

# Tecnologie dei Sistemi di Automazione e Controllo

Prof. Gianmaria De Tommasi

Lezione 7

## Regolatori PID industriali: implementazione digitale

**Corso di Laurea**  
**Codice insegnamento**  
**Email docente**  
**Anno accademico**

N39  
U0998  
detommas@unina.it  
2017/2018

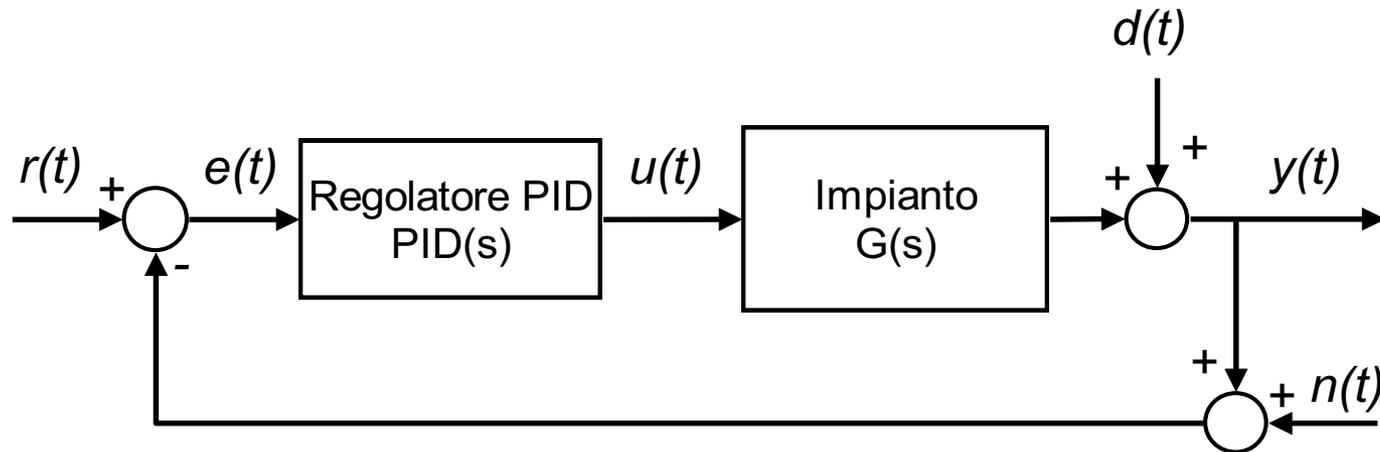
**Lezione numero: 7**

**Parole chiave:** Regolatori PID industriali, controllori digitali, discretizzazione di controllori

## Sommario della lezione

- **Implementazione discreta di un controllore analogico**
  - **Metodi di discretizzazione**
- **Realizzazione digitale di un regolatore PID**
- **Pseudocodice di un regolatore PID**

## Schema di riferimento



- $r(t)$  - riferimento
- $e(t)$  - errore di controllo
- $u(t)$  - variabile di controllo
- $y(t)$  - grandezza da controllare
- $d(t)$  - disturbo additivo sull'uscita
- $n(t)$  - rumore di misura

## Implementazione discreta di un controllore 1/8 Introduzione

- I regolatori PID sono stati originalmente implementati utilizzando tecnologia analogica di varia natura (meccanica, pneumatica, elettronica, ecc.).
- Al giorno d'oggi la quasi totalità dei regolatori viene implementata su dispositivi di controllo digitali.

## Implementazione discreta di un controllore 2/8

### Controllori tempo discreti

I possibili approcci per la progettazione di controllori tempo discreto sono:

1. sintesi diretta nel tempo discreto;
- 2. sintesi nel tempo continuo e successiva discretizzazione del controllore.**

## Implementazione discreta di un controllore 3/8 Discretizzazione 1/6

Un regolatore tempo continuo è un sistema dinamico LTI e SISO:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}e(t) \quad (1)$$

$$u(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}e(t) \quad (2)$$

- Sia  $h$  è il **periodo di campionamento** del controllore tempo discreto che si vuole realizzare.
- Per ottenere un implementazione discreta del regolatore bisogna integrare l'equazione differenziale nell'intervallo  $[kh, (k+1)h]$ .

## Implementazione discreta di un controllore 4/8 Discretizzazione 2/6

Ponendo  $\mathbf{x}(k)=\mathbf{x}(kh)$  e integrando la [\(1\)](#) nell'intervallo  $[kh,(k+1)h]$  si ottiene:

$$\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k) = \mathbf{A} \int_{kh}^{(k+1)h} \mathbf{x}(t) dt + \mathbf{B} \int_{kh}^{(k+1)h} e(t) dt \quad (3)$$

Conoscendo i valori delle grandezze in gioco agli istanti  $kh$  e  $(k+1)h$ , gli integrali in [\(3\)](#) possono essere approssimati utilizzando la seguente [combinazione convessa](#):

$$\int_{kh}^{(k+1)h} \mathbf{f}(t) dt \approx [(1-\alpha)\mathbf{f}(k) + \alpha\mathbf{f}(k+1)]h, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (4)$$

## Implementazione discreta di un controllore 5/8 Discretizzazione 3/6

Utilizzando la relazione [\(4\)](#) in [\(3\)](#) si ottiene:

$$\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k) = \mathbf{A}[(1-\alpha)\mathbf{x}(k) + \alpha\mathbf{x}(k+1)]h + \mathbf{B}[(1-\alpha)e(k) + \alpha e(k+1)]h \quad (5)$$

Inoltre andando a valutare la [\(2\)](#) in  $t=kh$  si ha:

$$u(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}e(k) \quad (6)$$

Applicando la [trasformata Z](#) alla relazione [\(5\)](#) si ottiene:

$$\mathbf{X}(z) = \left[ \frac{1}{h} \frac{z-1}{\alpha z + 1 - \alpha} \mathbf{I} - \mathbf{A} \right]^{-1} \mathbf{B} E(z) \quad (7)$$

## Implementazione discreta di un controllore 6/8 Discretizzazione 4/6

Trasformando anche le [\(6\)](#) e utilizzando la [\(7\)](#) si ottiene la relazione, nel dominio della trasformata Z, tra l'uscita del regolatore e l'errore di controllo:

$$U(z) = \left\{ \mathbf{C} \left[ \begin{array}{c} 1 & z-1 \\ h & \alpha z + 1 - \alpha \end{array} \right]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \right\} E(z) \quad (8)$$

## Implementazione discreta di un controllore 7/8

### Discretizzazione 5/6

Ricordando che la f.d.t. di un sistema dinamico è data da:

$$R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

ne segue che la (8) può essere vista come la f.d.t. del regolatore valutata per  $s = (z-1)/[h(\alpha z + 1 - \alpha)]$ .

Quindi, se  $R(s)$  è la f.d.t. del regolatore tempo continuo la f.d.t. della realizzazione tempo discreta del regolatore può essere ottenuta valutando

$$R(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{h(\alpha z + 1 - \alpha)}} \quad (9)$$

## Implementazione discreta di un controllore 8/8 Discretizzazione 6/6

**NOTA:** La realizzazione tempo discreta del controllore che si ottiene applicando la (9) è una relazione approssimata, perché ottenuta a partire dalla (4).

Diverse approssimazioni sono possibili in base al valore di  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Le approssimazioni utilizzate nella pratica sono:

- $\alpha=0 \rightarrow s=(z-1)/h$ , Eulero in avanti;
- $\alpha=1 \rightarrow s=(z-1)/(zh)$ , Eulero all'indietro;
- $\alpha=1/2 \rightarrow s=2(z-1)/[h(z+1)]$ , Tustin.

# Realizzazione digitale di un regolatore PID 1/6

## Regolatore PID tempo continuo

La f.d.t. di un regolatore PID tempo continuo reale è:

$$R(s) = K_p + \frac{K_p}{T_I s} + \frac{K_p T_D s}{1 + s \frac{T_D}{N}}$$

### Azione proporzionale

$$P(s) = K_p E(s)$$

### Azione integrale

$$I(s) = \frac{K_p}{T_I s} E(s)$$

### Azione derivativa

$$D(s) = \frac{K_p T_D s}{1 + s \frac{T_D}{N}} E(s)$$

## Realizzazione digitale di un regolatore PID 2/6

### Discretizzazione dell'azione proporzionale

L'azione proporzionale è puramente algebrica, quindi la sua discretizzazione non comporta nessuna approssimazione.

Se  $p(k)$  è il contributo dell'azione proporzionale all'istante  $t=kh$ , si ha:

$$p(k) = K_p e(k) = K_p (r(k) - y(k))$$

Nel caso di **regolatore PID ISA** si deve tenere conto anche del **parametro  $b$** :

$$p_{ISA}(k) = K_p (br(k) - y(k))$$

## Realizzazione digitale di un regolatore PID 3/6 Discretizzazione dell'azione integrale

Tipicamente l'azione integrale viene discretizzata utilizzando il metodo di **Eulero all'indietro**, con la quale si ottiene:

$$i(k) = i(k-1) + \frac{K_P h}{T_I} e(k)$$

Se si utilizzasse **Eulero in avanti**, l'algoritmo di controllo dovrebbe memorizzare anche il campione dell'errore all'istante  $t=(k-1)h$ . Applicando Eulero in avanti, infatti, si ottiene:

$$i(k) = i(k-1) + \frac{K_P h}{T_I} e(k-1)$$

Una considerazione analoga vale anche se si discretizza utilizzando il metodo di **Tustin**.

## Realizzazione digitale di un regolatore PID 4/6 Discretizzazione dell'azione derivativa 1/2

Anche per l'azione derivativa si preferisce utilizzare il metodo di **Eulero all'indietro**, con il quale si ottiene:

$$d(k) = \frac{T_D}{Nh + T_D} d(k-1) + \frac{K_P T_D N}{Nh + T_D} (e(k) - e(k-1))$$

Nel caso di **regolatore PID ISA**, bisogna considerare anche il **parametro c**, e si ottiene:

$$d_{ISA}(k) = \frac{T_D}{Nh + T_D} d(k-1) + \frac{K_P T_D N}{Nh + T_D} [c(r(k) - r(k-1)) + y(k-1) - y(k)]$$

Tipicamente  $c \neq 1$  per limitare l'azione derivativa, quindi non c'è la necessità di memorizzare  $e(k-1)$  se l'azione integrale viene discretizzata con Eulero all'indietro.

## Realizzazione digitale di un regolatore PID 5/6 Discretizzazione dell'azione derivativa 2/2

Se, per discretizzare l'azione derivativa, si utilizza:

- il metodo di Eulero in avanti, allora per valori sufficientemente piccoli di  $T_D$  si avrebbe una legge di controllo instabile;
- il metodo di Tustin, allora quando  $T_D=0$  il controllore presenta un polo in  $-1$ , associato ad un modo alternante, che è preferibile evitare.

## Realizzazione digitale di un regolatore PID 6/6

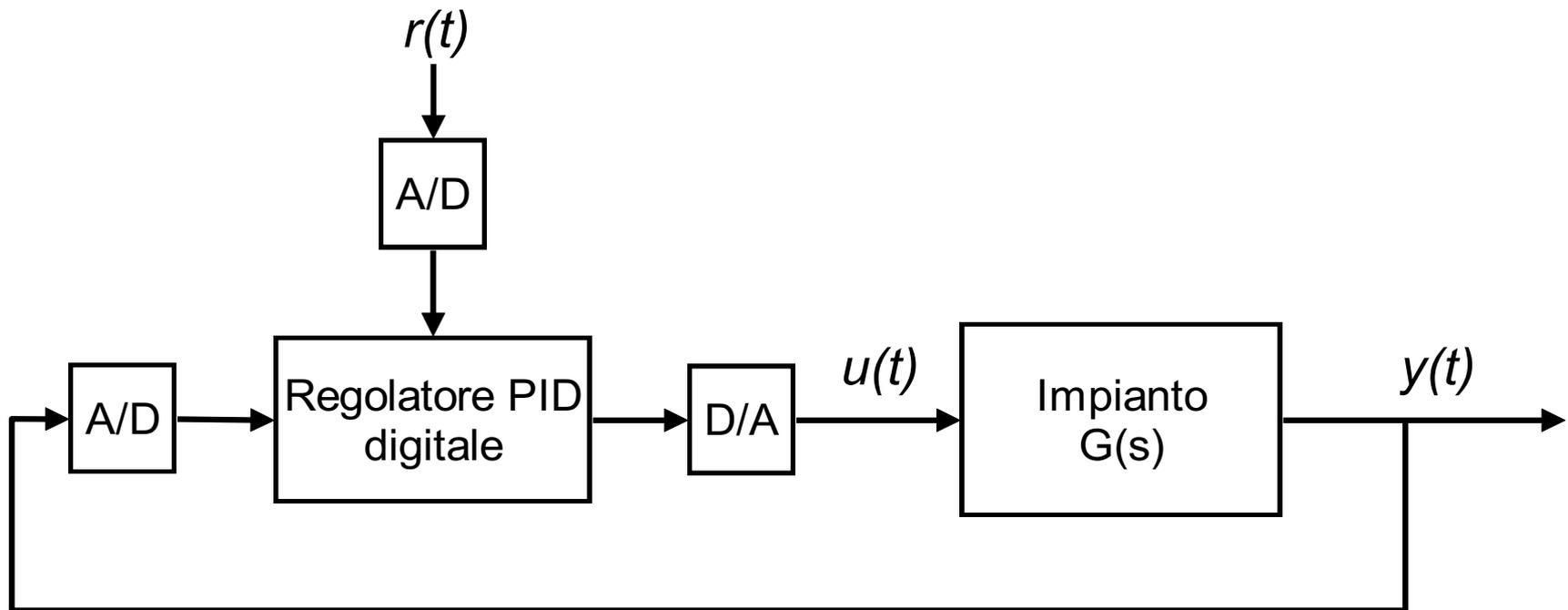
### Regolatore PID tempo discreto

La legge di controllo complessiva del regolatore PID nel dominio del tempo discreto si ottiene sommando i contributi presentati nelle slide precedenti, quindi:

$$u(k) = p(k) + i(k) + d(k)$$

# Pseudocodice di un regolatore PID 1/7

## Schema di controllo con regolatore digitale



## Pseudocodice di un regolatore PID 2/7

### Considerazioni preliminari

- Il codice che implementa un regolatore PID dovrà essere eseguito in modalità periodica dal dispositivo di controllo, con periodo pari a  $h$ .
- Prima di entrare nella modalità di esecuzione periodica è possibile calcolare alcune costanti, con l'obiettivo di ridurre il numero di operazioni da effettuare, per ridurre il ritardo tra l'istante in cui viene campionata l'uscita  $y(t)$  e l'istante in cui viene generata l'azione di controllo  $u(t)$ .

# Pseudocodice di un regolatore PID 3/7

## Definizione delle costanti

Si supponga di aver definito le seguenti costanti nella fase di inizializzazione del codice:

- $GP = K_P * b;$
- $GI = K_P * h / T_I;$
- $GD1 = T_D / (N * h + T_D);$
- $GD2 = K_P * N * GD1;$
- $GD3 = c * GD2;$

E di inizializzare le variabili seguenti:

- $d = 0;$
- $i = 0;$
- $r\_old = 0;$
- $y\_old = 0;$

# Pseudocodice di un regolatore PID 4/7

## Pseudocodice 1/2

```
1. Attesa attivazione (clock interrupt o chiamata dal s.o.)
2. Acquisizione A/D di r e y
3. e = r-y % Calcolo dell'errore
4. p = GP*r-Kp*y; % Azione proporzionale
5. d = GD1*d+GD2*(y_old-y)+GD3*(r_old-r) % Azione derivativa
6. if MANUALE then % Modalità manuale
    7. u = u+delta_u; % Uscita manuale
    8. i = u-d-p % Bumpless
9. else % Modalità automatica
    10.i = i+GI*e % Azione integrale
    11.u = p+i+d % Uscita complessiva
12.endif
```

# Pseudocodice di un regolatore PID 5/7

## Pseudocodice 2/2

```
13. if u>u_max then % Anti wind-up - Saturazione superiore
    14. u = u_max
    15. i = u-p-d
16. elseif u<u_min then % Anti wind-up - Saturazione inferiore
    17. u = u_min
    18. i = u-p-d
19. endif
20. Emissione di u e conversione D/A
21. r_old = r
22. y_old = y
```

# Pseudocodice di un regolatore PID 6/7

## Problemi numerici

Problemi numerici si possono avere a causa:

- della quantizzazione dei parametri e delle variabili di ingresso e uscita;
- degli arrotondamenti;
- di underflow e overflow del processore.

In particolare:

- a causa della rappresentazione quantizzata e del verificarsi di underflow, l'errore a regime in presenza di riferimento costante è diverso da zero anche in presenza dell'azione integrale
- in presenza dell'azione integrale l'errore a regime sarà tanto più grande quanto più piccolo sarà  $h$  (quindi al crescere della frequenza di campionamento)

# Pseudocodice di un regolatore PID 7/7

## Scelta della frequenza di campionamento

- La frequenza di campionamento è limitata verso il basso dal teorema di Shannon e dalla banda desiderata a ciclo chiuso. In particolare, se  $f_s = 1/h$  è la frequenza di campionamento e  $f_{BW}$  è la banda del sistema controllato, si ha:

$$f_s > 2f_{BW}$$

- Il limite inferiore dato dal teorema di Shannon è solo teorico. Nella pratica si sceglie:

$$f_s > 10f_{BW}$$

- Per motivi legati ai filtro anti-aliasing il limite inferiore cresce ancora e tipicamente si ha

$$f_s > 200f_{BW}$$

- Esiste anche una limitazione verso l'alto per  $f_s$ , sia per problemi legati ai costi realizzativi, sia per rendere contenuto [l'errore a regime dovuto alla realizzazione digitale dell'azione integrale.](#)

## Esercizi proposti

1. Partendo dalla relazione (5) ricavare la relazione (7)
2. Applicando i metodi di **Eulero all'indietro** ed **Eulero in avanti** si ricavano le espressioni dell'azione integrale nel tempo discreto date nella slide 14.
3. Si discretizzi l'azione integrale utilizzando il metodo di **Tustin**.
4. Applicando il metodo di Eulero all'indietro si ricavano le espressioni dell'azione derivativa nel tempo discreto date nella slide 15.

# Indice Letture

## Materiali di studio

- G. Magnani, G. Ferretti, P. Rocco,  
Cap. 7 par.7.6