η_m) è priva di stati equivalenti ed è equivalente alla rappresentazione $(\hat{X}, \hat{f}, \hat{\eta})$, $\forall x_i \neq x_j$ si ha: $T(x_i) \cap T(x_j) = \emptyset$; inoltre $\bigcup_{x_i} T(x_i) = \hat{X}$. D'altra parte $\hat{X}$ ha un numero di elementi non maggiore di quello di X_m; pertanto la funzione $T(.)$ è biunivoca di X_m su $\hat{X}$ e quindi anche la rappresentazione (X_m, f_m, η_m) ha il minor numero di stati.

Inversamente, sia (X_m, f_m, η_m) una rappresentazione con il minor numero di stati.

Si supponga, per assurdo, che tale rappresentazione abbia due stati x_i, x_j equivalenti. Allora (X_m, f_m, η_m) è equivalente alla rappresentazione $(\hat{X}, \hat{f}, \hat{\eta})$ ottenuta da (X_m, f_m, η_m) eliminando uno dei due stati x_i, x_j. Tale rappresentazione ha un numero di stati inferiore a quello di (X_m, f_m, η_m) contro l'ipotesi ■

Data una rappresentazione (X, f, η) di un sistema S, si ricordi che la relazione di equivalenza fra stati è di equivalenza su X dal momento che è riflessiva, simmetrica e transitiva; quindi essa partiziona l'insieme X in classi di equivalenza $p_1, p_2, \ldots, p_r$ disgiunte, in ognuna delle quali vi sono tutti e solo gli stati fra loro equivalenti.

Ciò detto, si può dare il seguente teorema.

TEOREMA 3.2 (Determinazione di una rappresentazione minima). Data una rappresentazione (X, f, η) di un sistema S, una rappresentazione minima è data da (X_m, f_m, η_m), dove:

i) $X_m = P = \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$;

ii) $X_m \times U \ni (p_i, u) \longrightarrow f_m(p_i, u) = p_j \in P$, se $f(x_i, u) = x_j$, con $x_i \in p_i$ ed $x_j \in p_j$; (3.1)

iii) $P \times U \ni (p_i, u) \longrightarrow \eta_m(p_i, u) = \eta(x_i, u) \in Y$, con $x_i \in p_i$.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione segue dalle proprietà delle classi di equivalenza e dal Teorema 3.1 ■

Il Teorema 3.2 mostra che, per determinare una rappresentazione minima di un sistema S assegnato mediante una rappresentazione (X, f, η), è necessario determinare la partizione P di X.

A tale scopo si ricorda (vedi la Definizione I.7.5) che due stati x_i, x_j dell'insieme di stato X di una rappresentazione (X, f, η) si dicono k-indistinguibili o indistinguibili in k passi e si scrive $x_i \overset{k}{\equiv} x_j$ se, comunque si applica una sequenza di ingresso $u_{[0,k)}$ di lunghezza k, la sequenza di uscita a partire dallo stato iniziale x_i coincide con quella a partire dallo stato iniziale x_j.

La relazione di k-indistinguibilità, essendo una relazione di equivalenza, partiziona l'insieme di stato X in classi di equivalenza. Detta P_k tale partizione, per ottenere la partizione P_{k+1} è utile il seguente teorema.

TEOREMA 3.3 (Affinamento di una partizione). Condizione necessaria e sufficiente affinchè due stati x_i, x_j siano (k+1)-indistinguibili è che siano k-indistinguibili e le transizioni da essi $\boxed{\forall u \in U}$ avvengano verso stati k-indistinguibili, cioè:

$$x_i \overset{k+1}{\equiv} x_j \iff x_i \overset{k}{\equiv} x_j \text{ ed } f(x_i, u) \overset{k}{\equiv} f(x_j, u); \boxed{\forall u \in U.} \qquad (3.2)$$

DIMOSTRAZIONE. Se $x_i \overset{k+1}{\equiv} x_j$ allora è evidente che $x_i \overset{k}{\equiv} x_j$; inoltre se esistesse un ingresso $\hat{u} \in U$ tale che $f(x_i, \hat{u})$ ed $f(x_j, \hat{u})$ fossero k- distinguibili, con sequenze di ingresso $u_{[0,k+1)}$ aventi come primo simbolo $\hat{u}$ gli stati x_i ed x_j si potrebbero distinguere contro l'ipotesi che $x_i \overset{k+1}{\equiv} x_j$.

Bisogna ora mostrare che se $x_i \overset{k}{\equiv} x_j$ ed $f(x_i, u) \overset{k}{\equiv} f(x_j, u)$, $\forall u \in U$, allora:

$$\gamma(h, x_i, u_{[0,h]}) = \gamma(h, x_j, u_{[0,h]}) \quad \forall h \in [0, k+1) \text{ e } \forall u_{[0,h]} \in \mathcal{U}. \qquad (3.3)$$

La (3.3) è vera per h=0 poichè se $x_i \overset{k}{\equiv} x_j$ è anche $x_i \overset{1}{\equiv} x_j$; inoltre, essendo $f(x_i,u) \overset{k}{\equiv} f(x_j,u)$, $\forall u \in U$, si ha:

$$\gamma(h,\ f(x_i,u),\ u_{[1,h]}) = \gamma(h,\ f(x_j,u), u_{[1,h]}),\ \forall h \in [1,k+1), \forall u \in U \text{ e } \forall u_{[1,h]} \in \mathcal{U}. \qquad (3.4)$$

Pertanto:

$$\gamma(h,x_i,u_{[0,h]}) = \gamma(h,x_j,u_{[0,h]}),\quad \forall h \in [0\ ,k+1) \text{ e } \forall\ u_{[0,h]} \in \mathcal{U} \qquad (3.5)$$

da cui l'asserto ■

Sia ora p_k un generico elemento della partizione P_k delle classi di k-indistinguibilità e si definisca in esso la relazione R_c come segue:

$x_i R_c x_j$ se gli stati $f(x_i,u)$ ed $f(x_j,u)$, $\forall u \in U$, appartengono ad uno stesso elemento di P_k. (3.6)

Tale relazione è chiaramente riflessiva, simmetrica e transitiva, quindi è una relazione di equivalenza. Essa partiziona il generico elemento $p_k \in P_k$ in classi di equivalenza di k+1-indistinguibilità, come segue facilmente dal Teorema 3.3. !!

Si può ora dare l'algoritmo per determinare la partizione P delle classi di equivalenza.

ALGORITMO 3.1 (Calcolo della partizione P).

PASSO 1. Si pone $k \leftarrow 1$ e si calcola la partizione $P_k = \{p_{k1}, p_{k2}, \ldots, p_{knk}\}$ ponendo in p_{ki} tutti e soli gli stati di X che presentano la stessa uscita $\forall u \in U$.

PASSO 2. Si calcola P_{k+1} partizionando gli elementi p_{ki} di P_k mediante la relazione di equivalenza R_c (3.6).

PASSO 3. Se $P_{k+1} = P_k$ oppure $k+2=n$, ove n è il numero de gli elementi dell'insieme di stato X, la partizione cercata P coincide con P_{k+1}, altrimenti si pone $k \leftarrow k+1$ e si va al passo 2■

DIMOSTRAZIONE. Se per un certo $k < n-2$ risulta $P_k = P_{k+1}$, allora $P_k = P_{k+r}$, $\forall\, r \in N$, e quindi $P = P_k$. Se invece per nessun $k < n-2$ risulta $P_k = P_{k+1}$, allora $P = P_{n-1}$. Infatti in tal caso si ha che P_1 ha almeno due elementi, poichè se ne avesse uno, per il Teorema 3.3 si avrebbe $P_1 = P_2$ contro l'ipotesi; inoltre le successive partizioni $P_2, P_3, \ldots, P_{n-1}$ hanno un numero di elementi strettamente crescente. Da ciò e dal fatto che X ha n elementi segue che P_{n-1} ha n elementi e quindi $P_{n-1} = X = P$■

ESEMPIO 3.1. Si vuole determinare una rappresentazione minima del sistema a stati finiti descritto dalla tabella di Fig. 3.1.

x \ u	a	b	c
x_1	$x_2/0$	$x_4/1$	$x_4/1$
x_2	$x_2/1$	$x_2/0$	$x_5/0$
x_3	$x_3/1$	$x_3/0$	$x_5/0$
x_4	$x_3/0$	$x_1/1$	$x_1/1$
x_5	$x_4/1$	$x_4/0$	$x_3/0$
x_6	$x_7/0$	$x_8/1$	$x_6/1$
x_7	$x_4/1$	$x_4/0$	$x_2/0$
x_8	$x_5/0$	$x_8/1$	$x_5/1$

Fig. 3.1

Esaminando le uscite corrispondenti ai diversi stati x_i, $i=1,2,\ldots,8$, ed agli ingressi a, b, c si vede subito che la partizione P_1 risulta:

$$P_1 = \{\{x_2, x_3, x_5, x_7\},\ \{x_1, x_4, x_6, x_8\}\}. \qquad (3.7)$$

Partizionando gli elementi di P_1 secondo la relazione R_c si ottiene:

$$P_2 = \{\{x_2, x_3\},\ \{x_5, x_7\},\ \{x_1, x_4, x_6\},\ \{x_8\}\}. \qquad (3.8)$$

Analogamente, affinando gli elementi di P_2, si ha:

$$P_3=\Big\{\{x_2,x_3\}\ ,\ \{x_5,x_7\}\ ,\ \{x_1,x_4\}\ ,\ \{x_6\}\ ,\ \{x_8\}\Big\}. \quad (3.9)$$

Infine, procedendo allo stesso modo, si ha:

$$P_4=P_3=P\ . \qquad (3.10)$$

Applicando il Teorema 3.2 una rappresentazione minima del sistema rappresentato mediante la tabella di Fig.3.1 è data dalla tabella di Fig.3.2.

p \ u	a	b	c
p_1	$p_1/1$	$p_1/0$	$p_2/0$
p_2	$p_3/1$	$p_3/0$	$p_1/0$
p_3	$p_1/0$	$p_3/1$	$p_3/1$
p_4	$p_2/0$	$p_5/1$	$p_4/1$
p_5	$p_2/0$	$p_5/1$	$p_2/1$

Fig. 3.2

E' evidente che il comportamento ingresso-uscita della rappresentazione di Fig.3.1 coincide con quello della rappresentazione di Fig.3.2. Ad esempio, applicando la sequenza di ingresso b a c c a alla rappresentazione di Fig.3.1 la corrispondente sequenza di uscita, a partire dallo stato x_1, risulta 10001. Se si applica la stessa sequenza d'ingresso alla rappresentazione di Fig.3.2 con stato iniziale $p_3=x_1$ si ottiene come sequenza di uscita ancora 10001▲

ESEMPIO 3.2. Si vuole determinare una rappresentazione ridotta del sistema binario di Fig.3.3, dove $X=\{00,01,10\}$.

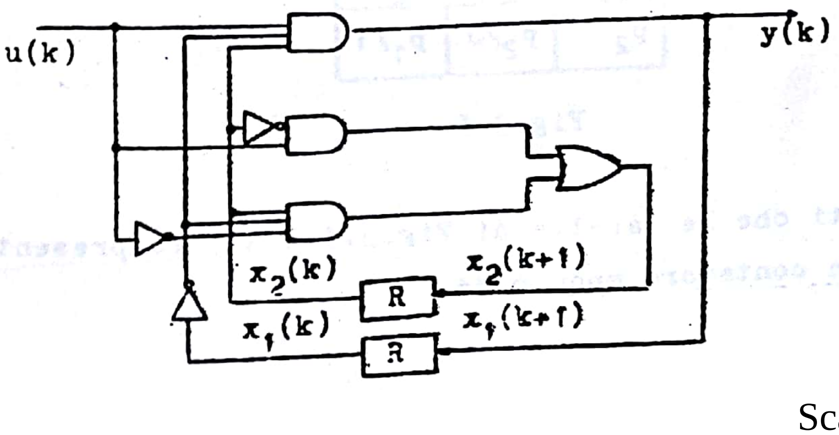

Fig. 3.3

Le funzioni stato prossimo e di uscita risultano:

$$x_1(k+1)= \bar{x}_1(k).\ x_2(k).u(k)$$
$$x_2(k+1)= \bar{x}_2(k).u(k)+\bar{x}_1(k).x_2(k).\bar{u}(k) \qquad (3.11a)$$

$$y(k)= \bar{x}_1(k).x_2(k).u(k)\ . \qquad (3.11b)$$

Calcolando i valori delle (3.11) per i diversi valori di $x(k)=x_1(k)x_2(k)$ ed $u(k)$ si ottiene la tabella stato presente-ingresso presente di Fig.3.4.

x \ u	0	1
00	00/0	01/0
01	01/0	10/1
10	00/0	01/0

Fig.3.4

Da tale tabella si vede subito che:

$$P_1=\{\{x_1,x_3\}\ ,\{x_2\}\} \quad ; \quad P_2=P_1 . \qquad (3.12)$$

Pertanto $P=P_1$ ed una rappresentazione ridotta del sistema di Fig.3.3, in base al Teorema 3.3, è data dalla tabella di Fig.3.5.

p \ u	0	1
p_1	p_1/0	p_2/0
p_2	p_2/0	p_1/1

Fig.3.5

! Si noti che le tabelle di Fig.3.4 e 3.5 rappresentano entrambe un contatore modulo 2. !