Tecnologie Informatiche per l'Automazione Industriale

Prof. Gianmaria De Tommasi

Regolatori PID industriali: implementazione digitale

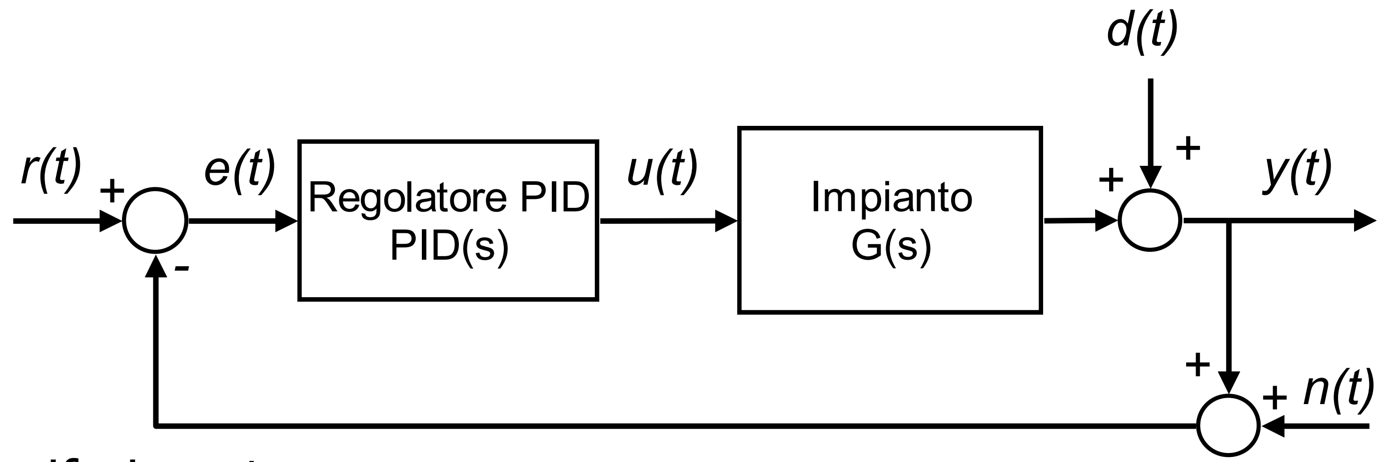
Corso di Laurea	N46
Codice insegnamento	U1142
Email docente	detommas@unina.it
Anno accademico	2017/2018

Parole chiave: Regolatori PID industriali, controllori digitali, discretizzazione di controllori

Sommario della lezione

- Implementazione discreta di un controllore analogico
  - Metodi di discretizzazione
- Realizzazione digitale di un regolatore PID
- Pseudocodice di un regolatore PID

Schema di riferimento



- *r(t)* - riferimento
- *e(t)* - errore di controllo
- *u(t)* - variabile di controllo
- *y(t)* - grandezza da controllare
- *d(t)* – disturbo additivo sull’uscita
- *n(t)* – rumore di misura

Implementazione discreta di un controllore 1/8
Introduzione

- I regolatori PID sono stati originalmente implementati utilizzando tecnologia analogica di varia natura (meccanica, pneumatica, elettronica, ecc.).

- Al giorno d’oggi la quasi totalità dei regolatori viene implementata su dispositivi di controllo digitali.

Implementazione discreta di un controllore 2/8
Controllori tempo discreti

I possibili approcci per la progettazione di controllori tempo discreto sono:

1. sintesi diretta nel tempo discreto;

2. **sintesi nel tempo continuo e successiva discretizzazione del controllore.**

Implementazione discreta di un controllore 3/8
Discretizzazione 1/6

Un regolatore tempo continuo è un sistema dinamico LTI e SISO:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}e(t) \qquad (1)$$

$$u(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}e(t) \qquad (2)$$

- Sia h è il **periodo di campionamento** del controllore tempo discreto che si vuole realizzare.
- Per ottenere un implementazione discreta del regolatore bisogna integrare l'equazione differenziale nell'intervallo $[kh,(k+1)h]$.

Implementazione discreta di un controllore 4/8
Discretizzazione 2/6

Ponendo $\mathbf{x}(k)=\mathbf{x}(kh)$ e integrando la (1) nell'intervallo $[kh,(k+1)h]$ si ottiene:

$$\mathbf{x}(k+1)-\mathbf{x}(k)=\mathbf{A}\int_{kh}^{(k+1)h}\mathbf{x}(t)dt+\mathbf{B}\int_{kh}^{(k+1)h}e(t)dt \qquad (3)$$

Conoscendo i valori delle grandezze in gioco agli istanti kh e $(k+1)h$, gli integrali in (3) possono essere approssimati utilizzando la seguente combinazione convessa:

$$\int_{kh}^{(k+1)h}\mathbf{f}(t)dt\approx\left[(1-\alpha)\mathbf{f}(k)+\alpha\mathbf{f}(k+1)\right]h\,,\quad 0\le\alpha\le 1 \qquad (4)$$

Implementazione discreta di un controllore 5/8
Discretizzazione 3/6

Utilizzando la relazione (4) in (3) si ottiene:

$$\mathbf{x}(k+1)-\mathbf{x}(k)=\mathbf{A}\left[(1-\alpha)\mathbf{x}(k)+\alpha\mathbf{x}(k+1)\right]h+\mathbf{B}\left[(1-\alpha)e(k)+\alpha e(k+1)\right]h \qquad (5)$$

Inoltre andando a valutare la (2) in *t*=*kh* si ha:

$$u(k)=\mathbf{C}\mathbf{x}(k)+\mathbf{D}e(k) \qquad (6)$$

Applicando la *trasformata Z* alla relazione (5) si ottiene:

$$\mathbf{X}(z)=\left[\frac{1}{h}\frac{z-1}{\alpha z+1-\alpha}\mathbf{I}-\mathbf{A}\right]^{-1}\mathbf{B}\,E(z) \qquad (7)$$

Implementazione discreta di un controllore 6/8
Discretizzazione 4/6

Trasformando anche le (6) e utilizzando la (7) si ottiene la relazione, nel dominio della trasformata Z, tra l'uscita del regolatore e l'errore di controllo:

$$U(z)=\left\{\mathbf{C}\left[\frac{1}{h}\frac{z-1}{\alpha z+1-\alpha}\mathbf{I}-\mathbf{A}\right]^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}\right\}E(z) \qquad (8)$$

Implementazione discreta di un controllore 7/8
Discretizzazione 5/6

Ricordando che la f.d.t. di un sistema dinamico è data da:

$$R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \mathbf{C}\left[s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

ne segue che la (8) può essere vista come la f.d.t. del regolatore valutata per *s=(z-1)/[h(αz+1- α)]*.

Quindi, se *R(s)* è la f.d.t. del regolatore tempo continuo la f.d.t. della realizzazione tempo discreta del regolatore può essere ottenuta valutando

$$R(s)\Big|_{s=\frac{z-1}{h(\alpha z+1-\alpha)}} \qquad (9)$$

Implementazione discreta di un controllore 8/8
Discretizzazione 6/6

NOTA: La realizzazione tempo discreta del controllore che si ottiene applicando la (9) è una relazione approssimata, perché ottenuta a partire dalla (4).

Diverse approssimazioni sono possibili in base al valore di $0 \le \alpha \le 1$. Le approssimazioni utilizzate nella pratica sono:

- $\alpha=0 \rightarrow s=(z-1)/h$, Eulero in avanti;
- $\alpha=1 \rightarrow s=(z-1)/(zh)$, Eulero all'indietro;
- $\alpha=1/2 \rightarrow s=2(z-1)/[h(z+1)]$, Tustin.

Realizzazione digitale di un regolatore PID 1/6
Regolatore PID tempo continuo

La f.d.t. di un regolatore PID tempo continuo reale è:

$$R(s) = K_P + \frac{K_P}{T_I s} + \frac{K_P T_D s}{1 + s\frac{T_D}{N}}$$

Azione proporzionle

$$P(s) = K_P E(s)$$

Azione integrale

$$I(s) = \frac{K_P}{T_I s} E(s)$$

Azione derivativa

$$D(s) = \frac{K_P T_D s}{1 + s\frac{T_D}{N}} E(s)$$

Realizzazione digitale di un regolatore PID 2/6
Discretizzazione dell'azione proporzionale

L'azione proporzionale è puramente algebrica, quindi la sua discretizzazione non comporta nessuna approssimazione.

Se *p(k)* è il contributo dell'azione proporzionale all'istante *t*=*kh*, si ha:

$$p(k) = K_P e(k) = K_P \big(r(k) - y(k)\big)$$

Nel caso di regolatore PID ISA si deve tenere conto anche del parametro *b*:

$$p_{ISA}(k) = K_P \big(br(k) - y(k)\big)$$

Realizzazione digitale di un regolatore PID 3/6
Discretizzazione dell'azione integrale

Tipicamente l'azione integrale viene discretizzata utilizzando il metodo di Eulero all'indietro, con la quale si ottiene:

$$i(k) = i(k-1) + \frac{K_P h}{T_I} e(k)$$

Se si utilizzasse Eulero in avanti, l'algoritmo di controllo dovrebbe memorizzare anche il campione dell'errore all'istante *t=(k-1)h*. Applicando Eulero in avanti, infatti, si ottiene:

$$i(k) = i(k-1) + \frac{K_P h}{T_I} e(k-1)$$

Una considerazione analoga vale anche se si discretizza utilizzando il metodo di Tustin.

Realizzazione digitale di un regolatore PID 4/6
Discretizzazione dell'azione derivativa 1/2

Anche per l'azione derivativa si preferisce utilizzare il metodo di Eulero all'indietro, con il quale si ottiene:

$$d(k) = \frac{T_D}{Nh + T_D} d(k-1) + \frac{K_P T_D N}{Nh + T_D} \big(e(k) - e(k-1)\big)$$

Nel caso di regolatore PID ISA, bisogna considerare anche il parametro *c*, e si ottiene:

$$d_{ISA}(k) = \frac{T_D}{Nh + T_D} d(k-1) + \frac{K_P T_D N}{Nh + T_D} \left[c\big(r(k) - r(k-1)\big) + y(k-1) - y(k)\right]$$

<u>Tipicamente *c≠1* per limitare l'azione derivativa, quindi non c'è la necessità di memorizzare *e(k-1)* se l'azione integrale viene discretizzata con Eulero all'indietro.</u>

Realizzazione digitale di un regolatore PID 5/6
Discretizzazione dell'azione derivativa 2/2

Se, per discretizzare l'azione derivativa, si utilizza:

- il metodo di Eulero in avanti, allora per valori sufficientemente piccoli di T_D si avrebbe una legge di controllo instabile;

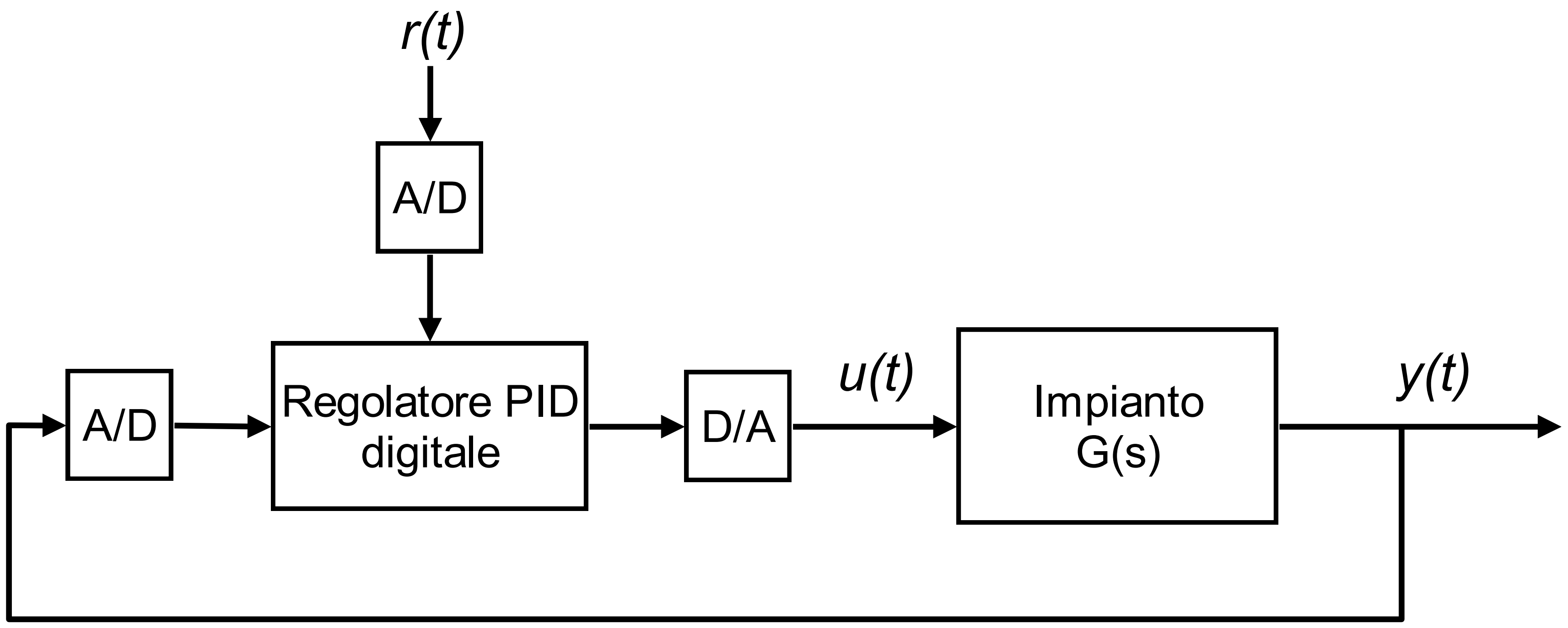
- il metodo di Tustin, allora quando $T_D=0$ il controllore presenta un polo in -1, associato ad un modo alternante, che è preferibile evitare.

Realizzazione digitale di un regolatore PID 6/6
Regolatore PID tempo discreto

La legge di controllo complessiva del regolatore PID nel dominio del tempo discreto si ottiene sommando i contributi presentati nelle slide precedenti, quindi:

$$u(k) = p(k) + i(k) + d(k)$$

Pseudocodice di un regolatore PID 1/7
Schema di controllo con regolatore digitale



Pseudocodice di un regolatore PID 2/7
Considerazioni preliminari

- Il codice che implementa un regolatore PID dovrà essere eseguito in modalità periodica dal dispositivo di controllo, con periodo pari a ***h***.

- Prima di entrare nella modalità di esecuzione periodica è possibile calcolare alcune costanti, con l'obiettivo di ridurre il numero di operazioni da effettuare, per ridurre il ritardo tra l'istante in cui viene campionata l'uscita y(t) e l'istante in cui viene generata l'azione di controllo u(t).

Pseudocodice di un regolatore PID 3/7
Definizione delle costanti

Si supponga di aver definito le seguenti costanti nella fase di inizializzazione del codice:

- GP = K_P*b;
- GI = K_P*h/T_I;
- GD1 = T_D/(N*h+T_D);
- GD2 = K_P*N*GD1;
- GD3 = c*GD2;

E di inizializzare le variabili seguenti:

- d = 0;
- i = 0;
- r_old = 0;
- y_old = 0;

Pseudocodice di un regolatore PID 4/7
Pseudocodice 1/2

```
Attesa attivazione (clock interrupt o chiamata dal s.o.)
Acquisizione A/D di r e y
e = r-y % Calcolo dell'errore
p = GP*r-Kp*y; % Azione proporzionale
d = GD1*d+GD2*(y_old-y)+GD3*(r_old-r) % Azione derivativa
if MANUALE then % Modalità manuale
    u = u+delta_u; % Uscita manuale
    i = u-d-p % Bumpless
else % Modalità automatica
    i = i+GI*e % Azione integrale
    u = p+i+d % Uscita complessiva
endif
```

Pseudocodice di un regolatore PID 5/7
Pseudocodice 2/2

```
if u>u_max then % Anti wind-up - Saturazione superiore
  u = u_max
  i = u-p-d
elseif u<u_min then % Anti wind-up – Saturazione inferiore
  u = u_min
  i = u-p-d
endif
Emissione di u e conversione D/A
r_old = r
y_old = y
```

Pseudocodice di un regolatore PID 6/7 Problemi numerici

Problemi numerici si possono avere a causa:

- della quantizzazione dei parametri e delle variabili di ingresso e uscita;
- degli arrotondamenti;
- di underflow e overflow del processore.

In particolare:

- <u>a causa della rappresentazione quantizzata e del verificarsi di underflow, l’errore a regime in presenza di riferimento costante è diverso da zero anche in presenza dell’azione integrale</u>
- <u>in presenza dell’azione integrale l’errore a regime sarà tanto più grande quanto più piccolo sarà *h* (quindi al crescere della frequenza di campionamento)</u>

Pseudocodice di un regolatore PID 7/7
Scelta della frequenza di campionamento

- La frequenza di campionamento è limitata verso il basso dal teorema di Shannon e dalla banda desiderata a ciclo chiuso. In particolare, se $f_s=1/h$ è la frequenza di campionamento e f_{BW} è la banda del sistema controllato, si ha:

$$f_s>2f_{BW}$$

- Il limite inferiore dato dal teorema di Shannon è solo teorico. Nella pratica si sceglie:

$$f_s>10f_{BW}$$

- Per motivi legati ai filtro anti-aliasing il limite inferiore cresce ancora e tipicamente si ha

$$f_s>200f_{BW}$$

- Esiste anche una limitazione verso l'alto per f_s, sia per problemi legati ai costi realizzativi, sia per rendere contenuto l'errore a regime dovuto alla realizzazione digitale dell'azione integrale.

DIE TI. UNI NA

Esercizi proposti

1. Partendo dalla relazione (5) ricavare la relazione (7)
2. Applicando i metodi di Eulero all'indietro ed Eulero in avanti si ricavino le espressioni dell'azione integrale nel tempo discreto date nella slide 14.
3. Si discretizzi l'azione integrale utilizzando il metodo di Tustin.
4. Applicando il metodo di Eulero all'indietro si ricavino le espressioni dell'azione derivativa nel tempo discreto date nella slide 15.

Indice Letture

Materiali di studio

- G. Magnani, G. Ferretti, P. Rocco, Cap. 7 par.7.6