Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
Modulo di PRESTAZIONI

Docente : Ing. F. NICOLOSI

# CAP. 5

# PUNTI CARATTERISTICI – POLARI TECNICHE

## 5.1 La polare parabolica

Come visto nel cap. 4, la polare di un velivolo (cioè la curva che descrive la resistenza (o il coefficiente di resistenza) in funzione della portanza (o del coeff. di portanza) ha una espressione :

$$CD=CDo + CL^2/ \pi\, AR\, e = CDo + K\, CL^2 \qquad (5.1)$$

con i termini che descrivono il contributo di resistenza a portanza zero (anche comunemente detto resistenza "parassita" ed il contributo dipendente dalla portanza (anche detto "resistenza indotta", vedi fig. 5.1.

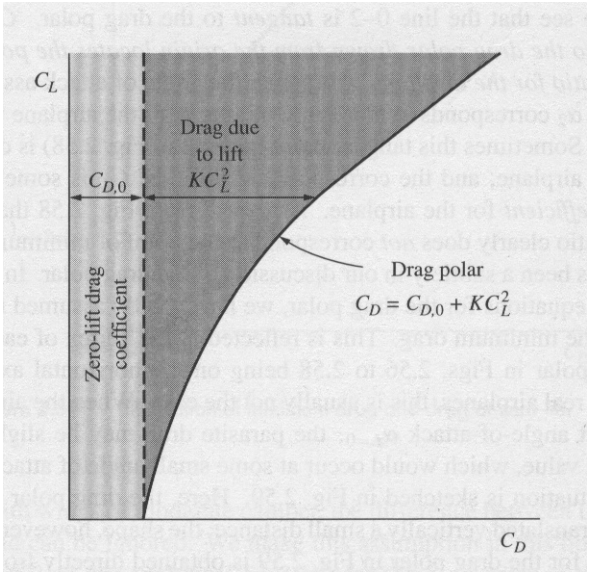



Fig. 5.1

In effetti se si considera la polare di un velivolo (misurata ad esempio da prove aerodinamiche in galleria del vento) come quella riportata in fig. 5.2 si può notare che la resistenza minima non si ottiene a CL=0 come previsto dalla polare parabolica.

In effetti questo è dovuto al fatto che , a motivo della curvatura dei profili che si utilizzano, questi offrono la resistenza minima a valori di Cl leggermente positivi (vedi curve di resistenza dei profili).
In effetti, alle alte velocità di volo (CL bassi) , cioè ad angoli di attacco prossimi a zero, il velivolo solitamente offre la minima resistenza.
In effetti questa situazione sarebbe descritta non più da una polare parabolica, ma potrebbe essere descritta da una polare ad asse spostato, dalla equazione :

$$CD = CD_{min} + K\left(CL - CL_{min_drag}\right)^2 \qquad (5.2)$$

In generale, la polare parabolica descritta dalla 5.1 si discosta dalla polare effettiva di un velivolo agli assetti molto bassi(se non negativi) corrispondenti a CL prossimi a zero e agli assetti molto elevati. Agli assetti molto elevati, infatti la resistenza parassita del velivolo non è più proporzionale al quadrato del CL, ma segue leggi diverse.
Quanto detto è riassunto nella figura 5.3.
In definitiva la polare parabolica è una buona rappresentazione analitica della polare di un velivolo in un certo intervallo di CL (e cioè in un certo intervallo di velocità di volo, dato che il CL e la velocità sono strettamente legati).
Tenendo conto che CL prossimi a zero non rappresentano condizioni di volo per le quali è importante conoscere la resistenza ai fini della stima delle prestazioni (solo in picchiata potrei

considerare CL=0, altrimenti se la portanza deve eguagliare il peso il CL dovrà essere necessariamente maggiore di zero) e tenendo conto che agli assetti molto elevati (velivolo prossimo allo stallo) non siamo interessati alla resistenza perché non rappresentano assetti importanti ai fini delle prestazioni di un velivolo, la polare parabolica è sicuramente una rappresentazione buona della resistenza di un velivolo ai fini della stima delle sua prestazioni.
E' chiaro che utilizzare una polare descritta dalla (5.1) rappresenta un notevole vantaggio ai fini dell'individuare dei punti caratteristici della polare stessa e della facile rappresentazione di relazioni per individuarne i valori.

In altri termini l'intervallo ("range") di CL nei quali il velivolo vola, relativi alle sue prestazioni in volo livellato orizzonatale (crociera, velocità massima, ecc.) o di salita sono contenuti in un intervallo di CL compresi tra 0.20 e 1.20.
Nella figura 5.4 si può vedere quella che è la usuale differenza tra la polare "parabolica" descritta dalla formula 5.1 e quella che è la polare effettiva di un velivolo. Si vede come ci sia una differenza agli assetti molto bassi ed agli assetti molto alti.
Per quanto già detto questo non rappresenta un problema ai fini della stima delle prestazioni di un velivolo in quanto sia gli assetti molto bassi (CL prossimi a zero) sia gli assetti molto alti (prossimi allo stallo) la resistenza non rappresenta un parametro significativo ai fini della stima delle prestazioni.

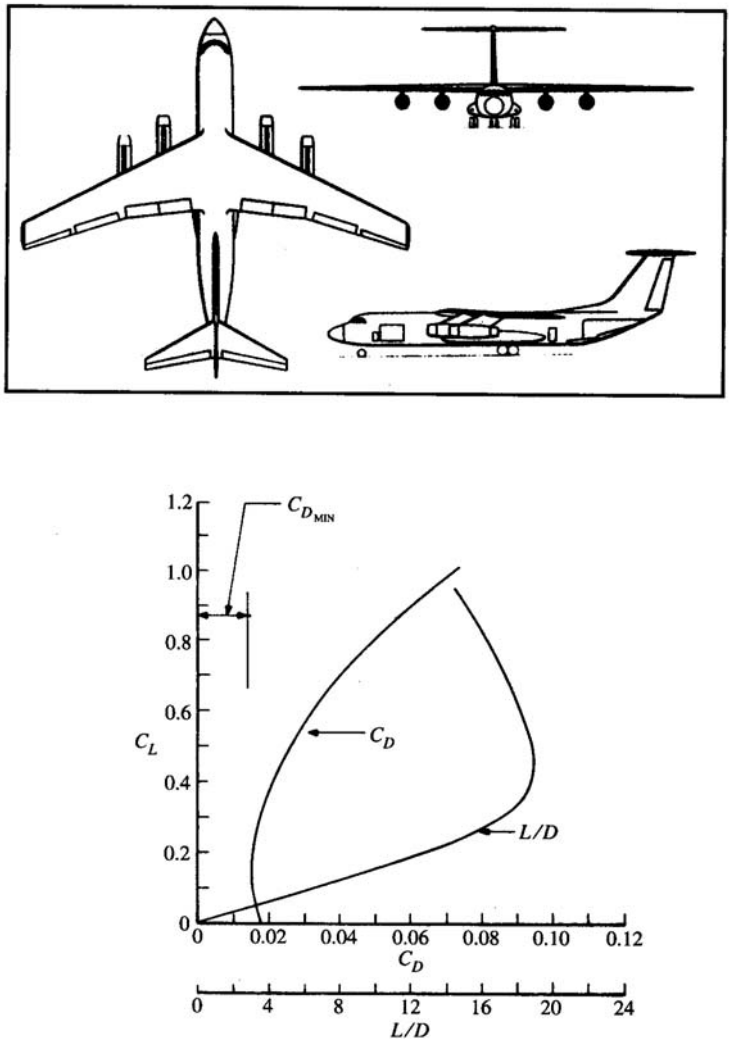



**Figure 2.60** Low-speed drag polar and $L/D$ variation for the Lockheed C-141A (shown in three-view).

Figura 5.2

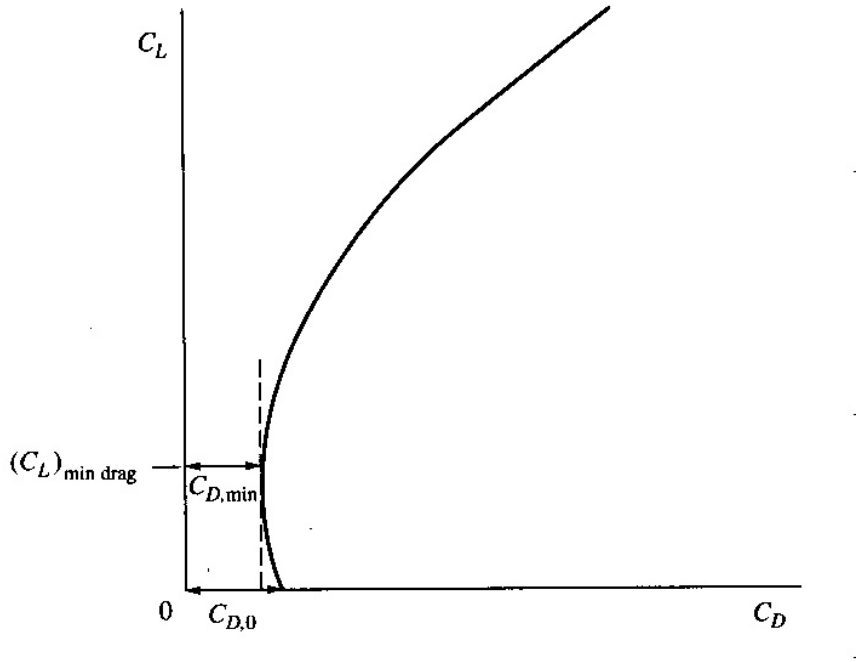



Fig. 5.3

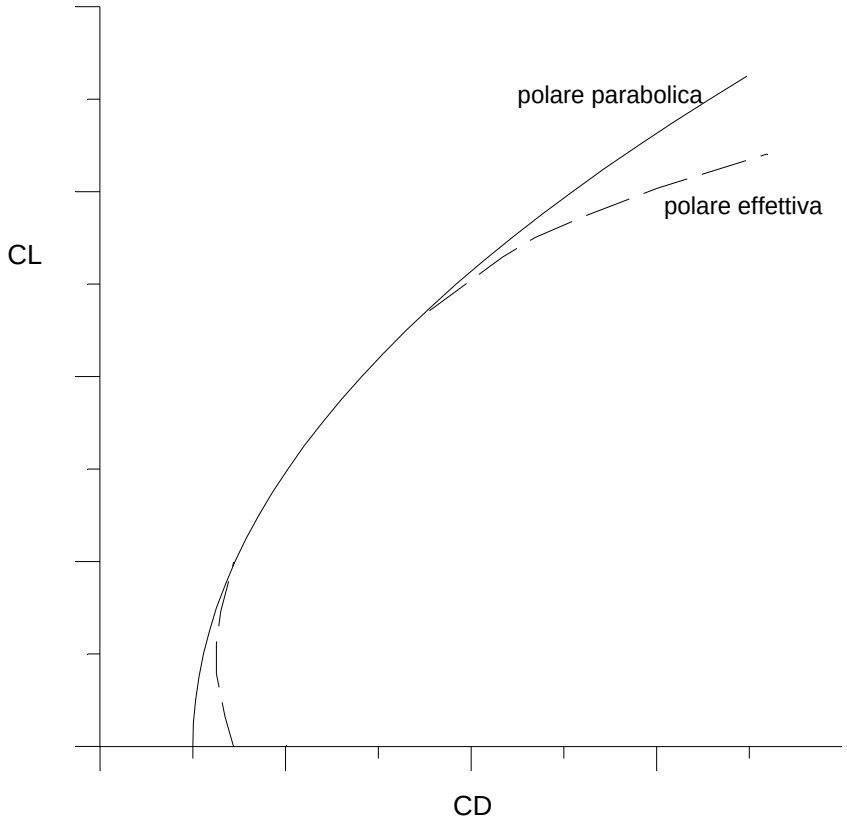



Figura 5.4

## 5.2 Volo livellato – Equazioni del moto

Consideriamo un velivolo in volo lungo una traiettoria orizzontale. Ipotizziamo che il velivolo sia in *volo livellato* ossia l'angolo di rampa $\theta$ e l'angolo di rollio $\phi$ sono nulli. Inoltre ipotizziamo che sia in *volo stazionario* ossia accelerazione nulla.
Sebbene la spinta sia inclinata di un angolo $\varepsilon$ rispetto alla direzione della velocità asintotica questo angolo è solitamente piccolo per gli aeroplani convenzionali e può essere trascurato. Quindi in questo capitolo assumiamo che la spinta sia allineata con la direzione di volo, ossia $\varepsilon = 0$.
Con queste ipotesi, le equazioni del moto per il *volo livellato stazionario* sono:

$$T = D \qquad (5.3)$$

$$L = W \qquad (5.4)$$

Le Eq. 5.3 e 5.4 possono essere ottenute semplicemente osservando la Fig. 5.5, che illustra un aeroplano in volo livellato stazionario. Facendo il semplice bilancio delle forze mostrato nella Fig 5.2, la portanza è uguale al peso Eq. 5.4 e la spinta è uguale alla resistenza Eq. 5.3.

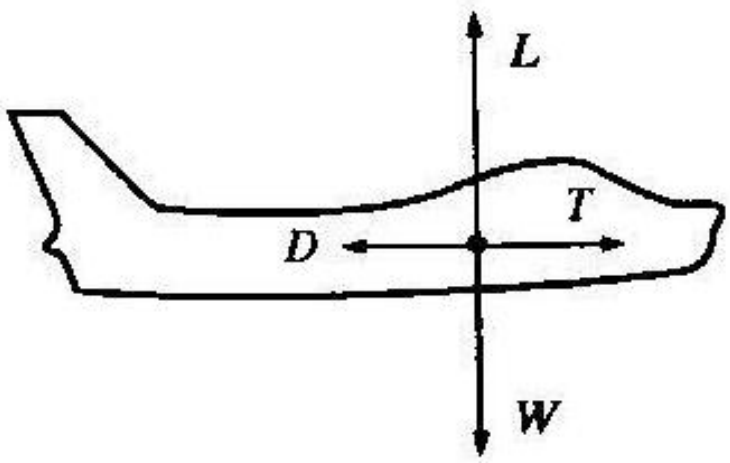



Fig. 5.5

Sebbene possiamo derivare queste equazioni direttamente osservando la Fig. 5.2, invece di derivarla dalle equazioni generali del moto , è istruttivo mostrare che le Eq. 5.3 e 5.4 sono casi speciali dell' equazioni del moto più generali che si possono ricavare introducendo anche i termini dovuti alla accelarazione.

Si considera sempre l'equazione della seconda legge di Newton , dove F=m a.

Se si considera un velivolo che sta effettuando una sua traiettoria curvilinea (vedi fig. 5.6) si può andare ad esprimere l'equazione che rappresenta l'equilibrio delle forze agenti parallelamente alla direzione del moto (a quell'istante) come

**DIR (Parallela)** $$m \cdot a = m \cdot \frac{dV}{dt} = T \cdot \cos\varepsilon - D - W \sin\theta \qquad \textbf{(5.5)}$$

Nella direzione perpendicolare al sentiero di volo abbiamo invece :

$$F = L \cdot \cos\Phi + T \cdot \sin\varepsilon \cdot \cos\Phi - W \cdot \cos\theta \qquad (5.6)$$

e, considerando che l'accelerazione nella direzione perpendicolare al moto è l'accelerazione centripeta

$$a = \frac{V^2}{r_1} \qquad (5.7)$$

dove $r_1$ è il raggio di curvatore locale della traiettoria del velivolo considerata nel piano verticale (vedi sempre fig. 5.6). Quindi si può scrivere :

**DIREZIONE PERP.** $$m \cdot \frac{V^2}{r_1} = L \cdot \cos\Phi + T \cdot \sin\varepsilon \cdot \cos\Phi - W \cdot \cos\theta \qquad \textbf{(5.8)}$$

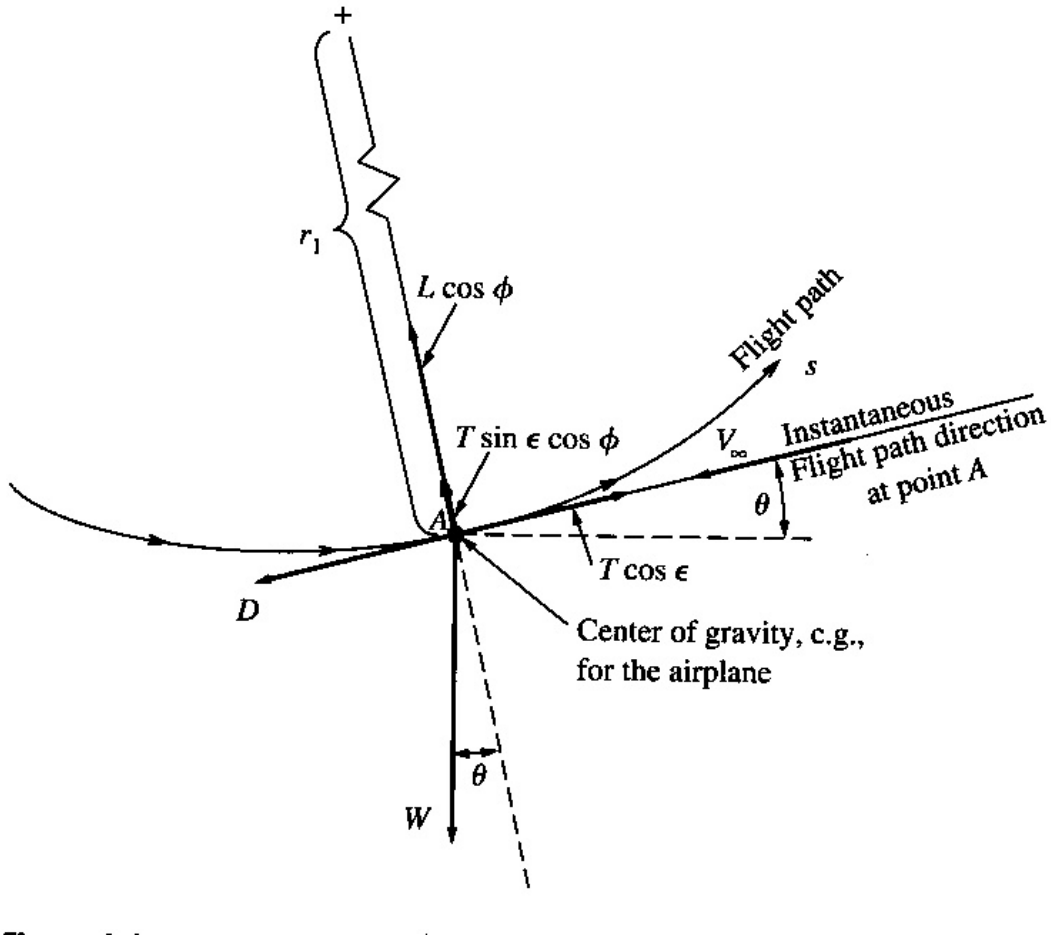



Fig. 5.6

Nelle equazioni 5.5 e 5.8 l'angolo Φ rappresenta il cosiddetto angolo di bank, cioè l'angolo che il piano alare forma con un piano perpendicolare alla direzione verticale, vedi fig. 5.7 (direzione dell'accelerazione di gravità). Ovviamente, proiettando la traiettoria in un piano orizzontale(parallelo alla superficie terrestre), questa avrà un raggio di curvatura $r_2$ (vedi fig. 5.8)

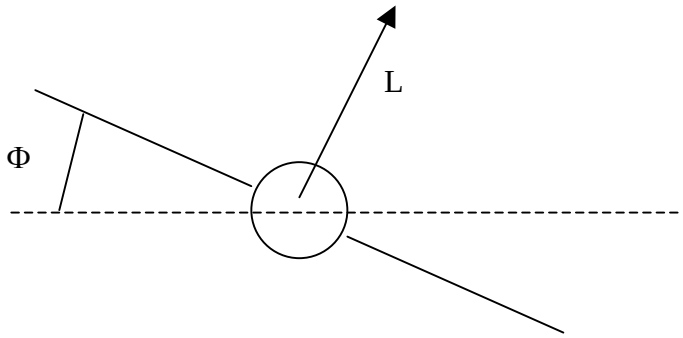



Fig. 5.7

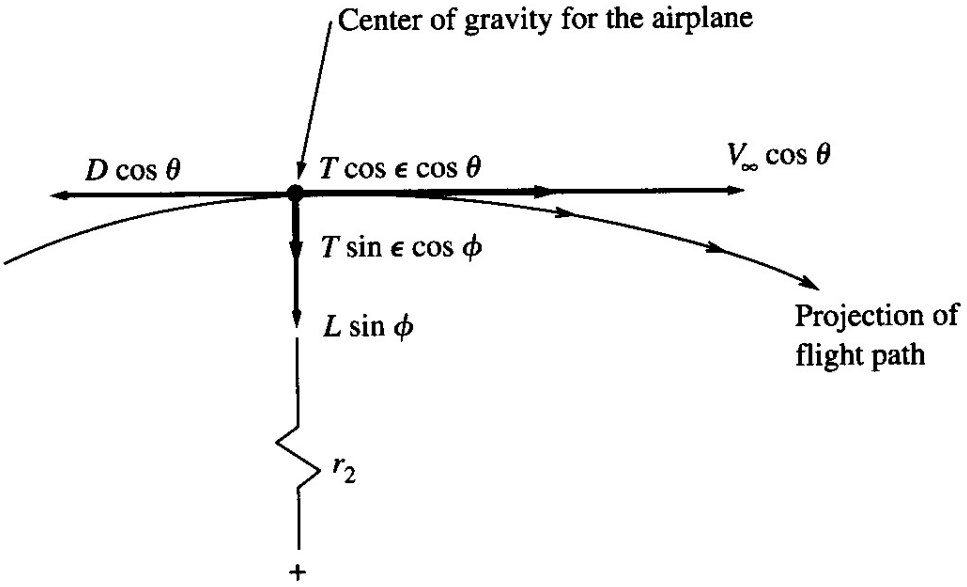



Fig. 5.8

Se consideriamo la forza totale agente in direzione perpendicolare alla traiettoria (nel piano orizzontale (fig. 5.8) abbiamo:

$$F_2 = L \cdot \sin\Phi + T \cdot \sin\varepsilon \cdot \sin\Phi \qquad (5.9)$$

L'accelerazione radiale nel piano orizzontale sarà :

$$a_2 = \frac{(V \cdot \cos\theta)^2}{r_2} \qquad (5.10)$$

Quindi l'equazione che si deve considerare per quanto riguarda la traiettoria nel piano orizzontale è:

**DIREZIONE PERP.** $$m \cdot \frac{(V \cdot \cos\theta)^2}{r_2} = L \cdot \sin\Phi + T \cdot \sin\varepsilon \cdot \sin\Phi \qquad \textbf{(5.11)}$$

**(nel piano orizzontale)**

Riscriviamo quindi le 3 equazioni che esprimono, nel caso più generale le equazioni del moto accelerato di un velivolo :

**DIR DEL MOTO** $$m \cdot a = m \cdot \frac{dV}{dt} = T \cdot \cos\varepsilon - D - W \sin\theta$$

**DIR. PERP. (Piano vert.)** $$m \cdot \frac{V^2}{r_1} = L \cdot \cos\Phi + T \cdot \sin\varepsilon \cdot \cos\Phi - W \cdot \cos\theta$$

**DIR. PERP. (Piano orizz.)** $$m \cdot \frac{(V \cdot \cos\theta)^2}{r_2} = L \cdot \sin\Phi + T \cdot \sin\varepsilon \cdot \sin\Phi$$

Nel caso di volo livellato non accelerato queste diventano le semplici equazioni

T=D (prima equazione)

L=W (seconda equazione)

Che sono proprio la 5.3 e la 5.4.

## 5.3 Volo livellato – polari tecniche – SPINTA RICHIESTA

Ritorniamo ancora alla Fig. 5.5. Immaginiamo questo aeroplano in volo livellato stazionario ad una data velocità e altitudine, diciamo 400 mi/h ( 643 .8 Km/h) 20000 ft (6096 m). Per mantenere questa velocità ed altitudine, deve essere generata la spinta sufficiente per vincere la resistenza; questa è la *spinta richiesta* per mantenere le condizioni di volo. La spinta richiesta (necessaria al volo orizzontale) $T_{no}$ dipende dalla velocità, dall'altitudine, e dalla forma aerodinamica, dimensione, e peso dell'aeroplano – queste ultime sono caratteristiche associate con la forma dell'aeroplano piuttosto che col motore stesso. Comunque la spinta richiesta è semplicemente uguale alla *resistenza* del velivolo – è la spinta richiesta a vincere la resistenza aerodinamica.
La variazione di $T_{no}$ con la velocità asintotica V è detta *curva di spinta richiesta o necessaria*; tale curva è mostrata in Fig. 5.9. È uno degli elementi essenziali nell'analisi della performance di un aereo. Una curva di spinta necessaria, come quella mostrata in Fig. 5.9, appartiene ad un dato aeroplano ad una data altitudine standard. Và sottolineato che la spinta necessaria non è altro che la resistenza del velivolo, per cui tale curva non è altro che la curva della resistenza in funzione della velocità per un dato aeroplano ad una data altitudine. La curva di spinta necessria in Fig. 5.9 è relativa al jet trainer Northrop T-38 con un peso di 10000 lb (circa 5000 Kg) ad una altitudine di 20000 (6096 m) ft.
Analizzando la curva di spinta necessaria in Fig. 5.9 si nota come ad alte velocità, $T_{no}$ aumenta all'aumentare della V , mentre a velocità basse $T_{no}$ diminuisce all'aumentare della velocità, e ci sarà una velocità per cui tale spinta sarà minima. Nei prossimi paragrafi analizzeremo l'andamento di questa curva prima utilizzando un approccio grafico e poi uno analitico.

### 5.3.1 APPROCCIO GRAFICO

Consideriamo un dato aeroplano che vola in volo livellato stazionario. Per questo aeroplano conosciamo le seguenti caratteristiche fisiche: peso W, allungamento alare AR, superficie alare S. Inoltre conosciamo la polare:

$$C_D = C_{Do} + KC_L^2 \qquad (5.12)$$

dove $C_{Do}$ e K sono conosciuti per il dato aeroplano. Per calcolare la curva di spinta richiesta si procede come segue:
Ovviamente la minima velocità alla quale il velivolo può sostentarsi in volo livellato è la velocità di stallo ad una certa quota.
Quindi , scelta una certa quota (anche il livello del mare, ad esempio), si parte dalla velocità di stallo a quella quota pari a

$Vs = Vso / \sqrt{\sigma}$

Con Vso velocità di stallo a quota zero $\quad Vso = \sqrt{\frac{2}{\rho_o}\frac{W}{S}\frac{1}{CL_{MAX}}}$

Con $CL_{MAX}$ pari al massimo coefficiente di portanza equilibrato del velivolo.

1. Si sceglie un valore di V
2. Per il valore di V scelto si calcola $C_L$ dalla relazione

$$L = W = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L$$

da cui:

$$C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S}$$

3. Si calcola $C_D$ dalla Eq. (5.12)

$$C_D = C_{Do} + KC_L^2$$

4. Si calcola $T_{no}$ dalla:

$$T_{NO} = D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D$$

questo è il valore di $T_{no}$ corrispondente alla velocità scelta nel punto 1. La combinazione trovata ($T_{no}$ V) è un punto della curva di spinta richiesta.

5. Si ripetono i punti da 1 a 4 per differenti valori di V

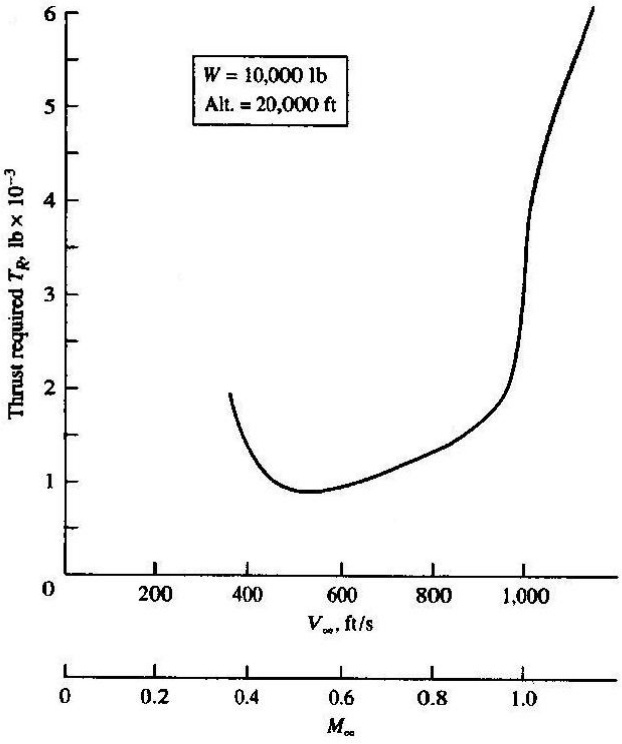



Fig. 5.9

**Esercizio**

Si Consideri il velivolo a getto Gulfstream IV. Calcolare e disegnare la curva di spinta richiesta o necessaria ad un altitudine di 9000 m, assumendo un peso di 33112.8 Kgf.
Dati dell'aeroplano: S= 88,256 $m^2$, $C_{Do}$ = 0.0015, e K= 0.08. Quindi la polare sarà:

$$C_D = 0.0015 + 0.08\ C_L^2$$

*Nota*: La polare riportata per il Gulfstream IV è da considerarsi solo a scopo didattico. Le informazioni sulla polare di un dato aereo sono spesso difficili da trovare in quanto di solito coperte da segreto industriale. I valori dati sono stati basati su valori tipici di aerei della stessa categoria e quindi i risultati che si otterranno non dovranno essere considerati come valori accurati delle performances dell'aereo assegnato.
Per calcolare un punto sulla curva di spinta richiesta seguiamo i quattro punti descritti prima.

1. Scegliamo un valore di V= 550 Km/h = 153 m/s
2. Un altitudine di 9000 m

$$\rho = 0.459\ \mathbf{kg/m^3}$$

$$C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S} = \frac{2(33112.8 \times 9.81)}{(0.459)(153)^2(88.255)} = 0.687$$

3. $C_D = C_{Do} + KC_L^2 = 0.015 + 0.08(0.687)^2 = 0.053$
4. $T_{NO} = W = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \frac{1}{2}(0.459)(153)^2(88.255)(0.053) = 25000\text{N} = 2541.715\ \text{kgf}$
5. Quindi per mantenere un volo dritto e livellato alla velocità di 550 Km/h ad un altitudine di 9000 m l'aeroplano richiede una spinta di 2541.715 Kgf. Altri punti della curva di spinta richiesta sono riportati in tabella 5.1

| V (Km/h) | CL | CD | Tno =D (Kgf) |
|---|---|---|---|
| 350.000 | 1.696 | 0.245 | 4784.378 |
| 450.000 | 1.026 | 0.099 | 3201.029 |
| 550.000 | 0.687 | 0.053 | 2541.715 |
| 650.000 | 0.492 | 0.034 | 2311.808 |
| 750.000 | 0.369 | 0.026 | 2322.178 |
| 850.000 | 0.288 | 0.022 | 2487.844 |
| 950.000 | 0.230 | 0.019 | 2766.029 |
| 1050.000 | 0.188 | 0.018 | 3133.293 |
| 1150.000 | 0.157 | 0.017 | 3575.920 |
| 1250.000 | 0.133 | 0.016 | 4085.449 |
| 1350.000 | 0.114 | 0.016 | 4656.432 |

Tab. 5.1

Esaminiamo l'andamento mostrato in tabella 5.1 ed in figura 5.10. Bisogna tener presente che la polare considerata, $C_D = 0.015+0.08C_L^2$, non tiene conto del rapido aumento della resistenza dovuto alla *resistenza d'onda* che si ha per valori del numero di Mach del flusso libero maggiori a circa 0.85 (il massimo numero di Mach al quale opera il Gulfstream IV è 0.88).
Quando il numero di Mach supera un certo valore, detto Mach di divergenza della resistenza $M_{DD}$ , che per un velivolo a getto è un valore compreso tra 0.82 e 0.86 , la resistenza non segue più la legge trovata perché è la polare (in particolare il CDo) a non essere più pari al valore assunto.
Difatti per $M>M_{DD}$ la polare del velivolo è caratterizzata da un valore più elevato del CDo.
La parte della curva $T_{no}$ in Fig. 5.10 per Mach > 0.85 è stata riportata solo per un motivo didattico ma non ha nessun riscontro reale. Comunque questo non compromette le osservazioni che si faranno di seguito.

Si osservi, prima, la variazione del $C_L$ con V riportata nella tabella 5.1. Per valori bassi di V, $C_L$ è molto alto; ma appena il valore di V cresce, $C_L$ decresce rapidamente. Questo perché per volo stazionario livellato L=W e

$$L = W = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \qquad (5.13)$$

A velocità molto basse, la portanza necessaria è data da $C_L$ alti quindi da alti angoli d'attacco.
Appena V cresce sono necessari $C_L$ progressivamente sempre più bassi per sostenere il peso velivolo in quanto la portanza necessaria è fornita dall'aumento della pressione dinamica ½ ρ $V^2$. Quindi appena V aumenta l'angolo d'attacco decresce progressivamente, come mostrato in Fig. 5.10.
La 5.13, se consideriamo la dipendenza della velocità di volo da peso, quota e CL (angolo di attacco) fornisce

$$\boxed{V = \sqrt{\frac{2}{\rho}}\sqrt{\frac{W}{S}}\sqrt{\frac{1}{CL}} = \sqrt{\frac{2}{\rho_o \sigma}}\sqrt{\frac{W}{S}}\sqrt{\frac{1}{CL}}} \qquad (5.13\text{-a})$$

oppure

$$\boxed{CL = \frac{2}{\rho}\frac{W}{S}\frac{1}{V^2}} \qquad (5.13\text{-b})$$

In effetti si può vedere come , ad una certa quota , il legame tra CL e velocità è del tipo :

<u>a quota costante</u> $\boxed{CL \propto \frac{1}{V^2}}$

oppure $\boxed{V \propto \frac{1}{\sqrt{CL}}}$

Alla luce di queste osservazioni si può spiegare l'andamento della curva di spinta richiesta ($T_{no}$ o $T_R$) che prima decresce con l'aumento della velocità, raggiunge un minimo, e poi aumenta all'aumentare della velocità). Scriviamo la resistenza come:

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D$$

dove

$$C_D = C_{Do} + K C_L^2$$

quindi

$$\mathbf{D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{Do} + \frac{1}{2}\rho V^2 S K C_L^2} \qquad (5.14)$$

A basse velocità, dove $C_L$ è alto, la resistenza è "dominata" dal termine della resistenza dovuta alla portanza (resistenza indotta). Infatti quest'ultimo termine è proporzionale al quadrato del $C_L$ (Eq. 5.12) e $C_L$ decresce rapidamente all'aumentare di V nonostante il fatto che la pressione dinamica, ½ ρ $V^2$, diminuisca. Questa è la ragione per cui per bassi valori di V la curva $T_{no}$ decresce. Questa parte della curva è mostrata in fig. 5.10 a sinistra della linea tratteggiata. In contrasto, come si vede nell'Eq. 5.14, il termine di resistenza a portanza nulla aumenta con il quadrato di V. Ad alte velocità la resistenza totale è dominata dal termine di resistenza a portanza nulla. Quindi ci sarà un valore di velocità per il quale il termine di resistenza dovuto alla portanza eguaglierà il termine a portanza

nulla; questo valore di velocità è quello per cui $T_R$ o $T_{no}$ è minimo. Per valori di V maggiori (a destra della linea tratteggiata in Fig 5.10) la curva $T_{no}$ cresce, in quanto risulta dominante il termine a resistenza nulla.

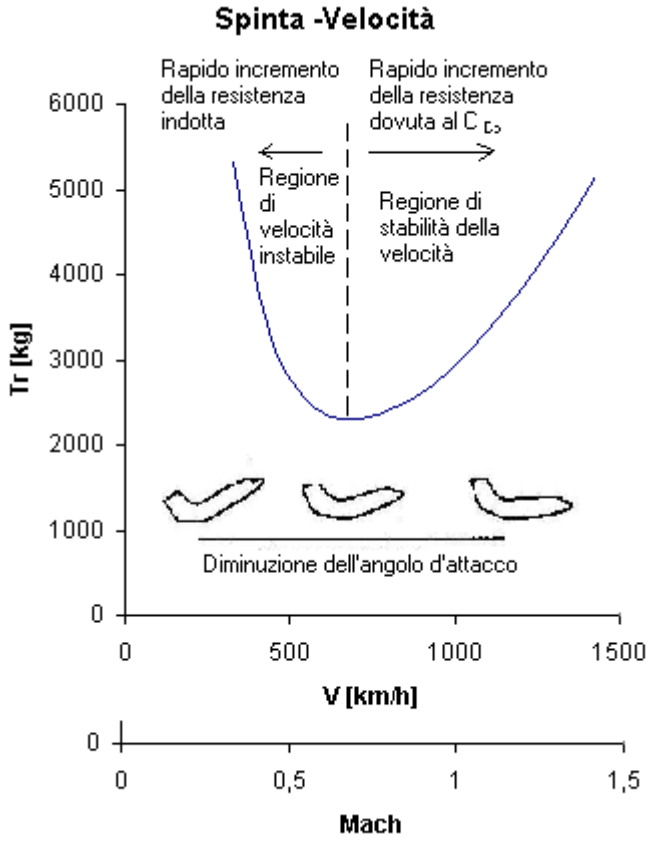



Fig. 5.10

Per meglio comprendere quanto detto fino ad ora in Fig. 5.11 vengono mostrati separatamente gli andamenti della resistenza indotta e della resistenza a portanza nulla (zero lift). Come si vede in corrispondenza del minimo della curva $T_R$ le resistenza indotta e la resistenza a portanza nulla si eguagliano. Dall' Eq. 5.12 si vede che questo vuol dire $C_{Do}=KC_L^2$. Allo stesso risultato ci si può arrivare per via analitica (par. 5.3.2)

Non è desiderabile, per un aeroplano, volare nella zona a sinistra della linea tratteggiata in Fig. 5.10. Questa è una regione di *instabilità di velocità*. La natura di questa instabilità è la seguente: consideriamo un velivolo in volo stazionario livellato con una velocità di volo minore del valore di velocità per cui $T_R$ è minimo (a sinistra della linea tratteggiata in Fig. 5.10). Tale condizione di volo è evidenziata in Fig. (5.12 a) dove la velocità di volo è denotata con $V_1$. In questa condizione per mantenere in volo livellato stazionario il velivolo alla velocità $V_1$ il motore dovrà fornire il corrispondente valore di spinta $T_{R1.}$ Consideriamo adesso che agisca una perturbazione, per esempio una raffica orizzontale, che faccia diminuire la velocità di volo dal valore $V_1$ al valore $V_2$. Alla diminuzione di velocità $\Delta V=V_2-V_1$ corrisponderà una aumento della spinta necessaria $\Delta T_R=T_{R2}-T_{R1}$ per mantenere il velivolo in volo livellato stazionario nella nuova condizione. Se il pilota non dà manetta per aumentare la spinta fornita dal motore ci si ritroverà nella condizione in cui la spinta richiesta (resistenza) sarà maggiore della spinta fornita dal motore per cui la velocità del velivolo tenderà a diminuire ulteriormente. È facile intuire che a causa della perturbazione il velivolo tenderà ad allontanarsi indefinitamente dalla condizione iniziale $V_1$. Le stesse considerazioni si possono fare aumentando la velocità da $V_1$ a $V_3$ (Fig.5.12 a), in questo caso la spinta richiesta $T_R$ (resistenza) diminuisce quindi il motore fornisce una spinta maggiore della spinta richiesta ed il velivolo tende ad aumentare ulteriormente la sua velocità allontanandosi dalla condizione $V_1$. *$V_1$ è una condizione*

*instabile.* Lo stesso ragionamento vale per ogni punto sulla curva a sinistra di $T_R$ minimo per cui tale regione è detta di *instabilità di velocità.*
Se invece ci troviamo nella regione a destra di $T_R$ minimo si ha un comportamento opposto: nel caso una perturbazione tenda a far aumentare la velocità di volo $\Delta V=V_3-V_1>0$ si avrà $T_{R3}>T_{R1}$ per cui il motore fornirà un spinta minore della spinta richiesta (resistenza), quindi se la spinta fornita dal motore rimane quella fornita in $V_1$ il velivolo tende a diminuire la sua velocità fino a ritornare ad una velocità di volo pari a $V_1$. Nel caso una perturbazione tenda a far diminuire la velocità di volo $\Delta V=V_3-V_1<0$ si avrà $T_{R3}<T_{R1}$ il motore fornirà un spinta maggiore della spinta richiesta (resistenza) e di conseguenza il velivolo tenderà ad aumentare la sua velocità fino a ritornare alla velocità $V_1$. In questo caso *$V_1$ è una condizione stabile.* Lo stesso ragionamento vale per ogni punto sulla curva a destra di $T_R$ minimo per cui tale regione è detta di *stabilità di velocità.*

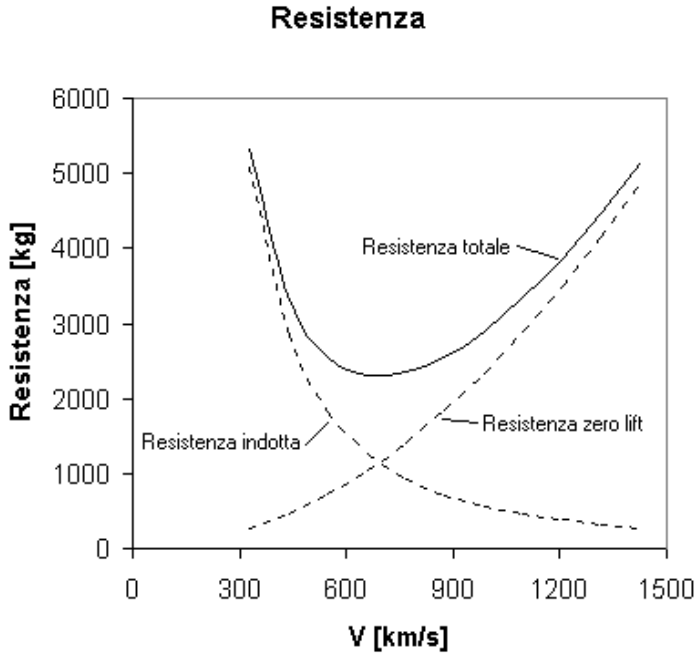



Fig. 5.11

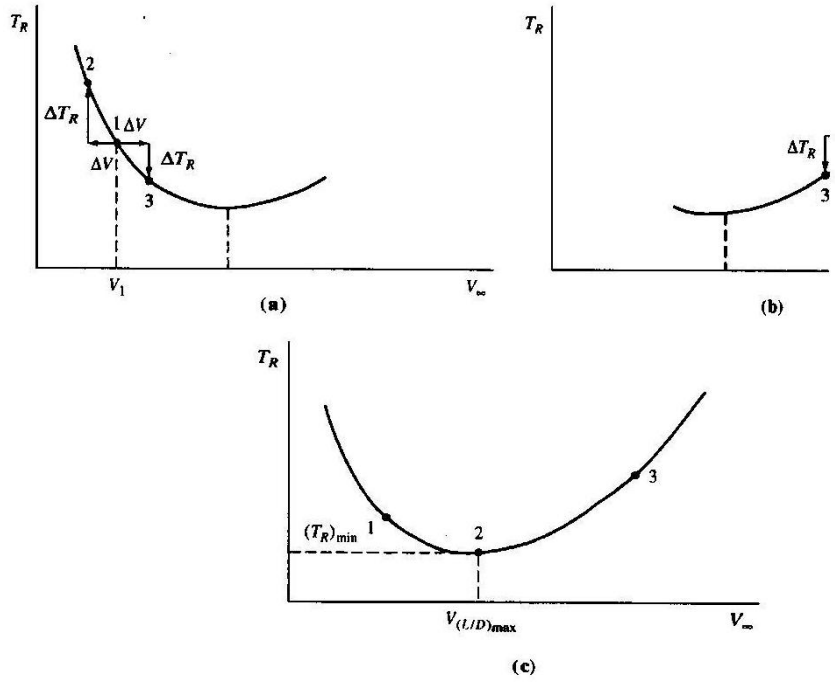



Fig. 5.12

### 5.3.2 APPROCCIO ANALITICO

In questo paragrafo esamineremo la curva di spinta richiesta da un punto di vista analitico.
Per il volo livellato stazionario abbiamo dalle Eq. (5.3) e (5.4)

$$T_R = D = \frac{D}{W}W = \frac{D}{L}W$$

oppure

$$T_R = \frac{W}{L/D} \qquad (5.15)$$

Esaminando l'Eq. (5.15), si vede che fissando il peso (W) $T_R$ decresce all'aumentare di L/D. *Quando L/D è massimo $T_R$ è minimo* (Fig. 5.12 c). Il rapporto portanza / resistenza è uno dei parametri più importanti per le performances (prestazioni) di un velivolo. È una misura diretta dell'efficienza di un aeroplano. Il rapporto portanza / resistenza è lo stesso del rapporto $C_L/C_D$ infatti:

$$\frac{L}{D} = \frac{\frac{1}{2}\rho V^2 S C_L}{\frac{1}{2}\rho V^2 S C_D} = \frac{C_L}{C_D} \qquad (5.16)$$

Visto che $C_L$ e $C_D$ sono entrambi funzioni dell'angolo d'attacco $\alpha$ lo sarà anche il rapporto L/D. in Fig. 5.13 viene mostrato l'andamento di L/D con $\alpha$ per un generico velivolo. Comparando le due curve 5.12 e 5.13 si vede che il punto 2 in entrambe le figure corrisponde al valore massimo di L/D ($L/D_{max}$). L'angolo d'attacco in questa condizione verrà indicato con $\alpha_{(L/D)max}$ la velocità di volo con $V_{(L/D)max}$ che corrisponde alla velocità per la quale $T_R$ è minimo.

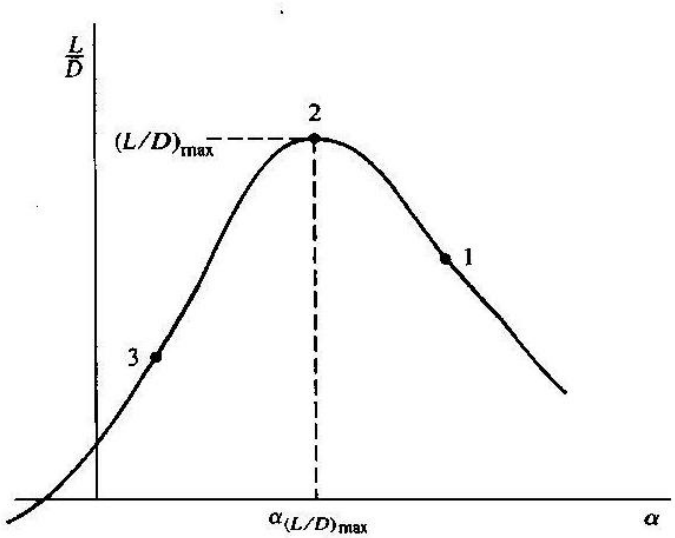



Fig. 5.13

Consideriamo un aeroplano in volo livellato stazionario ad una data altitudine, con la sua curva di spinta richiesta data dalla curva generica in Fig. 5.12c. Se la sua velocità è alta per esempio al punto 3 della Fig 5.12c, allora il suo angolo d'attacco è basso, punto 3 in Fig. 5.13. Come si vede (Fig.5.13) questa condizione è lontana dal massimo L/D. Appena il velivolo rallenta ci si muove dalla destra alla sinistra lungo la curva $T_R$ in fig. 5.12c e dalla sinistra alla destra lungo la curva L/D in Fig. 5.13. Un rallentamento del velivolo corrisponde ad un aumento dell'angolo d'attacco.

Partendo dal punto 3 in Fig. 5.13 L/D prima aumenta, raggiunge un massimo (punto 2) poi decresce. Guardando l' Eq. 5.15 si vede che di conseguenza $T_R$ prima decresce, raggiunge un minimo (punto 2 in Fig. 5.12c) e poi aumenta. Il punto 1 in Fig 5.12c e 5.13 corrisponde ad un valore di velocità bassa, un angolo d'attacco basso e un valore di L/D lontano dal valore massimo. Quando si osserva la curva $T_R$, è utile ricordare che ogni punto della curva corrisponde ad un differente angolo d'attacco ed ad un differente rapporto L/D. Per esseri più specifici, consideriamo l'aeroplano dell'esempio precedente con i dati corrispondenti in tabella 5.1. La variazione di L/D con V può essere facilmente trovata dividendo $C_L$ per $C_D$ entrambi riportati in tabella 5.1. I risultati sono riportati in Fig. 5.14.
La resistenza (quindi $T_R$) per un dato aeroplano in volo livellato stazionario è funzione della quota (h),della velocità di volo e del peso del velivolo.

$$D = f(h,V,W) \qquad (5.17)$$

Infatti quando cambia la quota h cambia la densità ρ, quindi cambia D; quando cambia V chiaramente cambia D; quando cambia il peso W cambia la portanza e di conseguenza la resistenza indotta (termine della resistenza dovuto alla portanza) e quindi D.

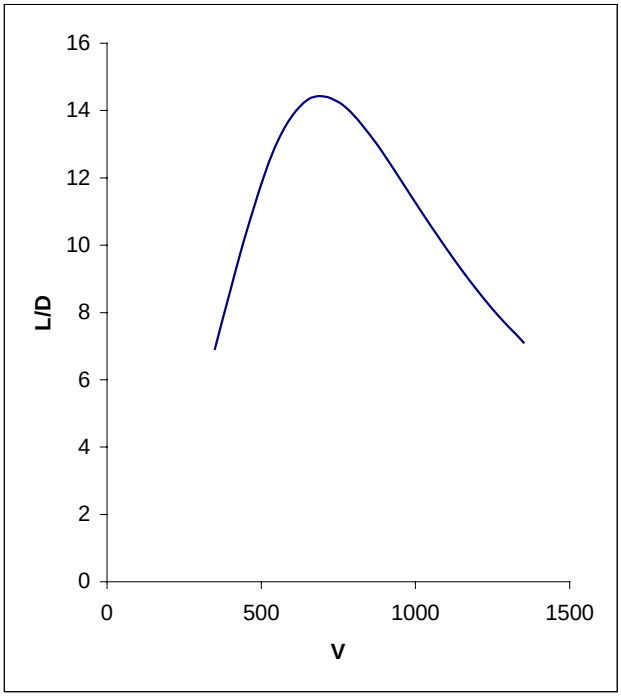



Fig. 5.14

Un'espressione per la resistenza che espliciti la dipendenza dalla densità (altitudine) velocità e peso è facilmente ottenibile dall'espressione della polare:

$$D = qSC_D = qS\left(C_{Do} + KC_L^2\right) \qquad (5.18)$$

e considerando l'equilibrio portanza-peso :

$$\mathrm{L} = \mathrm{W} = \mathrm{qSC_L} = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L$$

$$C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S} \qquad (5.19)$$

Sostituendo l'equazione (5.19) nella (5.18)

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left[C_{Do} + 4K\left(\frac{W}{\rho V^2 S}\right)^2\right]$$

$$\boxed{D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{Do} + \frac{2KS}{\rho V^2}\left(\frac{W}{S}\right)^2} \qquad (5.20)$$

Dalla equazione 5.20, che esprime la resistenza di un velivolo in funzione della velocità ad una certa quota si vede come la resistenza stessa dipende da due fattori, uno proporzionale al quadrato della velocità (resistenza parassita) ed uno dipendente dall'inverso del quadrato della velocità (resistenza dipendente dalla portanza).
Si può anche evidenziare come il primo dipende da CDo e da S, cioè dall'area parassita equivalente CDo S= f ed il secondo dipende dall'allungamento (in K) e dal peso W.
Ovviamente c'è anche la dipendenza della densità (quota).

Se si scrive la 5.20 come

$$D = T_{no} = \frac{1}{2}\rho f\, V^2 + \frac{2}{\rho}\frac{W^2}{S}\frac{1}{\pi A\, Re}\frac{1}{V^2}$$

$$\boxed{D = T_{no} = aV^2 + b\frac{1}{V^2}} \qquad (5.21)$$

con $a = \frac{1}{2}\rho f$ (5.22)

$$b = \frac{2}{\rho}\frac{W^2}{S}K = \frac{2}{\rho}\frac{W^2}{S}\frac{1}{\pi \cdot A\, Re} \qquad (5.23)$$

Il minimo di tale funzione si ottiene se $d(T_{no})/dV=0$, $d(D)dV=0$ cioè =>

$$2aV-2b\,(1/V^3)=0$$

quindi, $aV^2 = b/(V^2)$

cioè si avrà il minimo della resistenza quando i due contributi di res. indotta e resist. parassita sono uguali (ritroviamo il risultato del par. 5.3.1.

La minima resistenza corrisponderà all'assetto di massima efficienza $E_{max} = \frac{W}{D_{min}}$ (essendo L=W).

Se il contributo di resistenza indotta è uguale a quello di resistenza parassita, vuol dire che in questa condizione, quindi :

$$CDo=KCL^2 \qquad (5.24)$$

ed è possibile ricavare il CL a questo assetto (che chiameremo punto E della polare, cioè il punto di massima efficienza).

Infatti dalla 5.24 si può ricavare :

$$\boxed{CL_E = \sqrt{\frac{CDo}{K}} = \sqrt{\pi \cdot AR \cdot e \cdot CDo}} \qquad (5.25)$$

Questa è l'espressione del CD del punto E, cioè del punto (dell'assetto) di massima efficienza del velivolo.
Il valore del CD a questo assetto sarà pari a

$$\boxed{CD_E = CDo + KCL_E{}^2 = 2\,CDo} \qquad (5.26)$$

Si può anche valutare l'efficienza massima del velivolo :

$$\boxed{E_{MAX} = E_E = \frac{CL_E}{CD_E} = \frac{\sqrt{\pi \cdot AR \cdot e \cdot CDo}}{2 \cdot CDo} = \sqrt{\frac{\pi}{4}\frac{AR \cdot e}{CDo}}} \qquad (5.27)$$

Dalla 5.25 è possibile ovviamente ricavare il valore della velocità corrispondente all'assetto di massima efficienza (o di minima resistenza) ad ogni quota (considerando la nota 5.13) :

$$\boxed{V_E = \sqrt{\frac{2}{\rho}}\sqrt{\frac{W}{S}}\sqrt{\frac{1}{CL_E}}} \qquad (5.28)$$

Si sono quindi ricavate le prime relazioni relative al primo punto caratteristico della polare di un velivolo.
Se si considera la polare generica di un velivoloin fig. 5.15, congiungendo ogni punto con l'origine, l'angolo formato dalla retta con l'asse x rappresenta proprio l'efficienza. Infatti si può scrivere che, indicando con $\chi$ l'angolo formato tra l'asse x e la retta in fig. 5.15 :

$$CL = CD\ tg\ \chi$$

e quindi $$tg\ \chi = \frac{CL}{CD} = E$$

E' quindi chiaro che il punto E della polare (punto di massima efficienza sarà rappresentato graficamente dal punto in cui la retta passante per l'origine è tangente alla polare. La figura 5.16 mostra tale punto sulla polare e fa vedere anche che, nell'assunzione della polare parabolica si ha $CD_E = 2 \cdot CDo$

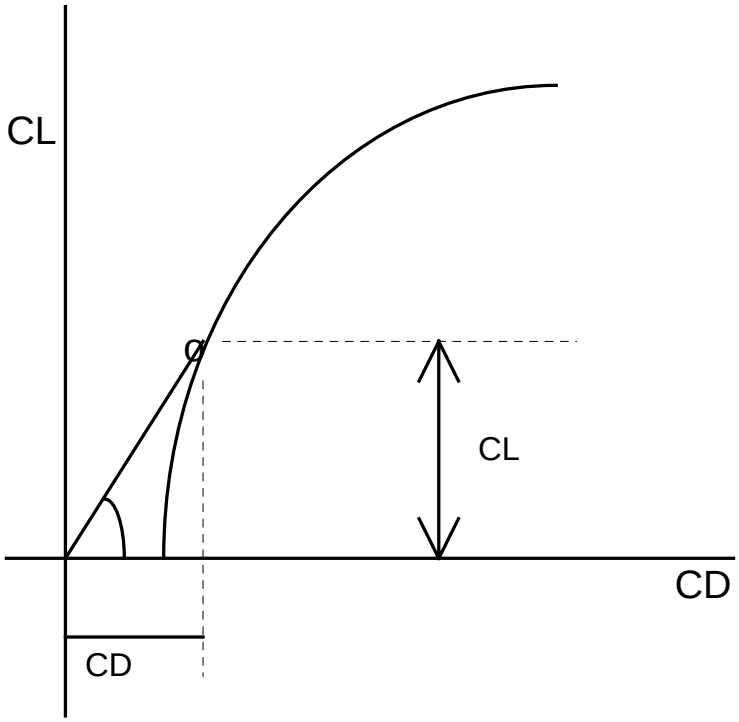



Fig. 5.15

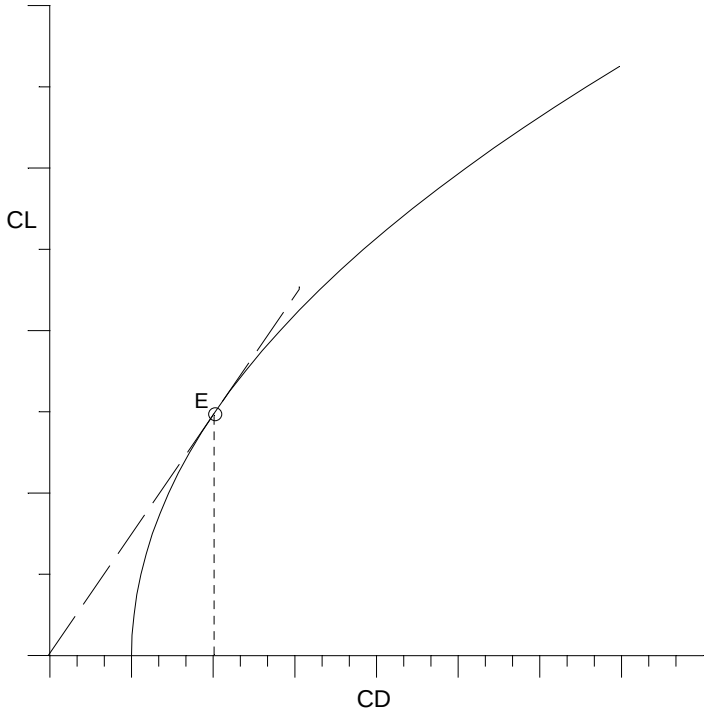



Fig. 5.16

### 5.3.3 INFLUENZA PESO E QUOTA

Se si considera la relazione L=W e la definizione di Efficienza aerodinamica, come E=L/D =CL/CD, si può giungere alla relazione che esprime la resistenza o la spinta necessaria al volo orizzontale :

$$D = T_{no} = \frac{W}{E} \qquad (5.29)$$

E' chiaro che si avrà la resistenza minima in corrispondenza dell'assetto di massima efficienza e si può vedere chiaramente che la minima resistenza di un velivolo è data dal peso del velivolo diviso la massima efficienza;

$$D_{min} = T_{no_min} = \frac{W}{E_{MAX}} \qquad (5.30)$$

Questa minima resistenza si otterrà ad un $CL = CL_E$ ed ad una velocità di volo che dipende dalla quota ed è data dalla 5.28.

E' facile vedere che se analizzo la curva della spinta necessaria (o della resistenza) di un velivolo a quote diverse, il minimo non cambia, perché la massima efficienza dipende solo dall'aerodinamica del velivolo, ed è quindi un cosiddetto PARAMETRO DI PROGETTO.
Quanto detto è riportato nella figura 5.17 che riporta la curva della resistenza di un velivolo a bassa e ad alta quota. La curva trasla verso destra (le velocità di volo aumentano in relazione alla relazione $V(z) = \frac{V_o}{\sqrt{\sigma}}$) e si stende, cioè non si ha solo una semplice traslazione.

E' importante anche sottolineare che ci sono alcuni parametri di un velivolo , come l'efficienza massima, la superficie S, il CDo, l'allungamento AR, che **sono parametri di progetto** del velivolo, cioè non variano durante il volo o la vita operativa del velivolo stesso.
La velocità di volo, la quota e la resistenza sono invece **parametri di volo**, in quanto dipendono strettamente dalle particolari condizioni di volo che stiamo analizzando

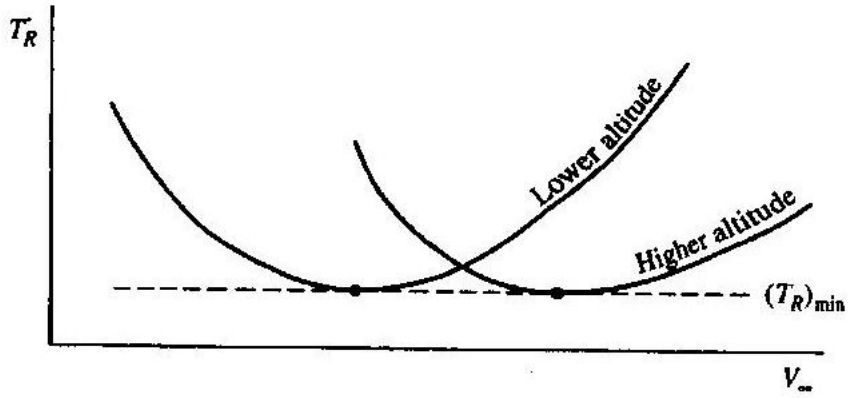



Fig. 5.17

E' chiaro che quindi ad ogni quota avrò una certa velocità di minima resistenza (velocità $V_E$ data dalla 5.28) che sarà tanto maggiore quanto maggiore è la quota.

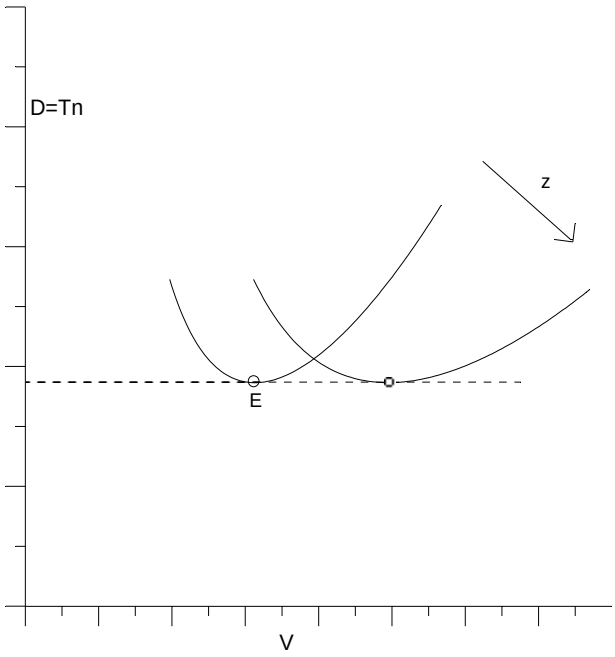



Fig. 5.18

Si può anche vedere facilmente qual è l'effetto di una variazione del peso del velivolo.
E' chiaro che, ad una certa quota, il minimo della curva si sposterà verso l'alto (come è facile vedere dalla 5.30) e traslerà anche verso destra (cioè aumenterà la velocità di minima resistenza $V_E$, come evidenziato dalla relazione 5.28, dove la velocità risulta dipendente dalla radice del peso del velivolo. Quanto detto è riassunto nella figura 5.19.

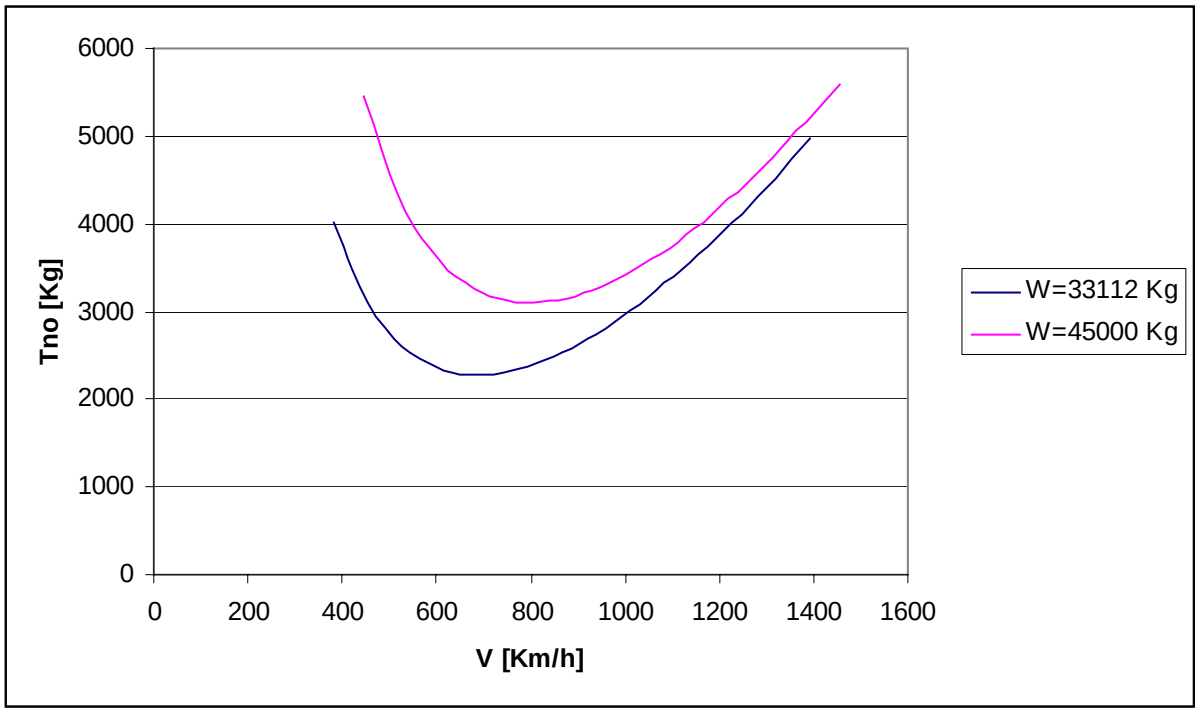



Fig. 5.19

## 5.4 Volo livellato – polari tecniche – POTENZA RICHIESTA

La potenza da un punto di vista meccanico è definita come l'energia (o il lavoro) nell'unità di tempo. Se considero quindi una forza necessaria a muovere un oggetto (potrebbe essere un corpo su un piano con un certo attrito) e l'oggetto muoversi ad una certa velocità V, per muovere lo stesso oggetto c'è bisogno di una certa potenza (pari a F V).
La potenza richiesta (o necessaria al volo orizzontale) per un velivolo sarà pari alla spinta richiesta al volo (pari alla resistenza) per la velocità di volo.
Quindi

$$\Pi_{no} = T_{no} \cdot V = D \cdot V \qquad (5.31)$$

### 5.4.1 APPROCCIO GRAFICO

Analogamente all'approccio seguito nel par. 5.3, possiamo andare a calcolare, sempre per il velivolo a getto Gulfstream, la potenza necessaria al volo orizzonatale.
Infatti è possibile andare a calcolare la potenza, una volta note la resistenza (o $T_{no}$) e la velocità.
Consideriamo consideriamo sempre il velivolo con peso pari a W=33112.8 Kg , S=88.2 $m^2$, b=22.9 m e quota pari a 9000 m. Il CDo=0.015 e il fattore di Oswald sia 0.80.
Il calcolo inizia da un valore di V pari alla velocità di stallo a quota z=9000 m, considerando che il $CL_{MAX}$ del velivolo in configurazione pulita è 1.40.
La potenza, moltiplicando la resistenza espressa in Kg per la velocità in Km/h, non condurrebbe ad una quantità dimensionalmente corretta. Infatti per ottenere la potenza dobbiamo moltiplicare la resistenza espressa in N (quindi la quinta colonna per 9.81) per la velocità in m/s (quindi la prima colonna diviso per 3.6). La potenza verrà ottenuta in Watt (Joule/s). Dividendo per 1000 otteniamo la potenza in KW, oppure possiamo anche convertirla in hp (cavalli). Il passaggio da KW a hp si avvale del fattore di conversione :
1 hp = 0.746 KW

| V [Km/h] | CL | CD | E | D=W/E [Kg] | Pno [KW] | Pno [hp] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 382,386 | 1,400 | 0,170 | 8,24 | 4019 | 4188 | 5614 |
| 418,386 | 1,169 | 0,123 | 9,50 | 3486 | 3974 | 5327 |
| 454,386 | 0,991 | 0,093 | 10,69 | 3096 | 3834 | 5139 |
| 490,386 | 0,851 | 0,072 | 11,78 | 2812 | 3757 | 5037 |
| 526,386 | 0,739 | 0,058 | 12,71 | 2606 | 3738 | 5011 |
| 562,386 | 0,647 | 0,048 | 13,45 | 2462 | 3772 | 5057 |
| 598,386 | 0,572 | 0,041 | 14,00 | 2365 | 3857 | 5170 |
| 634,386 | 0,509 | 0,035 | 14,35 | 2308 | 3990 | 5348 |
| 670,386 | 0,455 | 0,031 | 14,51 | 2283 | 4170 | 5590 |
| 706,386 | 0,410 | 0,028 | 14,49 | 2285 | 4398 | 5895 |
| 742,386 | 0,371 | 0,026 | 14,34 | 2310 | 4672 | 6263 |
| 778,386 | 0,338 | 0,024 | 14,06 | 2355 | 4994 | 6695 |
| 814,386 | 0,309 | 0,023 | 13,70 | 2417 | 5364 | 7191 |
| 850,386 | 0,283 | 0,021 | 13,27 | 2496 | 5783 | 7752 |
| 886,386 | 0,261 | 0,020 | 12,79 | 2588 | 6252 | 8381 |
| 922,386 | 0,241 | 0,020 | 12,29 | 2694 | 6772 | 9077 |
| 958,386 | 0,223 | 0,019 | 11,78 | 2812 | 7344 | 9844 |
| 994,386 | 0,207 | 0,018 | 11,26 | 2941 | 7970 | 10683 |
| 1030,386 | 0,193 | 0,018 | 10,75 | 3081 | 8650 | 11595 |
| 1066,386 | 0,180 | 0,018 | 10,25 | 3230 | 9387 | 12583 |
| 1102,386 | 0,168 | 0,017 | 9,77 | 3390 | 10182 | 13649 |
| 1138,386 | 0,158 | 0,017 | 9,31 | 3558 | 11037 | 14795 |
| 1174,386 | 0,148 | 0,017 | 8,87 | 3735 | 11952 | 16022 |
| 1210,386 | 0,140 | 0,017 | 8,45 | 3920 | 12931 | 17334 |
| 1246,386 | 0,132 | 0,016 | 8,05 | 4114 | 13974 | 18731 |

E' possibile riportare su un grafico il calcolo effettuato (fig. 5.20).

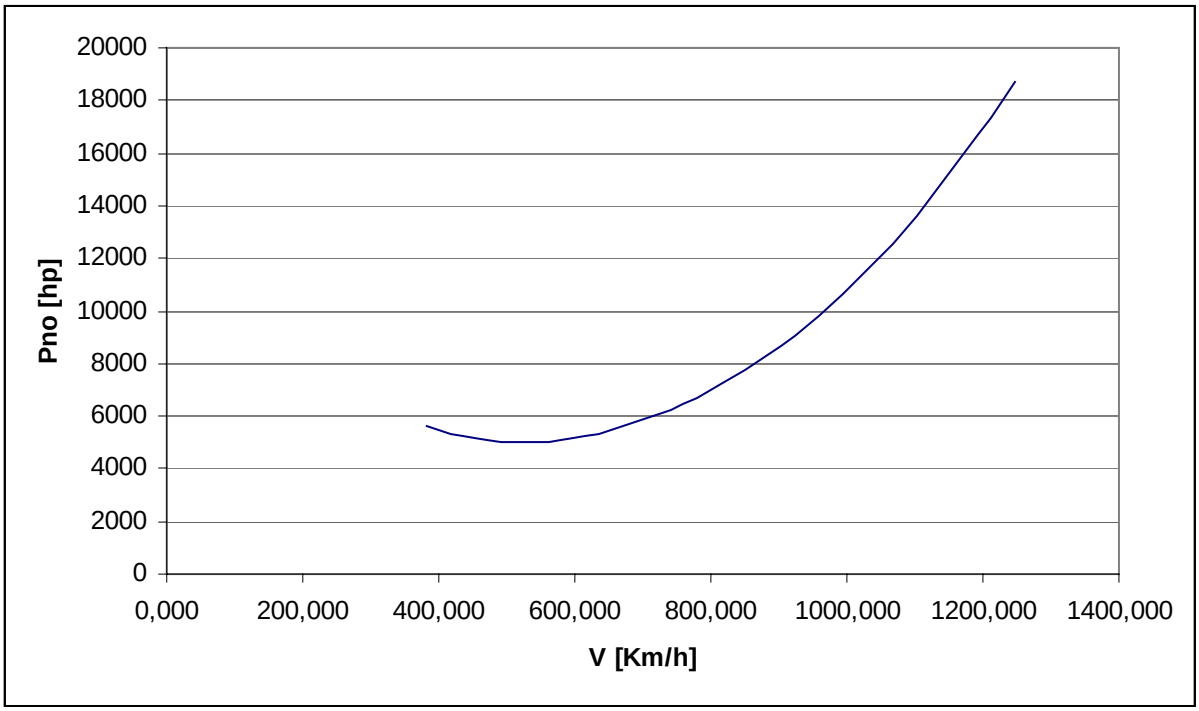



Fig. 5.20

Già ci rendiamo conto che la velocità (e quindi l'assetto CL) alla quota di 9000 m alla quale il velivolo ha la minima resistenza (massima Efficienza) NON E' anche l'assetto di minima potenza.
Dalla tabella e dal grafico di fig. 5.20, confrontato con quello di fig. 5.10 , si vede come la minima potenza necessaria al volo si ottiene a velocità molto più basse di quelle relative alla minima resistenza necessaria.
E' utile un approccio analitico per rendersi conto dei parametri che influenzano la potenza e di quali contributi si compone.

### 5.4.2 APPROCCIO ANALITICO

E' possibile ricavare l'espressione della potenza necessaria:

$$\Pi_{no} = D \cdot V = \frac{1}{2}\rho \cdot V^2 \cdot S \cdot (CDo + KCL^2) \cdot V$$

$$\Pi_{no} = \frac{1}{2}\rho \cdot CDo \cdot S \cdot V^3 + \frac{1}{2}\rho \cdot S \cdot V^3 \cdot KCL^2$$

Ricordando che CL è legato alla velocità dalla relazione:

$$CL = \frac{2}{\rho}\frac{W}{S}\frac{1}{V^2}$$

Si ottiene l'espressione per la potenza necessaria in funzione della velocità V :

$$\boxed{\Pi_{no} = \frac{1}{2}\rho \cdot CDo \cdot S \cdot V^3 + \frac{2}{\rho} \cdot S \cdot K \cdot \left(\frac{W}{S}\right)^2 \cdot \frac{1}{V}} \qquad (5.32)$$

Quindi si vede come la potenza necessaria dipende da due contributi, uno legato al cubo della velocità ed uno legato all'inverso della velocità.
Analogamente a quanto fatto per la resistenza, si può parlare di "potenza parassita" per il primo termine e di "potenza indotta", o "potenza dipendente dalla portanza" per il secondo termine.
In effetti allo stesso risultato saremmo giunti se, considerando la 5.21 e moltiplicandola per V, potevamo ottenere :

$$\boxed{\Pi_{no} = D \cdot V = (a \cdot V^2 + \frac{b}{V^2}) \cdot V = a \cdot V^3 + \frac{b}{V}} \qquad (5.33)$$

E' possibile vedere analiticamente a cosa corrisponde l'assetto di minima potenza.

Derivando la 5.33 rispetto alla velocità e ponendo l'espressione =0 (per trovare il minimo), otteniamo:

$\frac{d\Pi_{no}}{dV} = 3 \cdot a \cdot V^2 - \frac{b}{V^2} = 0$ che può diventare:

$3 \cdot a \cdot V^2 = \frac{b}{V^2}$ => $3 \cdot Do = Di$

cioè in corrispondenza del punto P la resistenza dipendente dalla portanza è pari 3 volte la resistenza parassita.
Analogamente avremo che :

$$\boxed{CDi = K \cdot CL^2 = \frac{CL^2}{\pi \cdot AR \cdot e} = 3 \cdot CDo} \qquad (5.34)$$

Quindi, mentre per il punto di minima resistenza avevamo che CDo=Cdi, ora abbiamo che in corrispondenza del punto di minima potenza necessaria al volo abbiamo :

$CDi = 3 \cdot CDo$ CD=4CDo

Chiameremo l'assetto (il CL e la velocità ad ogni quota) di minima potenza con la lettera P.
In corrispondenza di tale assetto, per quanto espresso dalla 5.34 avremo che :

$$CL_P = \sqrt{\frac{3 \cdot CDo}{K}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{\pi \cdot AR \cdot e \cdot CDo} \qquad (5.35)$$

o meglio :

$$\boxed{CL_P = \sqrt{3} \cdot CL_E = 1.73 \cdot CL_E} \qquad (5.36)$$

$$\boxed{CD_P = 4 \cdot CDo} \qquad (5.37)$$

E' possibile anche valutare l'efficienza in P:

$$E_P = \frac{CL_P}{CD_P} = \frac{\sqrt{3}\cdot CL_E}{4\cdot CDo} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{CL_E}{CD_E}$$

$$\boxed{E_P = \frac{\sqrt{3}}{2}E_{MAX} = 0.866\cdot E_{MAX}} \qquad (5.38)$$

Chiaramente è possibile anche valutare la velocità relativa al punto P, cioè la velocità di minima potenza necessaria

$$\boxed{V_P = \sqrt{\frac{2}{\rho}}\sqrt{\frac{W}{S}}\sqrt{\frac{1}{CL_P}} = \sqrt{\frac{2}{\rho}}\sqrt{\frac{W}{S}}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}\cdot CL_E}} = \frac{V_E}{\sqrt[4]{3}} = \frac{V_E}{1.32}} \qquad (5.39)$$

Quindi le velocità del punto E (massima efficienza o anche minima resistenza) e P (minima potenza necessaria al volo) sono legate dalla radice quarta di 3.
Ciò è anche abbastanza intuitivo se si riflette sul fatto che i due CL sono legati dal fattore $\sqrt{3}$ e che il legame tra velocità e CL è dato dalla 5.13-a.

La 5.33 può essere descritta graficamente dalla fig. 5.21. Si vede anche graficamente che in corrispondenza del minimo della curva della potenza necessaria il contributo dipendente dalla portanza (che va a decrescere come 1/V) è 3 volte quello "parassita".

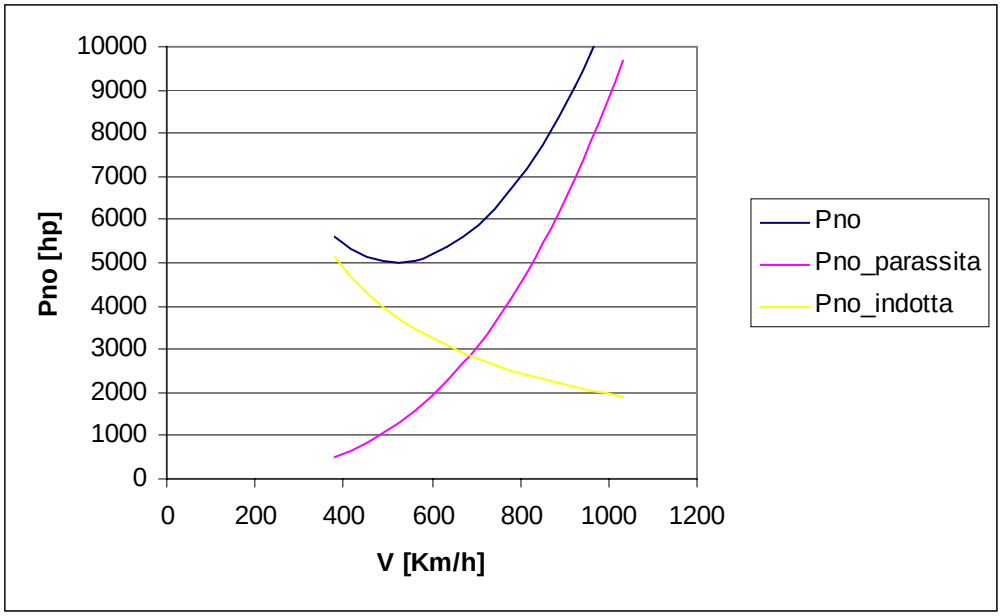



Fig. 5.21

La figura 5.22 mostra il punto di minima potenza sulla polare parabolica del velivolo.

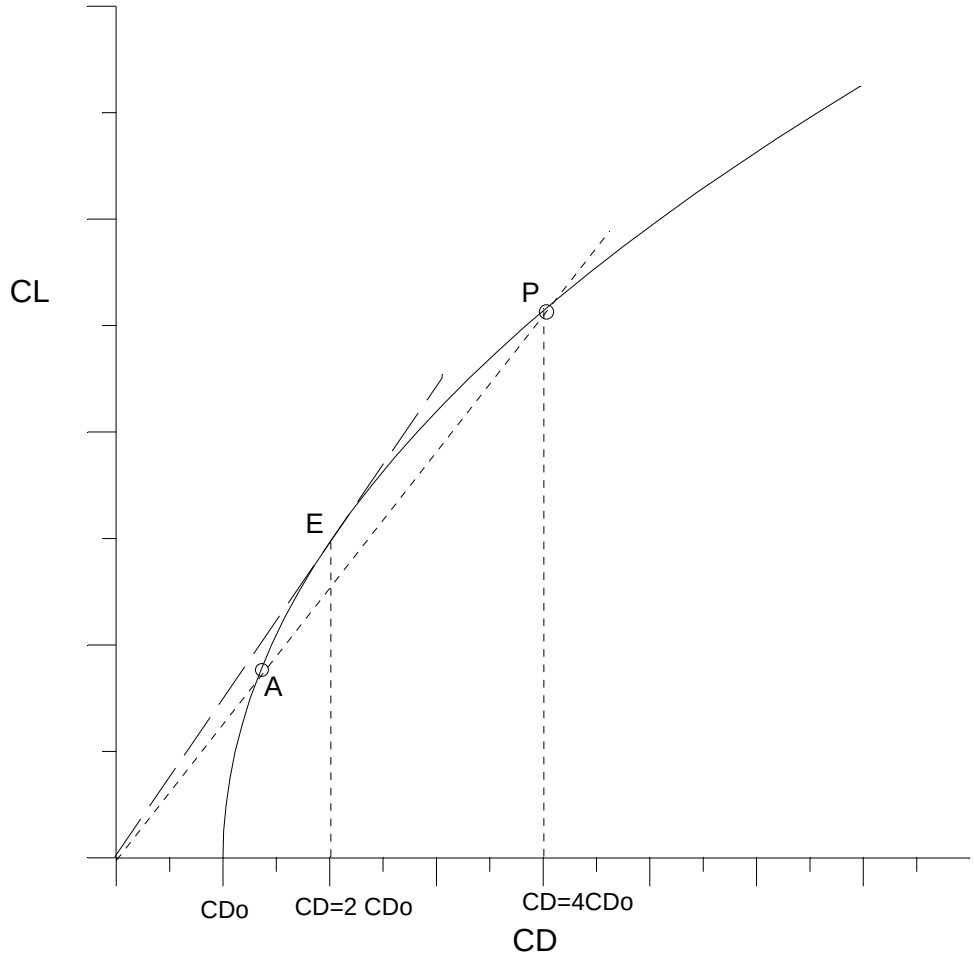



Fig. 5.22

### 5.4.3 CONDIZIONE DI VOLO DI MINIMA POTENZA

Si può anche ricavare una altra relazione che descrive il punto P di minima potenza necessaria al volo orizzontale.
Se ricordiamo la 5.29 :

$$D = T_{no} = \frac{W}{E}$$

è facile vedere che la potenza necessaria èlegata al rapporto (E/V):

$$\boxed{\Pi_{no} = T_{no} \cdot V = \frac{W}{E} V = \frac{W}{(E/V)}} \qquad (5.40)$$

Quindi la condizione di minima potenza deve coincidere col massimo del rapporto (E/V);

$$\boxed{\Pi_{no_MIN} => \left(\frac{E}{V}\right)_{MAX}} \qquad (5.41)$$

E' possibile ricavare anche una relazione che mette in evidenza la dipendenza della potenza necessaria dai coefficienti aerodinamici e quindi dall'assetto, infatti :

$$\Pi_{no} = \frac{W}{E} V = W \cdot \frac{CD}{CL} \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \sqrt{\frac{W}{S}} \cdot \sqrt{\frac{1}{CL}}$$

$$\boxed{\Pi_{no} = \sqrt{\frac{2}{\rho_o \sigma}} \cdot \sqrt{\frac{1}{S}} \cdot W^{3/2} \cdot \frac{CD}{CL^{3/2}}} \qquad (5.42)$$

Quindi la potenza necessaria al volo dipende dal peso (in maniera più forte rispetto alla resistenza, dato che la resistenza dipende dal peso con potenza 1 e la potenza con potenza 3/2), dalla superficie alare (la spinta necessaria dipende invece solo dal peso e dall'efficienza E), dalla quota (la resistenza non dipendeva dalla quota) e dal rapporto $CL^{3/2}/CD$.

Quindi si può vedere che l'assetto di minima potenza :

$$\boxed{\Pi_{no_MIN} = \sqrt{\frac{2}{\rho_o}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \cdot \frac{1}{\sqrt{S}} \cdot W^{3/2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{CL^{3/2}}{CD}\right)_{MAX}}} \qquad (5.43)$$

$$\boxed{\Pi_{no_MIN} => \left(\frac{CL^{3/2}}{CD}\right)_{MAX} = \left(E \cdot \sqrt{CL}\right)_{MAX}} \qquad (5.44)$$

La 5.41 e la 5.43 sono facilmente correlabili se si ricorda che la velocità V è legata a $1/\sqrt{CL}$ .
Nel paragrafo 5.6 saranno ricavate di nuovo le caratteristiche del punto P (pagg. 24-25) della polare, semplicemente derivando l'espressione $\left(\frac{CL^{3/2}}{CD}\right)$.

### 5.4.4 EFFETTO QUOTA

Se si ripete il calcolo relativo al velivolo Gulfstream non più a quota pari a 9000 m, ma a livello del mare, si ottiene un'altra curva.
Il grafico di fig. 5.23 chiarisce l'effetto della quota sulla curva di potenza.

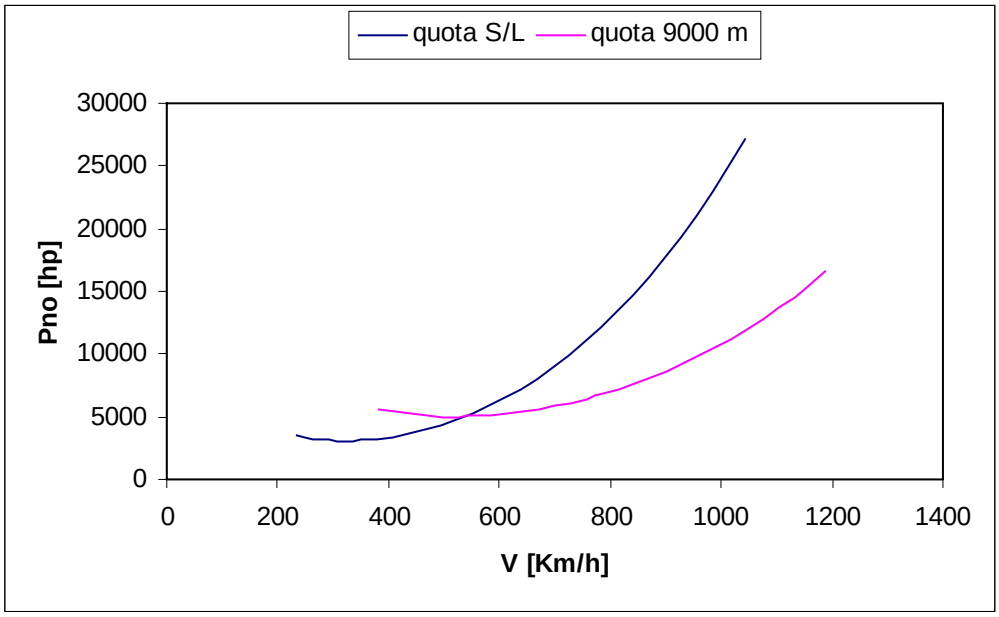



Fig. 5.23

Si vede come passando dal livello del mare (S/L) a quota pari a 9000 m, la curva di potenza si sposta verso destra (tutte le velocità aumentano in relazione a $1/\sqrt{\sigma}$ ) e verso l'alto.
La relazione 5.42 mostra chiaramente come la potenza (ad esempio il minimo) dipenda da $1/\sqrt{\sigma}$ .

Sulla curva di potenza necessaria è facile individuare, oltre al minimo (punto P) anche il punto di minima resistenza (punto E).
Infatti, se sulla curva di potenza necessaria, collego ogni punto con l'origine, detto $\psi$ l'angolo che tale retta forma con l'asse delle x (vedi fig. 5.24) , sarà valida la formula :

$$\Pi_{no} = V \cdot \tan\psi$$

da cui $\tan\psi = T_{no} = D$

E' quindi chiaro che il punto di minima resistenza sarà il punto in cui la retta passante per l'origine sarà tangente alla curva della potenza necessaria.
Quindi è possibile individuare sulla fig. 5.24 il punto di minima resistenza (punto E).
E' anche chiaro come, se si ritorna alle figg. 5.17-5.18 , essendo la spinta necessaria (la resistenza) minima indipendente dalla quota, le curve della potenza necessaria alle varie quote si muoveranno in modo da rimanere sempre tangenti alla stessa retta.
La fig. 5.25 mostra come le curve si muovono ed il punto E ad ogni quota si muove verso destra , ma rimane sempre sulla stessa retta caratterizzata da

$$\psi_{MIN} = \mathrm{ATAN}(D_{MIN}) = \mathrm{ATAN}\left(\frac{W}{E_{MAX}}\right) \qquad (5.45)$$

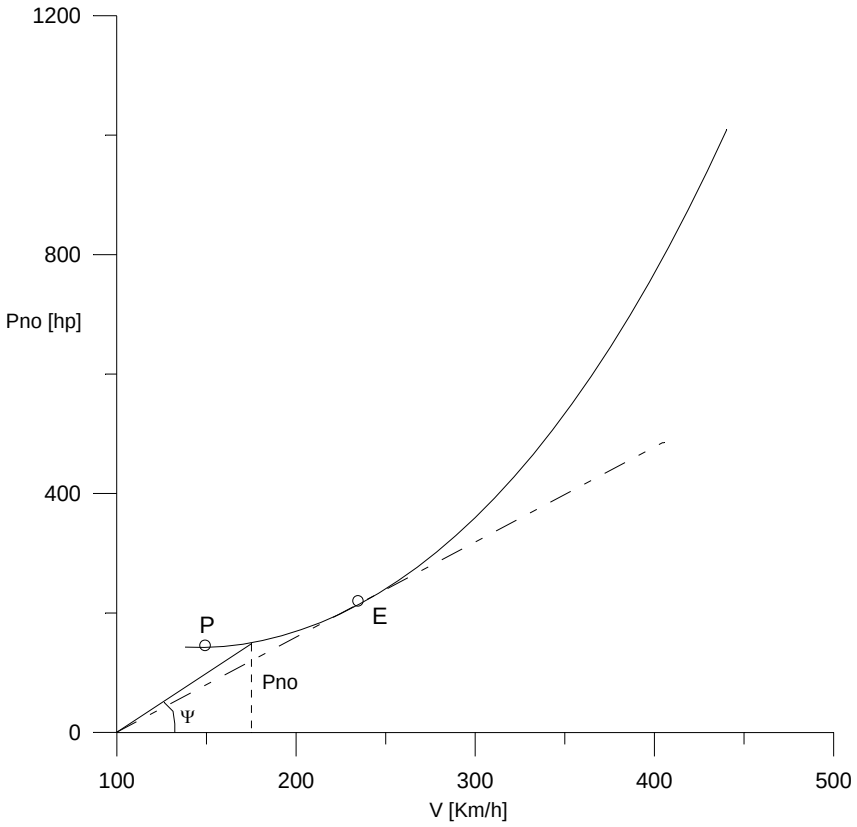



Fig. 5.24

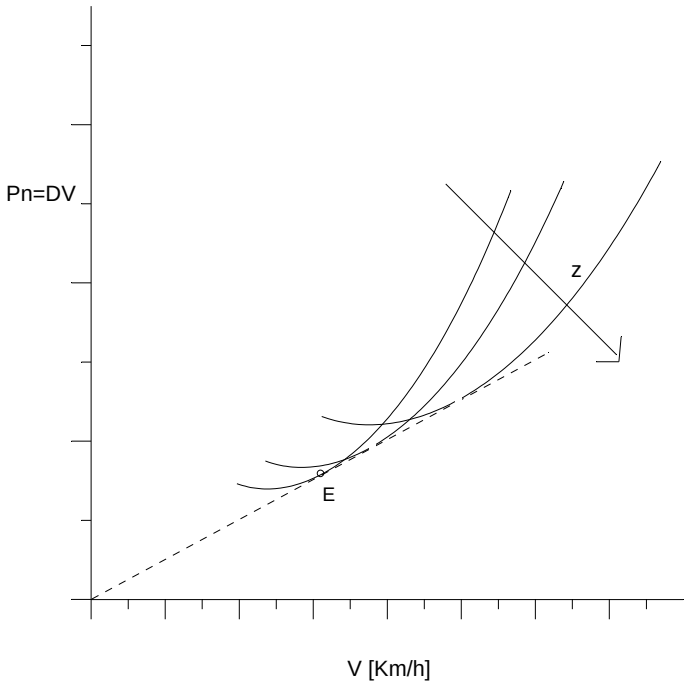



Fig. 5.25

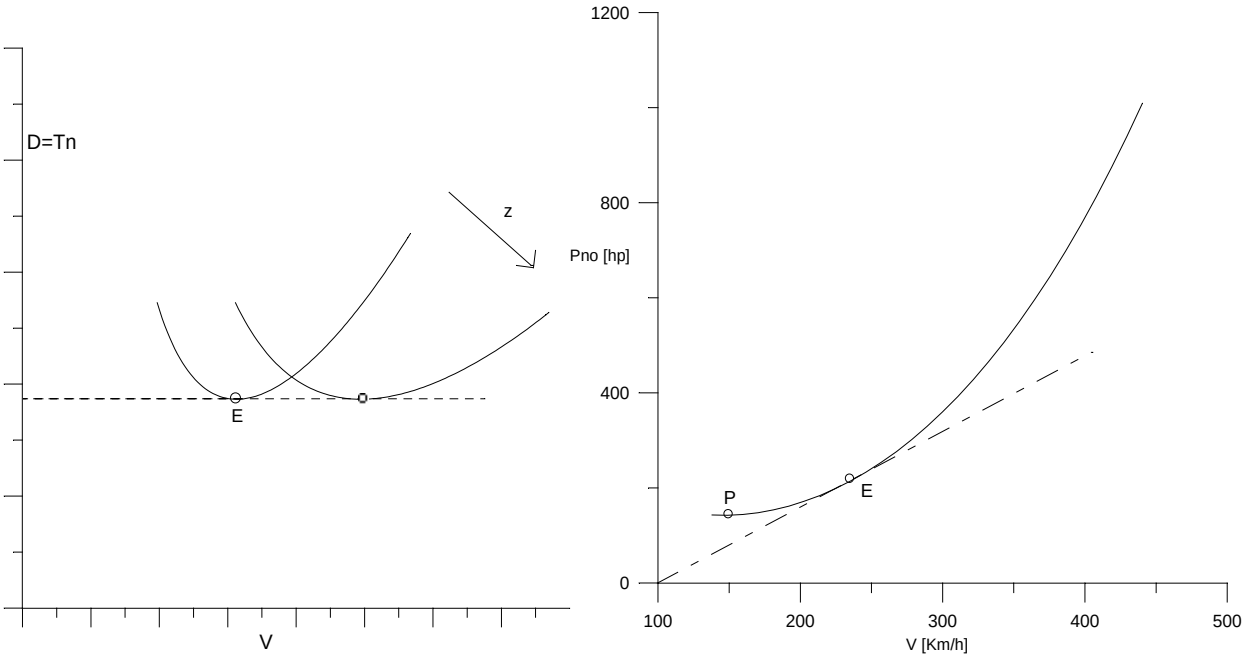
## 5.5 Volo livellato – PUNTO A - Minimo D/V

Nei paragrafi 5.3 e 5.4 abbiamo individuato i due punti caratteristici della polare.
Il punto E è il punto (l'assetto) di minima resistenza, o anche di minima spinta necesssaria al volo livellato. Tale punto è caratterizzato dal massimo del rapporto CL/CD, cioè dal valore massimo dell'Efficienza aerodinamica.
Nel paragrafo 5.4 abbiamo invece analizzato la potenza necessaria al volo ed abbiamo trovato il punto P, caratterizzato dall'assetto al quale la potenza necessaria al volo livellato è minima.
Il punto P è legato al rapporto (E/V) o anche ($E \cdot \sqrt{CL}$ ).
Il punto di minima potenza è legato (vedi 5.41 – 5.44) al massimo dei parametri :

$$\left(\frac{E}{V}\right)_{MAX} \Rightarrow \left(E \cdot \sqrt{CL}\right)_{MAX}$$

In effetti il punto di minima potenza è anche il punto di minimo ( $D \cdot V$ ) (dalla definizione stessa di potenza.

I due punti possono essere facilmente individuati sulle curve della spinta necessaria e della potenza necessaria (polari tecniche) :




Andiamo ora a ricavare un altro punto, che assumerà un significato fisico solo quando parleremo di autonomia dei velivoli a getto.

Avendo analizzato per il punto P il prodotto $E \cdot \sqrt{CL}$ , appare già logico provare ad analizzare il punto nel quale il prodotto ( $E \cdot V$ ) (anziché E/V come nel punto P) risulta massimo.

Facciamo anche notare come, se si analizza graficamente la curva della spinta necessaria al volo livellato ad una certa quota, il punto in cui la retta passante per l'origine va ad essere tangente alla curva della resistenza sarà il punto in cui il rapporto D/V è minimo (vedi fig. 5.26).

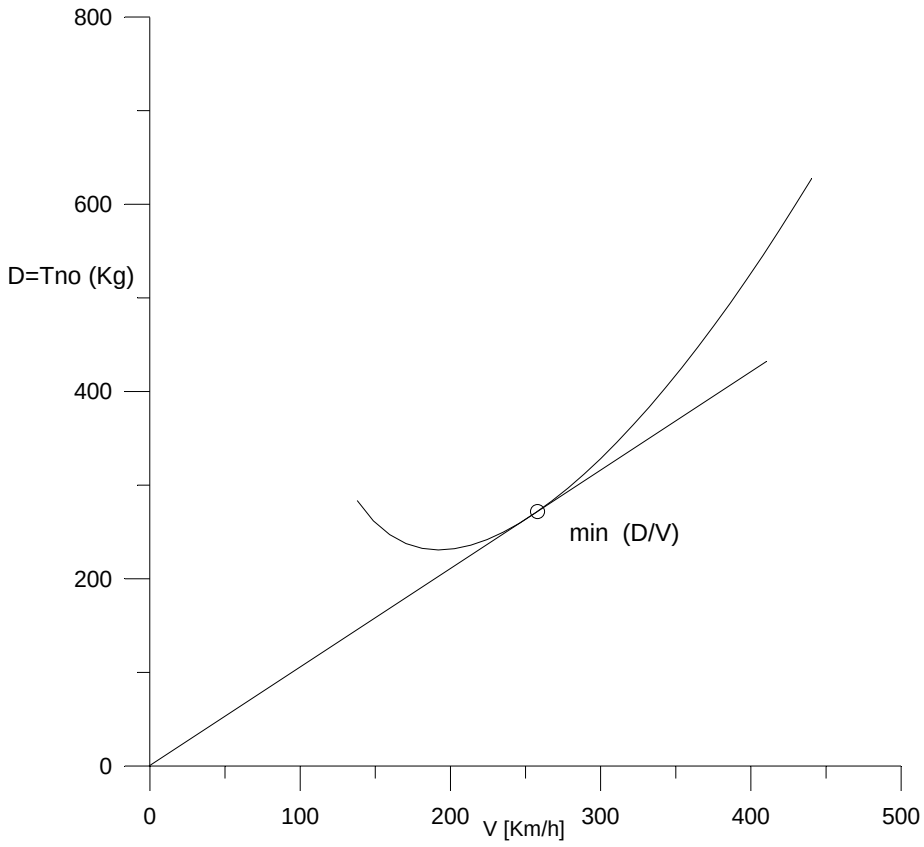



Fig. 5.26

Andiamo quindi ad analizzare il rapporto D/V.

Ricordando ancora la 5.21 :

$$T_{no} = D = a \cdot V^2 + \frac{b}{V^2}$$

si può analizzare il rapporto D/V

$$\frac{D}{V} = a \cdot V + \frac{b}{V^3}$$

Se vogliamo trovare l'assetto che fornisce $(D/V)_{MIN}$ deriviamo rispetto alla velocità :

$$\frac{d}{dV}\left(\frac{D}{V}\right) = a - 3\frac{b}{V^4} = 0$$

da cui ; $a = 3\frac{b}{V^4}$ o anche $\boxed{a \cdot V^2 = 3 \cdot \frac{b}{V^2}}$

E quindi ciò significa che Do=3 Di, cioè la resistenza "parassita" in corrispondenza di questo assetto è 3 volte la resistenza indotta (o meglio dovuta alla portanza.

Questo vuol dire anche che :

$$\boxed{CDo = 3 \cdot CDi = 3 \cdot K \cdot CL^2} \qquad (5.46)$$

Quindi è chiaro che in corrsipondenza di tale assetto, si avrà :

$$\boxed{CDi = \frac{1}{3} \cdot CDo} \qquad \text{ed anche} \qquad \boxed{CD = CDo + CDi = \frac{4}{3} \cdot CDo}$$

Indicando con la lettera A (da autonomia, perchè tale assetto sarà l'assetto di massima autonomia per I velivoli a getto) l'assetto di minimo D/V, possiamo ricavare l'espressione del CL in corrispondenza di tale assetto:

$$CL_A = \sqrt{\frac{CDo}{3 \cdot K}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\pi \cdot AR \cdot e \cdot CDo}$$

o meglio :

$$\boxed{CL_A = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot CL_E = \frac{CL_E}{1.732}} \qquad (5.47)$$

Notiamo che come per il passaggio da E a P si motiplica il CL per $\sqrt{3}$, così per il passaggio da E ad A si divide per $\sqrt{3}$.

Possiamo anche ricavare l'efficienza aerodinamica in A:

$$\boxed{E_A = \frac{CL_A}{CD_A} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{CL_E}{CDo} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{CL_E}{CD_E} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot E_{MAX}} \qquad (5.48)$$

Quindi l'efficienza nel punto A è uguale a quella nel punto P ed è pari a $\sqrt{3}/2 = 0.866$ volte quella massima.

Ovviamente, per quanto riguarda il CD in A:

$$\boxed{CD_A = \frac{4}{3} CDo} \qquad (5.49)$$

Ovviamente, per quanto riguarda la velocità nel punto A, per quanto espresso dalla 5.47 si può ottenere :

$$\boxed{V_A = \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \sqrt{\frac{W}{S}} \cdot \sqrt{\frac{1}{CL_A}} = \frac{V_E}{\sqrt[4]{3}} = \frac{V_E}{1.32}} \qquad (5.50)$$

Il punto A sarà individuato sulla polare del velivolo come in figura 5.27.

Si noti come il punto A e P si trovano sulla stessa retta passante per l'origine, perché caratterizzati dalla stessa efficienza aerodinamica.

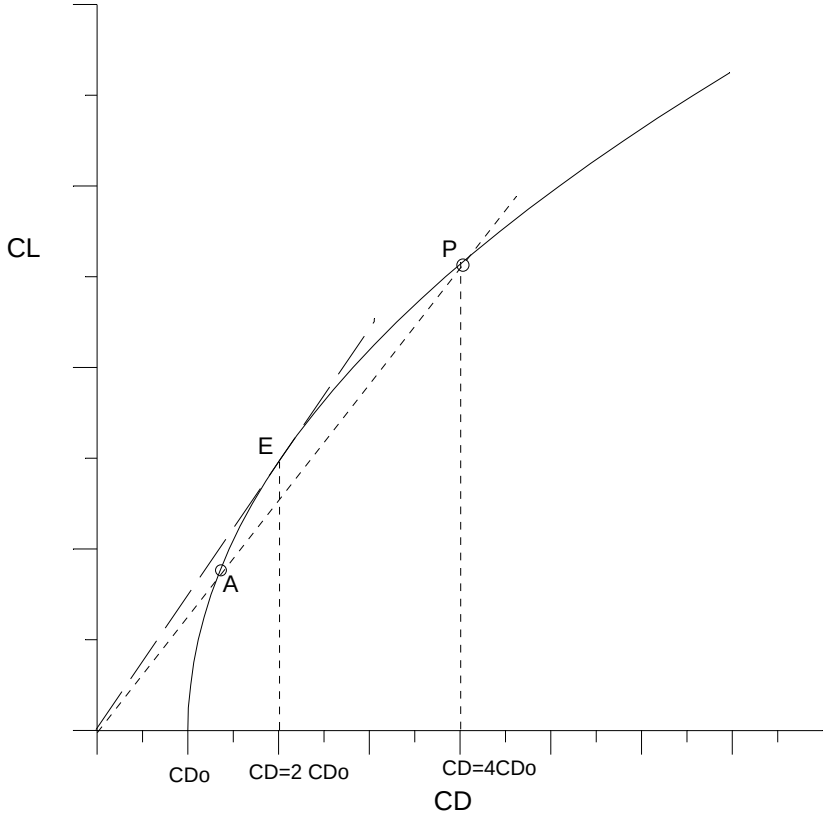



Fig. 5.27

## 5.6 PUNTI CARATTERISTICI DELLA POLARE – Relazioni analitiche

Abbiamo ricavato i 3 punti caratteristici A,E,P in basea considerazioni fisiche, andando a coinvolgere le relazioni della resistenza o della potenza ed andando a derivare.

E' chiaro che le caratteristiche di ogni punto possono essere ricavate anche per via analitica, considerando solo l'espressione della polare parabolica e quindi non coinvolgendo quelle che sono le caratteristiche di massa e geometriche (S) del velivolo.

**PUNTO E**

L' equazione (5.24) per $(L/D)_{max}$ è stata derivata da una considerazione di minimizzazione della spinta richiesta in volo livellato stazionario. In realtà l'equazione.(5.24) è molto più generale, e lo stesso risultato può essere ottenuto da una semplice considerazione sul rapporto Portanza/Resistenza in maniera completamente indipendente da qualsiasi considerazione su $T_r$, come segue.
Il rapporto Portanza/Resistenza è:

$$\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{D}} = \frac{\mathbf{C_L}}{\mathbf{C_D}} = \frac{\mathbf{C_L}}{\mathbf{C_{Do} + KC_L^2}} \qquad [5.51]$$

Differenziando l' equazione (5.51) rispetto a $C_L$ è ponendola uguale a zero per ottenere il massimo rapporto $C_L/C_D$ si avrà:

$$\frac{\mathbf{d(C_L / C_D)}}{\mathbf{dC_L}} = \frac{\mathbf{C_{Do} + KC_L^2 - C_L(2KC_L)}}{\mathbf{(C_{Do} + KC_L^2)^2}} = \mathbf{0}$$

Quindi,

$$\mathbf{C_{Do} + KC_L^2 - 2KC_L^2 = 0}$$

oppure

$$\boxed{\mathbf{C_{Do} = KC_L^2}} \qquad [5.52]$$

Dall' equazione (5.52), si vede che, *quando L/D è massimo, il termine della resistenza a portanza nulla è uguale al termine della resistenza dovuto alla sola portanza*. Si può quindi trovare il valore di $(L/D)_{max}$ riscrivendo l' equazione (5.52) come

$$\mathbf{C_L = C_{L_E}} = \sqrt{\frac{\mathbf{C_{Do}}}{\mathbf{K}}} = \sqrt{\mathbf{C_{Do} \pi A\, Re}} \qquad [5.53]$$

dove $$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\pi}\mathbf{A\, Re}}$$

e inserendo le equazioni (5.52) e (5.53) nell' equazione (5.51). [Va ricordato che siccome le equazioni (5.52) e (5.53) valgono solo per la condizione $(L/D)_{max}$ l'espressione dell'equazione (5.51) ottenuta sostituendo le equazioni (5.51) e (5.52) porta all' espressione di $(L/D)_{max}$.]

$$\left(\frac{L}{D}\right)_{max} = \left(\frac{C_L}{C_{Do} + KC_L^2}\right)_{max} = \frac{\sqrt{C_{Do}/K}}{C_{Do} + C_{Do}} = \frac{\sqrt{C_{Do}/K}}{2C_{Do}}$$

oppure

$$\boxed{\left(\frac{L}{D}\right)_{max} = \left(\frac{C_L}{C_D}\right)_{max} = \sqrt{\frac{1}{4C_{Do}K}} = \sqrt{\frac{\pi A\, Re}{4C_D}}} \qquad [5.54]$$

Questo risultato è lo stesso che è stato ottenuto nell'equazione (5.24). Al contrario dell'equazione (5.24), però, in questa formulazione non sono state fatte assunzioni circa il volo livellato stazionario, e la minimizzazione di $T_r$. L'equazione (5.54) è del tutto indipendente da queste ipotesi. È un risultato del tutto *generale*, avendo a che fare solo con l'aerodinamica dell'aeroplano e con la sua polare. Lo stesso risultato vale sia se l'aeroplano stia virando, salendo, etc.
Comunque la velocità alla quale si raggiunge $(L/D)_{max}$ *è* dipendente da tali considerazioni. Questa velocità sarà differente per volo in salita o in virata rispetto a quella in volo livellato stazionario. Otteniamo la velocità alla quale, in volo livellato stazionario, si ottiene $(L/D)_{max}$. In questo caso L=W, e quindi

$$L = W = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \qquad [5.55]$$

Quando L/D è massimo vale l'equazione (5.53). Sostituendo quest'ultima nell'equazione (5.55) e chiamando con $V_{(L/D)max}$ la velocità alla quale L/D è massimo otteniamo:

$$W = \frac{1}{2}\rho V_{(L/D)_{max}}^2 S\sqrt{\frac{C_{Do}}{K}} \qquad [5.56]$$

o

$$\frac{W}{S} = \frac{1}{2}\rho V_{(L/D)_{max}}^2 \sqrt{\frac{C_{Do}}{K}} \qquad [5.57]$$

Risolvendo l'equazione (5.57) rispetto alla velocità abbiamo

$$\boxed{V_{(L/D)_{max}} = \left(\frac{2}{\rho}\sqrt{\frac{K}{C_{Do}}}\frac{W}{S}\right)^{1/2}} \qquad [5.58]$$

$$V_E = \sqrt{\frac{2}{\rho}\frac{W}{S}\frac{1}{C_{L_E}}}$$

L'equazione (5.58) è identica alla (5.28). Comunque l'equazione (5.28) era stata ottenuta partendo dall'ipotesi di spinta minima mentre l'equazione (5.34) è stata ottenuta sulla base di relazioni aerodinamiche che portavano alla massimizzazione del rapporto L/D in maniera del tutto indipendente da qualsiasi ipotesi sulla spinta. La sola restrizione sulle equazioni (5.28) e (5.58) è che esse valgono per volo dritto e livellato.
Il valore di $(L/D)_{max}$ e la velocità di volo a cui si ottiene sono parametri importanti nell'analisi dell' autonomia chilometrica e della durata di un dato aeroplano. Infatti, come mostreremo in seguito, l'

autonomia chilometrica massima per un aeroplano con propulsione a motoelica è direttamente proporzionale a $(L/D)_{max}$. L' autonomia chilometrica massima per un aereo con propulsione a getto è anch'essa proporzionale a $(L/D)_{max.}$
Questo fa capire come il rapporto L/D sia una misura dell'efficienza aerodinamica di un aeroplano.

**PUNTO P**

Vi sono altre quantità aerodinamiche che giocano un ruolo importante nelle prestazioni di un aereo. Per esempio si vedrà in seguito che l'autonomia di durata durata massima per una motoelica è proporzionale al massimo valore di $C_L^{3/2}/C_D$ e che l' autonomia chilometrica massima per un aereo a propulsione a getto è proporzionale a $C_L^{1/2}/C_D$. Vista l'importanza di questi rapporti, esaminiamo le relazioni aerodinamiche associate con essi.
Prima consideriamo $(C_L^{3/2}/C_D)$. Sostituendo $C_D$ con l'espressione della polare questo rapporto può essere scritto come:

$$\frac{C_L^{3/2}}{C_D} = \frac{C_L^{3/2}}{C_{Do} + KC_L^2} \qquad [5.59]$$

Derivando rispetto a $C_L$ ed eguagliando a zero per trovare il massimo di $(C_L^{3/2}/C_D)$ otteniamo:

$$\frac{d\left(C_L^{3/2}/C_D\right)}{dC_L} = \frac{\left(C_{Do} + KC_L^2\right)\left(\frac{3}{2}C_L^{1/2}\right) - C_L^{3/2}\left(2KC_L\right)}{C_{Do} + KC_L^2} = 0$$

$$\frac{3}{2}C_{Do} + KC_L^{1/2} + \frac{3}{2}KC_L^{5/2} - 2KC_L^{5/2} = 0$$

oppure

$$\boxed{C_{Do} = \frac{1}{3}KC_L^2} \qquad [5.60]$$

Dall'equazione (5.61) si vede che *quando $(C_L^{3/2}/C_D)$ è massimo, il contributo della resistenza a portanza nulla è uguale ad 1/3 del contributo della resistenza dovuta alla sola portanza*. Il valore di $(C_L^{3/2}/C_D)_{max}$ può essere trovato scrivendo l'equazione (5.60) come:

$$C_L = C_{L_P} = \sqrt{3C_{Do}/K} = \sqrt{3}C_{L_E} \qquad [5.61]$$

e sostituendo l'equazioni (5.60) e (5.61) nell'equazione (5.59) [Va ricordato che siccome le Eq. (5.60) e (5.61) valgono solo per la condizione $(C_L^{3/2}/C_D)_{max}$ l'espressione dell'Eq. (5.59) ottenuta con questa sostituzione vale solo per il valore massimo di $C_L^{3/2}/C_D$]

$$\left(\frac{C_L^{3/2}}{C_D}\right)_{max} = \left(\frac{C_L^{3/2}}{C_{Do} + KC_L^2}\right)_{max} = \frac{\left(3C_{Do}/K\right)^{3/4}}{C_{Do} + 3C_{Do}} = \frac{1}{4C_{Do}}\left(\frac{3C_{Do}}{K}\right)^{3/4}$$

oppure

$$\boxed{\left(\frac{C_L^{3/2}}{C_D}\right)_{max} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{KC_{Do}^{1/3}}\right)^{3/4}} \qquad [5.62]$$

Si noti che il massimo di $C_L^{3/2}/C_D$ è funzione solo della polare.
In volo dritto e livellato, dove L=W, la velocità alla quale è raggiunta la condizione $(C_L^{3/2}/C_D)_{max}$ può essere trovata come segue.

$$L = W - \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \qquad [5.63]$$

Quando $C_L^{3/2}/C_D$ è un massimo, vale l'equazione (5.61). Sostituendo l'equazione (5.61) nella (5.63) e denotando la velocità alla quale $C_L^{3/2}/C_D$ è massimo con $V_{(CL3/2/CD)max}$ , abbiamo:

$$W = \frac{1}{2}\rho V_{\left(C_L^{3/2}/C_D\right)_{max}} S\sqrt{\frac{3C_{Do}}{K}} \qquad [5.64]$$

Risolvendo l'equazione (5.64) per la velocità otteniamo

$$\boxed{V_{\left(C_L^{3/2}/C_D\right)_{max}} = \left(\frac{2}{\rho}\sqrt{\frac{K}{3C_{Do}}}\frac{W}{S}\right)^{1/2}} \qquad [5.65]$$

Confrontando l'equazione (5.65) con la (5.58) per $V_{(L/D)max}$ vediamo che

$$V_{\left(C_L^{3/2}/C_D\right)_{max}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1/4} V_{(L/D)_{max}}$$

oppure

$$\boxed{V_{\left(C_L^{3/2}/C_D\right)_{max}} = 0.76 V_{(L/D)_{max}} = \frac{V_E}{1.32}} \qquad [5.66]$$

Notiamo dall'equazione (5.66) che quando un aeroplano vola al $(C_L^{3/2}/C_D)_{max}$ sta volando più lentamente di quanto esso vola al $(L/D)_{max}$; infatti dall'equazione (5.66) si vede che la sua velocità è 0.76 volte la velocità al $(L/D)_{max}$.

**PUNTO A**

Consideriamo $(C_L^{1/2}/C_D)_{max}$.. Procedendo in maniera analoga a prima troviamo che per il massimo di $C_L^{1/2}/C_D$ si avrà

$$\boxed{C_{Do} = 3KC_L^2} \qquad [5.67]$$

Dall' equazione (5.67) si vede che *quando $C_L^{1/2}/C_D$ è massimo, il contributo della resistenza a portanza nulla è uguale a tre volte il contribito della resistenza dovuto alla sola portanza*. Il valore di $(C_L^{1/2}/C_D)_{max}$ è dato da:

$$\boxed{\left(\frac{C_L^{1/2}}{C_{Do}}\right)_{max} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3KC_{Do}^3}\right)^{1/4}} \qquad [5.68]$$

La velocità alla quale si ottiene $(C_L{}^{1/2}/C_D)_{max}$ è

$$\boxed{V_{\left(C_L^{1/2}/C_D\right)_{max}} = \left(\frac{2}{\rho}\sqrt{\frac{3K}{C_{Do}}}\frac{W}{S}\right)^{1/2}} \qquad [5.69]$$

Confrontando l'Eq.(5.69) con la (5.22) vediamo che

$$V_{\left(C_L^{1/2}/C_D\right)_{max}} = 3^{1/4} V_{(L/D)_{max}}$$

$$\boxed{V_{\left(C_L^{1/2}/C_D\right)_{max}} = 1.32 V_{(L/D)_{max}}} \qquad [5.70]$$

Dall' Eq.(5.70) si vede che quando l'aeroplano vola a $(C_L{}^{1/2}/C_D)_{max,}$ vola ad una velocità *maggiore* rispetto a $(L/D)_{max}$. Infatti dall'equazione (5.70) si vede che la sua velocità è 1.32 volte la velocità al $(L/D)_{max.}$

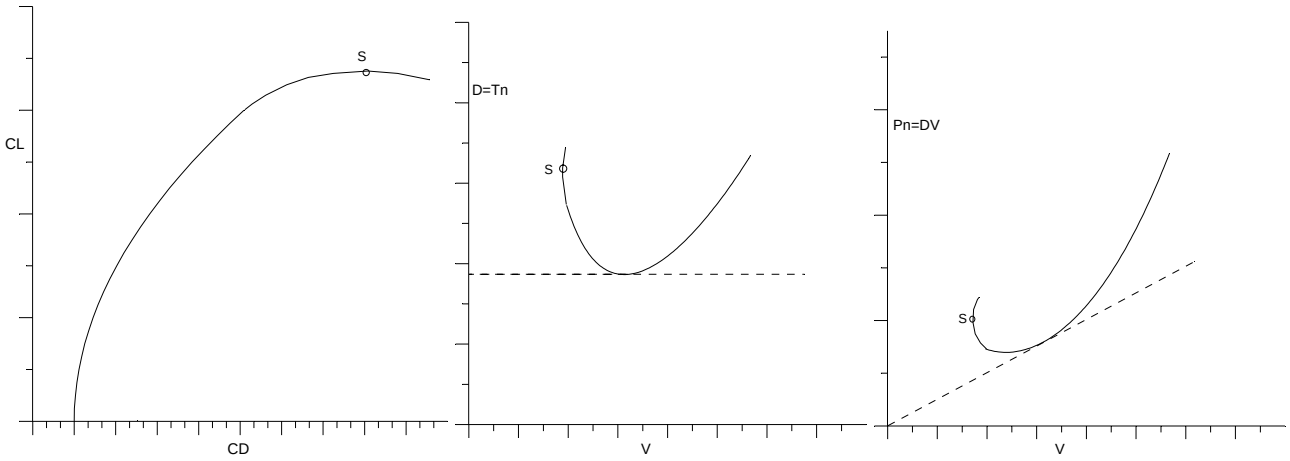
$$V_{\left(C_L^{3/2}/C_D\right)_{max}} < V_{(C_L/C_D)_{max}} < V_{\left(C_L^{1/2}/C_D\right)_{max}}$$

## 5.7 RIEPILOGO PUNTI CARATTERISTICI DELLA POLARE

Riportiamo un riepilogo dei punti caratteristici, andando anche a localizzarli sia sulla polare che sui diagrammi di spinta necessaria e potenza necessaria (polari tecniche).

**Stallo**

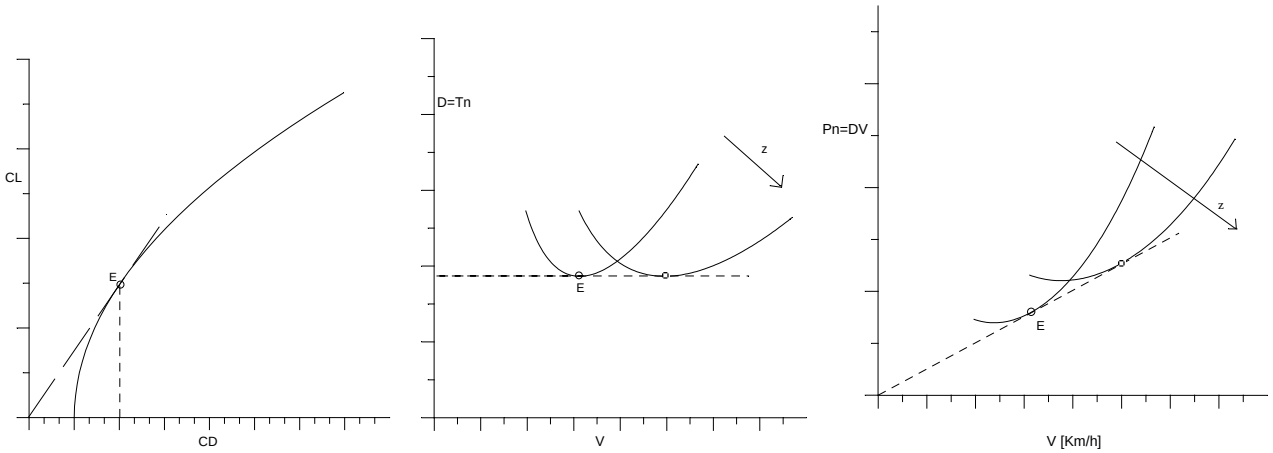
Corrisponde a $C_L=C_{L\,max}$ => $V=V_S=V_{min}$




**Massima efficienza**

$D_{min}$ => $E_{max}$ $\qquad C_{Di}=C_{Do}$ => $C_D=2\,C_{Do}$

$$C_{L\,E}=\sqrt{\pi\,AR_e\,C_{Do}} \qquad E_{max}=\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\frac{AR_e}{C_{Do}}\right)}=\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\frac{b_e^{\,2}}{f}\right)} \qquad V_E=\sqrt{\frac{2}{\rho}\frac{W}{S}\frac{1}{C_{L\,E}}}$$



**<u>Punto P – Minima potenza necessaria al volo orizzontale</u>**

$$\Pi_{min}=(T_{no}\ V)_{min} => (C_D\ V^3)_{min} => \left(\frac{C_D}{C_L}\frac{1}{\sqrt{C_L}}\right)_{min} => \left(E\sqrt{C_L}\right)_{max}$$

Difatti :

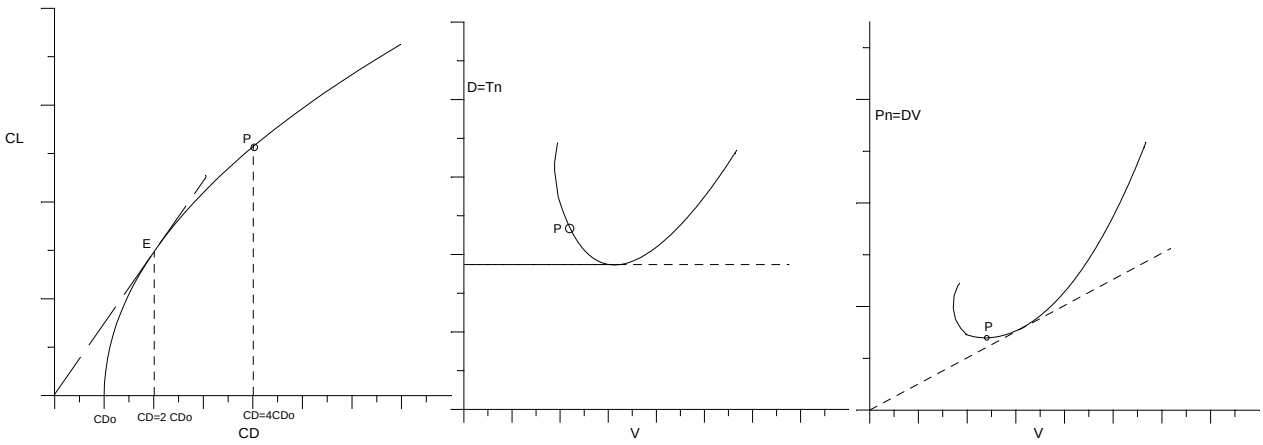
$$\Pi=\Pi_{no} = D\ V= \tfrac{1}{2}\ \rho\ S\ C_D\ V^3 \qquad \text{e poichè} \qquad V=\sqrt{\frac{2}{\rho}}\sqrt{\frac{W}{S}}\sqrt{\frac{1}{C_L}}$$

si ha : $\Pi=\sqrt{\frac{2}{\rho}}\sqrt{\frac{W^3}{S}}\frac{C_D}{C_L{}^{3/2}}$

$$\Pi_{min} => \left(\frac{C_L{}^{3/2}}{C_D}\right)_{max} => \left(E\sqrt{C_L}\right)_{max}$$

$D_i = 3\ D_o$ cioè $C_{Di} =3\ C_{Do}$ $\qquad C_D = 4\ C_{Do}$

$$C_{L\,P} = \sqrt{3\ \pi\ AR_e\ C_{Do}} = \sqrt{3}\ C_{L\,E} = 1.732\ C_{L\,E}$$



**Punto A => $(D/V)_{MIN}$ =$(T_{no}/V)_{MIN}$**

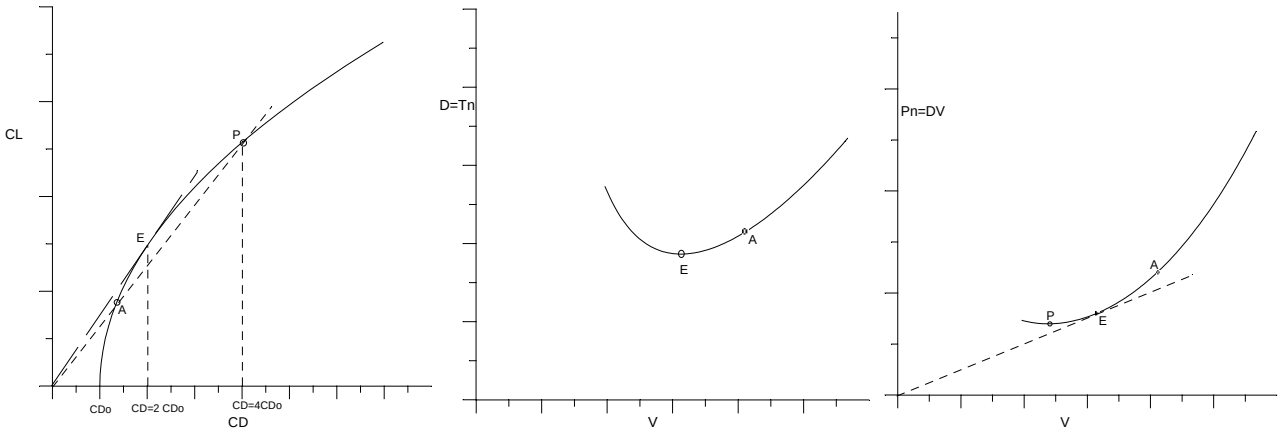
$$\left(\frac{T}{V}\right)_{min} \Rightarrow \left(C_D\, V\right)_{min} \Rightarrow \left(C_D \frac{1}{\sqrt{C_L}}\right)_{min} \Rightarrow \left(\frac{E}{\sqrt{C_L}}\right)_{max}$$

$$\frac{T}{V} = aV + \frac{b}{V^3} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{T}{V}\right) = 0 \Rightarrow a - 3\frac{b}{V^4} = 0 \; ; \qquad a = \frac{3b}{V^4}$$

$$D = aV^2 + \left(\frac{aV^4}{3}\right)\frac{1}{V^2} = aV^2 + \frac{a}{3}V^2$$

$$D_i = \frac{D_o}{3} \qquad C_{Di} = \frac{C_{Do}}{3} \qquad C_{D\,A} = C_{Do} + \frac{C_{Do}}{3} = \frac{4}{3}C_{Do}$$

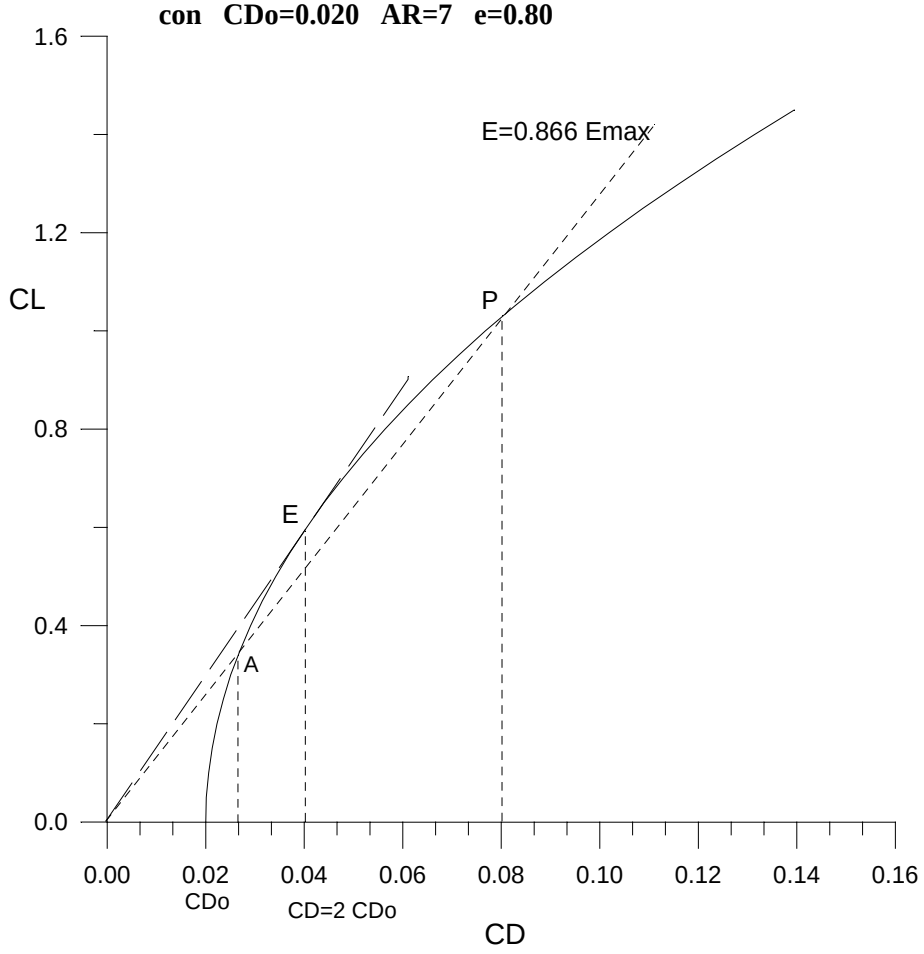
$$C_{Di} = \frac{{C_L}^2}{\pi\, AR_e} = \frac{C_{Do}}{3} \qquad C_{L\,A} = \sqrt{\frac{\pi}{3}C_{Do}\, AR_e} = \frac{C_{L\,E}}{\sqrt{3}} = 0.577\, C_{L\,E}$$



**RIEPILOGO PUNTI CARATTERISTICI DELLA POLARE**

| PUNTO | Efficienza CL/CD | $C_L$ | $C_D$ |
|---|---|---|---|
| **A** | $E=\sqrt{\frac{3}{4}}\,E_{max} = 0.866\,E_{max}$ | $C_{L_A} = \frac{C_{L_E}}{\sqrt{3}} = 0.577\,C_{L_E}$ | $C_{D_A} = C_{Do} + \frac{1}{3}C_{Do} = \frac{4}{3}C_{Do}$ |
| **E** | $E=E_{max}=\sqrt{\frac{\pi}{4}\frac{AR_e}{C_{Do}}}$ | $C_{L_E} = \sqrt{\pi\,AR_e\,C_{Do}}$ | $C_{D_E} = C_{Do} + C_{Do} = 2\,C_{Do}$ |
| **P** | $E=\sqrt{\frac{3}{4}}\,E_{max} = 0.866\,E_{max}$ | $C_{L_P} = \sqrt{3}\,C_{L_E} = 1.732\,C_{L_E}$ | $C_{D_E} = C_{Do} + 3\,C_{Do} = 4\,C_{Do}$ |

**Esempio di polare parabolica CD=CDo + CL^2 /(ARe)**
**con CDo=0.020 AR=7 e=0.80**




Importanza dei vari punti :

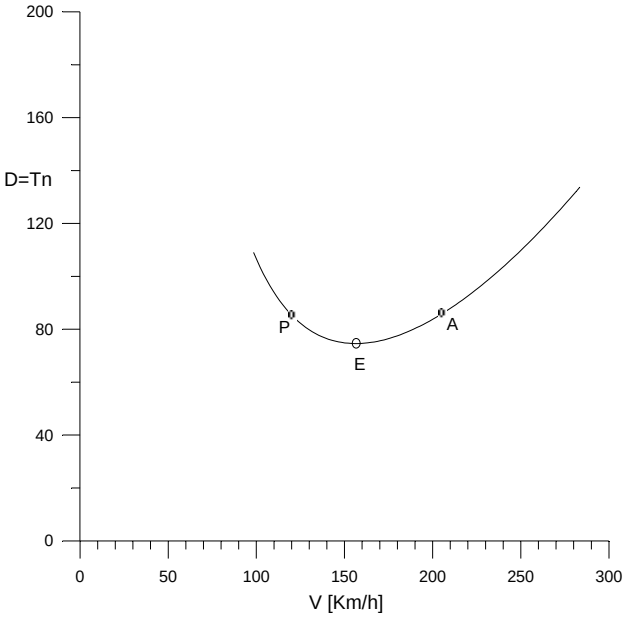
**PUNTO E** = (min resistenza volo orizz) (max Eff. Aer) $E = \left(\frac{CL}{CD}\right) = MAX$ $E_{MAX}$

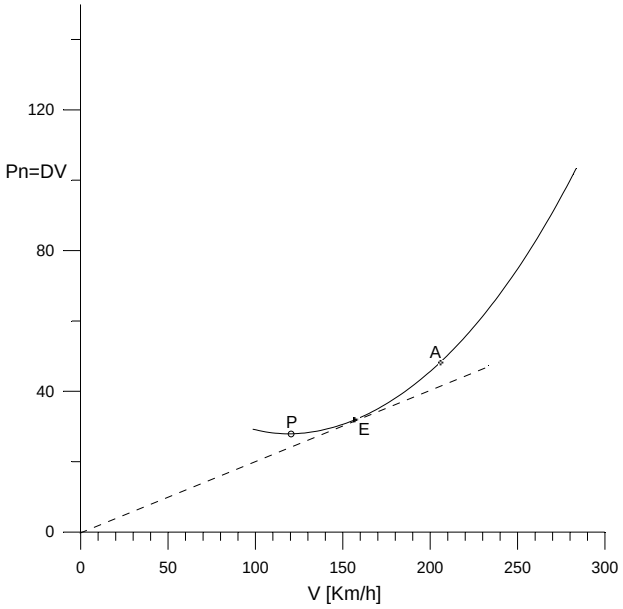
**PUNTO A** = $\left(\frac{D}{V}\right)_{MIN}$ (E V)=max $(E/\sqrt{C_L})$=max

**PUNTO P** = (Min. pot. nec al volo orizz) $\left(\frac{E}{V}\right)_{MAX}$ $(E\ \sqrt{C_L})$=max

Valori dei coefficienti:

$CL_E$ dipende dalla polare ma assume valori mediamente tra 0.60 e 0.85
$CL_P$ valori usualmente maggiori di 1.0 (circa 1.15-1.30)
$CL_A$ assume valori piccoli (tra 0.25 e 0.45)




RELAZIONI DA CONSIDERARE:

$$\boxed{V_P = \frac{V_E}{\sqrt[4]{3}} = \frac{V_E}{1.32}}$$

$$\boxed{V_A = \sqrt[4]{3} \cdot V_E = 1.32 \cdot V_E}$$

$$\boxed{D_{MIN} = D_E = \frac{W}{E_{MAX}}} \qquad \boxed{D_A = D_P = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot D_E = \frac{D_E}{0.866} = 1.155 \cdot D_E}$$

$$\boxed{\Pi_P = \Pi_{MIN} = \frac{W}{E_P} \cdot V_P =}$$

$$\Pi_E = \frac{W}{E_E} \cdot V_E = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{W}{E_P} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot V_P = \frac{\sqrt[4]{27}}{2} \cdot \Pi_P = 1.14 \cdot \Pi_P \qquad \boxed{\Pi_E = 1.14 \cdot \Pi_P}$$

$$\Pi_A = \frac{W}{E_A} \cdot V_A = \frac{W}{E_P} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot V_P = \sqrt{3} \cdot \Pi_P = 1.732 \cdot \Pi_P \qquad \boxed{\Pi_A = 1.732 \cdot \Pi_P}$$

**TABELLA RIEPILOGATIVA** :

$$E_{MAX} = \sqrt{\frac{\pi}{4}\frac{AR \cdot e}{CDo}} \qquad CL_E = \sqrt{\pi \cdot AR \cdot e \cdot CDo}$$

$$D_{MIN} = \frac{W}{E_{MAX}} \qquad \Pi_{MIN} = \Pi_P = \frac{W}{E_P} \cdot V_P$$

| Punto | CD/CDo | $CL/CL_E$ | $E/E_{MAX}$ | $V/V_E$ | $T/T_E$ | $\Pi/\Pi_P$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P | 4 | $\sqrt{3}$ =1.732 | $\sqrt{3}/2$ = 0.866 | $1/\sqrt[4]{3}$ =1/1.32 | $2/\sqrt{3}$ | 1 |
| E | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | $\sqrt[4]{27}/2$ =1.14 |
| A | 4/3 | $1/\sqrt{3}$ =0.577 | $\sqrt{3}/2$ = 0.866 | $\sqrt[4]{3}$ =1.32 | $2/\sqrt{3}$ | $\sqrt{3}$ =1.73 |

**ESERCIZI**

**Esempio di calcolo per un velivolo bimotore ad elica.**
Dati :

$W_{TO}$=4000 Kg S=25 $m^2$ b=15 m

Dati aerodinamici : CDo=0.025 e=0.80 $CL_{MAX}$ = 1.5

Calcolare i coefficienti aerodinamici dei punti caratteristici e calcolare le velocità, resistenze e potenze a quota 0 ed alla quota di crociera di 12000 ft (3660 m).

**Svolgimento**

Si può calcolare innanzitutto l'allungamenteo alare :

$AR=b^2/S=9$ $AR_e= AR \cdot e = 7.2$ $b_e= b \cdot \sqrt{e} = 13.42$

l'Efficienza massima vale: $E_{MAX} = \sqrt{\frac{\pi}{4}\frac{AR \cdot e}{CDo}} = 15.04$

Il CL del punto E vale : $CL_E = \sqrt{\pi \cdot AR \cdot e \cdot CDo} = 0.75$

Tenendo conto delle relazioni fra i CL si possono ricavare :

$CL_P = \sqrt{3} \cdot CL_E = 1.30$ $CL_A = CL_E / \sqrt{3} = 0.43$

Per i CD:

$CD_E = 2 \cdot CDo = 0.050$ $CD_P = 4 \cdot CDo = 0.100$ $CD_A = 4/3 \cdot CDo = 0.033$

L'efficienza dei punti A e P vale :

$$E_A = E_P = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot E_{MAX} = 13.025$$

Si possono valutare le velocità a quota 0 (S/L):

$$V_E = \sqrt{\frac{2}{\rho}}\sqrt{\frac{W}{S}}\sqrt{\frac{1}{CL_E}} = \sqrt{\frac{2}{1.225}}\sqrt{\frac{4000 \cdot 9.81}{25}}\sqrt{\frac{1}{0.75}} = 58.37 \text{ m/s} = 210.15 \text{ Km/h}$$

$$V_P = \frac{V_E}{\sqrt[4]{3}} = \frac{V_E}{1.32} = 159.7 \text{ Km/h} \quad (44.36 \text{ m/s})$$

$$V_A = \sqrt[4]{3} \cdot V_E = 1.32 \cdot V_E = 276.6 \text{ Km/h}$$

$$V_S = V_{MIN} = \sqrt{\frac{2}{\rho}}\sqrt{\frac{W}{S}}\sqrt{\frac{1}{CL_{MAX}}} = 41.4 \text{ m/s} = 149 \text{ Km/h}$$

$$D_E = \frac{W}{E_{MAX}} = 266 \text{ Kg} \qquad D_P = D_A = \frac{2}{\sqrt{3}} D_E = \frac{D_E}{0.866} = 307 \text{ Kg}$$

$\Pi_P = D_P \cdot V_P = 307 \cdot 9.81 \cdot 44.36 = 133598$ W = 133.6 KW = 179 hp

$\Pi_E = D_E \cdot V_E = 1.14 \cdot \Pi_P = 204$ hp $\qquad \Pi_A = \sqrt{3} \cdot \Pi_P = 310$ hp

Quindi si può vedere che al livello del mare, per volare il velivolo ha bisogno almeno di circa 180 hp (potenza minima), ma che ad alta velocità (circa 300 Km/h) il velivolo ha bisogno di 300 hp di potenza.
E' possibile anche valutare le stesse caratteristiche a quota di crociera di 12000 ft.

Si può notare che :

la resistenza dei vari punti rimane la stessa perché l'efficienza non cambia e la resistenza è data da D=W/E.
Le velocità si possono scalare in relazione al rapporto con $\sqrt{\sigma}$ .

Quindi a quota di 12000 ft (3660 m), essendo $\rho = 0.85 Kg/m^3$ e $\sigma = 0.69$

$$V_E = \frac{V_{EO}}{\sqrt{\sigma}} = \frac{210}{\sqrt{0.69}} = 253 Km/h$$

$$V_P = \frac{V_{PO}}{\sqrt{\sigma}} = 192 \text{ Km/h}$$

$$V_A = \frac{V_{AO}}{\sqrt{\sigma}} = 332 \text{ Km/h}$$

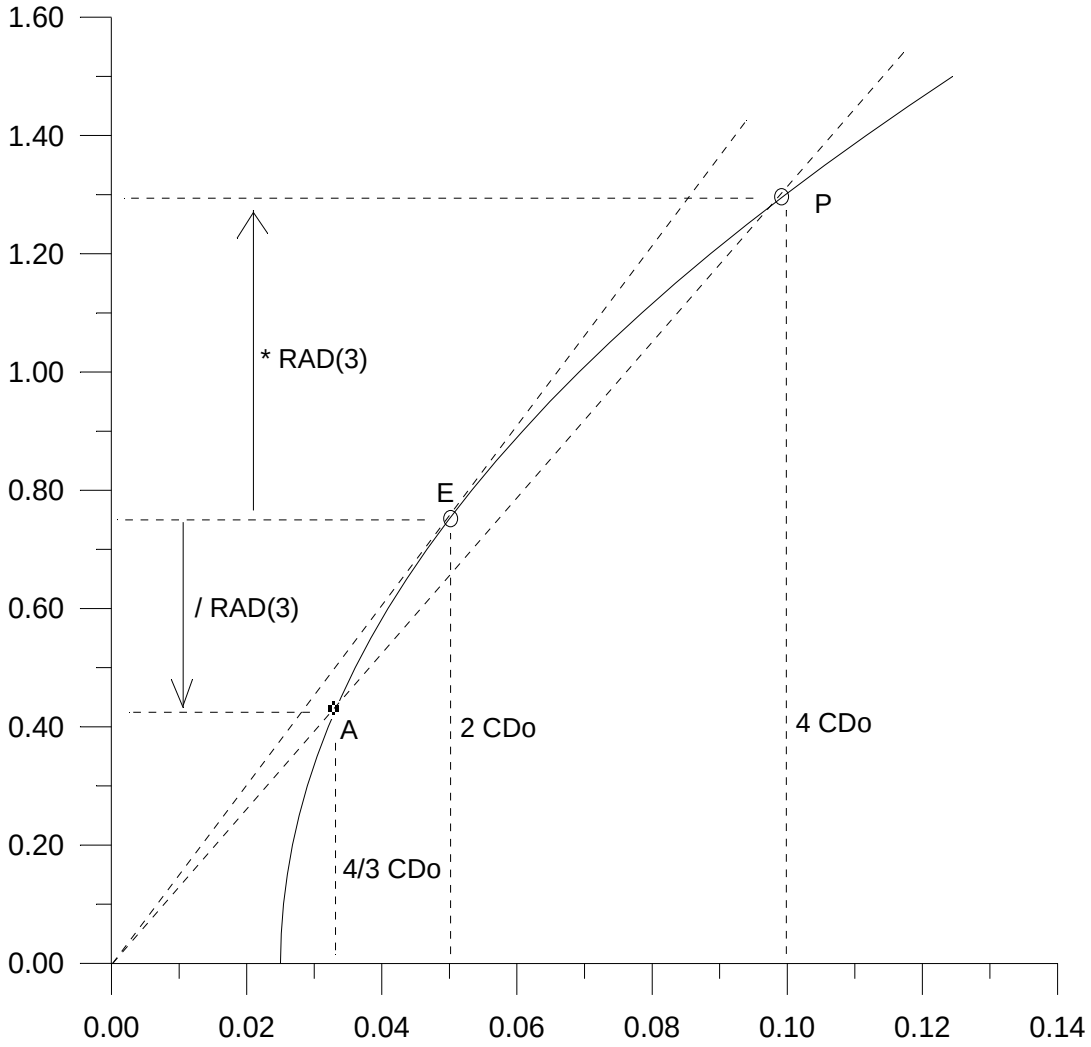
Anche la velocità di stallo aumenta con la quota.
Alla quota di crociera la minima velocità alla quale il velivolo riesce ad essere in volo livellato risulta pari a :

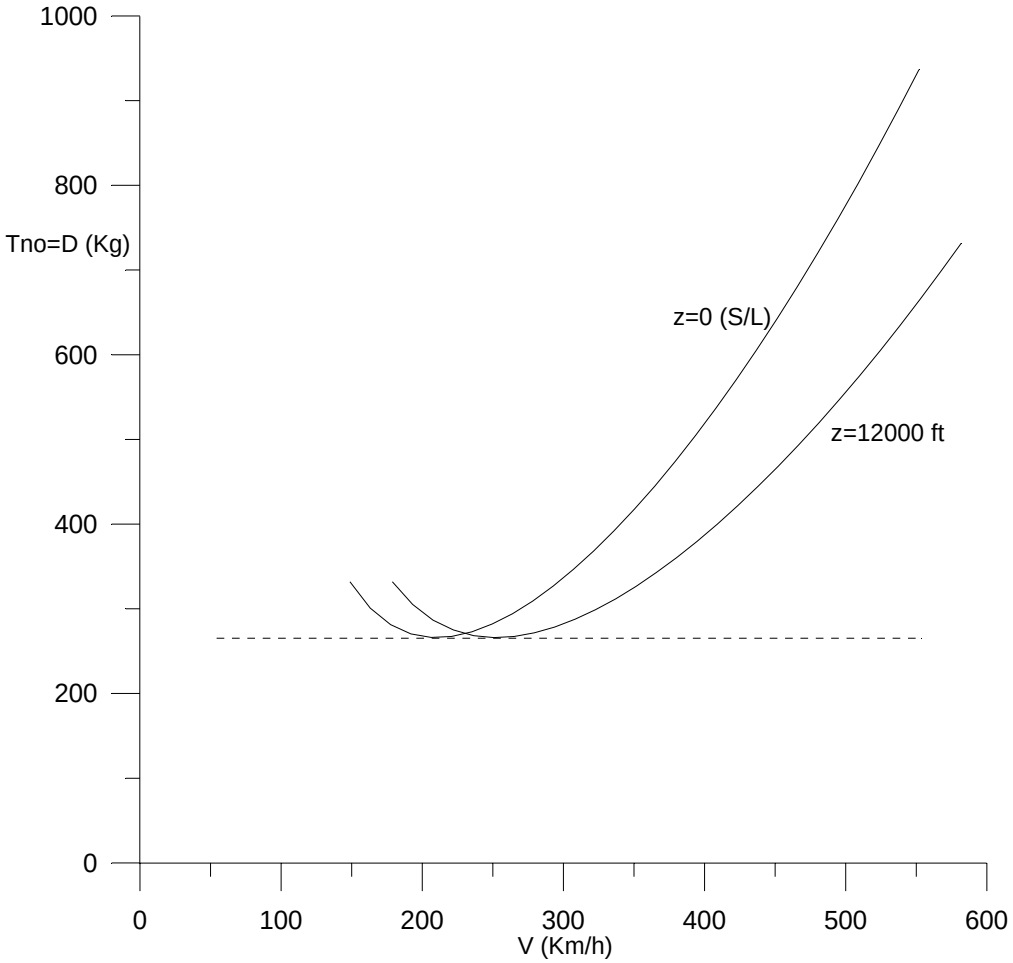
$$V_S = \frac{V_{SO}}{\sqrt{\sigma}} = 179 \text{ Km/h}$$

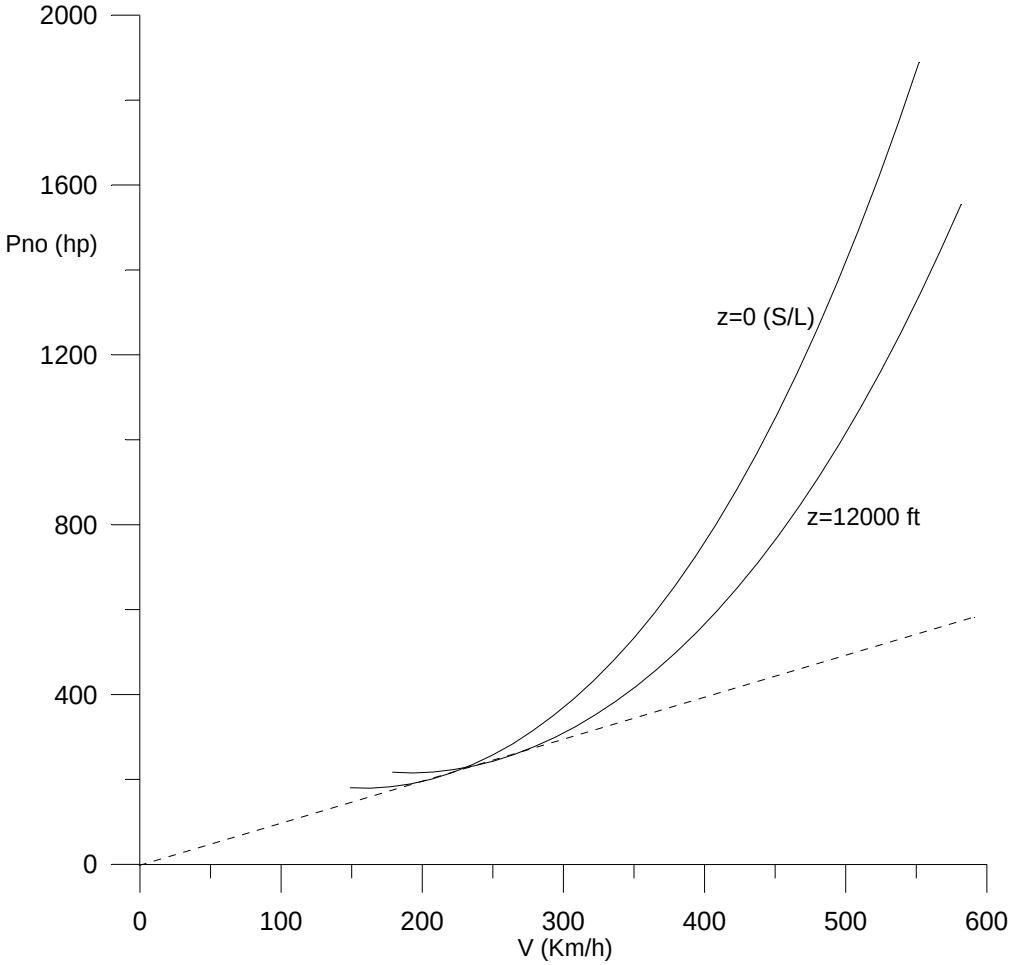
Si possono calcolare le potenze anche a quota 12000 ft.
Si raccomanda di usare sempre unità dimensionalmente corrette per il calcolo, ad esempio, se volessi calcolare la potenza del punto E:

$$\Pi_E = D_E \cdot V_E = 266 \cdot 9.81 \cdot \frac{253}{3.6} = 183387 \text{ W} = 183 \text{ KW} = 246 \text{ hp}$$

I risultati possono essere anche espressi da grafici (le curve di resistenza e di potenza possono essere tracciate, se a mano si effettua il calcolo di altri 2-3 punti, oltre quelli caratteristici).


1.60
1.40
1.20
1.00
0.80
0.60
0.40
0.20
0.00
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
P
E
A
* RAD(3)
/ RAD(3)
2 CDo
4 CDo
4/3 CDo


1000
800
Tno=D (Kg)
600
400
200
0
z=0 (S/L)
z=12000 ft
0
100
200
300
400
500
600
V (Km/h)


2000
1600
Pno (hp)
1200
800
400
0
z=0 (S/L)
z=12000 ft
0
100
200
300
400
500
600
V (Km/h)