

Simulazione sistemi LTI con Matlab

Gianmaria De Tommasi

European Master on Critical and Networked Systems
Maggio 2007

Sommario

Funzione di
trasferimento

Esempio

1 Funzione di trasferimento di un sistema LTI

2 Esempio

Rappresentazione nello spazio di stato di un sistema LTI

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1b)$$

Trasformando (1a)-(1b) secondo Laplace si, ottiene

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

Si ha

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) + (sI - A)^{-1}x_0$$

$$Y(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s) + C(sI - A)^{-1}x_0$$

Rappresentazione nello spazio di stato di un sistema LTI

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1b)$$

Trasformando (1a)-(1b) secondo Laplace si, ottiene

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

Si ha

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) + (sI - A)^{-1}x_0$$

$$Y(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s) + C(sI - A)^{-1}x_0$$

Rappresentazione nello spazio di stato di un sistema LTI

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1b)$$

Trasformando (1a)-(1b) secondo Laplace si, ottiene

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

Si ha

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) + (sI - A)^{-1}x_0$$

$$Y(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s) + C(sI - A)^{-1}x_0$$

Funzione di trasferimento

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Se $x_0 = 0$, allora

$$Y(s) = W(s)U(s)$$

e

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$$

Funzione di trasferimento

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Se $x_0 = 0$, allora

$$Y(s) = W(s)U(s)$$

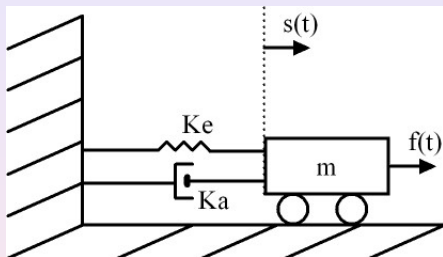
e

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$$

Sommaro

Funzione di
trasferimento

Esempio



$$x_1(t) = s(t)$$

$$x_2(t) = \dot{s}(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{K_e}{m}x_1(t) - \frac{K_a}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

Sommaro

Funzione di
trasferimento

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K_e}{m} & -\frac{K_a}{m} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0] \quad D = 0$$

Sommario

Funzione di
trasferimento

Esempio

$$\begin{aligned}
 W(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{K_e}{m} & s + \frac{K_a}{m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} s + \frac{K_a}{m} & 1 \\ -\frac{K_e}{m} & s \end{bmatrix}}{s^2 + \frac{K_a}{m}s + \frac{K_e}{m}} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} = \\
 &\quad \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{K_a}{m}s + \frac{K_e}{m}}
 \end{aligned}$$

Sommaro

Funzione di
trasferimento

Esempio

$$\begin{aligned}
 W(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{K_e}{m} & s + \frac{K_a}{m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} s + \frac{K_a}{m} & 1 \\ -\frac{K_e}{m} & s \end{bmatrix}}{s^2 + \frac{K_a}{m}s + \frac{K_e}{m}} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} = \\
 &\quad \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{K_a}{m}s + \frac{K_e}{m}}
 \end{aligned}$$

Sommaro

Funzione di
trasferimento

Esempio

$$\begin{aligned}
 W(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{K_e}{m} & s + \frac{K_a}{m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} s + \frac{K_a}{m} & 1 \\ -\frac{K_e}{m} & s \end{bmatrix}}{s^2 + \frac{K_a}{m}s + \frac{K_e}{m}} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} = \\
 &\quad \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{K_a}{m}s + \frac{K_e}{m}}
 \end{aligned}$$

Sommaro

Funzione di
trasferimento

Esempio

$$\begin{aligned}
 W(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{K_e}{m} & s + \frac{K_a}{m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} s + \frac{K_a}{m} & 1 \\ -\frac{K_e}{m} & s \end{bmatrix}}{s^2 + \frac{K_a}{m}s + \frac{K_e}{m}} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} = \\
 &\quad \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{K_a}{m}s + \frac{K_e}{m}}
 \end{aligned}$$

Sommario

Funzione di
trasferimento

Esempio

```
m=2;
Ke=2;
Ka=2;
A = [0 1;-Ke/m -Ka/m];
B=[0;1/m]; C = [1 0];
D=0;
sm1 = ss(A,B,C,D);
sm2 = tf([1/m],[1 Ka/m Ke/m]);
step(sm1,'b',sm2,'ro')
```