Proposizioni logiche e algebra di Boole

Docente: Ing. Edoardo Fusella
Dipartimento di Ingegneria Elettrica e Tecnologie dell’Informazione
Via Claudio 21, 4° piano – laboratorio SECLAB
Università degli Studi di Napoli Federico II
e-mail: edoardo.fusella@unina.it

Proposizioni Logiche

- Una *proposizione logica semplice* è una dichiarazione che può assumere valore *vero* o *falso*
  - Roma è la capitale dell'Italia; V
  - 25 è un numero pari; F
- Sulle proposizioni logiche è possibile effettuare delle operazioni tramite gli **operatori logici**:
  - **NOT***: la NEGAZIONE (*¬*), operatore unario*
    - **OR***: la DISGIUNZIONE* (v) *o SOMMA LOGICA, operatore binario*
  - **AND***: la CONGIUNZIONE* (^) *o PRODOTTO LOGICO, operatore binario*

Proposizioni logiche e operatori di confronto

- Le proposizioni semplici possono essere costruite utilizzando degli **operatori di confronto** (o di relazione)

- Gli operatori di relazione più noti sono quelli che permettono di confrontare quantità numeriche:
  - uguale (simbolo '$=$')
  - diverso (simbolo '$\neq$')
  - maggiore (simbolo '$>$')
  - minore (simbolo '$<$')
  - maggiore o uguale (simbolo '$\geq$')
  - minore o uguale (simbolo '$\leq$')

Proposizioni Composte

- Applicando gli operatori logici a più proposizioni semplici si ottengono **proposizioni composte**
  - *Oggi è lunedì* ***e*** *c'è il sole*
  - *la casa ha meno di 20 anni* ***o*** *è stata ristrutturata da meno di 5 anni*
  - *Oggi* ***non*** *è domenica* ***e*** *devo lavorare*
- Ciascuna proposizione semplice può essere vera o falsa, e allo stesso modo la proposizione composta può avere valore vero o falso
- La funzione logica che ha come ingresso il valore delle proposizioni semplici componenti e come uscita il valore della proposizione composta risultante può essere rappresentata con una **tabella di verità**

Esempio

- Consideriamo la seguente proposizione:
  - 'Il sabato sera lavoro solo se ***devo lavorare, e ho riposato o ho bevuto il caffè'***
    - A=devo lavorare
    - B=ho riposato
    - C=ho bevuto il caffè
- La condizione composta è A and (B or C)

devo lavorare (a)	*ho riposato* (b)	*ho bevuto del caffè* (c)	condizione intermedia (b OR c)	condizione composta (a AND (b OR c))
falso	falso	falso	falso	falso
falso	falso	vero	vero	falso
falso	vero	falso	vero	falso
falso	vero	vero	vero	falso
vero	falso	falso	falso	falso
vero	falso	vero	vero	vero
vero	vero	falso	vero	vero
vero	vero	vero	vero	vero

La logica delle Proposizioni e l’algebra di Boole

- George Boole (1815-1864) studiò un mezzo matematico per descrivere in forma algebrica la logica delle proposizioni e definì la cosiddetta **algebra di Boole**
- Oggi quest’algebra ha numerose applicazioni nelle scienze fisiche, in particolare nel campo dei calcolatori e dell’elettronica
- Nel 1938, Claude Shannon ha introdotto l’algebra di commutazione (o dei circuiti) in cui le porte logiche vengono usate al posto degli operatori logici e i valori logici vero/falso sono sostituiti da segnali elettrici alto/basso in ingresso o uscita da circuiti elettrici

Algebra di Boole

- L'Algebra di Boole può essere vista come un'algebra astratta definita su un supporto K = {0,1} e tre operazioni
- – AND (·): $K \times K \rightarrow K$
- – OR (+): $K \times K \rightarrow K$
- – NOT (¬): $K \rightarrow K$

x	y	x AND y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	x OR y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	NOT x
0	1
1	0

Algebra di Boole: postulati

- Un'Algebra di Boole può essere definita in qualsiasi struttura goda dei seguenti postulati:
  - Proprietà commutativa

    $a+b = b+a \qquad a \cdot b = b \cdot a$

  - Proprietà associativa

    $(a+b)+c = a+(b+c) = a+b+c$

    $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$

  - Proprietà di idempotenza

    $a+a = a \qquad a \cdot a = a$

  - Proprietà di assorbimento

    $a+(a \cdot b) = a \qquad a \cdot (a+b) = a$

Proprietà distributiva

- per ogni elemento di *K* vale la proprietà ***distributiva***

$$\boldsymbol{a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c}$$

$$\boldsymbol{a + (b \cdot c) = (a+b) \cdot (a+c)}$$

- Si noti che la proprietà è assegnata sia per la somma rispetto al prodotto che per il prodotto rispetto alla somma

Proprietà del minimo e del massimo

- Dotato di minimo e massimo assoluti
- In *K* sono presenti due elementi (0 e 1) che verificano la *proprietà del* ***minimo*** *e* ***massimo***

$$\boldsymbol{a \cdot 0 = 0} \qquad\qquad \boldsymbol{a + 1 = 1}$$

- Gli elementi 0 e 1 si dicono minimo e massimo in quanto si ha:

$a \leq 1$ e $0 \leq a$ per ogni elemento a di K

Proprietà del complemento

- Per ogni elemento a di K esiste ed è unico un elemento che diremo complemento di a (!a o ¬a) per il quale è valida la proprietà del complemento

$$a \cdot !a = 0 \qquad\qquad a + !a = 1$$

- L'operazione unaria che genera il complemento di chiama complementazione e si indica con ! o ¬ (NOT)

Postulati: ricapitolando

Commutativa	**P1**	$a+b = b+a$	**P'1**	$a \cdot b = b \cdot a$
Associativa	**P2**	$(a+b)+c = a+(b+c)$	**P'2**	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Idempotenza	**P3**	$a+a = a$	**P'3**	$a \cdot a = a$
Assorbimento	**P4**	$a+a \cdot b = a$	**P'4**	$a \cdot (a+b) = a$
Distributiva	**P5**	$a \cdot (b+c) = a \cdot b+a \cdot c$	**P'5**	$a+b \cdot c = (a+b) \cdot (a+c)$
Min e max	**P6**	$a \cdot 0 = 0$	**P'6**	$a+1 = 1$
Complemento	**P7**	$a \cdot \bar{a} = 0$	**P'7**	$a+\bar{a} = 1$

Alcuni "teoremi"

- **Complementi di 0 e 1**
  - *0* ed *1* sono l'uno il complemento dell'altro
- **Convoluzione**
  - Negando due volte un elemento si ottiene l'elemento stesso: !(!a)=a
- **Assorbimento del complemento**
  - a+!a * b=a+b
- **Elementi neutri**
  - *0* è l'elemento neutro della somma a+0=a
  - *1* è l'elemento neutro del prodotto a*1=a

Assorbimento del complemento

- Teorema: **a + !a*b = a+b**

- Esempio di dimostrazione
  - usando la proprietà distributiva:

    a + !a*b = (a+!a) * (a+b)
  - Usando la proprietà del complemento

    (a+!a) * (a+b) = 1 * (a+b)
  - Usando il teorema degli elementi neutri

    1 * (a+b) = (a+b)

Legge di dualità

- Si può dimostrare che da qualsiasi identità booleana se ne può trarre un'altra equivalente per *dualità*, sostituendo cioè ad ogni operatore e agli elementi 0 ed 1 il rispettivo duale
  - il duale di + è *,
  - il duale di 0 è 1
  - il duale di *a* è in generale *!a* (a negato, NOT a).

$$y = \overline{a} + b(c + 0) \qquad duale = a * (\overline{b} + \overline{c} * 1)$$

Teoremi di De Morgan

$$\overline{p+q} = \overline{p} \cdot \overline{q}$$

$$\overline{pq} = \overline{p} + \overline{q}$$

- Si può dimostrare con le tabelle di verità

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

Tabelle di verità

- Se l’algebra è finita, qualsiasi funzione può in linea di principio essere rappresentata mediante una tabella, definita tabella di verità
  - Righe della tabella di verità: $N=2^n$

numero delle ripetizioni di 2 valori su n posti

Esempio di tabella di verità

#	x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_1\overline{x}_2$	x_2x_3	$\overline{x}_1\overline{x}_2 + x_2x_3 = f_1$
0	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
2	0	1	0	0	0	0
3	0	1	1	0	1	1
4	1	0	0	0	0	0
5	1	0	1	0	0	0
6	1	1	0	0	0	0
7	1	1	1	0	1	1

Tabella di verità dell'espressione logica $\overline{x}_1\overline{x}_2 + x_2x_3 = f_1$.

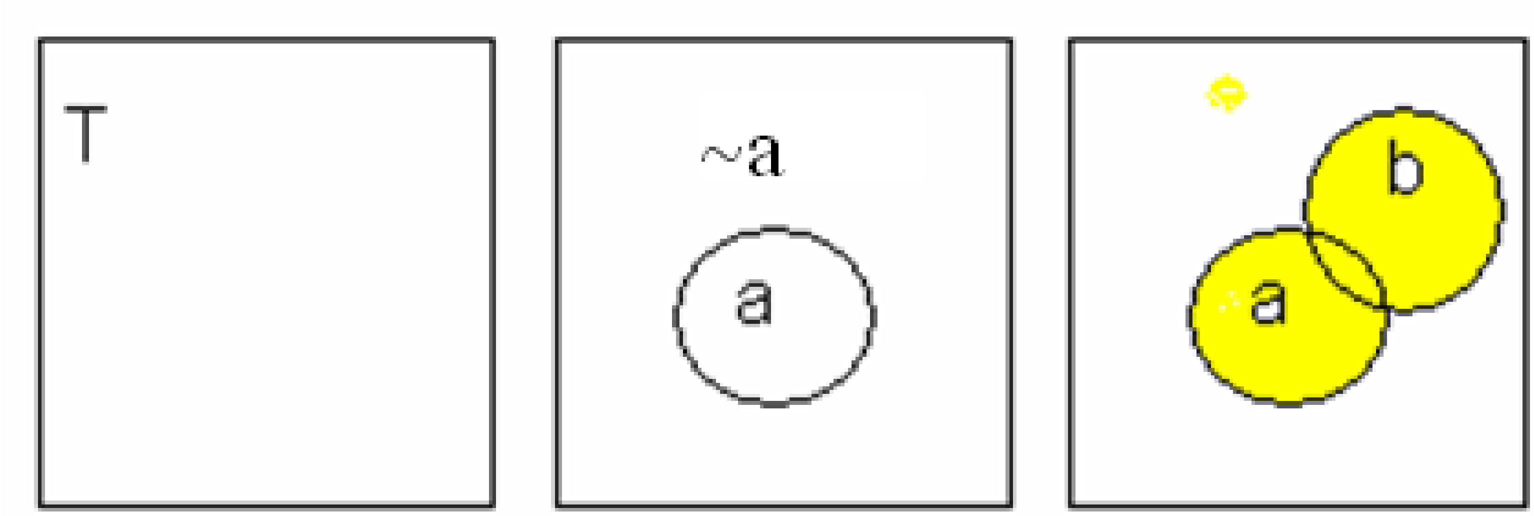
Algebre di Boole

- La definizione di Algebra di Boole non specifica quale sia K e come siano definite le operazioni
- Sono così possibili diversi modelli di algebra di Boole
  - l'algebra degli insiemi
  - l'algebra della logica delle proposizioni
  - l'algebra dei circuiti, in cui K assume solo i due valori 0 e 1

Algebra degli insiemi

Insiemi		Modello matematico	
$\cup$	unione	$+$	somma
$\cap$	intersezione	$\cdot$	prodotto
$\sim A$	complemento	$\overline{a}$	complemento
Φ	insieme vuoto	0	minimo assoluto
T	insieme "totale"	1	massimo assoluto

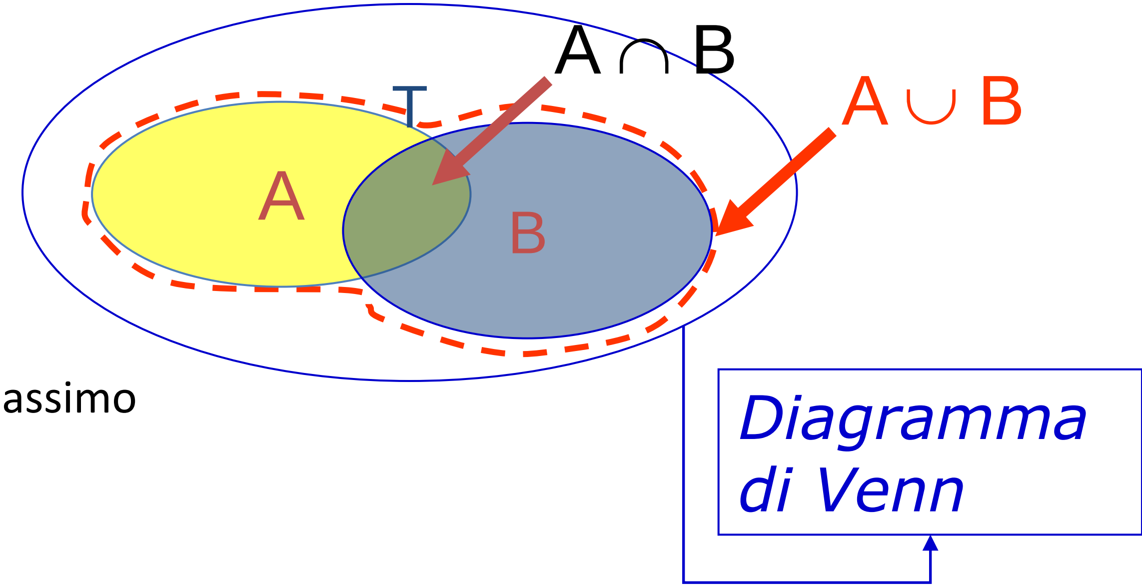
Algebra degli insiemi (1/2)



a) Insieme universo b) ~a c) a ∪ b

Algebra degli insiemi (2/2)

- Dati due insiemi A,B $\in$ T,sono definite le operazioni di
  - Unione ($\cup$)
  - Intersezione ($\cap$)
  - Complemento (~)



Proprietà del minimo e del massimo

$$a \cap \Phi = \Phi$$
$$a \cup T = T$$

Esercizi

1) Data la condizione «stasera esco se ho finito i compiti o se domani non vado a scuola» scriverne la formulazione in termini di proposizioni logiche e trovarne la formulazione duale

2) Scrivere la tabella di verità corrispondente alla seguente funzione logica di 3 variabili

   ((not A) and B) OR ((A and B) and C)

3) Scrivere la tabella di verità di una funzione logica a 3 variabili che dia risultato vero se almeno due dei suoi argomenti sono uguali a vero

Esercizio 1

- a = ho finito i compiti
- b = domani vado a scuola
- f = a OR (NOT b)
- f’= (NOT a) AND b

a	b	f	f'
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	0

Esercizio 2

a	b	c	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Esercizio 3

f = (a AND b) OR (a AND c) OR (b AND c) OR (a AND b AND c)

a	b	c	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1