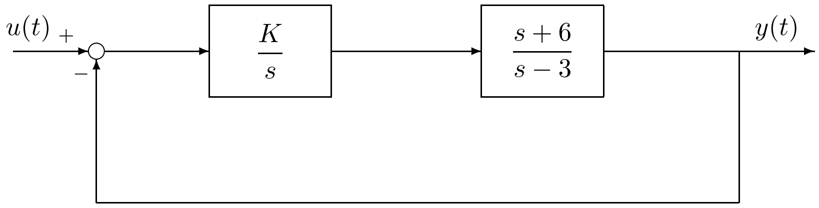
Esercizio 1.
Con riferimento al sistema di figura, calcolare:



a) la funzione di trasferimento a ciclo chiuso tra $u(t)$ e $y(t)$;

b) i valori di K per i quali il sistema a ciclo chiuso risulta asintoticamente stabile;

c) il valore di K per il quale il sistema a ciclo chiuso presenta poli con coefficiente di smorzamento $\zeta = \frac{1}{4}$. Per tale valore di K:

i) si traccino i diagrammi di Bode relativi al sistema a ciclo chiuso;

ii) si calcoli la risposta $y(t)$ in presenza di un ingresso a gradino $u(t) = 1(t)$;

iii) si calcoli la risposta $y(t)$ in presenza di un ingresso $u(t) = \sin(6t) + \sin(60t)$.

Svolgimento.

a) Avendo posto:

$$G_1(s) = \frac{K}{s}\,, \qquad G_2(s) = \frac{s+6}{s-3}\,,$$

la funzione di trasferimento del sistema a ciclo chiuso tra $u(t)$ e $y(t)$ risulta

$$G(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{K(s+6)}{s^2 + (K-3)s + 6K}\,.$$

b) Affinchè $G(s)$ risulti asintoticamente stabile, i suoi poli dovranno avere parte reale negativa; applicando il criterio di Cartesio, ciò accade se e solo se $K > 3$;

c) Fattorizzando opportunamente $G(s)$, la pulsazione naturale ω_n ed il coefficiente di smorzamento ζ risultano pari a:

$$\omega_n = \sqrt{6K}\,, \qquad \zeta = \frac{K-3}{2\sqrt{6K}}\,.$$

Inponendo che sia $\zeta = \frac{1}{4}$, risulta $K = 6$. Quindi la funzione di trasferimento diventa

$$G(s) = \frac{6(s+6)}{s^2 + 3s + 36}\,. \tag{1}$$

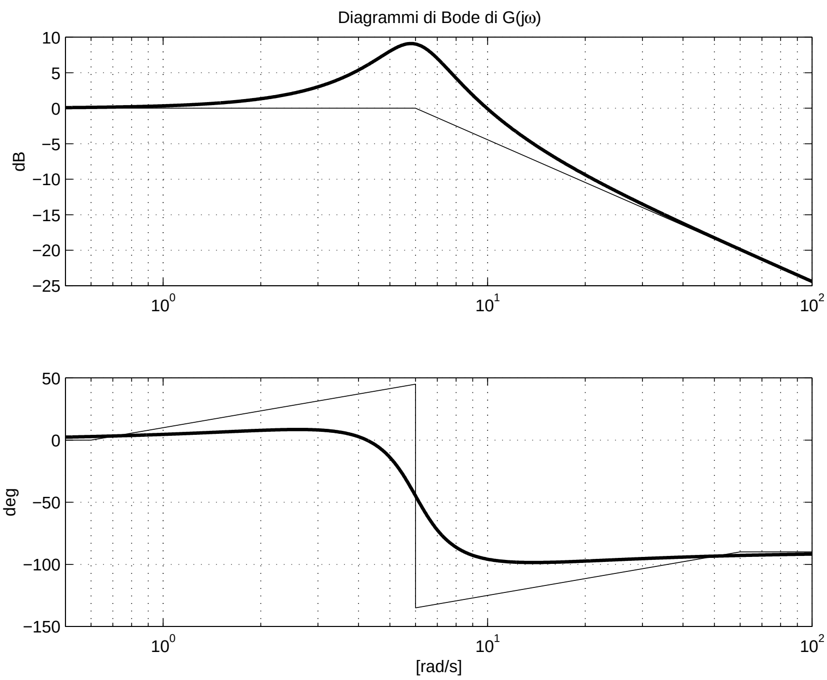
i) Prima di tutto fattorizziamo opportunamente la funzione di trasferimento (1)

$$G(s) = \frac{1 + s/6}{1 + s/12 + s^2/36}\,.$$

In questo modo si nota subito che:

$$K = 1 \longrightarrow |K| = 0 \text{ dB}$$
$$\tau' = 1/6 \longrightarrow \text{punto di rottura relativo allo zero reale negativo: } 6$$
$$\omega_n = 6\,,\ \zeta = 1/4 \longrightarrow \text{punto di rottura relativo ai poli complessi: } 6\,;\ \zeta \text{ “piccolo”}\,.$$

Il diagramma dei moduli parte quindi con pendenza piatta, poichè non sono presenti termini di tipo monomio, dal valore di 0 dB. Nel punto $\omega = 6$ il diagramma subisce una variazione di pendenza di -20 dB/dec. Poichè ζ è “piccolo” è opportuno apportare una correzione al diagramma asintotico, che per semplicità effettuiamo in corrispondenza della pulsazione $\omega = 6$. Abbiamo una correzione di $+3$ dB dovuta allo zero e di $1/(2\zeta) = 2$ cioè di $+6$ dB per via della coppia di poli complessi. In definitiva il diagramma dei moduli presenta un picco pari a circa 9 dB in corrispondenza della pulsazione $\omega = 6$.
Il diagramma delle fasi parte da fase pari a 0^o. Nel punto $\omega = 0.6$ il diagramma subisce una variazione di pendenza di 45 deg/dec. Poi, poichè ζ è “piccolo”, il diagramma asintotico presenta un salto di -180^o in corrispondenza della pulsazione $\omega = 6$. Infine in $\omega = 60$ il diagramma torna ad avere pendenza nulla ed assume il valore finale di -90^o.
In figura sono riportati i diagrammi asintotici e quelli esatti.



ii) Utilizzando la trasformata di Laplace si ha:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{6(s+6)}{s^2+3s+36}\frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+3s+36} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{\left(s+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{15}}{2}\right)^2}\,.$$

I coefficienti A, B e C risultano pari a

$$A = 1\,, \qquad B = -1\,, \qquad C = 3\,.$$

Si ha allora

$$Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{s+\frac{3}{2}}{\left(s+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{15}}{2}\right)^2}+\frac{3}{\sqrt{15}}\frac{\frac{3\sqrt{15}}{2}}{\left(s+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{15}}{2}\right)^2}$$

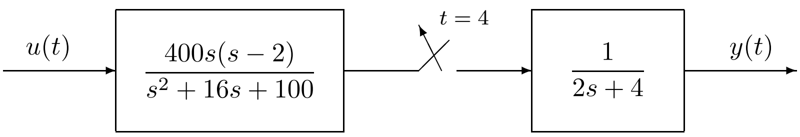
Antitrasformando si ottiene quindi

$$y(t)=\left(1-e^{-\frac{3}{2}t}\cos\left(\frac{3\sqrt{15}}{2}t\right)+\frac{3}{\sqrt{15}}e^{-\frac{3}{2}t}\sin\left(\frac{3\sqrt{15}}{2}t\right)\right)\cdot 1(t)$$

iii) Poichè il segnale $u(t)$ è applicato da $-\infty$ e il sistema è asintoticamente stabile, la risposta $y(t)$ è pari alla risposta a regime. Guardardo i diagrammi di Bode dei moduli di $G(s)$, si nota che $|G(j6| \approx |G(j60)|+29$ dB. L'armonica di pulsazione $\omega = 60$ è quindi notevolmente attenuata (di circa 30 volte) rispetto a quella di pulsazione $\omega = 6$. La risposta $y(t)$ è allora, con buona approssimazione, pari a

$$y(t)\approx |G(j6)|\sin\left(6t+\angle G(j6)\right)=2\sqrt{2}\sin\left(6t-\frac{\pi}{4}\right)\,.$$

Esercizio 2.
Con riferimento al sistema di figura:



a) si traccino i diagrammi di Bode ad interruttore chiuso;

b) si calcoli la risposta $y(t)$ in presenza di un ingresso $u(t) = \cos(t)$;

c) si tracci la risposta qualitativa in presenza di un ingresso $u(t) = t \cdot 1(t)$.

Svolgimento.

a) Avendo posto:

$$G_1(s)=\frac{400s(s-2)}{s^2+16s+100}\,,\qquad G_2(s)=\frac{1}{2s+4}\,,$$

la funzione di trasferimento ad interruttore chiuso tra $u(t)$ e $y(t)$ risulta pari a

$$G(s)=G_1(s)G_2(s)=\frac{400s(s-2)}{(2s+4)(s^2+16s+100)}\,. \tag{2}$$

Ora fattorizziamo opportunamente la funzione di trasferimento (2)

$$G(s)=-2\frac{s(1-s/2)}{(1+s/2)(1+4s/25+s^2/100)}\,.$$

In questo modo si nota che:

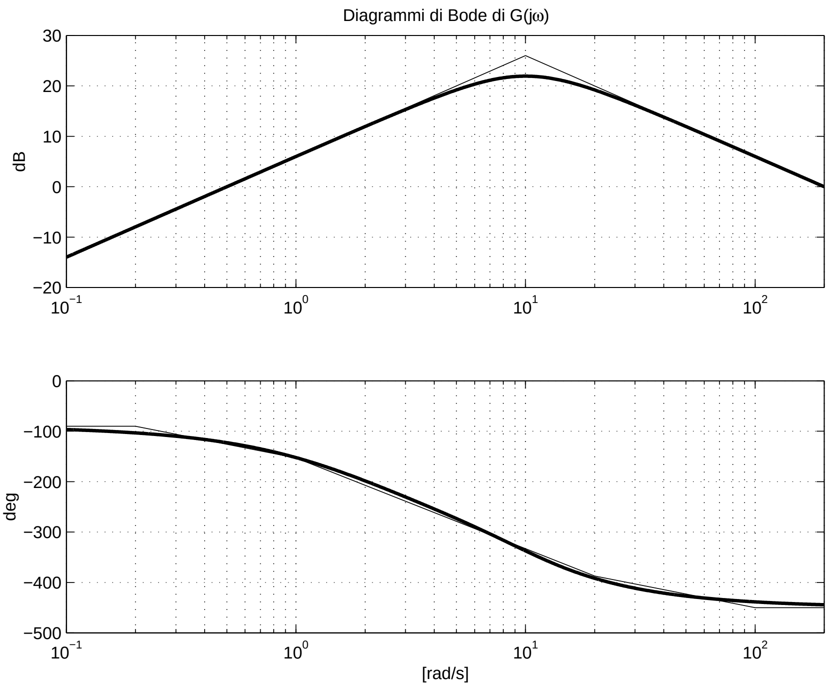
$$
\begin{aligned}
K = -2 &\longrightarrow |K| \approx 6 \text{ dB} \\
\tau' = -1/2 &\longrightarrow \text{punto di rottura relativo allo zero reale } \textit{positivo}\text{: } 2 \\
\tau = 1/2 &\longrightarrow \text{punto di rottura relativo al polo reale negativo: } 2 \\
\omega_n = 10\,,\ \zeta = 0.8 &\longrightarrow \text{punto di rottura relativo ai poli complessi: } 10\,;\ \zeta \text{ “grande”}\,.
\end{aligned}
$$

Inoltre c'è un termine monomio s.

Per via della presenza del termine monomio, il diagramma dei moduli parte con pendenza di $+20$ dB/dec e passa per il punto $(1, 6)$. Nel punto $\omega = 10$ il diagramma subisce una variazione di pendenza di -40 dB/dec. La pendenza finale del diagramma è pari quindi a -20 dB/dec. Poichè ζ è "grande", il diagramma asintotico riproduce con buona approssimazione il diagramma esatto. Si noti come lo zero e il polo con la stessa pulsazione di rottura bilanciano i loro contributi nel diagramma dei moduli.

Il diagramma delle fasi parte da fase pari a -90^o. Nel punto $\omega = 0.2$ il diagramma subisce una variazione di pendenza di -90 deg/dec. Poi in corrispondenza della pulsazione $\omega = 1$, il diagramma subisce una ulteriore variazione di pendenza di -90 deg/dec; la pendenza si porta quindi a -180 deg/dec. La pendenza diventa di nuovo di -90 deg/dec in $\omega = 20$ ed infine in $\omega = 100$ il diagramma torna ad avere pendenza nulla ed assume il valore finale di -450^o.

In figura sono riportati i diagrammi asintotici e quelli esatti.



b) Poichè il segnale $u(t)$ è applicato da $-\infty$ e il sistema è asintoticamente stabile, la risposta $y(t)$ fino all'istante $t = 4$ è pari alla risposta a regime

$$y(t) = |G(j)| \cos\left(t + \angle G(j)\right) = 2\cos\left(t - 2.66\right)\ .$$

Dall'istante $t = 4$ in poi il sistema con funzione di trasferimento $G_2(s)$ va in evoluzione libera a partire dalle condizioni iniziali a cui si è portato per effetto dell'ingresso $u(t)$. Determiniamo prima di tutto una rappresentazione nello spazio di stato di tale sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2x + u \\ y &= \tfrac{1}{2}x \end{aligned}$$

Adottando questa rappresentazione di stato, si ha fino all'istante $t = 4$

$$x(t) = 2y(t) = 4\cos(t - 2.66)\,.$$

All'istante $t = 4$ quindi

$$x(4) = 4\cos(4 - 2.66) = 0.91\,.$$

L'uscita $y(t)$ dopo l'apertura dell'interruttore sarà allora pari a

$$y(t) = \tfrac{1}{2}e^{-2(t-4)}x(4) = 0.45e^{-2(t-4)}\,.$$

Complessivamente

$$y(t) = 2\cos(t - 2.66)\cdot 1(-t + 4) + 0.45e^{-2(t-4)}\cdot 1(t - 4)\,.$$

c) Per la presenza dello zero nell'origine, la risposta del sistema al segnale $u(t) = t \cdot 1(t)$ coincide, fino all'istante $t = 4$, con la risposta indiciale del sistema con funzione di trasferimento

$$\bar{G}(s) = \frac{400(s-2)}{(2s+4)(s^2+16s+100)}\,.$$

Questa risposta indiciale presenta:

1) valore di regime $\bar{y} = \bar{G}(0) = -2$;
2) valore iniziale $y(0)$ e pendenza iniziale $\dot{y}(0)$ nulle, perché l'eccesso poli-zeri di $\bar{G}(s)$ è pari a due;
3) concavità iniziale rivolta verso l'alto, poiché $\ddot{y}(0) = \lim_{s\to 0} s^2\bar{G}(s) = 200$;
4) un andamento del transitorio nel quale le oscillazioni sono trascurabili, poiché ζ è "grande";
5) un tempo di assestamento legato al polo reale, il quale è dominante. Infatti:

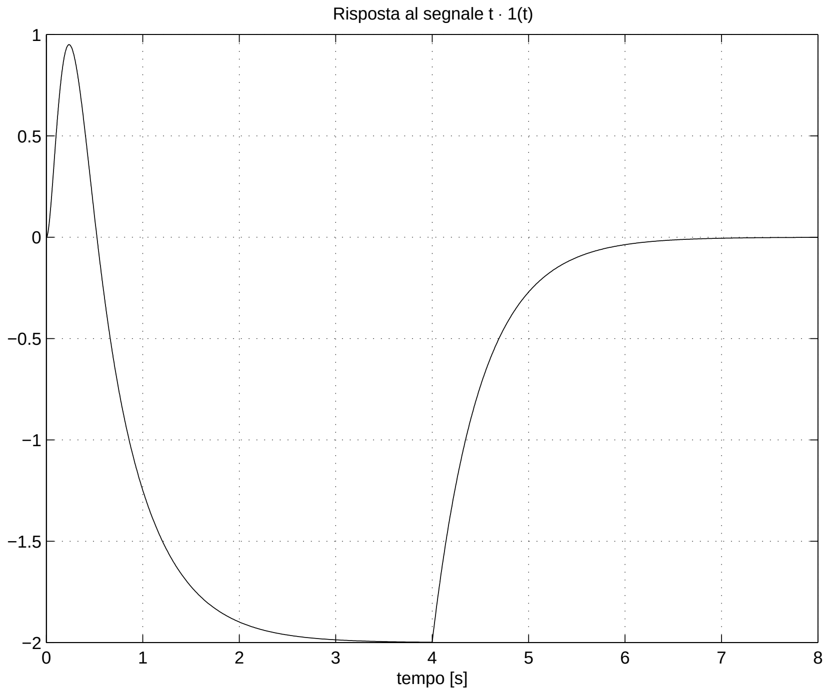
$$\tau = \frac{1}{2} > \frac{1}{\zeta\omega_n} = \frac{1}{8}\,.$$

Quindi $t_{a_{1\%}} \approx 2.5$ s. Il transitorio di questa risposta si esaurisce pertanto prima che l'interruttore si apra.

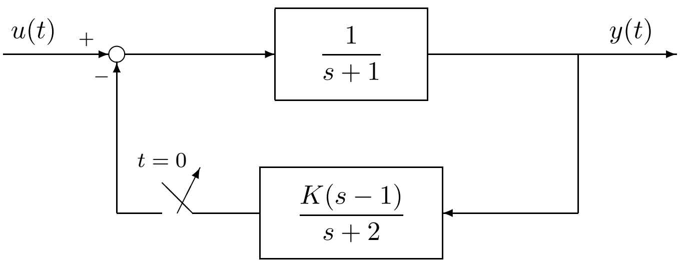
Dopo l'apertura dell'interruttore, il sistema con funzione di trasferimento $G_2(s)$ va in evoluzione libera a partire dalle condizioni a cui si è portato per effetto dell'ingresso applicato fino all'istante $t = 4$. Poichè tale sistema è strettamente proprio, l'uscita non presenta discontinuità[1] e quindi si porta dal valore -2 a zero con legge esponenziale e^{-2t}, impiegando circa 2.5 s.

La risposta è mostrata in figura.

[1] Infatti, poichè il sistema è strettamente proprio, l'uscita in un dato istante di tempo non dipende dal valore dell'ingresso in quel dato istante, ma soltanto dal valore dello stato in quell'istante. Quindi l'uscita si mantiene continua anche se l'ingresso è discontinuo.



Esercizio 3.
Dato il sistema in figura, determinare:



a) una rappresentazione i-s-u ad interruttore chiuso;

b) i valori di K per cui il sistema ad interruttore chiuso è asintoticamente stabile;

c) la risposta al segnale $u(t) = 2\sin(t)$, avendo posto $K = -2$.

Svolgimento.

a) Ponendo

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1}\,, \qquad G_2(s) = \frac{K(s-1)}{s+2} = \frac{-3K}{s+2} + K$$

una rappresentazione i-s-u del sistema con funzione di trasferimento $G_1(s)$ è data da

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u_1(t) \tag{3a}$$
$$y_1(t) = x_1(t) \tag{3b}$$

mentre una rappresentazione i-s-u del sistema con funzione di trasferimento $G_2(s)$ è data da

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= -2x_2(t) + u_2(t) \\ y_2(t) &= -3Kx_2(t) + Ku_2(t) \end{aligned}$$

Poichè poi risulta

$$u_1(t) = u(t) - y_2(t)\,, \quad u_2(t) = y(t)\,, \quad y_1(t) = y(t)\,,$$

una rappresentazione i-s-u del sistema complessivo è data da

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -(K+1)x_1(t) + 3Kx_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - 2x_2(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

che può essere riscritta in forma matriciale come

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(K+1) & 3K \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \tag{4a}$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \tag{4b}$$

b) Il polinomio caratteristico della matrice dinamica del sistema (4) è

$$p(\lambda) = \lambda^2 + (K+3)\lambda + (2-K)\,.$$

Dovrà quindi essere

$$-3 < K < 2\,.$$

c) Posto $K = -2$, il sistema per $t < 0$ risulta essere

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \tag{5a}$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \tag{5b}$$

La funzione di trasferimento relativa al sistema (5) è[2]

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & 6 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & -6 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{s^2+s+4} = \frac{s+2}{s^2+s+4}$$

Il segnale $u(t)$ è applicato da $-\infty$ e il sistema è asintoticamente stabile; quindi la risposta $y(t)$ fino all'istante $t = 0$ è pari alla risposta a regime

$$y(t) = 2|G(j)| \sin\left(t + \angle G(j)\right)\,.$$

[2] $G(s)$ può anche essere calcolata nel seguente modo

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}\,.$$

Poichè risulta

$$G(j) = \frac{7+j}{10} = 0.71e^{j0.14}\,,$$

fino all'istante $t = 0$, $y(t)$ è pari a

$$y(t) = 1.42\sin(t + 0.14)\,. \tag{6}$$

Dall'istante $t = 0$ in poi, poichè si è aperto l'interruttore, il sistema può essere descritto a partire dall'equazione (3) tenendo presente che risulta

$$u_1(t) = u(t)\,, \quad y_1(t) = y(t)\,.$$

Pertanto per $t > 0$ il sistema è descritto tramite le equazioni

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t) \tag{7a}$$

$$y(t) = x_1(t) \tag{7b}$$

Per $t > 0$ l'uscita presenta due contributi:

1) l'evoluzione forzata dovuta all'ingresso $u(t) = 2\sin(t) \cdot 1(t)$ che può essere calcolata nel dominio di Laplace. Risulta

$$Y_f(s) = G_1(s)U(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{2}{s^2+1} = \frac{1}{s+1} - \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}\,.$$

Quindi

$$y_f(t) = e^{-t} - \cos(t) + \sin(t)\,.$$

2) l'evoluzione libera del sistema (7) a partire dallo stato $x_1(0)$ a cui si è portato il sistema (5) per effetto dell'ingresso $u(t)$ per $t < 0$. Dalla (5b) si ha che

$$x_1(t) = y(t)\,,$$

e quindi, ricordando la (6)

$$x_1(0) = 1.42\sin(0.14) = 0.20\,.$$

In virtù delle (7), l'evoluzione libera è data allora da

$$y_l(t) = 0.20e^{-t}\,.$$

In definitiva la risposta complessiva del sistema è data da

$$y(t) = (1.42\sin(t + 0.14)) \cdot 1(-t) + (1.20e^{-t} - \cos(t) + \sin(t)) \cdot 1(t)\,.$$