Introduzione ai sistemi ad eventi discreti

La rapida evoluzione che, a partire dalla fine degli anni '70, ha interessato le discipline che oggi vengono identificate attraverso il nome di *information and communication technologies* (vale a dire l'elettronica, le telecomunicazioni e l'informatica), ha consentito la proliferazione di nuovi sistemi dinamici, caratterizzati da un alto livello tecnologico e dall'elevata complessità. Ognuno di noi, durante la vita di tutti i giorni, è in costante contatto con questo tipo di sistemi: si pensi ai sistemi integrati per le comunicazioni (come le reti per la telefonia fissa, mobile e satellitare), ai sistemi di monitoraggio e diagnostica presenti all'interno delle automobili e degli aerei, oppure ai sistemi software distribuiti.

I progettisti che si occupano di definire il funzionamento di questa classe di sistemi, ricorrono spesso a "regole di evoluzione" per specificare la risposta dinamica del sistema ad un insieme *discreto di eventi asincroni*. Questo è il motivo per cui a questo tipo di sistemi dinamici è stato dato il nome di *sistemi ad eventi discreti*, oppure *DES*.[1] Essi si distinguono dai sistemi dinamici classici, perché l'evoluzione del loro stato non dipende dal tempo (*time driven*), bensì dal susseguirsi di un insieme finito di eventi (*event driven*). Nelle pagine che seguono verranno presentate le caratteristiche principali dei DES e le differenze principali tra questo tipo di sistemi e sistemi time driven.

Sistemi e modelli

I concetti di *sistema* e *modello* sono alla base delle discipline ingegneristiche, ed in particolare nell'ingegneria dell'automazione.
Qualitativamente, *un sistema è un insieme di componenti che interagiscono tra di loro e con l'ambiente esterno, al fine di realizzare una particolare funzionalità.*
Nel campo dell'ingegneria si è interessati ad una valutazione quantitativa del comportamento di un sistema. È necessario, quindi, pervenire ad una *descrizione matematica del comportamento di un sistema*. Questa descrizione prende il nome di *modello*. Partendo dal modello è possibile sviluppare degli strumenti formali di analisi e sintesi, che consentano di pervenire al progetto di sistemi dalle caratteristiche desiderate.
Un modello rappresenta un'astrazione del sistema reale (vedi Figura 1) e, quindi, ne approssima il comportamento. Il grado approssimazione deve essere scelto in funzione della particolare applicazione e della difficoltà con le quali si ottiene il modello stesso.
Nel linguaggio tecnico il termine sistema viene utilizzato per indicare sia il sistema reale che il relativo modello.

Sistemi statici e dinamici

Un sistema si dice *statico* se l'uscita $\mathbf{y}(t)$ all'istante t dipende solo dal valore dell'ingresso $\mathbf{u}(t)$ nello stesso istante.
In un sistema *dinamico*, invece, l'uscita $\mathbf{y}(t)$ all'istante t dipende dai valori dell'ingresso $\mathbf{u}(\tau)$ con $\tau \leq t$. Quindi in un sistema dinamico l'uscita in un determinato istante dipende anche dai valori passati dell'ingresso.

[1]Dall'acronimo inglese per *discrete event systems*.

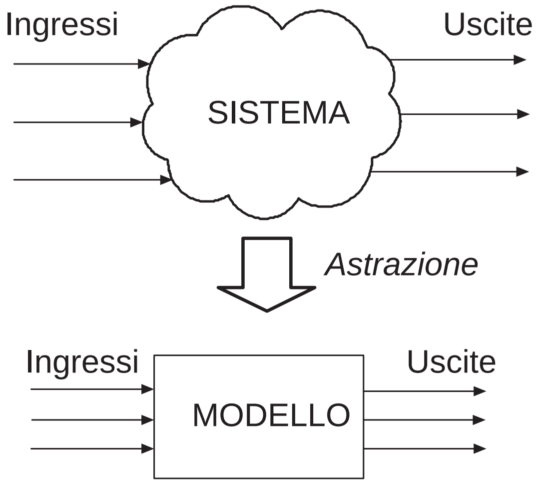


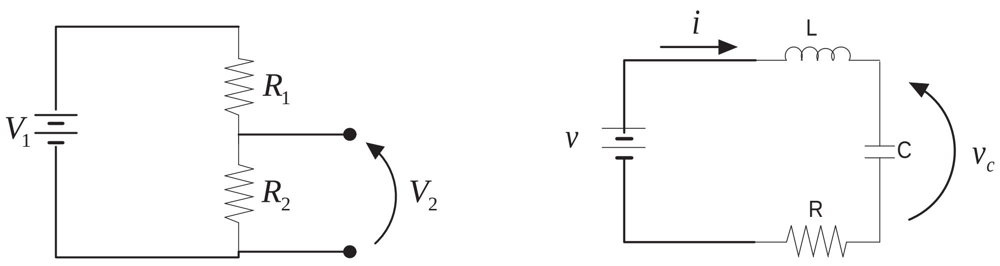
Figura 1: Sistema reale e modello matematico.

Nello studio dei sistemi dinamici si introduce, quindi, il concetto di *stato*. *Lo stato di un sistema dinamico* $\boldsymbol{x}(t_0)$ *all'istante* t_0 *è l'insieme delle informazioni necessarie affinché l'uscita* $\boldsymbol{y}(t)$ *per* $t \geq t_0$ *sia univocamente determinata dall'ingresso* $\boldsymbol{u}(t)$ *con* $t \geq t_0$.

Esempio 1. Il circuito elettrico in Figura 2(a) è un esempio di sistema statico. Se V_1 è l'ingresso e V_2 l'uscita, si ha:

$$V_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_1$$

In Figura 2(b), invece, è riportato un sistema dinamico. Se la tensione v è l'ingresso



(a) Sistema elettrico statico.

(b) Sistema elettrico dinamico.

Figura 2:

del sistema e la corrente i è l'uscita, con semplici passaggi è possibile ottenere il seguente modello:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\tfrac{R}{L}x_1 - \tfrac{1}{L}x_2 + \tfrac{1}{L}u \\ \dot{x}_2 &= \tfrac{1}{C}x_1 \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{1}$$

dove $u = v$, $x_1 = i$ e $x_2 = v_c$.

■

Classificazione dei sistemi

I modelli matematici che rappresentano il comportamento di un sistema dinamico possono avere caratteristiche molto diverse. Nel seguito verranno presentate le caratteristiche principali in base alle quali vengono classificati i sistemi dinamici.

Sistemi tempo varianti e tempo invarianti

Dato un sistema dinamico è lecito domandarsi se la sua uscita è sempre la stessa a parità di ingresso e di stato iniziale. Se la risposta a questa domanda è "si", allora il sistema si dice *tempo invariante*, altrimenti ci si trova di fronte ad un sistema *tempo variante*.
Nel caso di sistemi tempo varianti, l'uscita dipenderà, oltre che dall'ingresso e dallo stato iniziale, anche dal tempo[2].

Esempio 2. Per il sistema dinamico in (1) si supponga che il valore della capacità C dipenda dal tempo come:

$$C(t) = \begin{cases} C_0 & \text{per } 0 \leq t \leq t^* \\ \frac{C_0}{t} + C_1 & \text{per } t > t^* \end{cases} \tag{2}$$

In questo caso l'uscita del sistema dipenderà, oltre che dall'ingresso e dallo stato, anche dall'istante di tempo in cui l'ingresso viene applicato.

■

Sistemi lineari e non lineari

Il concetto di linearità è strettamente legato al *principio di sovrapposizione degli effetti*. Un sistema dinamico si dice *lineare* se:

- gli insiemi degli ingressi $\mathbb{U}$, delle uscite $\mathbb{Y}$ e degli stati $\mathbb{X}$, sono *spazi lineari* (o *vettoriali*)
- esiste una rappresentazione *esplicita*[3]

  $$\mathbf{x}(t) = \phi\big(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}\big)$$

  $$\mathbf{y}(t) = \eta\big(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\big)$$

  tale che

  $$\phi\big(t, t_0, k_1\mathbf{x}_{01}+k_2\mathbf{x}_{02}, k_1\mathbf{u}_1+k_2\mathbf{u}_2\big) = k_1\phi\big(t, t_0, \mathbf{x}_{01}, \mathbf{u}_1\big) + k_2\phi\big(t, t_0, \mathbf{x}_{02}, \mathbf{u}_2\big)$$

  $$\eta\big(t, k_1\mathbf{x}_1(t)+k_2\mathbf{x}_2(t), k_1\mathbf{u}_1(t)+k_2\mathbf{u}_2(t)\big) = k_1\eta\big(t, \mathbf{x}_1(t), \mathbf{u}_1(t)\big) + k_2\eta\big(t, \mathbf{x}_2(t), \mathbf{u}_2(t)\big)$$

Esempio 3. Si consideri il sistema elettrico in Figura 2(a). Sia il valore della tensione V_1 costante e si consideri il valore della resistenza R_2 come ingresso del modello e la tensione V_2 come uscita. Effettuando questa scelta delle variabili di ingresso ed uscita si può verificare facilmente che il modello statico che si ottiene è non lineare.

[2] Si noti che anche un sistema statico può essere tempo variante. A questo proposito si consideri il sistema in Figura 2(a) dell'Esempio 1 in cui il valore della resistenza R_1 dipenda dal tempo.

[3] In quanto segue si ipotizza il sistema tempo continuo.

■

Esempio 4. Si consideri il serbatoio riportato in Figura 3. $\lambda(t)$ e $\mu(t)$ indicano, rispettivamente, la portata del liquido in ingresso ed in uscita al serbatoio. Se si sceglie come variabile di stato il livello del liquido all'interno del serbatoio, e se con K si indica il livello massimo che il liquido può raggiungere, allora per $0 < x(t) < K$ vale la seguente relazione:

$$\dot{x}(t) = \bar{G}\big(\lambda(t) - \mu(t)\big) \tag{3}$$

con $\bar{G}$ opportuna costante dimensionale.

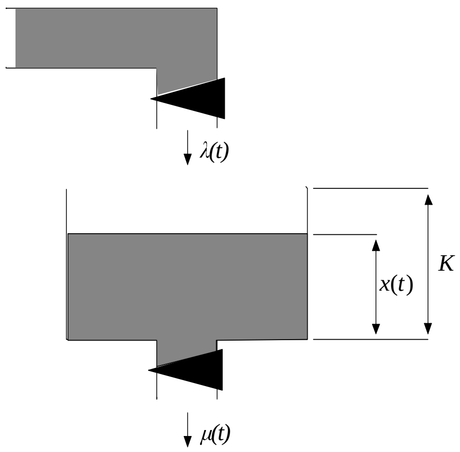


Figura 3: Serbatoio.

Per $x(t) = 0$ ($x(t) = K$), invece, il valore di $\dot{x}(t)$ è pari a 0 se $\lambda(t) \leq \mu(t)$ ($\lambda(t) \geq \mu(t)$). In definitiva l'equazione differenziale non lineare che descrive la dinamica del sistema è:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } [x(t) = 0 \text{ e } \lambda(t) \leq \mu(t)] \text{ oppure se } [x(t) = K \text{ e } \lambda(t) \geq \mu(t)] \\ \bar{G}\big(\lambda(t) - \mu(t)\big) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

■

Sistemi a stato vettore e a stato discreto

Un'ulteriore classificazione dei sistemi dinamici può essere fatta in base alla natura dello spazio di stato del modello.
Nei sistemi a *stato vettore*, lo spazio di stato X è uno spazio vettoriale, tipicamente nel campo reale. Nel caso in cui la dimensione di tale spazio è *finita* si parla di sistemi *a parametri concentrati*, la cui dinamica è descritta da un sistema di equazioni differenziali ordinarie (per i sistemi tempo continui) oppure di equazioni alle differenze (per i sistemi tempo discreti). Se, invece, la dimensione dello spazio di stato non è finita si parla di sistemi *a parametri distribuiti*, i quali vengono tipicamente descritti da un insieme di equazioni differenziali alle derivate parziali.
Nei sistemi a *stato discreto*, lo spazio di stato è un insieme discreto di elementi. Il comportamento dinamico di questo tipo di sistemi è solitamente descritto da semplici regole

espresse in forma verbale (ad esempio "se il segnale proveniente dalla fotocellula FT_1 è alto, accendere il motore M_2 per 20 secondi"). Nonostante la loro apparente semplicità, formalizzare il comportamento dinamico di un sistema a spazio discreto con un modello matematico risulta difficoltoso. I modelli ottenuti sono spesso complessi e non consentono di utilizzare le tecniche di analisi e sintesi, basate sulle equazioni differenziali o alle differenze, assestate nel corso degli anni per i sistemi a stato vettore.

Esempio 5. Si supponga di voler descrivere l'andamento nel tempo del numero di pacchi immagazzinati nel magazzino riportato in Figura 4. È possibile definire lo stato $x(t)$ come

Figura 4: Magazzino.

il numero di pacchi presenti nel magazzino all'istante t, e definire l'uscita del modello $y(t) = x(t)$. Si noti che il numero di pacchi all'interno del magazzino è naturalmente un *insieme discreto*, quindi lo spazio di stato coincide con l'insieme dei numeri interi non negativi $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Volendo essere più precisi, il numero massimo di pacchi contenuti all'interno del magazino è limitato, quindi lo spazio di stato oltre ad essere discreto è anche *finito* (ad esempio sarà $X = \{0, 1, 2, \dots, C\}$).
Le grandezze d'ingresso del modello dovranno tenere conto dei pacchi che entrano ed escono dal magazzino. Una possibile scelta è:

$$u_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{se un pacco arriva all'istante } t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{se un pacco esce all'istante } t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Conoscendo lo stato $x(t)$ all'istante t, è possibile definire il valore suo valore nell'istante "immediatamente successivo" $x(t^+)$ come segue[4]

$$x(t^+) = \begin{cases} x(t) + 1 & \text{se } u_1(t) = 1,\ u_2(t) = 0 \text{ e } x(t) < C \\ x(t) - 1 & \text{se } u_1(t) = 0,\ u_2(t) = 1 \text{ e } x(t) > 0 \\ x(t) & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{4}$$

$$y(t) = x(t) \tag{5}$$

Si noti che, a causa della presenza delle saturazioni, la dinamica del sistema è *non lineare*. Concludendo il modello di magazzino ottenuto è:

[4]Dato che lo spazio di stato del sistema è finito non è possibile definirne la derivata. Di fatto il modello che si ottiene è tempo discreto con temporizzazione *asincrona*.

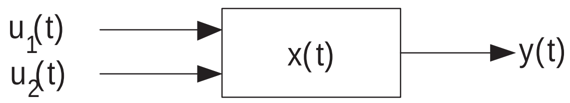


Figura 5: Modello di magazzino.

- tempo discreto
- a spazio di stato discreto e finito
- tempo invariante
- non lineare

■

In Figura 6 sono riportati gli andamenti temporali degli ingressi e dell'uscita.

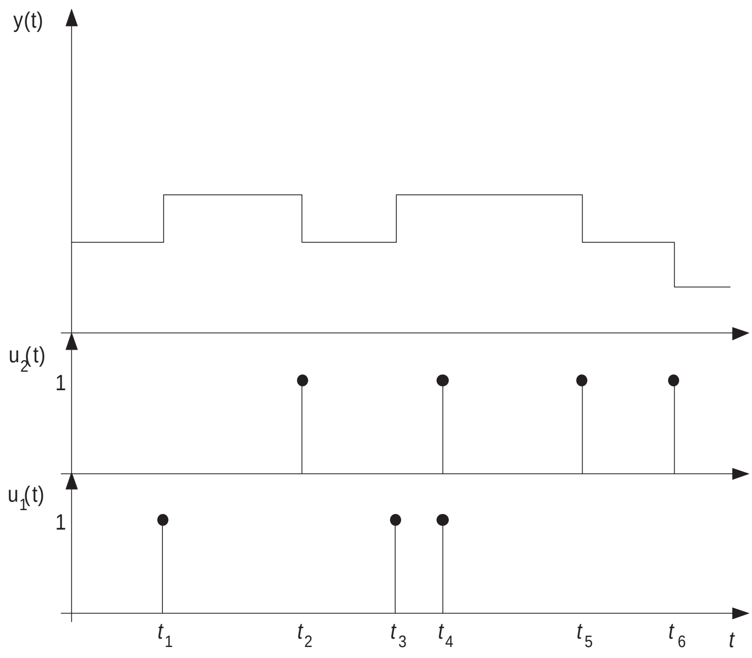


Figura 6: Andamenti temporali.

Sistemi time driven e event driven

Nei modelli a stato continuo lo stato del sistema evolve al variare del tempo. In questo caso la dinamica dello stato è guidata dal tempo e per questo motivo si è soliti indicare questi sistemi come *time driven*.

Nel caso dei sistemi a stato discreto, invece, lo stato cambia in maniera *instantanea* in corrispondenza di particolari istanti di tempo in cui si verificano determinate condizioni (vedi Esempio 5).
È possibile, quindi, associare un *evento* ad ogni transizione di stato del sistema. Ma cosa si intende per evento? Un definizione formale di evento risulterebbe difficile e rischierebbe di essere incompleta. Per questo motivo il concetto di evento verrà introdotto in maniera intuitiva.
Secondo una definizione informale, si può considerare evento:

- una particolare *azione* (la pressione del tasto d'accensione di un PC, la richiesta di dati ad un sistema informativo da parte di un utente, l'invio di un messaggio da un dispositivo di telefonia mobile, lo spegnimento di un motore elettrico)
- l'*occorrenza spontanea* di una condizione (la rottura di un motore, la caduta della tensione di alimentazione ad un dispositivo elettronico, la rottura di un motore di un aereoplano)
- il *verificarsi* di particolari condizioni (il raggiungimento di determinati valori di temperatura e pressione all'interno di un serbatoio, oppure di una determinata quota altimetrica da parte di un elicottero, il numero di pacchi all'interno di un magazzino uguaglia una quantità prestabilita)

In ogni caso un evento va pensato come qualcosa che è capace di far cambiare instantaneamente lo stato del sistema preso in esame.
È possibile, poi, definire il meccanismo con il quale gli eventi vengono generati. Si supponga di avere a disposizione un segnale di temporizzazione (*clock*) che consente di misurare il tempo. Esistono due possibili modalità di generazione degli eventi:

1. ad ogni istante multiplo del periodo del clock viene generato un event e. Se nessuno evento ha luogo in un determinato istante di tempo, si può pensare di aggiungere l'evento nullo ε all'insieme Σ dei possibili eventi che causano le transizioni di stato di un sistema
2. gli eventi vengono generati in istanti di tempo che non sono noti *apriori* e che non coincidono necessariamente con multipli del periodo di clock

Nella prima modalità di funzionamento lo stato del sistema viene valutato ad ogni colpo di clock. Lo stato può cambiare o meno a seconda che venga generato un evento e oppure l'evento nullo ε. Si parla, quindi, di transizioni di stato *sicronizzate* con il segnale di clock.
Nel secondo caso, invece, lo stato del sistema cambia in istanti di tempo non noti *apriori*, ogni qual volta viene generato un evento e.
Nella prima modalità di funzionamento l'evoluzione dello stato del sistema è ancora time driven. Nella seconda modalità invece, le transizioni di stato sono guidate dal succedersi degli eventi. In questo caso si parla di sistemi *event driven*. Non potendo conoscere *apriori*, la temporizzazione con la quale gli eventi si succedono, essi vanno considerati *asincroni*.

Esempio 6. Si prenda in cosiderazione ancora il magazzino dell'Esempio 5. Per questo sistema è possibile definire il seguente insieme di eventi d'ingresso Σ_i:

$$\Sigma_i = \{PI, PU\}$$

dove PI rappresenta l'ingresso di un pacco all'interno del magazzino e PU l'uscita. È possibile, quindi, passare dal modello time driven dell'Esempio 5, ad un modello event driven specificando le regole di evoluzione dello stato come segue:

$$x_{new} = \begin{cases} x_{old} + 1 & \text{se } PI \text{ e } x_{old} < C \\ x_{old} - 1 & \text{se } PU \text{ e } x_{old} > 0 \\ x_{old} & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad (6)$$

■

In conclusione sono state individuate due classi di sistemi dinamici:

- sistemi a stato continuo e time driven (lineari o non lineari, tempo varianti o meno, a tempo continuo oppure a tempo discreto)
- sistemi a stato discreto ed event driven

Per la prima classe di sistemi, in particolare per i sistemi lineari e tempo inviarianti, esistono tecniche assestate di analisi e sintesi che fanno uso di modelli basati su equazioni differenziali o alle differenze. Questi stessi strumenti risultano inadeguati per affrontare

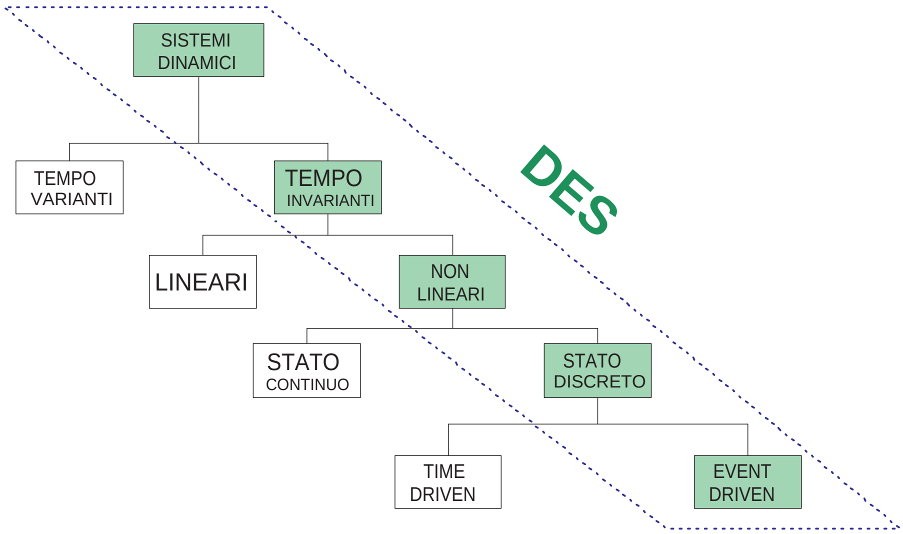


Figura 7: Classificazione dei sistemi.

lo studio dei sistemi appartenenti alla seconda classe, i quali prendono il nome di *sistemi ad eventi discreti*. Per superare questa difficoltà, a partire dagli anni '70, sono state introdotte delle tecniche di analisi e sintesi basate sulla *teoria dei linguaggi* e sull'utilizzo degli *automi* e delle *reti di Petri*.